Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 1
13.2.2007
10–12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Johannes Engel

Bitte tragen Sie zuerst in Druckschrift Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer etc. unten ein. Dieses Blatt muss mit abgegeben werden.

Name	Matrikelnummer
Geburtsort und -datum	Studiengang / PO

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte							

Aufgabe 1: (4 P.)
Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & c \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 5}(\mathbb{Q}) \quad \text{mit } c \in \mathbb{Q}\,.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $L_{A,0}$ in Abhängigkeit von c.

Aufgabe 2: (4 P.)
Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

und $B_n := (i + j - 1)_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ für $n \geq 1$ und einen Körper K.

Aufgabe 3: (4 P.)
Seien

$$U := \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + x_3 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\right\} \subseteq \mathbb{Q}^4$$
$$W := \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_1 + x_4 = 0\right\} \subseteq \mathbb{Q}^4\,.$$

Bestimmen Sie Basen von U, W, $U \cap W$ und $U + W$.

Aufgabe 4: (4 P.)

Überprüfen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität bzw. Surjektivität (mit Begründung):

a) $f\colon \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X], \quad p \mapsto p \cdot X,$

b) $f\colon \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto \frac{x}{x-1},$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2,$

d) $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + y, x - y).$

Aufgabe 5: (4 P.)

Sei

$$f\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^5, \quad f(x, y, z) := (x + z, 2x + 2y + z, x + y + z, y + z, x) \qquad (x, y, z \in \mathbb{Q}).$$

Berechnen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen

$$B = \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\},$$
$$C = \{(1,1,1,0,0), (0,0,0,1,1), (1,1,0,1,1), (1,1,1,1,0), (0,1,1,0,0)\}.$$

Aufgabe 6: (8 P.)

Bitte kreuzen Sie an. Jede richtig beantwortete Frage gibt ½ Punkt, jede falsche kostet ½ Punkt.

Aussage	wahr	falsch
Teilsysteme linear unabhängiger Systeme sind zu Basen verkürzbar	☐	☐
Teilsysteme linear unabhängiger Systeme sind linear unabhängig	☐	☐
Sind $U, W \subset V$ Unterräume mit $U + W = V$, so gilt $U \cap W = \emptyset$	☐	☐
Sind $U, W \subset V$ Unterräume mit $U + W = V$, so gilt $\dim U + \dim W = \dim V$	☐	☐
Der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ist ein Unterraum	☐	☐
Der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ist invariant unter Spaltenoperationen	☐	☐
$m \times n$-Matrizen mit Zeilenrang m sind invertierbar	☐	☐
$m \times n$-Matrizen mit Zeilenrang m haben Rang $\leq n$	☐	☐
$m \times n$-Matrizen mit Zeilenrang m haben Rang $\geq n$	☐	☐
$m \times n$-Matrizen mit Zeilenrang m haben linear unabhängige Zeilen	☐	☐
Der Zeilenraum einer Matrix ist invariant unter Zeilenoperationen	☐	☐
Der Spaltenraum einer Matrix ist invariant unter Zeilenoperationen	☐	☐
Der Rang einer Matrix ist invariant unter Zeilenoperationen	☐	☐
Ist $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt $\dim \operatorname{Bild} f \leq \dim V$	☐	☐
Ist $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt $\dim \ker f \leq \dim V$	☐	☐
Ist $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ergänzen sich Basen von $\ker f$ und $\operatorname{Bild} f$ zu einer Basis von V	☐	☐