**Klausur zur Linearen Algebra I**
Sommersemester 2011
18.Juli 2011, 10 - 12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

**Bitte tragen Sie die folgenden Daten leserlich und in Blockschrift ein:**

| Name | Vorname | Matrikelnummer |
|---|---|---|
| | | |
| Geburtsort | Geburtsdatum | Studiengang |
| | | |

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Max. Punktzahl | 8 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 28 | |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | |

## Aufgabe 1

Im Folgenden seien alle Vektorräume endlich-dimensional. Kreuzen Sie an (für jede richtige Antwort gibt es $1/2$ Punkt, jede falsche Antwort kostet $1/2$ Punkt):

| Aussage | wahr | falsch |
| --- | --- | --- |
| Jedes linear abhängige Tupel aus Vektoren eines Vektorraums lässt sich zu einer Basis verkürzen. | ☐ | ☐ |
| **Falsch:** (0) ist linear abhängig, aber enthält sicher keine Basis. | | |
| Jedes linear unabhängige Erzeugendensystem eines Vektorraums ist eine Basis. | ☐ | ☐ |
| **Wahr:** Das ist die Definition einer Basis. | | |
| Für lineare Abbildungen $f : V \to V$ sind injektiv und surjektiv äquivalent. | ☐ | ☐ |
| **Wahr:** Dies ist ein Satz aus der Vorlesung, denn $V$ ist (siehe oben) als endlichdimensional vorausgesetzt. | | |
| Für das Bild einer linearen Abbildung $f : V \to W$ gilt $\dim \mathrm{Bild(f)} \leq \dim \mathrm{V}$. | ☐ | ☐ |
| **Wahr:** Folgt aus der Dimensionsformel für Kern und Bild: $\dim V = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) \geq \dim \mathrm{Bild}(f)$. | | |
| Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(1,0) = (1,0)$, $f(0,1) = (1,1)$ und $f(1,1) = (1,2)$. | ☐ | ☐ |
| **Falsch:** Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $f(1,1) = f((1,0) + (0,1)) = f(1,0) + f(0,1) = (1,0) + (1,1) = (2,1) \neq (1,2)$. | | |
| Injektive lineare Abbildungen $f : V \to W$ bilden linear unabhängige Tupel auf linear unabhängige Tupel ab. | ☐ | ☐ |
| **Wahr:** Dies ist ein Satz aus der Vorlesung. | | |
| Für einen Vektorraum $V$ definiert $v \sim w$ genau dann, wenn $(v, w)$ linear unabhängig ist, eine Äquivalenzrelation auf $V$. | ☐ | ☐ |
| **Falsch:** Diese Relation ist noch nicht mal reflexiv, denn $(v, v)$ ist immer linear abhängig. | | |
| Für zwei Matrizen $A$, $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gilt $\det(A + B) = \det A + \det B$. | ☐ | ☐ |
| **Falsch:** Siehe Bemerkung in der Vorlesung. | | |
| Für eine invertierbare Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gilt $\det(\frac{1}{\det A} A) = 1$. | ☐ | ☐ |
| **Falsch:** Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, denn man muss den Faktor $\lambda$ aus jeder Zeile herausziehen. | | |
| Der Lösungsraum $A \cdot x = 0$ einer invertierbaren Matrix ist mindestens eindimensional. | ☐ | ☐ |
| **Falsch:** Ist $A$ invertierbar, so folgt aus $Ax = 0$ schon $x = 0$, also ist der Lösungsraum nulldimensional. | | |
| Der Lösungsraum $A \cdot x = b$ einer invertierbaren Matrix ist einelementig, wenn $b \neq 0$. | ☐ | ☐ |
| **Wahr:** Wie eben - der Lösungsraum besteht genau aus $x = A^{-1}b$. | | |
| Für alle Diagonalmatrizen $D \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gilt $\det(D) \neq 0$. | ☐ | ☐ |
| **Falsch:** Die Nullmatrix ist diagonal und hat Determinante 0. | | |
| Für zwei Unterräume $U, W \subseteq V$ gilt $U \cup W = U + W$. | ☐ | ☐ |
| **Falsch:** $U \cup W$ ist im Allgemeinen kein Unterraum nach Bemerkung in der Vorlesung. | | |
| Der Zeilenrang einer Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ist höchstens $n$. | ☐ | ☐ |
| **Wahr:** Der Zeilenrang ist die Dimension des Zeilenraums, dieser liegt in $\mathbb{R}^n$. | | |
| Für zwei Unterräume $U, W \subseteq V$ mit $V = U + W$ gilt, dass $\dim V \leq \dim U + \dim W$. | ☐ | ☐ |
| **Wahr:** Folgt aus der Dimensionsformel für Unterräume: $\dim V = \dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \leq \dim U + \dim W$. | | |
| Eine Basis eines Untervektorraums $U \subseteq V$ kann zu einer Basis von $V$ ergänzt werden. | ☐ | ☐ |
| **Wahr:** Satz aus der Vorlesung. | | |

**Aufgabe 2**

Seien die zwei Untervektorräume $U$ und $V$ von $\mathbb{R}^4$ definiert durch

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 = x_2,\ 2x_3 = x_4\}$$

und

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_3 = 2x_2 + x_4\}$$

Bestimmen Sie Basen von $U$, $V$ und $U \cap V$ und ergänzen Sie die Basis von $U$ durch Vektoren aus $V$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

**Lösung:** Ein Vektor aus $U$ hat also die Form $(x_1, 2x_1, x_3, 2x_3)$, und damit ist $((1,2,0,0),(0,0,1,2))$ eine Basis. Ein Vektor aus $V$ hat wegen $x_4 = 2x_1 - 2x_2 + x_3$ die Form $(x_1, x_2, x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$, und damit ist $((1,0,0,2),(0,1,0,-2),(0,0,1,1))$ eine Basis von $V$. Nach der Dimensionsformel müssen sich ein 2- und ein 3-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^4$ mindestens in einem eindimensionalen Raum schneiden! Wir nehmen dazu einen Vektor $(a, 2a, b, 2b)$ aus $U$ und setzen dies in die definierende Gleichung von $V$ ein, es ergibt sich die Bedingung $2a + b = 2 \cdot 2a + 2b$ bzw. $b = -2a$, also sind die Vektoren in $U \cap V$ gerade die der Form $(a, 2a, -2a, -4a)$ und damit ist $((1,2,-2,-4))$ eine Basis von $U \cap V$. Wir können obige Basis von $U$ durch die ersten beiden Vektoren obiger Basis von $V$ ergänzen und erhalten das System $((1,2,0,0),(0,0,1,2),(1,0,0,2),(0,1,0,-2))$. Mit zwei Gaußschritten sieht man, dass dies eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist.

**Aufgabe 3**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -5 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & -5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums $A \cdot x = 0$. Bestimmen Sie ein $b \in \mathbb{R}^4$, so dass der Lösungsraum von $A \cdot x = b$ leer ist.

**Lösung:** Wir lösen beide Aufgabenteile gleichzeitig und schreiben dazu zunächst die erweiterte Matrix hin:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & b_2 \\ 1 & -5 & -3 & 1 & 5 & b_3 \\ -1 & -3 & -5 & 3 & 3 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Wir ziehen die erste Zeile von der zweiten und der dritten ab und addieren sie auf die vierte Zeile und erhalten:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & b_1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 4 & b_3 - b_1 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 4 & b_4 + b_1 \end{bmatrix}.$$

Wir ziehen die dritte Zeile von der vierten ab und erhalten:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & b_1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 4 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - b_3 + 2b_1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist schon mal klar: der Lösungsraum von $Ax = b$ ist leer, falls $b_4 - b_3 + 2b_1 \neq 0$, also zum Beispiel für $b = (1, 0, 0, 0)$. Ab jetzt brauchen wir die rechte Spalte also nicht mehr. Wir addieren noch das Doppelte der zweiten Zeile zur dritten Zeile und erhalten:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dies interpretieren wir wieder als Gleichungssystem, das wir leicht durch Rückwärtseinsetzen lösen können:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \;\; 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \;\; 2x_2 = 0.$$

Also $x_2 = 0$, und die zweite Gleichung können wir nach $x_4 = 2x_3 - 2x_5$ auflösen. Dies setzen wir in die erste Gleichung ein, die sich damit zu $x_1 - x_3 + 3x_5 = 0$ vereinfacht. Wir lösen nach $x_1 = x_3 - 3x_5$ auf. Die Lösungen des Gleichungssystems sind also alle $(x_3 - 3x_5, 0, x_3, 2x_3 - 2x_5, x_5)$, also hat man als eine Basis des Lösungsraums $((1, 0, 1, 2, 0), (-3, 0, 0, -2, 1))$.

**Aufgabe 4**

Seien $V, W$ zwei endlich-dimensionale $K$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und sei $(w_1, \ldots, w_l)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Seien $x_i \in V$, so dass $f(x_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, l$. Zeigen Sie, dass $(v_1, \ldots, v_k, x_1, \ldots, x_l)$ eine Basis von $V$ ist.

**Lösung:** (Diese Aussage ist der zentrale Schritt im Beweis der Dimensionsformel für Kern und Bild; siehe Vorlesung). Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit: sei $0 = \sum_i \lambda_i v_i + \sum_j \mu_j x_j$. Wir wenden $f$ an und erhalten $0 = \sum_i \lambda_i \underbrace{f(v_i)}_{=0} + \sum_j \mu_j \underbrace{f(x_j)}_{=w_j} = \sum_j \mu_j w_j$. Da die $w_j$ linear unabhängig sind, sind also alle $\mu_j = 0$. Also gilt $0 = \sum_i \lambda_i v_i$. Da die $v_i$ linear unabhängig sind, sind auch alle $\lambda_i = 0$. Wir zeigen, dass $v_1, \ldots, v_k, x_1, \ldots, x_l$ ein Erzeugendensystem ist: sei $v \in V$. Dann ist $f(v)$ in $\mathrm{Bild}(f)$, also eine Linearkombination der $w_j$, also $f(v) = \sum_j \mu_j w_j = f(\sum_j \mu_j x_j)$. Daraus folgt $f(v - \sum_j \mu_j x_j) = 0$, also liegt $v - \sum_j \mu_j x_j$ in $\mathrm{Kern}(f)$, ist also Linearkombination der $v_i$, also $v - \sum_j \mu_j x_j = \sum_i \lambda_i v_i$ bzw. $v = \sum_i \lambda_i v_i + \sum_j \mu_j x_j$.
Alternativ kann man auch nur einen der beiden obigen Teile beweisen, und dann mit der Dimensionsformel $\dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V$ argumentieren, dass man die richtige Anzahl von Vektoren hat.

**Aufgabe 5**

Seien $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ die kanonischen Basen von $\mathbb{Q}^3$ bzw. $\mathbb{Q}^4$ und seien

$$\mathcal{A}' = ((1, 1, 0), (1, 0, 1)(0, 1, 1)) \text{ bzw. } \mathcal{B}' = ((1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$$

zwei weitere Basen und $\mathbb{Q}^3$ bzw. $\mathbb{Q}^4$ sei

$$f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4, \; (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -x - y - z, 2x + 2y, 2x - 2y).$$

Bestimmen Sie $M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{A}',\mathcal{B}'}(f)$.

**Lösung:** Wir wenden $f$ auf die Koordinatenvektoren $e_1, e_2, e_3$ an und erhalten die Vektoren $(1, -1, 2, 2)$,

$(1, -1, 2, -2)$ und $(1, -1, 0, 0)$. Diese schreiben wir in die Spalten einer Matrix und erhalten

$$M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nun wenden wir $f$ auf die Vektoren $a_1, a_2, a_3$ aus $\mathcal{A}'$ und erhalten die Vektoren $(2, -2, 4, 0)$, $(2, -2, 2, 2)$ und $(2, -2, 2, -2)$. Diese müssen wir nun in der Basis $\mathcal{B}'$ schreiben. Die Linearkombinationen kann man leicht ablesen:

$$f(a_1) = 2b_1 - 4b_2 + 4b_3 - 4b_4, \quad f(a_2) = 2b_1 - 4b_2 + 2b_3, \quad f(a_3) = 2b_1 - 4b_2 + 2b_3 - 4b_4.$$

Diese Koeffizienten tragen wir in die Spalten einer Matrix ein und erhalten:

$$M_{\mathcal{A}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

**Aufgabe 6**

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

b) Bestimmen Sie den Rang und die Determinante der Matrix

$$B_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Lösung:** a) Zum Beispiel können wir Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte und dann die Regel von Sarrus anwenden:

$$\det(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}) = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2.$$

b) Mit Laplaceentwicklung zunächst nach der vierten Spalte, dann nach der dritten Spalte erhalten wir

$$\det(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}) = \lambda \cdot \det(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}) = \lambda^2 \cdot \det(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}) = \lambda^2(\lambda^2 - 1).$$

Die Determinante ist Null genau dann, wenn $\lambda \in \{0, 1, -1\}$ gilt. Für alle anderen $\lambda$ ist der Rang der Matrix $B_\lambda$ also 4. Die anderen drei Fälle müssen wir separat betrachten:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Durch genaues Hinsehen (oder ein oder zwei Gaußschritte) erhalten wir $\mathrm{Rang}(B_0) = 2$, $\mathrm{Rang}(B_1) = 3$, $\mathrm{Rang}(B_{-1}) = 3$.