Prof. Dr. Markus Reineke
Dipl.-Math. Magdalena Boos
Dr. Oliver Lorscheid

3. März 2010
Bearbeitungszeit:
10:00 bis 12:00

Klausur zur Linearen Algebra I

Bitte in Blockschrift und lesbar ausfüllen:

Name:

Vorname:

Geburtsdatum:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Aufgabe	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6
Max. Punktzahl	8	4	4	4	4	4
Erreichte Punktzahl						

Gesamtpunktzahl (max. 28 Punkte):

Aufgabe 1: (8 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

Aussage	wahr	falsch
Eine Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn jede ihrer Fasern nichtleer ist.	☐	☐
Zwei Äquivalenzklassen unter einer Äquivalenzrelation sind entweder disjunkt oder gleich.	☐	☐
Isomorphe Vektorräume haben die gleichen Basen.	☐	☐
Ist $U \subset K^n$ ein Unterraum, so folgt aus $\dim U = n$ schon $U = K^n$.	☐	☐
Ein Teilsystems eines Erzeugendensystems ist nie ein Erzeugendensystem.	☐	☐
Ist ein System von Vektoren linear abhängig, so lässt sich jeder der Vektoren als Linearkombination der anderen schreiben.	☐	☐
Je zwei endliche Basen eines Vektorraums haben gleich viele Elemente.	☐	☐
Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gilt stets $\text{Kern}(f) + \text{Bild}(f) = V$.	☐	☐
Es gibt eine lineare Abbildung $f : K^2 \to K^2$ mit $f(1,1) = (1,2)$ und $f(1,2) = (1,1)$.	☐	☐
$m \times n$-Matrizen haben Rang $\leq m$.	☐	☐
Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau dann mehr als eine Lösung, wenn A nicht maximalen Rang hat.	☐	☐
Das Bild eines Erzeugendensystems unter einer linearen Abbildung ist eine Basis des Bilds.	☐	☐
Für eine Matrix A ist $\text{Kern}(l_A)$ invariant unter Zeilenoperationen auf A.	☐	☐
Invertierbare Matrizen haben Determinante ungleich 0.	☐	☐
Je zwei darstellende Matrizen einer linearen Abbildung gehen durch Zeilen- und Spaltenoperationen ineinander über.	☐	☐
Das Signum eines Zykels der Länge k ist $(-1)^k$.	☐	☐

Aufgabe 2: (4 Punkte)

a) Beweisen Sie: ist die Verkettung $g \circ f$ zweier Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

b) Bestimmen Sie die Zykelzerlegung der Permutation $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(i) = n + 1 - i$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1 + x_4 = x_2 + x_3\}$ des Vektorraums K^4 und ergänzen Sie diese durch Vektoren aus $\langle (2, 3, 3, -1), (1, 1, 1, 0) \rangle$ zu einer Basis des K^4.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die darstellende Matrix von $l_A : K^5 \to K^3$ bezüglich der Basen

$$B = (e_1 - e_3 + e_4, e_1 - e_3 + e_5, e_3, e_2 - e_3 + e_4, e_2 - e_3 + e_5) \text{ und}$$

$$B' = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3).$$

Aufgabe 5: (4 Punkte) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & 13 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbf{L}_{A,0}$ und konstruieren Sie ein b mit $\mathbf{L}_{A,b} = \emptyset$.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Determinanten der 4×4-Matrizen $A = (9 - i - j)_{i,j}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}$.