Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

## Aufgabe 1

Sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und sei $v_1' = -v_1 + 2v_3$, $v_2' = -v_1 - v_2 + v_3$, $v_3' = -2v_1 + v_3$. Sei $\mathrm{id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Identitätsabbildung, d.h. $\mathrm{id}(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

a) Zeige, dass $\mathcal{B}' = (v_1', v_2', v_3')$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimme $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$.

c) Ein Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ habe bzgl. $\mathcal{B}$ den Koordinatenvektor $w_\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$. Zeige, dass $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id})w_\mathcal{B}$ der Koordinatenvektor bzgl. $\mathcal{B}'$ ist.

d) Sei nun $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$. Welche Koordinaten hat $(3, 4, 1) \in \mathbb{R}^3$ bzgl. $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$.

## Aufgabe 2

Betrachte die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(x, y, z) \mapsto (-5x - 18y - 24z, 4x + 13y + 16z, -2x - 6y - 7y).$$

Es seien $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ und $\mathcal{B}' = ((3, 1, 0), (1, 1, 1), (3, 2, 1))$ Basen von $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimme $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ und $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.

b) Bestimme $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$.

c) Zeige $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id})M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.

## Aufgabe 3

Gibt es $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, die die folgenden Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^4$ auf die angegeben Vektoren $b_i \in \mathbb{R}^3$ abbilden?

a) $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 1, 0)$, $a_3 = (0, 1, 1, 1)$, $a_4 = (0, 0, 1, 1)$, $b_1 = (1, 2, 3)$, $b_2 = (2, 3, 1)$, $b_3 = (3, 1, 2)$, $b_4 = (2, 0, 4)$.

b) $a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $b_1$, $b_2$, $b_3$ wie in $a$).

c) $a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (-1, 1, 0, 0)$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ wie in $a$).

d) $a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (0, 2, 0, 1)$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ wie in $a$).

**Aufgabe 4**

Seien $V$ und $W$ zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume mit $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ und $\dim_{\mathbb{R}} W = m$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis von $\ker(f)$.

a) Sei $\mathcal{C}'$ eine beliebige Basis von $W$ und betrachte $f|_{\ker(f)}$. Zeige, dass $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(f|_{\ker(f)}) = 0 \in M_{m,r}(\mathbb{R})$.

b) Ergänze $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ zu einer Basis $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ von $V$ und zeige, dass $((f(v_{r+1}), \ldots, f(v_n))$ linear unabhängig in $W$ ist.

c) Zeige, dass $\mathcal{C} = (f(v_{r+1}), \ldots, f(v_n))$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ ist und bestimme $M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(f)$, wobei hier $f : V \to \mathrm{Bild}(f)$ betrachtet wird.

d) Zeige, dass es für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ Basen $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ von $V$ bzw. $W$ gibt, so dass $(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})_{i,i} = 1$ für $i = 1, \ldots, \dim \mathrm{Bild}(f)$ und $(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})_{i,j} = 0$ sonst.