

Aufgabe 1

Konstruieren Sie eine Folge M_1, M_2, M_3, \dots von Teilmengen von \mathbb{Z} , so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$ unendlich ist und für die Menge

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in M_i \text{ für jedes } i \in \mathbb{N}\}$$

gilt $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \emptyset$.

Aufgabe 2

Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(0,0) = 0$.

Aufgabe 3

Verknüpfen Sie die folgenden Abbildungen, überprüfen Sie die Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität und geben Sie im Fall der Bijektivität die Umkehrabbildung an:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
- b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^3$.
- c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\sqrt{x}}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 16x^4$.

Aufgabe 4

Falls man eine bestimmte Anzahl von Schubladen hat und mehr Objekte in die Fächer legt als Fächer vorhanden sind, dann landen in irgendeinem Fach mindestens zwei dieser Objekte. Falls man weniger Objekte als Fächer hat, so landet in mindestens einer Schublade kein Objekt. Geben Sie einen Beweis für dieses sogenannte „Schubladenprinzip“.

Beweisen Sie als Anwendung, dass es in München mindestens zwei Personen gibt, die exakt dieselbe Anzahl von Haaren auf dem Kopf haben.

Aufgabe 5

- a) Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen Mengen. Überprüfen Sie, ob durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird.

- b) Überprüfen Sie, ob durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R}^2 definiert wird.

Aufgabe 6

Wie viele Symmetrien (Drehungen oder Spiegelungen, die das Objekt auf sich selbst abbilden) besitzt

- a) ein Quadrat,
- b) ein Kreis,

c) ein Würfel?

Aufgabe 7

Für $n \geq 3$ sei $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Winkel $2\pi/n$ und $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der x -Achse. Die Diedergruppe D_n ist definiert durch $D_n := \langle \{d, s\} \rangle$, also als die Menge der Abbildungen, die als beliebige Verknüpfungen von s und d geschrieben werden können.

- Wie viele Elemente hat D_n ?
- Geben Sie eine Gruppentafel für D_4 an.
- Zeige, dass jede Drehung das Produkt zweier Spiegelungen ist. Das heißt, dass für jede Drehung d gilt, dass $d = s_0 s_1$ für zwei Spiegelungen s_0, s_1 .

Aufgabe 8

- Ist das Paar (G, \cdot) eine Gruppe, wobei $G = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ und

$$\cdot : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$$

die übliche Multiplikation in \mathbb{Q} ist?

- Ist das Paar (G, \cdot) eine Gruppe, wobei $G = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ und

$$\cdot : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$$

die übliche Quotientenbildung in \mathbb{Q} ist?

- Sei $M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge der Abbildungen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist das Paar (G, \cdot) eine Gruppe, wobei

$$G = \{f \in M(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \text{es gibt } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \text{ so dass } f(x) = ax + b \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

und

$$\cdot : G \times G \rightarrow G, (g, f) \mapsto g \circ f$$

die Verknüpfung von Abbildungen ist?

Aufgabe 9

Seien G eine Gruppe und $\phi : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$, eine Abbildung. Zeigen Sie:

- G ist genau dann kommutativ, wenn ϕ ein Homomorphismus ist.
- Ist $x^2 = 1$ für alle $x \in G$, so ist G kommutativ.