Nachklausur zur Vorlesung Lineare Algebra 1
23.3.2007
10–12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Johannes Engel

Bitte tragen Sie zuerst in Druckschrift Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer etc. unten ein. Dieses Blatt muss mit abgegeben werden.
Sortieren Sie bitte vor der Abgabe Ihre Aufgaben in der Reihenfolge des Aufgabenzettels.

Name	Matrikelnummer
Geburtsort und Geburtsdatum	Studiengang / PO

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte							

Aufgabe 1: (4 P.)
Sei

$$f\colon \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^4, \quad f(u,v,w,x,y) := (u+v-y, x+y, u-x, u+x+y) \qquad (u,v,w,x,y \in \mathbb{Q}).$$

Berechnen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen

$$B = \{(1,0,0,0,0), (1,1,0,0,0), (1,1,1,0,0), (1,1,1,1,0), (1,1,1,1,1)\},$$
$$C = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1), (1,0,0,0)\}.$$

Aufgabe 2: (4 P.)
Überprüfen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität bzw. Surjektivität (mit Begründung):

a) $f\colon \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} := \{2m \mid m \in \mathbb{N}\} \subsetneq \mathbb{N}, \quad n \mapsto 2n,$

b) $f\colon \mathbb{R}^{\geq 1} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \to [0,1], \quad x \mapsto \frac{1}{x},$

c) $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, \quad (x,y) \mapsto (2x-y, -3x+2y),$

d) $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto x^4.$

Aufgabe 3: (4 P.)

Seien

$$U := \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + x_3 = x_2,\ x_2 + x_4 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{Q}^4$$
$$W := \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + x_2 + x_4 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{Q}^4 .$$

Bestimmen Sie Basen von U, W, $U \cap W$ und $U + W$.

Aufgabe 4: (4 P.)

Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 5 & 7 & 11 \\ 4 & 1 & 13 & 7 & 10 & 16 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 3 & c \end{pmatrix} \in M_{3\times 5}(\mathbb{Q}) \quad \text{mit } c \in \mathbb{Q}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $L_{A,0}$ in Abhängigkeit von c.

Aufgabe 5: (4 P.)

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & -14 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

und $B_n := (2n + 1 - i - j)_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ für $n \geq 1$ und einen Körper K.

Aufgabe 6: (8 P.)

Bitte kreuzen Sie an. Jede richtig beantwortete Frage gibt ½ Punkt, jede falsche kostet ½ Punkt.

Aussage	wahr	falsch
Ein Teilsystem eines Erzeugendensystems ist zu einer Basis ergänzbar.	□	□
Ein Teilsystem eines Erzeugendensystems ist nie ein Erzeugendensystem.	□	□
Invertierbare Matrizen sind Isomorphismen.	□	□
Invertierbare Matrizen sind quadratisch.	□	□
Seien U, $W \subseteq V$ Unterräume. Die Teilmenge $U \cup W$ ist nie ein Unterraum.	□	□
Seien U, $W \subseteq V$ Unterräume. Dann gilt: $\dim U + \dim W \leq \dim V$.	□	□
$m \times n$-Matrizen haben Rang $\leq m$.	□	□
$m \times n$-Matrizen haben Zeilenrang $\nleq n$.	□	□
Der Zeilenrang einer $m \times n$-Matrix mit $m > n$ ist größer als ihr Spaltenrang.	□	□
Der Lösungsraum eines Linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ kann leer sein.	□	□
Der Lösungsraum eines Linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ist manchmal mehr als einelementig.	□	□
Für eine Matrix A ist $\dim \ker A$ invariant unter Zeilenoperationen.	□	□
Das Bild eines Erzeugendensystems unter einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ ist manchmal eine Basis von W.	□	□
Das Bild eines Erzeugendensystems unter einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ ist ein Erzeugendensystem von Bild f.	□	□
Ist $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt $\dim \mathrm{Bild}\, f = \dim V$.	□	□
Ist $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt $\dim \ker f \leq \dim W$.	□	□