Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 4
Abgabe bis 12.05.2011, 12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Sei $(G, \cdot)$ eine kommutative Gruppe und $a \in G$. Zeige, dass die Abbildungen

$$f : G \to G,\ x \mapsto x^{-1} \text{ bzw.}$$

$$g : G \to G,\ x \mapsto axa^{-1}$$

bijektive Gruppenhomomorphismen sind. Ist die Voraussetzung der Kommutativität notwendig?

Aufgabe 2

Die Menge der Einheit eines Rings $(R, +, \cdot)$ ist definiert als

$$R^* = \{x \in R \mid \exists y \in R : x \cdot y = y \cdot x = 1\}.$$

Sei X eine Menge. Betrachte die Abbildungen

$$+ : \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X),\ (A, B) \mapsto (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

und

$$\cdot : \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X),\ (A, B) \mapsto A \cap B.$$

a) Zeige, dass das Tripel $(\mathscr{P}(X), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

b) Bestimme die Einheiten dieses Rings.

c) Zeige, dass dieser Ring genau dann ein Körper ist, wenn X genau ein Element enthält.

Aufgabe 3

a) Konstruiere einen Körper mit vier Elementen $\{0, 1, a, b\}$.

b) Zeige, dass $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ein Körper ist.

Aufgabe 4

In einer Gruppe $(G, \cdot)$ definiert man für ein $g \in G$ die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = e$ als **die Ordnung** von g. Betrachte die Permutationsgruppe S_8. Bestimme die Ordnung der folgenden Elemente:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 1 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$