Monster, Ausnahmen und andere Aufregungen

Antrittsvorlesung

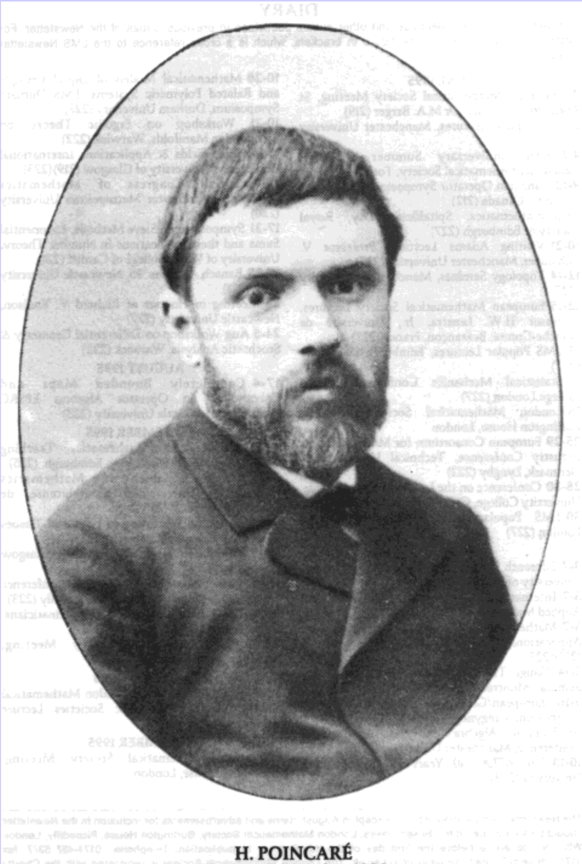
Köln, den 22. Juni 05

Henri Poincaré

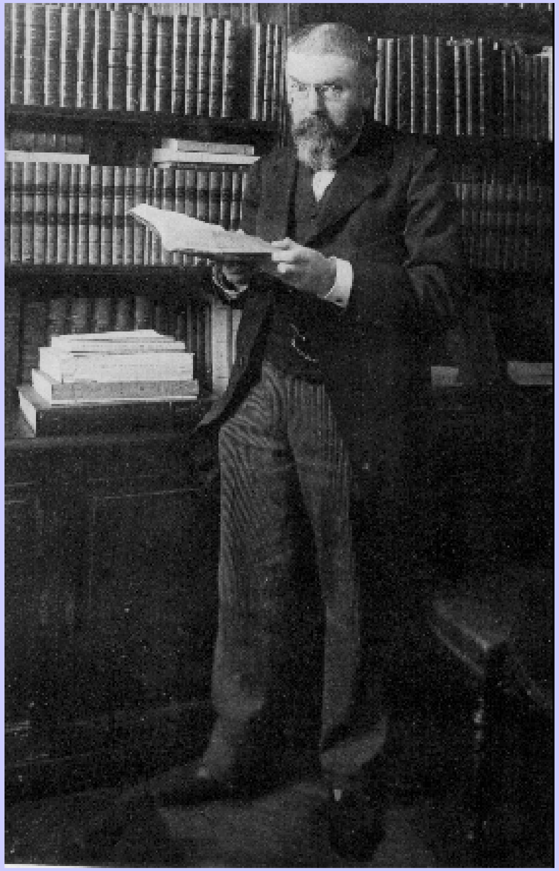
- Henri Poincaré (* Nancy 1854 - + Paris 1912): Mathematiker, Physiker, Astronom, Philosoph
- Vertreter der „Antimoderne“ (H. Mehrtens)
- Erklärung zur Lage der pädagogischen Nation:

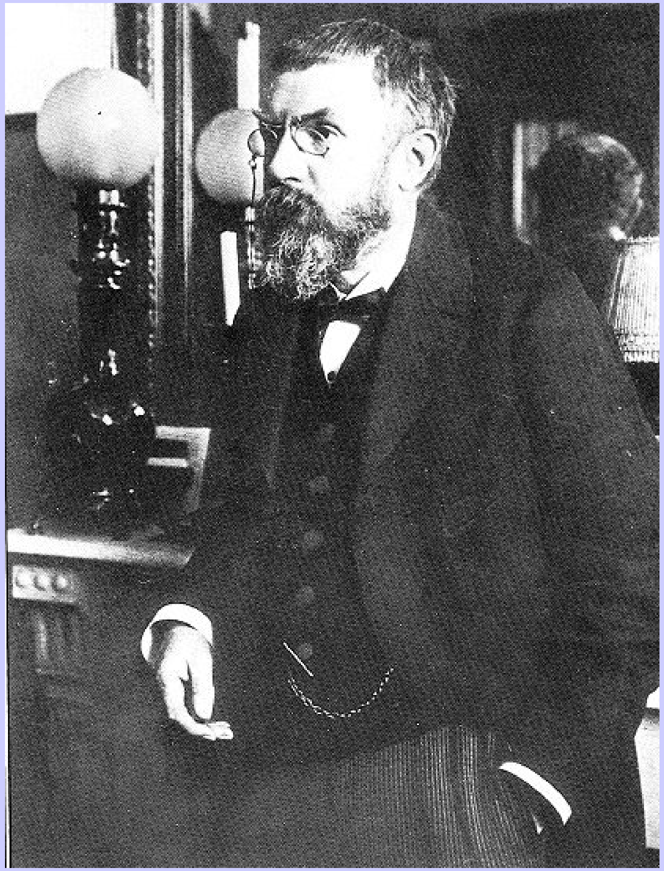
„Die Logik erzeugt manchmal Monster. Seit einem halben Jahrhundert sieht man eine Menge bizarrer Funktionen entstehen, die sich anscheinend bemühen, den anständigen Funktionen, die zu etwas nütze sind, möglichst wenig zu ähneln. Keine Stetigkeit mehr, oder vielmehr Stetigkeit, aber keine Ableitungen mehr, etc.Vom logischen Standpunkt aus sind es diese fremdartigen Funktionen, die die allgemeinsten sind, jene, die man antrifft, ohne sie gesucht zu haben, erscheinen nur noch als Sonderfälle. Ihnen verbleibt nur eine kleine Nische.“ (Poincaré 1908: Les définitions mathématiques et l‘enseignement [S. 111] – ähnlich schon 1889)

Henri Poincaré

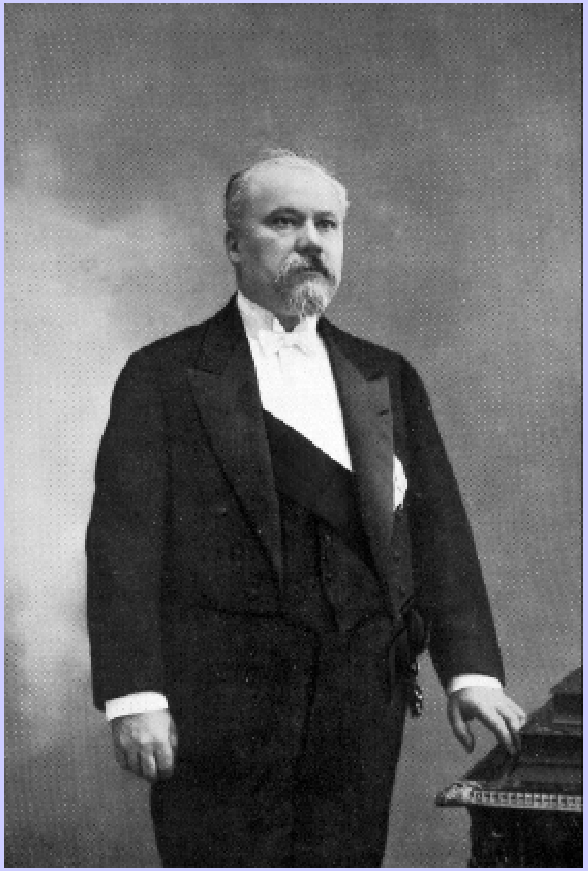


Henri Poincaré





Henri Poincaré



Henri Poincaré

„Früher hat man neue Funktionen eingeführt mit Blick auf ein praktisches Ziel; heute erfindet man neue Funktionen ausdrücklich, um die Überlegungen unserer Väter als fehlerhaft nachzuweisen.“

(Poincaré “Les mathématiques et l‘enseignement“ [1908/1889])

„Vor hundert Jahren hätte man eine derartige Funktion als Beleidigung des gesunden Menschenverstandes betrachtet.“ (Poincaré 1899)

„Es ist der Anfänger, der sich zuerst einmal mit diesem teratologischen Museum vertraut machen muss.“ (Poincaré 1889)

Ein Beispiel aus dem heutigen Gymnasium

3.2.2. Unstetigkeit einer Funktion an einer Stelle x_0

Eine Funktion f heißt an der Stelle x_0 *unstetig*, wenn x_0 im Inneren von D_f liegt und f dort nicht stetig ist.

Bemerkung:
Die Funktionen $f_1\colon x \mapsto \frac{x}{x}$; $D_{f_1} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $f_2\colon x \mapsto \frac{1}{x}$; $D_{f_2} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sind an der Stelle 0 nicht definiert, dort also weder stetig noch unstetig.

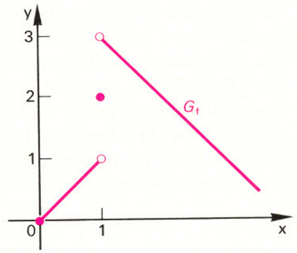


Fig. 3.15

1. Beispiel: $f\colon x \mapsto f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}_0^+$ und

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leqq x < 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \\ 4 - x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Die Funktion f ist an der Stelle 1 unstetig und hat dort eine *endliche Sprungstelle* (Fig. 3.15).

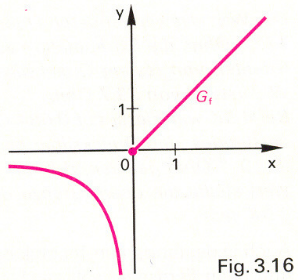


Fig. 3.16

2. Beispiel: $f\colon x \mapsto f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$$

f ist an der Stelle 0 unstetig und hat dort eine *unendliche Sprungstelle* (Fig. 3.16).

3. Beispiel: Die in 1.7.4. eingeführte Gaußsche Klammerfunktion (INT) $x \mapsto [x]$ ist an jeder ganzzahligen Stelle unstetig, denn es gilt z. B. für $x_0 = 2$ und ein beliebiges h mit $0 < h < 1$: $[2 + h] = 2$, es ist also $\lim\limits_{h \to 0+0} [2 + h] = 2 = [2]$.
Für die Annäherung von links mit $-1 < h < 0$ gilt dagegen $[2 + h] = 1$, also $\lim\limits_{h \to 0-0} [2 + h] = 1 \neq [2]$ (vgl. Fig. 1.40).
Gelegentlich sagt man hier auch, die Funktion $x \mapsto [x]$ sei zwar an der Stelle 2 nicht stetig, aber immerhin *rechtsseitig* stetig.

Ein weiteres Beispiel aus dem heutigen Gymnasium

21. Betrachtet werden die Funktionen:

$$f_0\colon x \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{(Fig. 5.2)}$$

$$f_1\colon x \mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{(Fig. 5.3)}$$

$$f_2\colon x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(Skizziere G_{f_2}!)

$$f_3\colon x \mapsto \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(Skizziere G_{f_3}!)

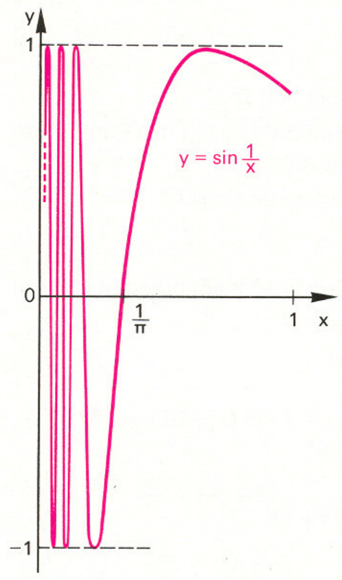


Fig. 5.2

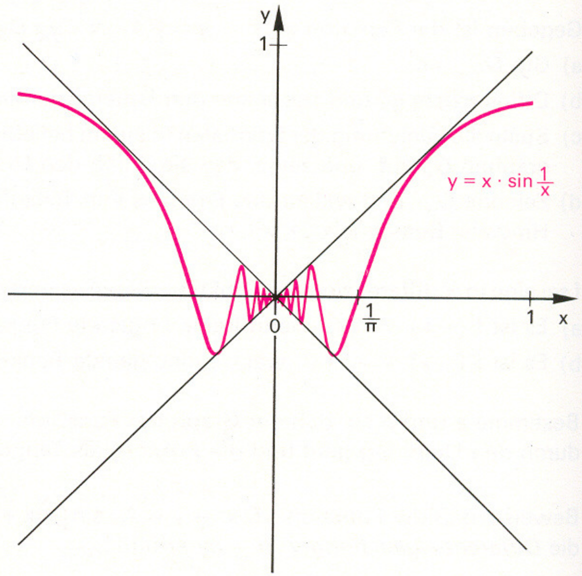


Fig. 5.3

Henri Poincaré

- Im weiteren Verlauf seines Artikels kommt Poincaré auf das biogenetische Grundgesetz – ein zentrales Thema der Teratogenese - zu sprechen, das er auch auf die Denkentwicklung anwenden möchte:
- „Die Zoologen sind der Meinung, dass die embryonale Entwicklung eines Tieres innerhalb einer sehr kurzen Zeitspanne die Geschichte seiner Vorfahren in geologischen Zeiträumen wiederholt. Es sieht so aus, als wäre das bei der Entwicklung des Denkens ebenso.“

  Familientraditon?! Poincaré war mit Eugénie Poulain d‘Andecy verheiratet, einer Großenkelin von E. Geoffroy Saint-Hilaire. Sein Vater war Mediziner (Hygiene).

Henri Poincaré

- Im weiteren Verlauf seines Aufsatzes kommt Poincaré auf das biogenetische Grundgesetz – ein zentrales Thema der Teratogenese - zu sprechen, das er auch auf die Denkentwicklung anwenden möchte:
- „Die Zoologen sind der Meinung, dass die embryonale Entwicklung eines Tieres innerhalb einer sehr kurzen Zeitspanne die Geschichte seiner Vorfahren in geologischen Zeiträumen wiederholt. Es sieht so aus, als wäre das bei der Entwicklung des Denkens ebenso.“

Familientraditon?! Poincaré war mit Eugénie Poulain d‘Andecy verheiratet, einer Großenkelin von E. Geoffroy Saint-Hilaire. Sein Vater war Mediziner (Hygiene).

Henri Poincaré

- Eugénie Poulain d'Andecy, Großenkelin von E. Geoffroy Saint-Hilaire
- 1881 Heirat mit Henri Poincaré; vier Kinder: Jeanne (1887), Yvonne (1889), Henriette (1891), Léon (1893)

Inhalt

- Monster in der Geschichte der Natur und der Naturwissenschaften
- Die Invasion der mathematischen Monster
- Was ist das ein Monster?
- Was beweisen Monster?
- Schlussfolgerungen

Monster in der Geschichte der Natur und der Naturwissenschaften

Monster in der Geschichte …

- Canguilhem, Georges: Le normal et le pathologique (Paris, 1972).
- Davidson, Arnold: The horror of monsters. Dans: The Boundaries of Humanity (Berkeley, 1991).
- Daston, R./Park, C. Wunder und die Ordnung der Natur (Frankfurt, 2002).
- Diderot, Denis: Über die Natur (Frankfurt, 1989).
- Zürcher, Urs: Monster oder Laune der Natur (Frankfurt a. M., 2004).

Monster in der Geschichte ...

- Thomas von Aquin: natürlich, übernatürlich, außernatürlich
- Monster sind anfänglich übernatürliche Phänomene; keinerlei Rückschlüsse auf das „Natürliche“ möglich.
- Sie erregen Schrecken, Abscheu etc.

Fig. 2.1. The Pope-Ass.

Monster in der Geschichte ...

Monster in der Geschichte ...

- Aufklärung: Dekonstruktion des über-/außernatürlichen Charakters der Monster.
- Monster als Grenzfälle des Natürlichen; deren Bestandteile sind natürlich, ihre Kombination aber nicht.
- Reaktionen: Neugierde, Faszination.
- Naturalia als Ausstellungsstücke in Kabinetten

Monster in der Geschichte ...

- „Ein Monster erhebt sich aus dem Meer“ (SZ, 27.12.04)

An Elementary Approach to the Monster

Christopher S. Simons

1. INTRODUCTION. Finding the finite simple Fischer-Griess Monster group $\mathbb{M}$ of order

$$808017424794512875886459904961710757005754368000000000$$

is one of the most spectacular and mysterious mathematical achievements of the past fifty years. Unfortunately the various standard approaches to the Monster are notoriously difficult to learn. This paper presents a relatively elementary approach to the Monster. We describe a construction of the smallest non-Abelian finite simple group (of order 60), and show that it very closely parallels a construction of $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$.

Monster in der Geschichte ...

- „ ... [im 19.Jh.] im medizinischen Kontext verschwinden allmählich die Begriffe *Missgeburt* und *monstrum* und werden durch den Begriff *Missbildung* abgelöst. Das *monstrum* bzw. das *Monster* bleiben als Begriffe erhalten, bezeichnen allerdings weniger reale Fehlbildungen als vielmehr die mythologischen Ungeheuer und Mischwesen, immer mehr auch das Riesige, Ungeheuerliche und Gewalttätige, ...“ (Zürcher, 11)

Monster in der Geschichte ...

- Tourneen, Jahrmärkte (z.B.Chang/Eng [siamesische Zwillinge]; Barnum & Bailey [Zirkus]):
- Neugierde, Sensationslust, leichter Grusel

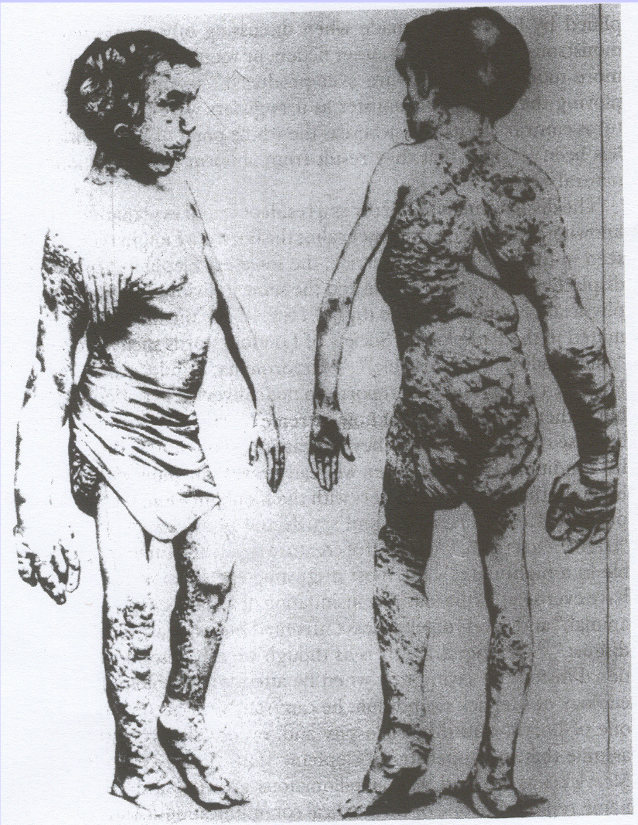


Fig. 2.11. John Merrick, 1884–85.

Barnum and Bailey (1902) bietet u.a.

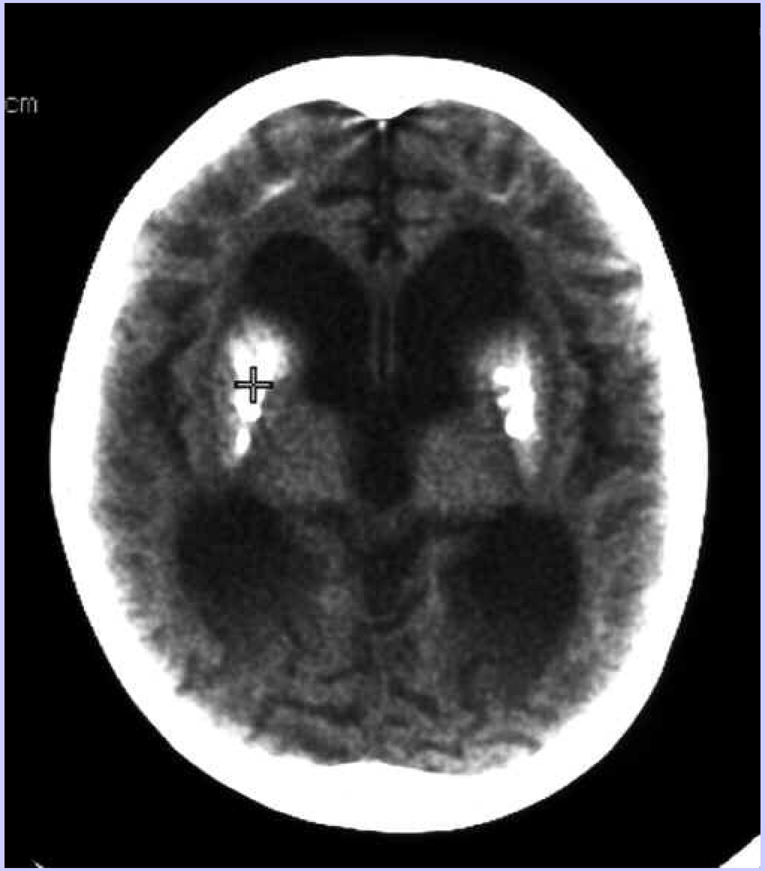
- „Pudelmensch, Telescopmensch, Albinos, Zwerge, Pygmeen, Tätowirte, Mooshaarige Mädchen, Lebendiges Skelett, Blitzrechner, Musikalische Wunder, Miramba-Orchester, Das kleinste Weib der Welt, Armlose, Mann u. Weib, Degenschlucker, Expanioniste, Dislokationsmensch, Der Mann mit dem harten Kopf, Magnetische Frau, Gaukler, Taschenspieler, Sänger und andere eigentümliche Sehenswürdigkeiten.“ (Zürcher, S. 273 n. 32)

The thirty-two-piece Barnum & Bailey Circus Band: Barnum & Bailey‘s Favorite (Karl King)

Monster in der Geschichte ...

- Geschichte der Monster: fortschreitende **Naturalisierung** ...

  „Und da kann man lernen, daß ein Tera, ein Wunder, auf natürlich Weise entstehen kann.“ (R. Virchow, 1899)



Monster in der Geschichte ...

- ...und **Verwissenschaftlichung**:

  „Denn die Natur, hat sie erst einmal ihren gewöhnlichen Gang aufgegeben, zeigt eine noch tiefere Einsicht, als wenn sie nicht von ihrem normalen Gang abgeht.“ (Mercier, 1769)

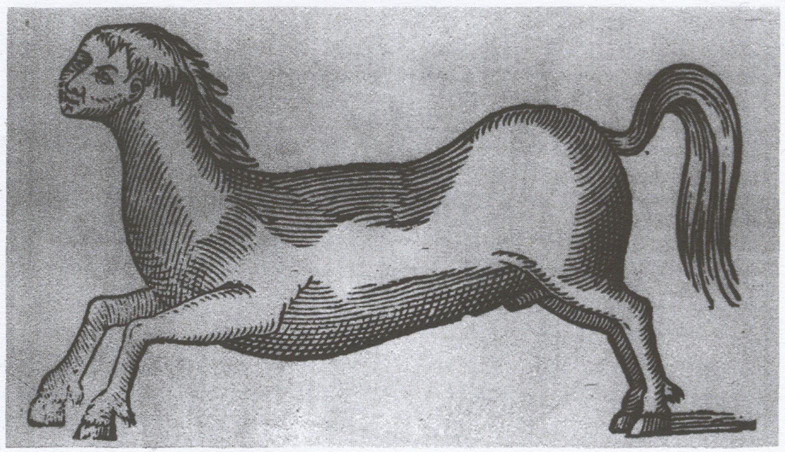


Fig. 2.3. A colt with a man's head.

Monster in der Geschichte ...

- Ein neuer Gedanke: Lassen sich Monster gar willentlich produzieren?
- Denis Diderot „D‘Alemberts Traum“ (geschrieben 1769/70)

Monster in der Geschichte ...

- „Verdoppeln Sie einige Keimfasern des Bündels, dann wird das Lebewesen zwei Köpfe, vier Augen, vier Ohren, drei Genitalien, drei Füße, vier Arme, sechs Finger an jeder Hand haben.“
- Vgl. Mary Shelley “Frankenstein“ (1817); Victor Hugo „Der Glöckner von Notre Dame“ (1831)

Monster in der Geschichte ...

Fazit:

- Monster werden zu Gegenständen der Wissenschaft: Teratologie und Teratogenese als ihre Hausdisziplinen.
- Sie fügen sich in die Ordnung der Natur ein; eine andere Ordnung gibt es nicht (mehr).
- Das Studium von Monstern liefert Aufschlüsse über die Gesetzmäßigkeiten der Natur; es zeigt z. B. die Wirkungen des Zuviel oder Zuwenig,

Die Väter der Teratologie

- Geoffroy Saint-Hilaire, Etienne (1772 – 1844), seit 1793 Professor am Jardin des Plantes: „G. S.-H. ist auch Begründer Lehre von den Mißbildungen (Teratologie), die er als (beeinflußbare) Störungen der Embyonalentwicklung (Teratogenese) ansah, ...“ (Brockhaus)
- „Philosophie anatomique“ 4 Bde. (1818 – 1832)
- Geoffroy Saint-Hilaire, Isidore (1805-1861), Nachfolger seines Vaters als Professor am Jardin des plantes (1841)
- „Propositions sur la monstruosité“ (1829)
- „Histoire générale et particulière des anomalies de l‘organisation chez l‘homme et les animaux, des monstruosités ou Traité de la tératologie“ (1832 – 1836)

Monster und Mathematik?

- Leibniz: „241. ... *La question du mal physique, c'est à dire de l'origine des souffrances, a des difficultés communes avec celle de l'origine du mal métaphysique, dont les monstres et les autres irrégularités apparentes de l'univers fournissent des exemples. Mais il faut juger qu'encore les souffrances et les monstres* ***sont dans l'ordre****; et il est bon de considérer non seulement qu'il valait mieux admettre ces défauts et ces monstres que de violer les lois générales, comme raisonne quelquefois le R. P. Malebranche, mais aussi que ces monstres mêmes sont* ***dans les règles****, et se trouvent conformes à des volontés générales, quoique nous ne soyons point capables de démêler cette conformité.*

Monster und Mathematik?

- *C‘est comme il y a quelque fois des apparences d‘irrégularités dans les mathématiques, qui se terminent enfin dans un grand ordre quand on a achevé de les approfondir: ... On ne doit point s‘étonner que je tâche d‘éclaircir ces choses par des comparaisons prises des mathématiques pures, où tout va dans l‘ordre, et où il y a moyen de le démêler par une méditation exacte qui nous fait jouir, pour ainsi dire, de la vue des idées de Dieu. On peut proposer une suite ou une série de nombres tout à fait irrégulière, en apparence, où les nombres croissent et diminuent variablement sans qu‘il paraisse aucun ordre;*

Monster und Mathematik?

et cependant celui qui saura la clef du chiffre, et qui entendra l‘origine et la construction de cette suite de nombres, pourra donner une règle, laquelle étant bien entendue, fera voir que la serie est tout à fait régulière,et qu‘elle a même des belles propriétés.“

Ein weiteres Beispiel Leibniz‘: Kurven ohne offenkundige Regelmäßigkeit gehorchen dennoch einer Gleichung (weil alle Kurven das tun ?! – vgl. Eulers Stetigkeitsbegriff).

Die Invasion der Monster

Ausnahmen zeigen sich

- Eulers Kuriosa: $(-1)^z$, $x^{x^{\dots}}$,
- Niels Henrik Abel (1802 – 1829) bemerkt anlässlich einer Diskussion von Cauchys Satz (aus dem „Cours d'analyse" [1821]), dass die Summe einer Reihe stetiger Funktionen wieder stetig sei:

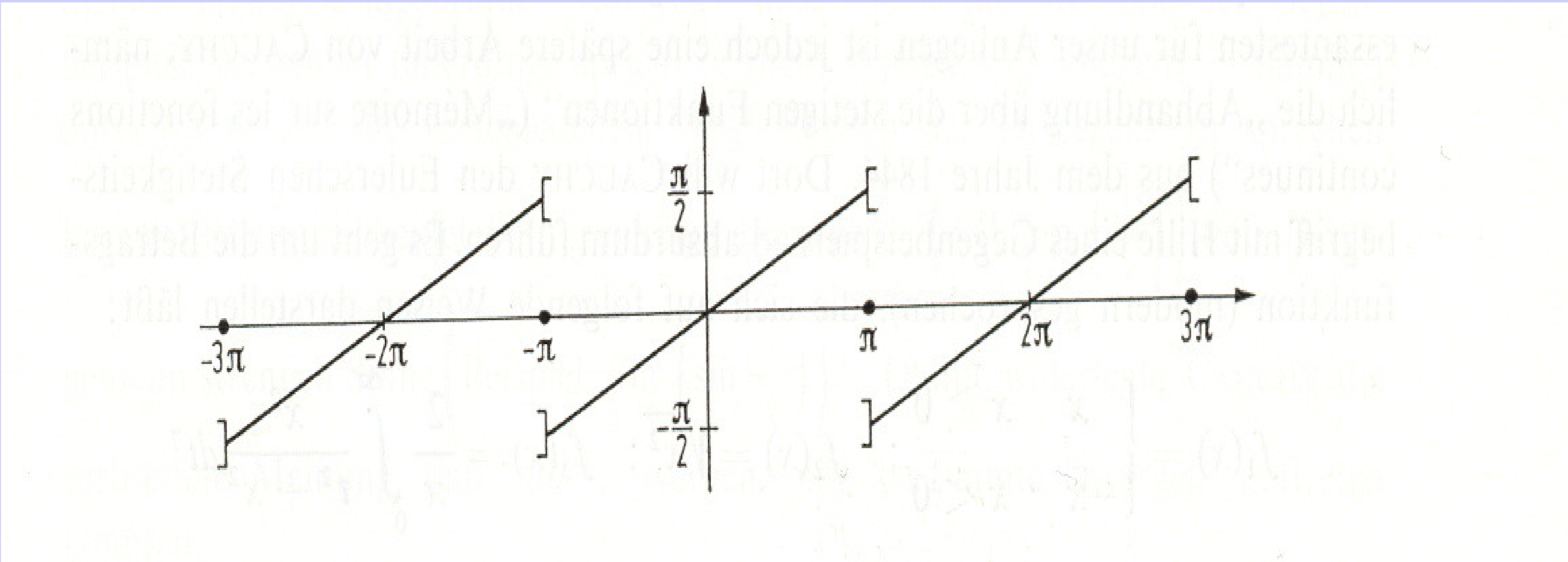
★ "*Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série*

$$\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \dots$$

est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ *de* x, m *étant un nombre entier. Il y a, comme on sait, beaucoup de séries de cet espèce.*"

(ABEL, 1826; 224 Anm. ★)

Ausnahmen zeigen sich

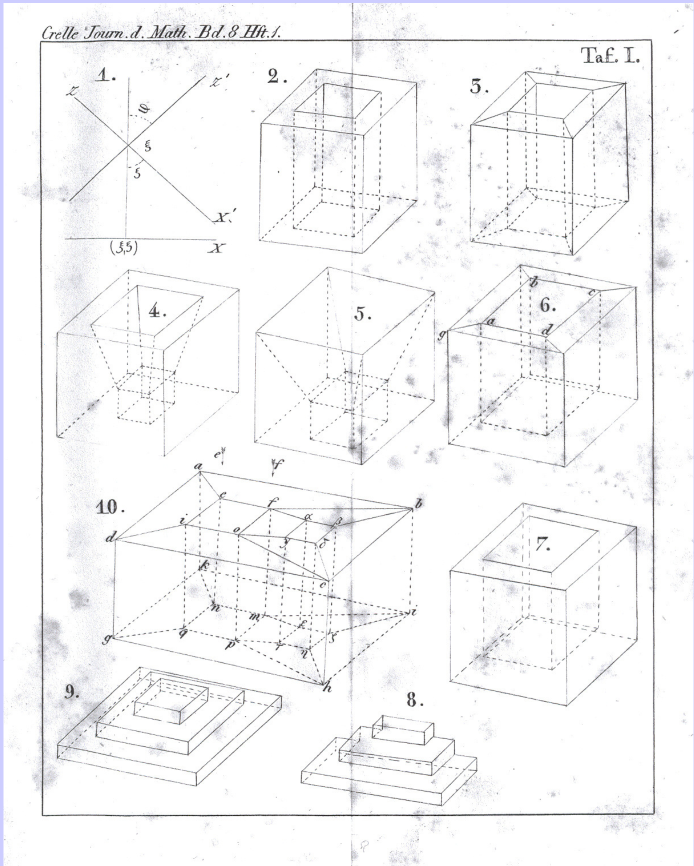


Ausnahmen zeigen sich

- Abel sagt nicht, dass er den Satz von Cauchy widerlege; er spricht bescheiden von „Ausnahmen“ (und nicht von „Gegenbeispielen“) - ähnlich wie ein Naturforscher, der ein Exemplar antrifft, das nicht seinen Erwartungen gemäß ist (etwa das sprichwörtliche schwarze Schaf!). Vgl. „Ausnahmen bestätigen die Regel“ oder auch „Eine Schwalbe macht noch keinen Sommer“.

Ausnahmen zeigen sich

- Eine ähnliche Haltung findet sich z. B. bei Johann Friedrich Christian Hessel 1832, der zum Eulerschen Polyedersatz bemerkt: „Indessen leidet derselbe Ausnahmen.“ (zuvor schon bei L‘Huilier (1812/13), der feststellte: „le théorème d‘Euler souffre des exceptions nombreuses“).



Viele Ausnahmen zeigen sich (Lhuilier)

Cette observation, relative à une simple différence dans le procédé d'une démonstration, n'est que secondaire au but principal de ce Mémoire. Je me propose principalement de montrer, que le théorème d'*Euler* souffre des exceptions nombreuses, et qu'il n'est vrai d'une manière générale que pour les Polyhèdres qui n'ont point de parties rentrantes; soit quant aux angles plans qui forment les angles solides, soit quant aux *angles planiques* ou aux inclinaisons de leurs faces. Ces polyhèdres sont à la verité ceux qu'on a coûtume de considérer principalement dans les élémens. Cependant, la définition des polyhèdres: qu'ils sont des solides terminés de toutes parts par des figures planes, n'exclut point les polyhèdres à parties rentrantes. À moins qu'on n'avertisse donc expressement (comme le fait *Le Gendre*), qu'on s'occupe exclusivement des premiers polyhèdres, on s'expose à tirer des conclusions générales, tandis qu'on auroit dû les subordonner au point de vuë particulier, sous lequel on envisage le sujet dont on s'occupe.

Ausnahmen zeigen sich

- Cauchy „Cours d‘analyse“ (1821): „ ... diese, so scheint mir, können nur als Induktionen gelten, welche dazu geeignet sind, gelegentlich die Wahrheit zu liefern, die sich aber kaum mit der in der Mathematik so notwendigen Exaktheit vereinbaren lassen. Man kann sogar beobachten, dass sie dazu tendieren, den algebraischen Formeln einen unbeschränkten Geltungsbereich zuzuschreiben, während in Wahrheit die Mehrzahl dieser Formeln nur unter bestimmten

Ausnahmen zeigen sich

- Bedingungen und für bestimmte Werte der in ihnen enthaltenen Größen gelten. Indem ich diese Bedingungen und Werte angebe und indem ich in präziser Weise die Bedeutung der von mir verwandten Notationen festlege, bringe ich alle Unsicherheit zum Verschwinden.“

  „Strenge“, „Präzision“ und „Exaktheit“ sind wichtige Termini der Rhetorik von Cauchy (auch im 19. Jh. allgemein!); unbegrenzte Allgemeinheit ist ihm verdächtig; zu jeder Aussage gilt es deren Geltungsbereiche zu benennen.

Die Invasion der mathematischen Monster

Das erste richtige Monstrum im Bereich der Analysis wurde von Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805 – 1859) im Jahre 1829 konstruiert:

$f(x) = c$ falls x rational,
$f(x) = d$ falls x irrational
(mit c ungleich d).

Die Invasion der mathematischen Monster

„*On aurait un exemple d'une fonction ..., si l'on supposait f(x) égale à une constante déterminée c lorsque la variable x obtient une valeur rationelle, et égale à une autre constante d, lorsque cette variable est irrationelle.*"
(Dirichlet 1829)

Es gibt keine Kurve mehr, die diese Funktion darstellen würde, denn diese „springt an allen Stellen". Sie besitzt eine dichte Menge von Singularitäten.

Dirichlet konstruiert sein Beispiel mit einem bestimmten Zweck (nämlich um zu zeigen: Es gibt Funktionen, die man nicht integrieren kann):

„pour l'honneur de l'esprit humain"

Die Invasion der mathematischen Monster

- Der wahre Meister der Monster: Bernhard Riemann (1826 – 1866), Schüler von Dirichlet: u.a. eine Funktion, die integrierbar ist, aber in abzählbar vielen Stellen unstetig.

Die Invasion der mathematischen Monster

Rechtfertigung der Monster nach Riemann (1854):

- Sie dienen dazu, die Prinzipien der Analysis zu klären;
- sie finden Verwendung in anderen Teilen der Mathematik (Zahlentheorie).
- *„Untersuchen wir jetzt ... den Umfang der Gültigkeit dieses Begriffes ...“* – ein moderner Gedanke!

Die Invasion der mathematischen Monster

Riemanns Schüler Hermann Hankel (1839 – 1873):

Prinzip der Kondensation der Singularitäten (1870). Monstererzeugung mit System: die Monster gehen in Serienproduktion

Die Invasion der Monster

- *„Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen“* von Hankel: Ausgangspunkt wichtiger Arbeiten (u.a. Georg Cantor und seine Mengenlehre). Das Interesse an pathologischen Funktionen bekommt System: die Ausnahmen von gestern sind die Regel von morgen.

Die verkehrte Welt (Hegel)

„An bestimmten Momenten wird dies sich so ergeben, daß, was im Gesetze der ersten süß, in diesem verkehrten Ausdruck sauer, was in jenem schwarz, in diesem weiß ist.“ (Phänomenologie des Geistes, S. 128)

Die Invasion der Monster

- Karl Weierstrass (1815 – 1897), der Maximo Leader der neuen mathematischen Strenge zu Berlin (1872):

  „Beispiel einer stetigen Function, die an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten besitzt“

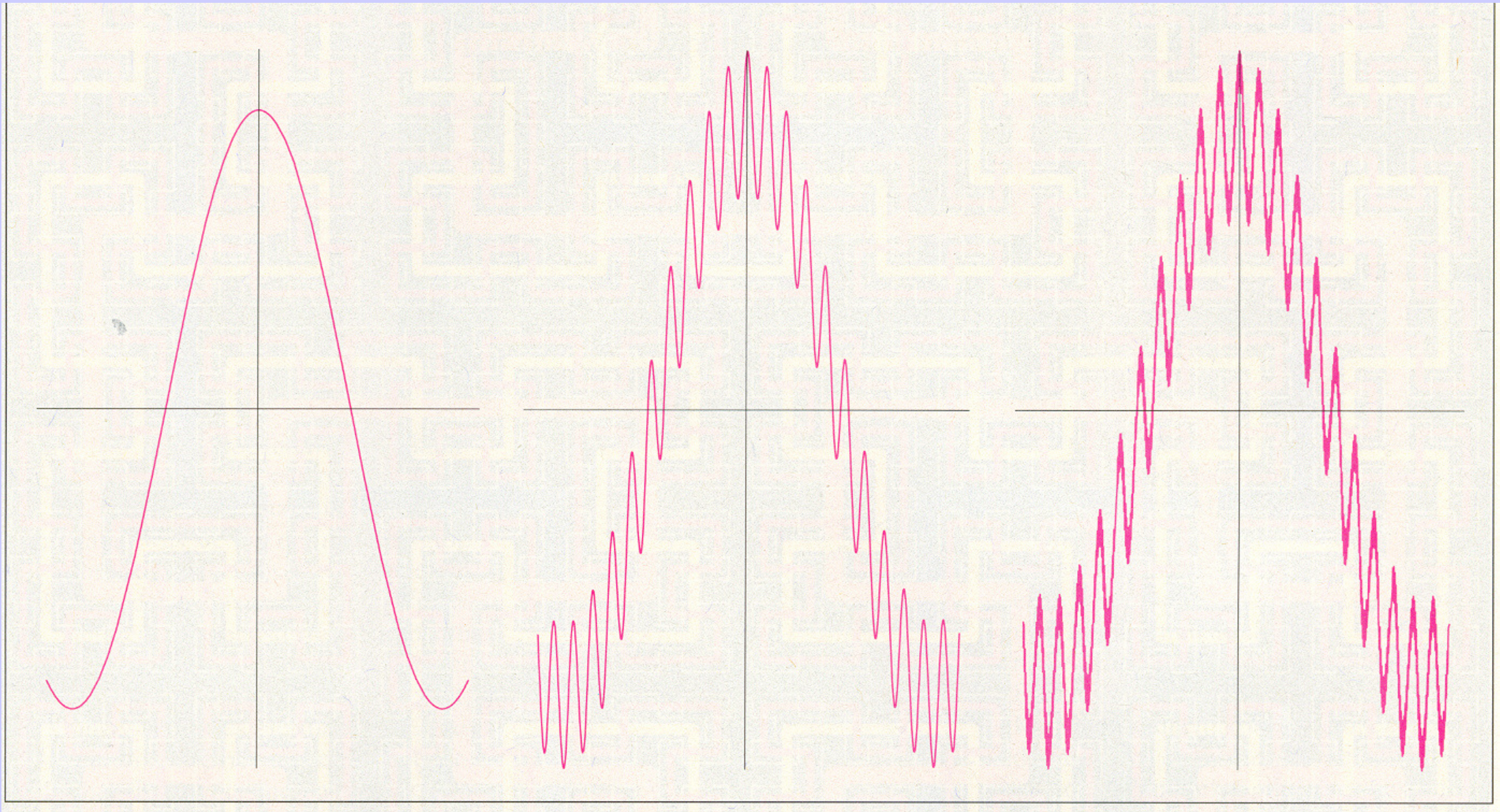
  Widerlegung des Satzes von Ampère (eine stetige Funktion ist mit Ausnahme „bestimmter“ Stellen differenzierbar).

Die Invasion der Monster

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a_n \pi x)$$

Dabei soll *a* eine ungerade natürliche Zahl und *b* eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 sein. Zusätzlich muß die Bedingung $ab > 1 + 3\pi/2$ gelten. Ein zulässiges Wertepaar ist $a = 19$ und $b = 0{,}25$.

Die Invasion der Monster



Die Invasion der Monster

Paul du Bois-Reymond (1831 –1889), zur Mathematik konvertierter Physiologe (blinder Fleck) [1875]:

„Noch manche Rätsel [vgl. die „Welträtsel“ von Haeckel (1899) und E. du Bois-Reymond (1882)] *scheint mir die Metaphysik der Weierstrass‘schen Function zu bergen, und ich kann mich des Gedankens nicht erwehren, dass hier tieferes Eindringen schließlich an eine Grenze unseres Intellects führen wird.“*

Für Bois-du Reymond ist die Entdeckung von Weierstrass *„eines der ergreifendsten Resultate der neueren Mathematik“*. Ein blinder Fleck: Mathematik und Gefühle (Monster sind traditionell stark emotionsbesetzt).

Die Invasion der Monster

Paul du Bois-Reymond versuchte, die bedrohte Ordnung wieder herzustellen, indem er eine Klassifikation der „willkürlichen Funktionen“ (1875) angab:

Vollkommen willkürliche Funktionen

Integierbare Funktionen

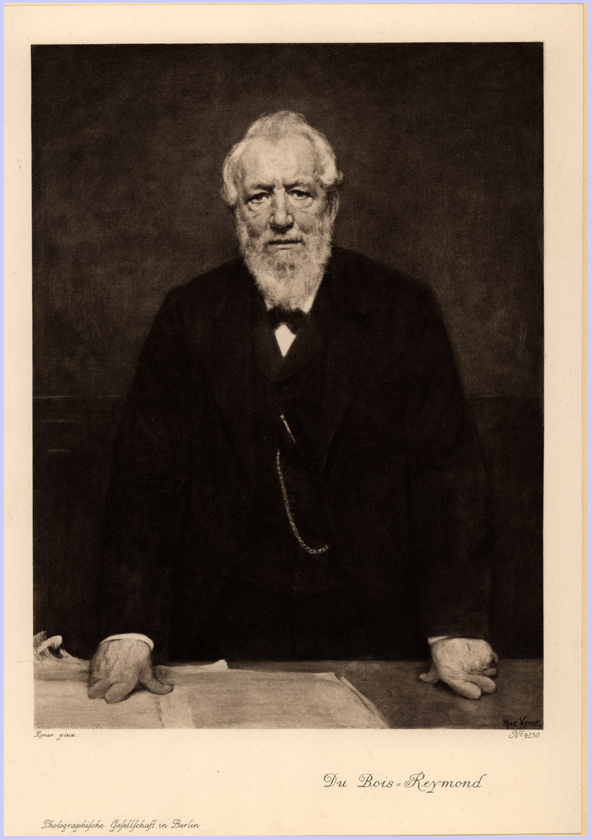
Stetige Funktionen

Differenzierbare Funktionen

Gewöhnliche Funktionen

So sind die mathematischen Monster in eine Ordnung („ein ausdifferenziertes System von Abweichungen“) eingebaut; diese ist eine konstruierte, keine vorgefundene (es gibt keine natürliche Arten[mehr] in der Mathematik).

Die Invasion der Monster



Die Monster werden salonfähig

- Ludwig Boltzmann (1844 – 1909) „Über die sogenannte H-Kurve (1898)“

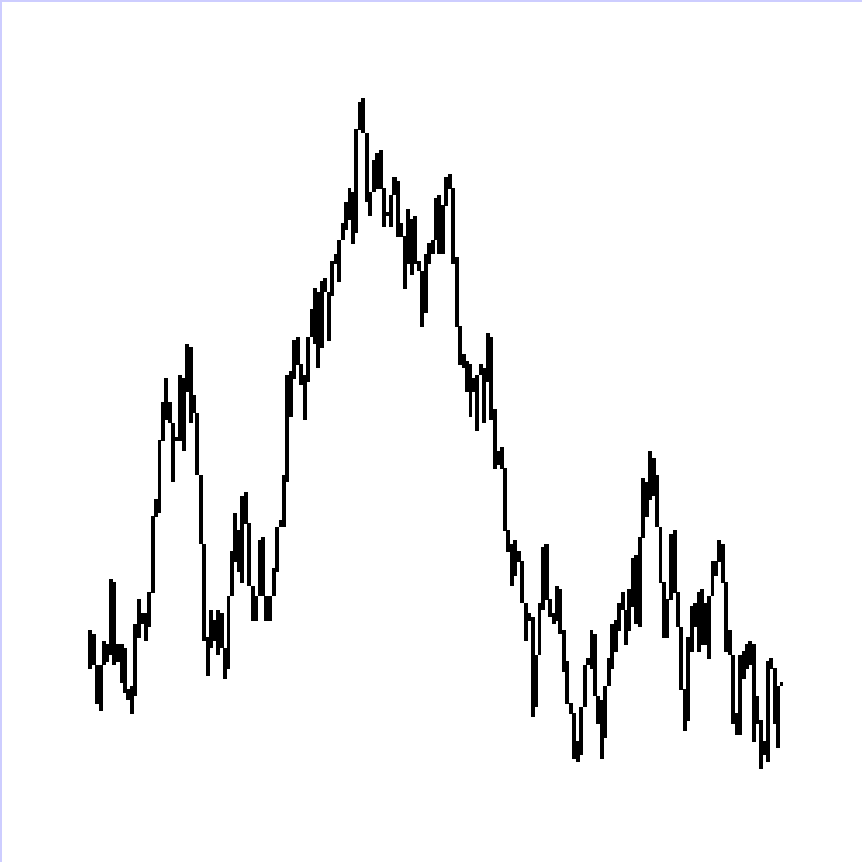
  „Ich rathe vielleicht nicht fehl, wenn ich glaube, dass die Geometer vom Fach der H-Curve spotten werden. Dem gegenüber möchte ich nur erinnern, dass die von Meteographen, Barometergraphen, Thermotergraphen etc. gezeichneten Curven einen Habitus zeigen, der an die Eigenschaften der H-Curve erinnert.“

Die Monster werden salonfähig

Boltzmanns (mathematische) Ideen wurden durch L. Perrin 1913 aufgegriffen und vertieft.

Nota bene: In der Physik des 19. Jhs. gab es einige Diskussionen über die Zulässigkeit nicht-anschaulicher Entitäten. Es scheint, als habe es in den Naturwissenschaften des 19.Jhs. eine allgemeine Tendenz gegeben, die Grenzen der Anschauung (und damit der traditionellen Raumvorstellung) zu sprengen: Atome, Äther, Felder, vierdimensionaler Raum, ...

Die Monster werden salonfähig



Was ist das ein Monster?

- Verwendete Termini:

  pathologische Funktionen, bizarre Funktionen, anorthoidische Funktionen, Monster, Teratologie, nutzlose Funktionen (d.h. nichtanwendbare), illegitime Funktionen, Monstergruppen.

  Ein *Monster* ist eine mathematische Entität, deren Existenz mit den in einer bestimmten Epoche von der mathematischen Gemeinschaft geteilten Intuitionen in Widerspruch steht (zu stehen scheint).

  Akzeptiert man Monster, so muss man sich von der Intuition als in manchen/vielen Fällen trügerisch distanzieren: Welches Existenzkriterium hat man dann aber?

Was ist das ein Monster?

Logisches Existenzkriterium (Hilbert, ~1900):

Ist eine mathematische Entität durch ein nachweislich widerspruchsfreies Axiomensystem definiert, so existiert diese Entität.

„Das Wesen der Mathematik ist ihre Freiheit."

Diese reicht bis zum nächsten Widerspruch.

Ersetzt das **intuitive Existenzkriterium**: Eine mathematische Entität existiert, falls man ein intuitives Modell für sie besitzt.

Was beweisen Monster?

Was beweisen Monster?

Hans Hahn (1879 – 1934) „Die Krise der Anschauung“ (1933):

Die Monster zeigen, dass man der Anschauung nicht vertrauen kann.

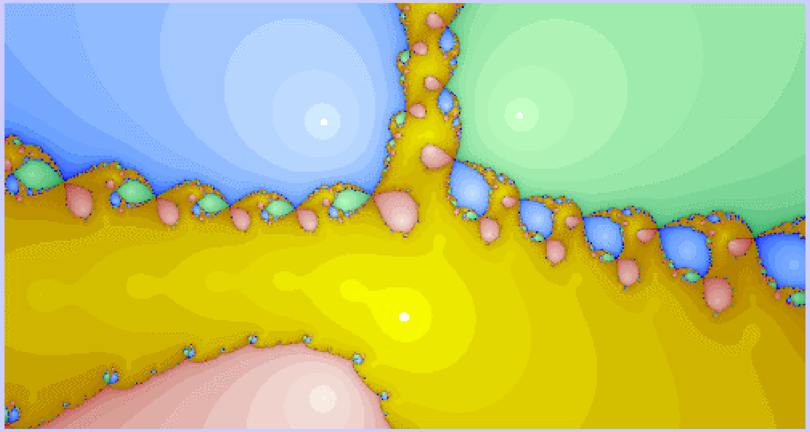
Keine Kongruenz mehr zwischen der anschaulichen **Ebene** und der **formalen Ebene**! Ist dies der Anschauung anzulasten?

(Kann denn Anschauung Sünde sein?)

Mathematik wird zu einer rein **logischen** Angelegenheit.

Was beweisen Monster?

- „Ich enge also mein Thema weiter ein auf „Geometrie und Anschauung“ und will versuchen, zu zeigen, wie es dazu kam, dass auch auf dem Gebiete der Geometrie, die doch zunächst die ureigenste Domäne der Anschauung zu sein scheint, das Vertrauen zur Anschauung erschüttert wurde, so dass sie immer mehr in Misskredit kam und schließlich aus der Geometrie völlig verbannt wurde.“



Schlussfolgerungen

Schlussfolgerungen

- Im Großen und Ganzen lassen sich in der Geschichte der mathematischen Monster dieselben Etappen nachweisen wie in der Naturwissenschaftsgeschichte:
- *Erste Etappe :* Die Monster liegen außerhalb des Bereichs der Mathematik; diese konzentriert sich auf das Wesentliche, auf die paradigmatischen Fälle.
- *Zweite Etappe:* Die vorhandenen Monster (Naturalia) rücken an die Grenzen der Mathematik vor; sie markieren Ausnahmen, denen es Rechnung zu tragen gilt (Abel, Cauchy, Dirichlet);

Schlussfolgerungen

- *Dritte Etappe:* Die konstruierten Monster (Artefakte) sind in die allgemeinen Gesetze einzubeziehen; ihnen kommt ein besonderes Interesse zu. Das Normale wird durch das Besondere erhellt.
- Besondere Berücksichtigung der Monster im Quasiempirismus von Imre Lakatos (1922 – 1974) : monster-banning, monster-adjustement, exception-banning.
- Im 19. Jh. fand ein grundlegender Wandel des mathematischen Denkens statt: Dieses zielt nicht mehr auf Aussagen über den paradigmatischen Fall ab sondern auf Aussagen, die in einem bestimmten Bereich ausnahmslos gelten. Vgl. Mengenlehre, Poppers Falsifikationismus.

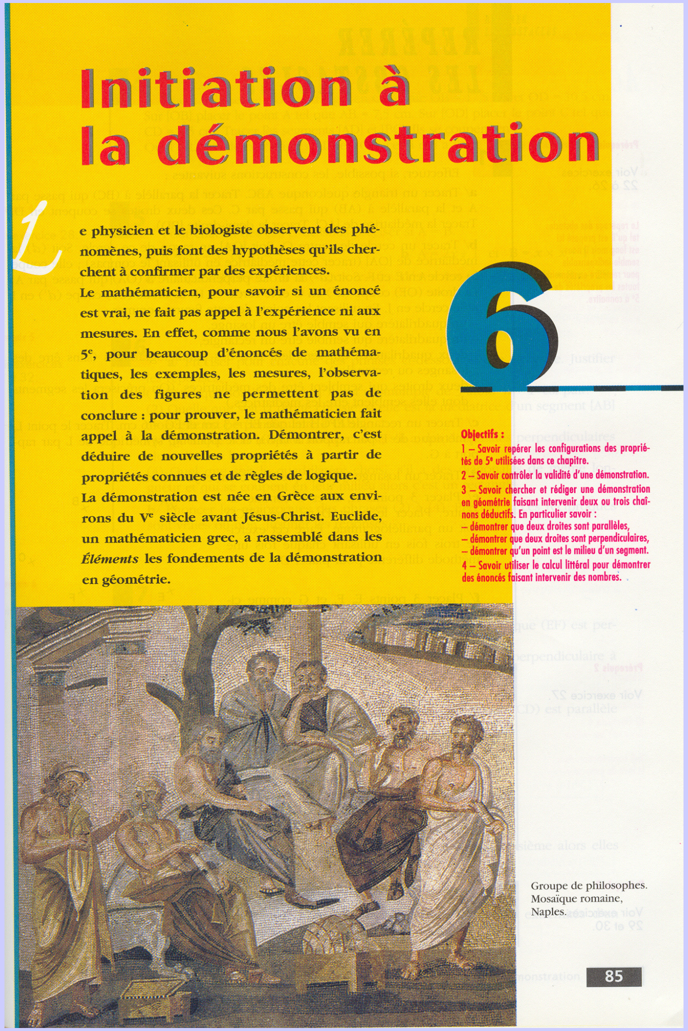
Schlussfolgerungen

- Mathematische Monster betonen deren konstruktiven Charakter; sie werden nicht vorgefunden, sondern mit Absicht erzeugt. Die Monster der Natur wurden vorgefunden, ihre Existenz lässt sich nicht leugnen.
- Gibt es eine Beziehung zwischen den allgemeinen Entwicklungstendenzen und denen der Mathematik? Gar so etwas wie eine geistige Situation einer Epoche?
- Aus welchen Motiven heraus entwickelt sich Mathematik?

Und der Unterricht?

- Ein adäquates Bild von Mathematik wird nur dann vermittelt, wenn deren Geschichte berücksichtig wird; Einbettung in die Kultur-und Wissenschaftsgeschichte ist vorzunehmen.
- Nur eine Lehrerin/ein Lehrer, die/der selbst die Geschichte der Mathematik und ihre Stellung in der Geistes- und Wissenschaftsgeschichte kennt, kann diese adäquat vermitteln.

Und der Unterricht?



Initiation à la démonstration

6

Le physicien et le biologiste observent des phénomènes, puis font des hypothèses qu'ils cherchent à confirmer par des expériences.
Le mathématicien, pour savoir si un énoncé est vrai, ne fait pas appel à l'expérience ni aux mesures. En effet, comme nous l'avons vu en 5[e], pour beaucoup d'énoncés de mathématiques, les exemples, les mesures, l'observation des figures ne permettent pas de conclure : pour prouver, le mathématicien fait appel à la démonstration. Démontrer, c'est déduire de nouvelles propriétés à partir de propriétés connues et de règles de logique.
La démonstration est née en Grèce aux environs du V[e] siècle avant Jésus-Christ. Euclide, un mathématicien grec, a rassemblé dans les *Éléments* les fondements de la démonstration en géométrie.

Objectifs :

1 – Savoir repérer les configurations des propriétés de 5[e] utilisées dans ce chapitre.

2 – Savoir contrôler la validité d'une démonstration.

3 – Savoir chercher et rédiger une démonstration en géométrie faisant intervenir deux ou trois chaînons déductifs. En particulier savoir :
– démontrer que deux droites sont parallèles,
– démontrer que deux droites sont perpendiculaires,
– démontrer qu'un point est le milieu d'un segment.

4 – Savoir utiliser le calcul littéral pour démontrer des énoncés faisant intervenir des nombres.

Groupe de philosophes.
Mosaïque romaine,
Naples.

Und der Unterricht?

Cours

1. *Hypothèses et conclusion*

Une figure possède en général beaucoup de propriétés. Certaines peuvent se démontrer à partir de propriétés choisies au départ.

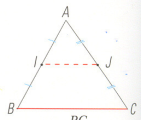
> ***Le jeu de la déduction :***
> - des hypothèses (les données de l'énoncé),
> - une démonstration utilisant des propriétés de figures géométriques étudiées en cours,
> - une conclusion (ce qui est à démontrer).

> ***Notations utiles pour la recherche de démonstrations :***
>
> $\perp$ signifie « perpendiculaire »,
> $//$ signifie « parallèle »,
> (AB) signifie « droite AB »,
> $[AB]$ signifie « segment AB »,
> $[AB)$ signifie « demi-droite d'origine A passant par B »,
> $\in$ signifie « appartient à ».

2. *« Droite des milieux d'un triangle »*

> ***« Théorème des milieux » :*** (PAR.5*)
>
> Dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.
> De plus, sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

Exemple :
Si

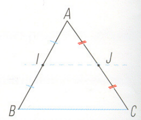


alors $(IJ) // (BC)$ et $IJ = \frac{BC}{2}$.

Pour la démonstration, voir l'exercice H, page 64.

> ***Réciproque du « Théorème des milieux » :*** (MIL.7*)
> (à admettre)
>
> Dans un triangle, si par le milieu d'un côté on mène la parallèle à un autre côté de ce triangle, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Exemple :
Si

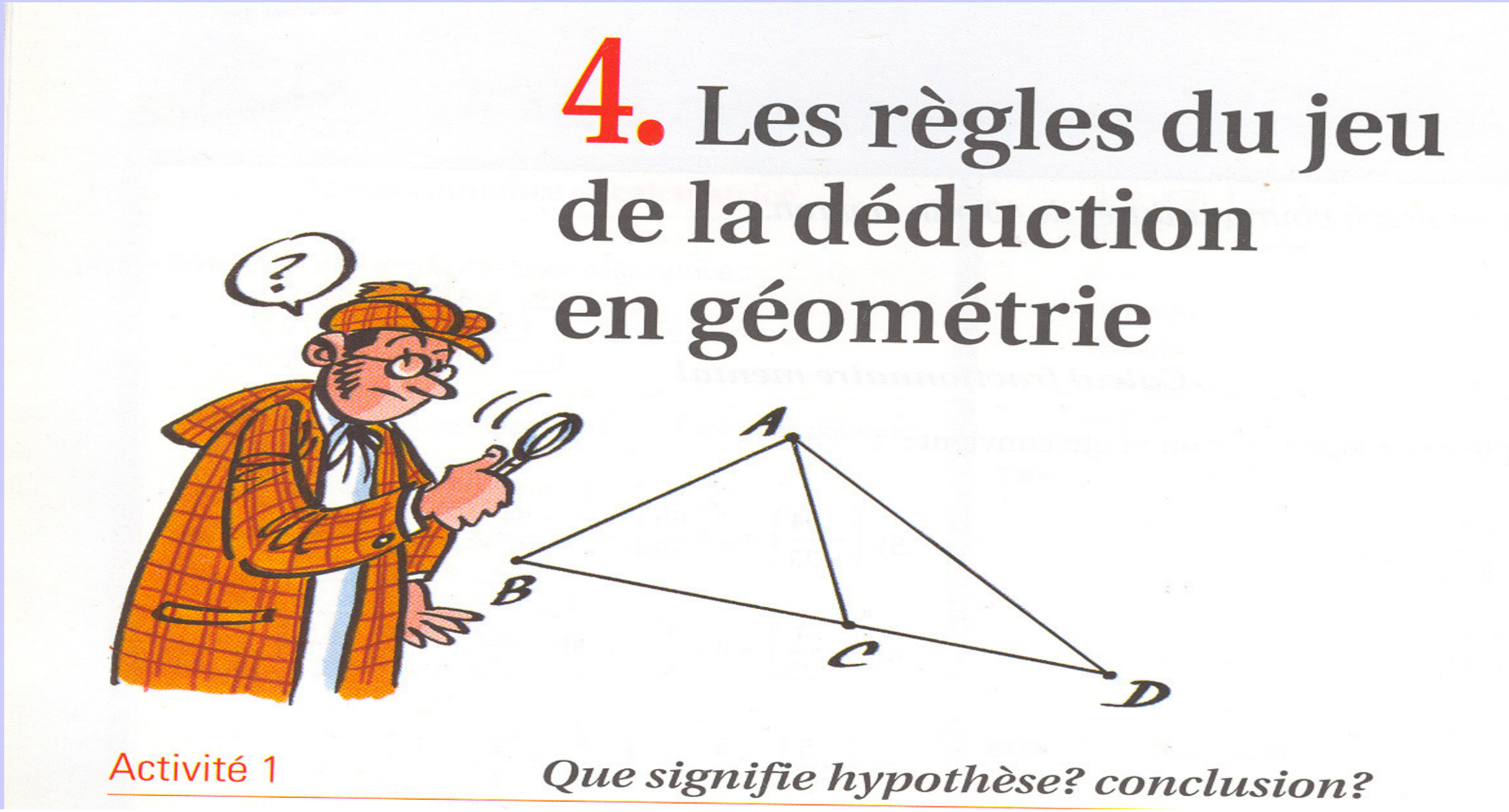


alors J est le milieu de $[AC]$.

* Les noms attribués aux propriétés sont ceux attribués en fin de livre dans la rubrique : « Des clés pour démontrer que… »

Und der Unterricht?

- Frankreich:



Und der Unterricht?

Connaissances

3 Contre-exemple

Pour un énoncé de la forme « si… alors… », un contre-exemple est un cas qui vérifie la condition et qui ne vérifie pas la conclusion.

Exemple. Pour l'énoncé « Si un nombre est divisible par 5 alors il se termine par 5 », 10 est un contre-exemple car :
– il vérifie la condition : 10 est divisible par 5 ;
– mais il ne vérifie pas la conclusion : 10 ne se termine pas par 5.
L'énoncé est donc faux.

Méthodes

1. Prouver qu'un énoncé mathématique est faux

Il suffit de trouver un contre-exemple.

Exemple. « Quel que soit le nombre choisi, s'il est divisible par 3 alors il est divisible par 6. » Cet énoncé est-il vrai ou faux ?

9 est un contre-exemple de cet énoncé ; en effet 9 est divisible par 3 ($9 = 3 \times 3$) mais il n'est pas divisible par 6, donc cet énoncé est faux.

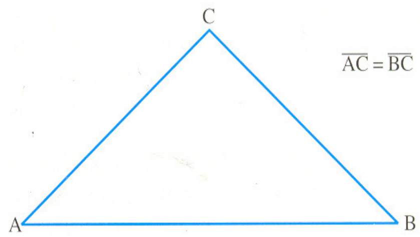
Und der Unterricht?

- Deutschland:

Beachte:
Eine Aussage ist schon falsch, wenn sie in nur einem einzigen Fall nicht zutrifft.

So kann man eine Aussage **widerlegen**:
1. Man gibt (falls dies noch nicht der Fall ist) die Aussage in der Form „Wenn-Dann“ an.
2. Man gibt ein Beispiel an, bei dem die Voraussetzung (der Wenn-Teil) erfüllt ist, aber die Behauptung (der Dann-Teil) nicht zutrifft. Ein solches Beispiel nennt man **Gegenbeispiel**.

Beispiel 2
Beweise, dass die folgende Aussage falsch ist: Bei jedem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis die kleinste Seite.
Lösung:
1. Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann ist die Basis die kleinste Seite.
2. Das Dreieck ABC in Fig. 2 ist gleichschenklig, aber die Basis ist nicht die kleinste Seite. Deshalb ist die Aussage falsch.



$\overline{AC} = \overline{BC}$

Fig. 2

Und der Unterricht?

- Der Mathematikunterricht sollte sich in großen Zügen an der historischen Entwicklung der Wissenschaft anlehnen (historisch-genetisches Prinzip).
- Diese zeigt: Zuerst kam die Regel, dann erst die Ausnahme. Die moderne Logik liegt der natürlichen mathematischen Auffassung fern; diese ist durch eine intensionale Sicht der Dinge gekennzeichnet, die extensionale Sicht der Mengenlehre ist ihr fremd.

Und der Unterricht?

- Fasst man Logik als Regeln des mathematischen Diskurses auf, so kann die Frage nach ihrer Zweckmäßigkeit gestellt werden; eine Auffassung, die die Logik als Sammlung unveränderlicher Denkgesetze sieht, lässt für diese wichtige Frage keine Raum (vgl. Adam Ries „Tu ihm also.“)

Goethe über Monster

„Herr und Meister! Hör mich rufen! –
Ach da kommt der Meister!
Herr, die Not ist groß!
Die ich rief, die Monster,
Wird ich nun nicht los.“