Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Seien $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$ die kanonischen Basen von $\mathbb{Q}^3$ bzw. $\mathbb{Q}^4$, seien

$$\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,0,1)(0,1,1)) \text{ bzw. } \mathcal{B}' = (1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,1,1,0),(0,0,0,1))$$

zwei weitere Basen und sei

$$f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4,\ (x,y,z) \mapsto (x-y+z, x+y+z, x+2y+3z, x-2y+3z).$$

Bestimme $M_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}(f)$, $M_{\mathcal{A},\mathcal{B}'}(f)$, $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ und $M_{\mathcal{B},\mathcal{A}'}(f)$.

Aufgabe 2

a) Bestimme eine Basis des Unterraums

$$U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 = x_3 - x_4,\ x_1 - x_2 = x_3 + x_4\}$$

von $\mathbb{R}^4$.

b) Seien die Unterräume U bzw. V von $\mathbb{R}^5$ definiert durch

$$U = \langle (1,1,1,0,1),(2,1,0,0,1),(0,0,1,0,0)\rangle,$$

$$V = \langle (1,1,0,0,1),(3,2,0,0,2),(0,1,1,1,1)\rangle.$$

Bestimme eine Basis von $U+V$ bzw. $U \cap V$.

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R}).$$

Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ bzw. $A \cdot x = b$ für

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

a) Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$

in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$.

b) Seien $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, R ein kommutativer Ring mit 1 und $a_1, \ldots, a_n \in R$. Zeige, dass für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

gilt, dass

$$\det(A) = \prod_{i,j \in \{1,\ldots,n\}:\, i<j} (a_j - a_i).$$

Aufgabe 5

a) Seien T, U_1 und U_2 Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Zeige, dass $(T \cap U_1) + (T \cap U_2) \subseteq T \cap (U_1 + U_2)$ und konstruiere ein Beispiel, in dem $(T \cap U_1) + (T \cap U_2) \neq T \cap (U_1 + U_2)$.

b) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen zwischen Mengen. Zeige: falls $g \circ f$ bijektiv ist, so ist f injektiv und g surjektiv.

Aufgabe 6

a) Bestimme den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

b) Bestimme den Rang der Matrix

$$B_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist B_λ invertierbar? Bestimme für diese λ die inverse Matrix B_λ^{-1}.