Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Es seien A, B, C Teilmengen einer Menge X. Zeige:

a) (i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   (iii) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
   (iv) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

b) Folgende Aussagen sind gleichwertig:
   (i) $A \subseteq B$
   (ii) $A \cap B = A$
   (iii) $A \cup B = B$
   (iv) $A \backslash B = \emptyset$

Aufgabe 2

Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Linearen Gleichungssysteme:

a) (i) $2x - 3y + z = 1$
   (ii) $x + y - z = 1$
   (iii) $-x - 2y + z = 2$

b) (i) $x + y - z = 1$
   (ii) $3x + y - 2z = 2$
   (iii) $5x + 3y - 4z = 4$

Aufgabe 3

a) Berechne den Schnittpunkt der Geraden $y_1(x) = 2x - 1$ und $y_2(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

b) Gebe eine Geradengleichung für das Lot des Punktes $P = (3, 0)$ auf die Gerade $y(x) = 5x + 1$ an und berechne den Lotfußpunkt.

Aufgabe 4

Falls man eine bestimmte Anzahl von Schubladen hat und mehr Objekte in die Fächer legt als Fächer vorhanden sind, dann landen in irgendeinem Fach mindestens zwei dieser Objekte. Geben Sie einen Beweis für dieses sogenannte "Schubladenprinzip". Beweisen Sie als Anwendung, dass es in München mindestens zwei Personen gibt, die exakt dieselbe Anzahl von Haaren auf dem Kopf haben.

Aufgabe 5

In einem Hotel mit endlich vielen Zimmern können keine Gäste mehr aufgenommen werden, sobald alle Zimmer belegt sind (Schubladenprinzip). Stellen wir uns nun ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern vor (durchnummeriert beginnend mit 1). Man könnte annehmen, dass dasselbe Problem auch hier auftreten würde, aber...

a) Finden Sie einen Weg, Platz für einen weiteren Gast freizumachen, obwohl alle Zimmer belegt sind.

b) Finden Sie einen Weg, Platz für abzählbar unendlich viele Gäste zu machen.

c) Finden Sie einen Weg, Platz für abzählbar unendlich viele Busladungen mit jeweils abzählbar unendlich vielen Insassen zu machen.

Aufgabe 6

Lösen Sie das Barbier-Paradoxon: Man kann einen Barbier definieren als einen, der alle diejenigen und nur diejenigen, die sich nicht selbst rasieren, rasiert. Die Frage ist: Rasiert der Barbier sich selbst?

Aufgabe 7

Wie viele 4×4-Sudokus, also z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

gibt es? Und wie viele Zahlen muss man vorgeben, um ein solches Sudoku eindeutig vorzugeben?

Aufgabe 8

Eine Scherung ist eine Transformation der Ebene, die jeden Punkt um einen Faktor proportional zu seinem Abstand zur x-Achse verschiebt. Beschreiben Sie diese Transformationen graphisch und in Koordinaten und begründen Sie, warum eine Scherung Flächeninhalte erhält.

Aufgabe 9

Wie viele Symmetrien (also Abbildungen in sich selbst) besitzt

a) ein Quadrat,

b) ein Kreis,

c) ein Würfel?