Klausur zur Linearen Algebra I
Sommersemester 2013
13. Juli 2013, 10 - 12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Klaus Bongartz
Dr. Thorsten Weist

Bitte tragen Sie die folgenden Daten leserlich und in Blockschrift ein:

Name	Vorname	Matrikelnummer
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Max. Punktzahl	4	4	4	4	4	4	24	
erreichte Punktzahl								

Stets ist k ein kommutativer Körper. Alle auftretenden Vektorräume sind endlichdimensional.

Aufgabe 1

a) Definieren Sie den Rang einer linearen Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V, W.

b) Wie erhält man die Determinante einer Matrix $A \in k^{n\times n}$ durch Entwicklung nach der i-ten Zeile? Erklären Sie auch den dabei auftretenden Term A^{ij}.

c) Formulieren Sie den Rangsatz.

d) Definieren Sie das Signum einer Permutation.

Aufgabe 2

Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 0 & -2a+a^2 \\ -a & -a^2 & a-a^3 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a und die inverse Matrix, falls sie existiert.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es sei $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ die lineare Abbildung mit $f(x) = Ax$.

a) Zeigen Sie, dass $\psi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\psi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $\psi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ eine geordnete Basis $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ von $\mathbb{Q}^3$ liefern.

b) Bestimmen Sie $M_\psi(f)$.

c) Geben Sie eine Basis vom Bild von f an.

Aufgabe 4

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort durch einen kleinen Beweis oder durch ein einfaches Gegenbeispiel.

a) Sei $A \in k^{m\times n}$, $b \in k^m$. Hat $Ax = b$ mehr als eine Lösung, so ist der Rang von A echt kleiner als n.

b) Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ und alle $A, B \in k^{n\times n}$ gilt $\det_n(A + B) = \det_n(A) + \det_n(B)$.

c) Die symmetrische Gruppe S_n aller Permutationen ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ kommutativ.

d) Für zwei Vektorräume V und W und für alle $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gilt $\mathrm{Bild}(f + g) = \mathrm{Bild}(f) + \mathrm{Bild}(g)$.

Aufgabe 5

a) Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ die Matrix

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A.

b) Für beliebige natürliche Zahlen $n \geq 1$ und beliebiges $x \in \mathbb{R}$ sei A die $n \times n$-Matrix, deren Koeffizienten außerhalb der Hauptdiagonalen alle 1 sind, während auf der Hauptdiagonalen überall x steht. Zeigen Sie, dass $\det_n(A) = (x - 1)^{n-1}(x + n - 1)$ ist.

Aufgabe 6

a) Für einen Spaltenvektor $x \in k^n$ sei $x^T \in k^{1\times n}$ der transponierte Zeilenvektor. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in k^n$ der Rang der Matrix xy^T kleiner oder gleich 1 ist.

b) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in k^{n\times n}$ mit $\mathrm{Rang}(A) \leq 1$ Vektoren $x, y \in k^n$ existieren, so dass $A = xy^T$.