Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 4
Abgabe bis 14.05.2009, 12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Roland Huber
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Untervektorräume V des Vektorraums $\mathbb{R}^4$:

a) $V = \langle (1,1,1,1), (1,2,3,4), (0,1,2,3) \rangle$

b) $V = V_1 + V_2$ mit $V_1 = \langle (1,0,0,0), (0,0,0,1) \rangle$ und $V_2 = \langle (1,1,1,1), (0,1,1,0) \rangle$

c) $V_1 \cap V_2$ mit $V_1 = \langle (1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,1) \rangle$ und $V_2 = \langle (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

a) Für jeden Vektorraum V sind äquivalent:
   - V ist nicht endlich erzeugt.
   - Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$, das linear unabhängig ist.

b) Für jede unendliche Menge X und jeden Körper K ist der K-Vektorraum $M(X, K)$ nicht endlich erzeugt (Hinweis: Beachte Übungsblatt 3, Aufgabe 4).

Aufgabe 3

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und seien W_1, W_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- $V = W_1 \oplus W_2$
- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$

Aufgabe 4

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Bestimmen Sie gegebenenfalls Basen von Kern und Bild.

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, x_1 - 1)$

b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_2$

c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_2 x_3$

d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_2 - x_1, x_1 - x_2, 0)$