Klausur zur Linearen Algebra II
25.07.08, 10-12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Roland Huber
Dr. Sergey Mozgovoy

Name	Matrikelnummer	Studiengang	Gruppe

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Note							

Aufgabe 1: *Geben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe*

a. *Bilinearform und nicht ausgeartete Bilinearform auf einem K-Vektorraum V.*

b. *Duale Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ zu einer linearen Abbildung $f : V \to W$.*

c. *Matrix in jordanscher Normalform.*

d. *Minimalpolynom eines Endomorphismus auf einem endlich erzeugten Vektorraum.*

Aufgabe 2: *Sei b die Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit*

$$b((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. *Zeigen Sie, dass $-2, 0, 2$ die Eigenwerte von A sind.*

b. *Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^4, b)$.*

c. *Bestimmen Sie $\dim_+(\mathbb{R}^4, b)$, $\dim_-(\mathbb{R}^4, b)$ und $\dim_0(\mathbb{R}^4, b)$.*

Aufgabe 3: a. *Bestimmen Sie für die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte von A und eine Matrix B, die jordansche Normalform hat und ähnlich zu A ist.

b. *Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ der Endomorphismus, der bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ gegeben ist durch die Matrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ eine Matrix in jordanscher Normalform ist.

Aufgabe 4: *Bestimmen Sie für die Matrix*

$$A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

das charakteristische Polynom cp_A *und das Minimalpolynom* mp_A. *Gibt es ein* $T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, *so dass* $T^{-1}AT$ *eine Matrix in jordanscher Normalform ist?*

Aufgabe 5: *Der* $\mathbb{R}$-*Vektorraum* $\mathbb{R}^4$ *sei mit der Standardskalarprodukt versehen. Sei* U *der von* $(1, 1, 1, 1)$ *erzeugter Untervektorraum von* $\mathbb{R}^4$.

a. *Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von* $U^\perp$.

b. *Seien* b_1, b_2, b_3 *die linear unabhängige Vektoren von* $U^\perp$. *Zeigen Sie, dass die Vektoren* $b_1 + U, b_2 + U, b_3 + U$ *des* $\mathbb{R}$-*Vektorraums* $\mathbb{R}^4/U$ *linear unabhängig sind.*

Aufgabe 6: *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein endlich erzeugter euklidischer Vektorraum. Sei* $f \in \mathrm{End}(V)$ *ein selbstadjungierter Endomorphismus von* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *so dass für jeden Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{R}$ *von* f *gilt* $\lambda \geq 0$. *Zeigen Sie, dass es ein* $g \in \mathrm{End}(V)$ *mit* $f = g^2$ *gibt.*