Übungen zur Linearen Algebra I Bergische Universität Wuppertal
Blatt 2 Prof. Dr. Markus Reineke
Abgabe bis 28.04.2011, 12 Uhr Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Überprüfe, welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind:

a) $f(x, y) = (x + y, y + 2)$

b) $f(x, y) = (xy, x + y)$

c) $f(x, y) = (x - y, x^2 - y^2)$

d) $f(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}})$

Aufgabe 2

Für zwei Mengen A und B bezeichnet $M(A, B)$ die Menge aller Abbildungen von A nach B. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeige:

a) Falls f injektiv ist, so ist für jede Menge Z die Abbildung

$$M(Z, X) \to M(Z, Y),\ s \mapsto f \circ s$$

injektiv.

b) Falls f surjektiv ist, so ist für jede Menge Z die Abbildung

$$M(Y, Z) \to M(X, Z),\ s \mapsto s \circ f$$

injektiv.

Aufgabe 3

Überprüfe, ob folgende Relationen $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der angegebenen Menge M definieren. Wenn ja, bestimme die Anzahl der Äquivalenzklassen und beschreibe sie.

a) $M = \mathbb{Z}$, $a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b \geq 0$.

b) $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow$ es existieren $k, l \in \mathbb{Z}$, so dass $(a, b) = (c, d) + k(2, 0) + l(3, 3)$.
Hinweis: Man stelle sich $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als Punktgitter vor. Dann sind zwei Punkte äquivalent, wenn man mit endlich vielen Sprüngen der Form $\pm(2, 0)$ bzw. $\pm(3, 3)$ von einem zum anderen gelangen kann.

c) $M = \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \sim b \Leftrightarrow a = b \vee a \cdot b = n$.

d) $M = \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $a \sim b \Leftrightarrow a$ und b haben den gleichen Rest bei der Division mit m.

Aufgabe 4

Sei M eine beliebige Menge und $2^M := \{f : M \to \{0,1\}\}$ die Menge der Abbildungen von M in die 2-elementige Menge $\{0,1\}$.

a) Zeige, dass die Abbildung $\Phi : 2^M \to \mathscr{P}(M)$ mit $\Phi(f) = f^{-1}(0)$ bijektiv ist.

b) Sei M endlich mit n Elementen. Zeige, dass $\mathscr{P}(M)$ genau 2^n Elemente enthält.

c) Sei M endlich mit n Elementen. Sei $N = \{(B,C) \mid B, C \subseteq M, B \cap C = \emptyset\}$. Wie viele Elemente hat N?