Anmerkungen zur Jordanschen Normalform

Vorbemerkung: Sei $A \in k^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Dann definiert A eine lineare Abbildung, $f_A : k^n \to k^n, v \mapsto Av$, die im folgenden A genannt wird. Fixiert man eine Basis $\mathcal{B}$ von k^n, so sei $M_{\mathcal{B}}(A)$ die entsprende darstellende Matrix von A bzgl. $\mathcal{B}$. Für die kanonische Basis $\mathcal{K} = (e_1, \ldots, e_n)$ gilt also $A = M_{\mathcal{K}}(A)$.

Sei zunächst $A \in k^{n\times n}$ nilpotent, so dass $A^{r+1} = 0$ und $A^r \neq 0$. Mit folgendem Verfahren erhält man eine Jordansche Normalform von A:

1. Bestimme $B_i := \mathrm{Bild}(A^i) = S(A^i)$ für alle $i = 1, \ldots, r$, wobei $S(A^i)$ der Spaltenraum von A^i ist.

2. Sei $K := \mathrm{Kern}(A)$ und bestimme $B_i \cap K$ für alle $i = 0, \ldots, r$. Dann gilt $B_i \cap K \subseteq B_{i-1} \cap K$. Beachte $B_0 \cap K = K$.

3. Bestimme nacheinander Basen $\mathcal{B}_i$ von $B_i \cap K$ für $i = r, \ldots, 0$, so dass $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_{i-1}$ für $i = r, \ldots, 1$.

4. Sei $\mathcal{B}_i \backslash \mathcal{B}_{i+1} = (b_{i,1}, \ldots, b_{i,n_i})$. Dann gilt insbesondere $b_{i,j} \in B_i$. Also gibt es $c_{i,j} \in k^n$, so dass $A^i c_{i,j} = b_{i,j}$. Das induziert eine (Jordan)-Kette
$$c_{i,j} \mapsto Ac_{i,j} \mapsto \ldots \mapsto A^i c_{i,j} = b_{i,j}$$
der Länge $i + 1$. Diese induziert einen Jordanblock $J(i + 1, 0)$ in der Jordan-Normalform von A.

5. Jede dieser Ketten bildet eine Spalte in dem in der Vorlesung angegebenen Schema. Sortiert man dieses spaltenweise, so ergibt sich eine Jordanbasis $\mathcal{B}'$ von A.

Betrachte nun folgendes Verfahren zur Bestimmung der Jordanschen Normalform einer Matrix A, wobei $\chi_A = \Pi_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{n_i}$. Sei zudem $\mu_A = \Pi_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{m_i}$:

1. Bestimme die Hauptraumzerlegung $k^n = \bigoplus_{i=1}^r H(A, \lambda_i)$. Beachte, dass $H(A, \lambda_i) = \mathrm{Kern}(A - \lambda_i \mathrm{id}_{k^n})^{m_i} = \mathrm{Kern}(A - \lambda_i \mathrm{id}_{k^n})^{n_i}$.

2. Bestimme Basen $\mathcal{B}_i$ von $H(A, \lambda_i)$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Dann ist $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$ eine Basis von k^n.

3. Da $H(A, \lambda_i)$ invariant unter A erhält man Morphismen $f_i \in \mathrm{End}(H(A, \lambda_i))$, so dass $f_i(v) = Av$ für alle $v \in H(A, \lambda_i)$, und damit eine Blockdiagonalmatrix $M := M_{\mathcal{B}}(A)$ mit Diagonalblöcken $M_i = M_{\mathcal{B}_i}(f_i) \in k^{n_i \times n_i}$. Es gilt insbesondere $M = T_{\mathcal{B},\mathcal{K}}^{-1} A T_{\mathcal{B},\mathcal{K}}$.

4. Bestimme Jordanbasen $\mathcal{B}'_i$ von $M_i - \lambda_i \mathrm{id}_{k^{n_i}}$ mit dem oben angegeben Verfahren zur Bestimmung von Jordanbasen nilpotenter Endomorphismen. Dann ist $\mathcal{B}'_i$ eine Jordanbasis von M_i.

5. Sei $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}'_r$. Dann ist also
$$M_{\mathcal{B}'}(M) = T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}}^{-1} M T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}}$$
in Jordannormalform. Eine Jordanbasis von A steht nun in den Spalten von $T_{\mathcal{B},\mathcal{K}} T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}}$.

Bemerkung: für allgemeine Endomorphismen $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim_k V = n$ wählt man zunächst eine beliebige (auf der Hand liegt eine möglichst einfache) Basis $\mathcal{B}$ von V und bestimmt die Jordansche Normalform von $A := M_{\mathcal{B}}(f)$. Für eine Jordanbasis $\mathcal{B}'$ von A gilt dann, dass

$$M_{\mathcal{B}'}(A) = T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}}^{-1} A T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}}$$

in Jordannormalform ist. Hier sei $\mathcal{K}$ wieder die kanonische Basis von k^n. Das definiert eine Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}} := T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}}$, so dass $\mathcal{B}''$ eine Jordanbasis von f ist. Beachte, dass hier $\mathcal{B}''$ nicht in den Spalten von $T_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}$ steht. Falls $\mathcal{B}'' = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, so gilt

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} (T_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}})_{j,i} b_j.$$

Beispiel 1

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Dann gilt $\chi_A(X) = (X-2)^3(X-1)$. Weiter gilt

   $$E(A,2) = \langle (1,-1,1,0)^t \rangle, \ \mathrm{Kern}(A - 2E_4)^2 = \langle (1,0,0,0)^t, (0,1,-1,0)^t \rangle,$$

   $$\mathrm{Kern}(A - 2E_4)^3 = H(A,2) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

   Außerdem gilt

   $$E(A,1) = H(A,1) = \mathrm{Kern}(A - 2E_4) = \langle (0,-1,1,1)^t \rangle$$

2. Also sind zum Beispiel $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ und $\mathcal{B}_2 = ((0,-1,1,1)^t)$ Basen von $H(A,2)$ bzw. $H(A,1)$.

3. Es gilt

   $$M_{\mathcal{B}}(A) = M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   mit

   $$T_{\mathcal{B},\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Betrachte nun

   $$M_1 - 2 \cdot \mathrm{id}_{k^3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   und $M_2 - 1 \cdot \mathrm{id}_k = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$. Mit dem oben angegeben Algorithmus ergeben sich die Ketten

   $$e_2 \mapsto (4,-2,2)^t \mapsto (2,-2,2)^t \text{ und } (1)$$

5. Nun ist $\mathcal{B}' = (e_2, (4,-2,2,0)^t, (2,-2,2,0)^t, e_4)$ eine Jordanbasis von M! Es gilt

$$M_{\mathcal{B}'}(M) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: J$$

Damit folgt:

$$J = T^{-1}_{\mathcal{B}',\mathcal{K}} M T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}} = T^{-1}_{\mathcal{B}',\mathcal{K}} T^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{K}} A T_{\mathcal{B},\mathcal{K}} T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}}$$

Die Jordanbasis von A steht dann in den Spalten von $T_{\mathcal{B},\mathcal{K}} T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}}$ bzw. ergibt das eine Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{B}'',\mathcal{K}} := T_{\mathcal{B},\mathcal{K}} T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}}$ mit

$$\mathcal{B}'' = (e_2, (4,-2,2,0)^t, (2,-2,2,0)^t, (0,-1,1,1)^t),$$

so dass $\mathcal{B}''$ eine Jordanbasis von A ist.