Die Möndchen des Hippokrates – eine Möglichkeit zum Konstruieren und zum Arbeiten mit Flächen

(Klaus Volkert, Seminar für Mathematik und ihre Didaktik, Universität zu Köln)

1. Einleitung

Die Möndchen des Hippokrates sind ein bekanntes Thema der Schulgeometrie, wo sie gerne ähnlich wie Archimedes' Schusterkneif als interessantes Beispiel behandelt werden. Sie dienen dazu, den Satz des Pythagoras anzuwenden sowie die Formel für den Flächeninhalt des Kreises beziehungsweise des Halbkreises. Dabei wird wenig auf die Flächen selbst geachtet sowie auf gewisse allgemeine Prinzipien, welche sich beim Arbeiten mit Flächen anwenden lassen und dort zu überraschenden Ergebnissen führen. Weiterhin bleibt der Konstruktionsaspekt für die fraglichen Figuren meist unbeachtet. Der nachfolgende Artikel möchte auf diese Aspekte aufmerksam machen, wobei wir auch ausführlich auf die Geschichte einzugehen haben werden.

2. Einige Informationen zum geschichtlichen Hintergrund

Hippokrates von Chios lebte in der zweiten Hälfte des 5. Jhs. v. Chr. überwiegend in Athen; er gilt als einer der wichtigsten antiken Mathematiker der Zeit vor Euklid. Bekannt geblieben sind zwei mathematische Leistungen von Hippokrates: die Zurückführung der Würfelverdopplung auf die Einschiebung zweier mittlerer Proportionaler und die Quadratur der Möndchen. Daneben soll er – so berichtet Proklos (412 – 485) in seinem Euklidkommentar – der erste gewesen sein, der „Elemente" der Mathematik verfasst hat. Von diesen besitzen wir aber keinerlei inhaltliche Kenntnis mehr.

Über die Quadratur der Möndchen berichtet uns Simplikios, ein spätantiker Kommentar (hauptsächlich des Aristoteles) im 6. Jh., im Zusammenhang mit verschiedenen Bemühungen um die Quadratur des Kreises. Er stützt sich bei seinem Bericht auf zwei Quellen, nämlich zum einen auf den Aristoteles-Kommentator Alexander von Aphrodisias (2. Jh. n. Chr.) und zum andern auf die „Geometriegeschichte" des Eudemos (um 320 v. Chr.). Die Passagen, die Simplikios nach seinen eigenen Angaben wörtlich aus Eudemos zitiert, gehören zu den ältesten erhaltenen Stücken antiker mathematischer Literatur, die wir kennen. Im 19. Jh. hat sich mit diesem damals fast vergessenen Schatz der deutsche Mathematiklehrer K. Bretschneider (1808 – 1878) beschäftigt, der ihn ausführlich in seiner Schrift „Geometrie und die Geometer vor Euclides" (1870) dokumentierte und textkritisch bearbeitete. Auf diese Leistung baute F. Rudio

(1856 – 1929) mit seiner kritischen Edition von 1907 auf; eine moderne Darstellung der Dinge findet sich bei Knorr 1993.

3. Das Problem

Die antike Lehre vom Flächeninhalt der klassischen Periode, wie wir sie systematisch ausgearbeitet im ersten und sechsten Buch der „Elemente" des Euklid (~340 - ~260) finden, unterscheidet sich wesentlich von der unsrigen insofern als in ihr der Vergleich von Flächen und nicht die Berechnung derselben im Vordergrund stand. Es wurde also mit den Flächen bzw. Figuren selbst gearbeitet und nicht mit Maßzahlen; als Methoden kommen Kongruenz und allgemeiner Zerscheiden und Zusammenfügen[1] einerseits in Frage (im Buch I bei Euklid) zum andern aber auch Zurückführung auf Streckenverhältnisse (im Buch VI bei Euklid). Bei der Vergleichslehre im zweiten Sinne spielen Verhältnisse gleichartiger Größen (etwa Flächeninhalte oder Strecken) eine wichtige Rolle; ist das Verhältnis zweier Größen beispielsweise 1 zu 1, so liegt Gleichheit zwischen ihnen vor.[2]
Für die Behandlung der Möndchen ist zentral der folgende Hilfssatz: Zwei ähnliche Kreissegmente verhalten sich zueinander wie die Quadrate über ihren Sehnen. Ähnlich heißen dabei zwei Kreissegmente, wenn ihre Mittelpunktswinkel kongruent sind. Das Lemma, das von Hippokrates vorausgesetzt wird, lässt sich aus dem Satz über das Verhältnis von Kreisen zueinander (vgl. Anm. 1) sowie des Vollkreises zu Bögen (bzw. des Vollwinkels zu Teilwinkeln) ableiten, eine Vorgehensweise, die Simplikios Hippokrates zuschreibt (vgl. Bretschneider 1870, 109f). Da hierbei modern ausgedrückt Grenzprozesse erforderlich sind [3], wird vermutet, dass Hippokrates über keinen aus moderner Sicht strengen Beweis des von ihm benutzten Hilfssatzes verfügte.[4] Man kann den Hilfssatz natürlich auch in Zusammenhang mit der Ähnlichkeitsgeometrie sehen: Er wäre dann eine Folgerung aus dem allgemeineren Prinzip „Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Figuren verhalten

---

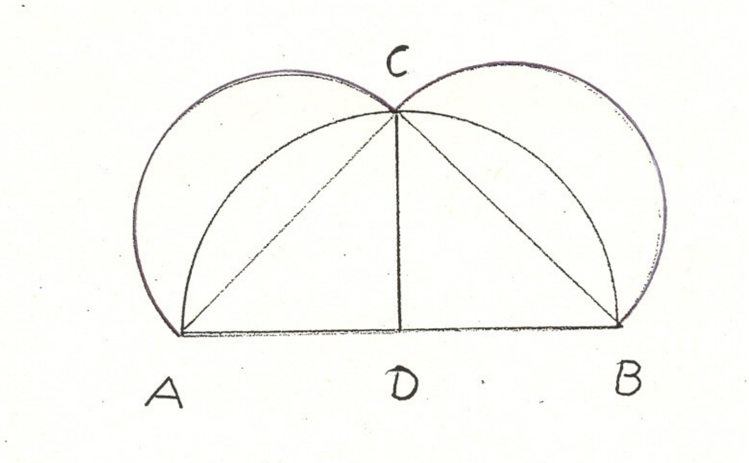
[1] Heute sprechen wir von Zerlegungsgleichheit oder Multikongruenz sowie von Ergänzungsgleichheit; zur historischen Entwicklung dieser Theorien vgl. man Volkert 1999, zu einer didaktischen Neubewertung derselben (aus französischer Sicht) Perrin 2002.

[2] Eine typische Anwendung von Verhältnissen ist der erste Satz des sechsten Buches bei Euklid: „Dreiecke sowie Parallelogramme unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundlinien." Man vergleiche auch XII,2: „Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über ihren Durchmessern."

[3] Die grenzwertfreie, weitgehend strenge Behandlung allgemeiner Größenverhältnisse, die Euklid im fünften Buch seiner „Elemente" gibt, ist sehr anspruchsvoll und stand Hippokrates vermutlich nicht zur Verfügung; als ihr Urheber gilt Eudoxos von Knidos (~ 400 – 347).

[4] Für das Flächenmaß *F* eines Kreissegmentes zum Mittelpunktswinkel f (gemessen im Bogenmaß) und Radius *r* gilt: $F = \frac{r^2}{2}(\varphi - \sin\varphi)$. Für die Sehne *s* erhält man $s = 2r\sin\frac{\varphi}{2}$. Löst man diese Beziehung nach *r* auf und setzt in die Formel für *F* ein, so wird sofort ersichtlich, dass Hippokrates' Hilfssatz für ähnliche Segmente, also für solche mit gleichem f, gilt. Das Problem für uns ist hier weniger die Herleitung als die Frage, warum man sich für einen solchen Sachverhalt interessieren sollte. Hier spielt sicher eine Rolle, dass Flächenvergleiche heute eher ungewohnt sind.

sich zueinander wie die Quadrate einander entsprechender Strecken“. Dies knüpft an unseren modernen Schulunterricht an, eine Ähnlichkeitsgeometrie in diesem Sinne gab es aber in der antike vor und bei Euklid nicht.
Den beiden uns bekannten Überlieferungen liegen verschiedene Vorgehensweisen zugrunde, sie sind also inhaltlich unterschiedlich. Die bei Alexander überlieferte Figur sieht so aus:



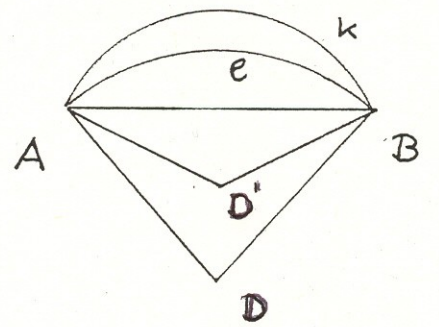
Nach Alexander argumentierte Hippokrates folgendermaßen: Nach dem Satz des Pythagoras ist das Quadrat über der Hypotenuse *AB* doppelt so groß wie dasjenige über der Kathete *AC*. Folglich ist der Halbkreis über *AB* auch doppelt so groß wie derjenige über *AC*. Also ist letzterer genau so groß wie der Viertelkreis *ADC*. Nimmt man nun von diesen beiden ihren Durchschnitt weg – das ist das Segment über der Sehne *AC* - so müssen die verbleibenden Reste immer noch flächengleich sein. Also ist das Kreisbogenzweieck (Möndchen) über der einen Kathete *AC* so groß wie das halbe Dreieck *ADC* und damit beide Möndchen zusammen so groß wie das ganze Dreieck. Bezeichnet man das Dreieck als geradliniges Möndchen, so kann man kurz feststellen:

Das geradlinige Möndchen ist flächengleich den beiden krummlinigen Möndchen zusammen.

Im vorliegenden Fall ist es nicht schwierig, die Gesamtfigur zu konstruieren: Man beginnt mit einer Strecke, über der man das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck errichtet – etwa mit Thales-Kreis und Mittelsenkrechten. Um dieses konstruiert man falls noch erforderlich den Umkreis. Es genügt natürlich, den Teilbogen *ACB* des Umkreises zu konstruieren; in analogen Situationen werden wir im Folgenden kurz vom Umkreisbogen *k* sprechen. Über den Katheten errichtet man die Halbkreise. Fertig!
Offensichtlich kommt es hier nur auf die Größenverhältnisse an, weshalb man die Hypotenuse gleich $\sqrt{2}$ annehmen kann[5] und die Katheten gleich 1. Das traditionelle Problem der Möndchenquadratur umfasst zwei Aspekte: den der Flächengleichheit eines geradlinigen und eines (oder mehrerer) krummlinigen

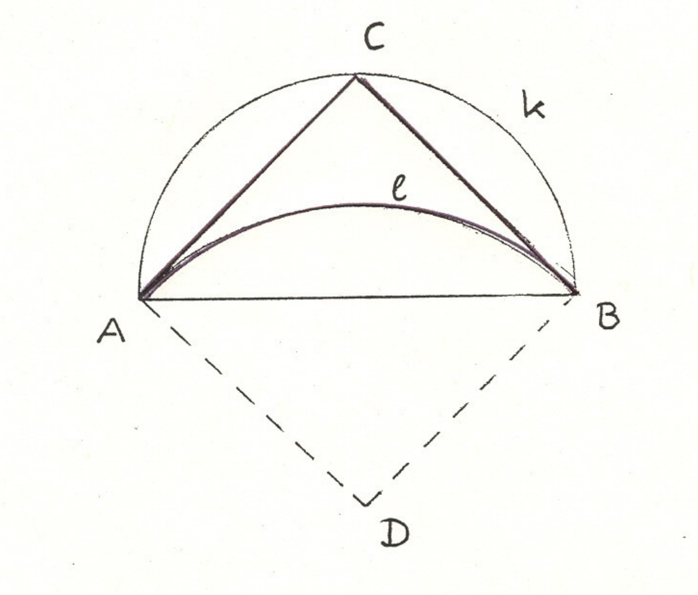
[5] Aus Gründen der Bequemlichkeit spreche ich im folgenden einfach von Streckenlängen; diese sind aber immer nur bis auf Vielfache bestimmt, da entscheidend die Verhältnisse sind.

Möndchens (letzteres ist stets ein Kreisbogenzweieck) sowie die Konstruktion mit Zirkel und Lineal der Gesamtfigur. Nur wenn beide Bedingungen erfüllt sind, spricht man von quadrierbaren Möndchen.
Eine etwas andere Sichtweise der Dinge lässt erkennen, wie man das Vorgehen verallgemeinern kann: Man nehme zwei flächengleiche Kreissektoren, deren Sehnen gleichlang sind. Legt man diese geeignet übereinander (siehe Abbildung 2), so kann man wie oben argumentieren. Man stellt fest, dass das Viereck *ADBD'* flächengleich dem Möndchen zwischen den beiden Kreisbögen ist. Allerdings ist es vom konstruktiven Standpunkt her nicht klar, wie man die flächengleiche Sektoren bekommen soll, insbesondere welche Bedingung an die Mittelpunktswinkel zu stellen ist. Rechnerisch hat diese Vorgehensweise jedoch gewisse Vorteile wie wir weiter unten sehen werden.



In Schulbüchern findet sich häufig folgende Variante der Möndchen: Man beginnt mit einem beliebigen (will sagen: nicht notwendig gleichschenkligen) rechtwinkligen Dreieck, zieht den Umkreisbogen und die Halbkreise über den Katheten. Auch dann gilt noch, dass die Flächen der beiden Möndchen zusammen gleich der des Dreiecks sind. Dies zeigt man wohl am einfachsten, indem man die Gesamtfläche auf zweierlei Arten darstellt und dann den Satz des Pythagoras anwendet, welcher die Flächengleichheit der beiden Halbkreise über den Katheten mit dem Halbkreis über der Hypotenuse liefert. Offensichtlich lässt sich die Argumentation von oben („Gleiches von Gleichem weggenommen ergibt Gleiches") nicht auf diesen Fall übertragen. Er wurde, soweit bekannt, erstmals von dem arabischen Mathematiker und Naturwissenschaftler Ibn al Haitam (965 – ~1040), also lange nach Hippokrates betrachtet (vgl. Wieleitner 1934, 1f). Die in Schulbüchern und sonst wo häufig anzutreffende Bezeichnung „Möndchen des Hippokrates" für diese Figur ist also, wie Wieleitner ausdrücklich aber auch vergeblich bemerkt, irreführend.
Kommen wir nun zu der Möndchenquadratur, wie sie Eudemos uns überliefert. Eigentlich müsste man korrekter von Quadraturen reden, denn es gab deren laut Eudemos drei: *Wenn nämlich der äußere Bogen jedes Mondes gleich ist dem Halbkreis, oder grösser oder kleiner, so quadriert Hippokrates sowohl den Mond mit gleichem, als auch mit grösserem oder kleinerem Bogen ...*

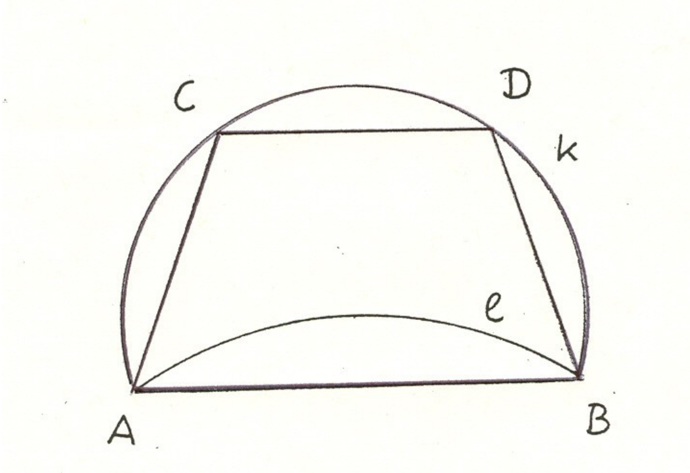
(Bretschneider 1870, 109). Diese reichlich kryptische Andeutung bedarf natürlich der Erläuterung.



Der Fall des Halbkreises ist eng dem oben behandelten Fall verwandt. Wir starten wieder mit dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck *ABC* und dessen Umkreisbogen *k*. Dann konstruieren wir eine kongruente Kopie dieses Dreiecks *ABD*, erhalten also ein Quadrat *ADBC*. Mit Mittelpunkt *D* ziehen wir den Kreisbogen *l* durch *A* und *B*. Behauptet wird nun, dass das Dreieck (das geradlinige Möndchen) *ABC* flächengleich dem[6] Möndchen (*k*,*l*) sei.
Zum Beweis betrachten wir Kreissegmente und wenden den oben zitierten Hilfssatz an. Das Segment zwischen *AB* und *l* ist demnach doppelt so groß wie dasjenige zwischen *AC* (bzw. *BC*) und dem Kreisbogen *k*. Um dies einzusehen, braucht man einerseits den Satz des Pythagoras und andererseits die Tatsache, dass die Mittelpunktswinkel der Segmente gleich sind (nämlich jeweils 90°). Folglich sind die Segmente ähnlich und der Hilfssatz anwendbar. Wie kommt man aber vom Dreieck zum Möndchen? Hierzu nimmt man zuerst vom Dreieck das Segment über der Hypotenuse weg, um dann die beiden Segmente über den Katheten anzufügen. Da das Hypotenusensegment den beiden Kathetensegmenten zusammen flächengleich ist, wird die Gesamtfläche nicht verändert! Also ist das Ausgangsdreieck dem entstehenden Möndchen flächengleich. Das zugrunde liegende Prinzip lautet demnach: Etwas wegnehmen und anderswo ihm Gleiches anfügen ändert die Gesamtgröße nicht.
Die Konstruktion der Figur ist auch in diesem Falle ganz einfach; hervorzuheben für später ist lediglich, dass man auch hier mit dem geradlinigen Möndchen sprich mit dem Dreieck beginnt. Es ist heute üblich, die Möndchen nach der Anzahl der Segmente einzuteilen, die in ihre Konstruktion einfließen. Im vorliegenden Fall haben wir es mit dem (2,1)-Möndchen zu tun. Die Angabe

[6] Hier und im Weiteren gibt es immer nur ein Möndchen (Kreisbogenzweieck).

der Segmentzahl legt auch das Verhältnis der entsprechenden Sehnen fest: Hat man es mit dem (*m*,*n*)-Möndchen[7] zu tun, so müssen sich die Sehnen wie $\sqrt{n}$ zu $\sqrt{m}$ verhalten, um die gewünschte Flächengleichheit sicherzustellen. Konkret hat man es beim (2,1)-Möndchen mit zwei Sehnen der Länge $\sqrt{1}$ und einer Sehne der Länge $\sqrt{2}$ tun.
Das zweite quadrierbare Möndchen, das Hippokrates betrachtete, wird heute als das (3,1)-Möndchen bezeichnet. Dieses entspricht dem Fall, dass der Umkreisbogen *k* größer als ein Halbkreis ist, wie sich allerdings erst nach der Konstruktion herausstellt. Wollen wir in Erinnerung des allgemeinen Prinzips von oben von einer geradlinig begrenzten Figur ein Segment wegnehmen und dann drei ihm ähnliche Segmente anfügen, in der Weise, dass die Gesamtfläche unverändert bleibt, so müssen sich die Sehnen wie $\sqrt{3}$ zu $\sqrt{1}$ verhalten. Von der längeren Sehne benötigen wir ein Exemplar, von der kürzeren drei: Dann gilt ja $3\left(\sqrt{1}\right)^2 = 1\left(\sqrt{3}\right)^2$. Folglich ist das geradlinige Möndchen im vorliegenden Fall ein gleichschenkliges Trapez mit den Kantenlängen $\sqrt{3}$ und 1, 1, 1. Dessen Konstruktion bereitet keine Schwierigkeiten: Man ziehe die Strecke *AB* der Länge $\sqrt{3}$, errichte auf dieser die Mittelsenkrechten sowie zu dieser Parallelen im Abstand ½. Kreise um *A* und *B* mit Radius 1 legen dann die Punkte *C* und *D* als Schnittpunkte mit den Parallelen fest.



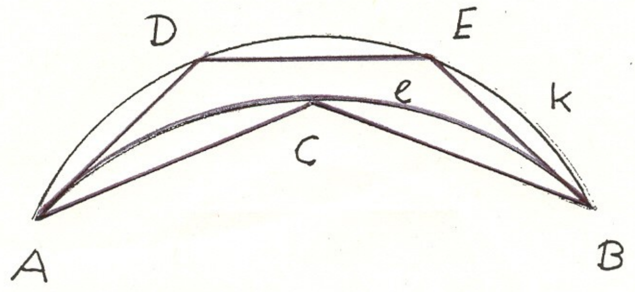
Nun konstruiere man den Mittelpunkt des Umkreises des Trapezes[8] und ziehe den Umkreisbogen *k*. Wir erhalten so die drei Segmente, die dem Trapez angefügt werden. Es fehlt noch der Kreisbogen *l* durch die Punkte *A* und *B*. Dessen Mittelpunktswinkel muss gleich sein dem Mittelpunktswinkel, der zu einem der drei soeben konstruierten Segmente gehört. Hierzu[9] verbinden wir *C* und *D* mit dem Umkreismittelpunkt *M* und ziehen zu diesen

[7] Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit kann man *m* größer *n* und ggT(*m*,*n*) = 1 annehmen. Es sei hervorgehoben: Alle *m* Segmente der einen Art und alle *n* Segmente der anderen Art müssen zueinander kongruent sein und alle Segmente überhaupt einander ähnlich
[8] Aus Euklids Kriterium für Kreisvierecke (III, 22) folgt, dass ein gleichschenkliges Trapez einen Umkreis besitzt. Aufgrund der Verhältnisse der Kanten liegt der Umkreismittelpunkt im vorliegenden Fall im Trapez, der Umkreisbogen ist also wie angekündigt länger als ein Halbkreis.
[9] Es gibt natürlich mehrere Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen.

Verbindungsstrecken Parallelen durch A und B. Der Schnittpunkt dieser Parallelen ist dann der gesuchte Mittelpunkt für den Kreisbogen l. Damit ist die Konstruktion beendet; der Nachweis der Flächengleichheit von geradlinigem und krummlinigem Möndchen ergibt sich nach dem obigen Prinzip aus der Konstruktion. Man bemerkt, dass es rechnerisch für vorgegebenes (m,n) stets möglich ist, Flächengleichheit zwischen dem geradlinigen und dem krummlinigen Möndchen herzustellen. Mathematische Tiefe gewinnen die Möndchen erst durch die Forderung nach Konstruktion bzw. Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal.

4. Das (3,2)-Möndchen

Wesentlich schwieriger ist dagegen das (3,2)-Möndchen, das letzte von Hippokrates betrachtete Möndchen.

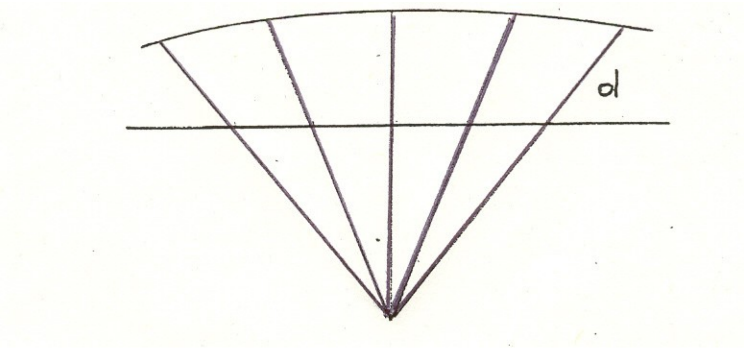


Das (3,2)-Möndchen beruht auf einem Fünfeck $ACBDE$, das drei Kanten – nämlich AD, DE und EB - der Länge $\sqrt{2}$ und zwei Kanten –AC, CB - der Länge $\sqrt{3}$ besitzt. Das krummlinige Möndchen wird begrenzt vom Umkreisbogen k des Vierecks $ABDE$ und vom Kreisbogen l, der durch die Punkte A, C und B geht. Die Bögen AD, DE und EB sind gleichlang, ebenso die Bögen AC und CB. Alle Mittelpunktswinkel zu diesen Bögen sind gleichgroß.

Die bislang genannten Bedingungen reichen noch nicht aus, um die Figur zu konstruieren. Man muss sich weitere Einsichten in deren Aufbau verschaffen – eine Aufgabe, der die traditionelle Analysis dient. Der Schlüssel zu allem Weiteren liegt in der Einsicht, dass die Punkte A, C und E (analog natürlich auch B, C und D) auf einer Geraden liegen. Wegen der Gleichheit der Bögen muss diese zugleich Winkelhalbierende des Winkels $< BAD$ sein. Um nachzuweisen, dass der Punkt C tatsächlich auf dieser Winkelhalbierenden liegt, zeigt man, dass der Winkel $< BAC$ gerade die Hälfte des Winkels $< BAD$ ist.[10] Somit kann man den Punkt A durch zwei Bedingungen festlegen: A liegt auf dem Kreis um den Punkt D mit Radius $\sqrt{2}$ und A liegt auf einer Geraden durch E und C, so dass die Strecke AC gerade $\sqrt{3}$ lang ist. Da C auf der Mittelsenkrechten von DE

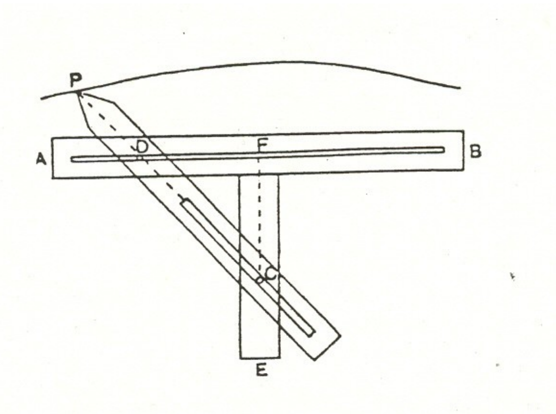
[10] Hierzu rechnet man diese Winkel aus, indem man den zu allen Bögen gehörigen Mittelpunktswinkel mit a ansetzt und die Gleichschenkligkeit der Dreiecke ausnutzt.

liegt, geht es also darum, eine Gerade durch E so zu legen, dass die Strecke zwischen deren Schnittpunkt C mit der Mittelsenkrechten und ihrem Schnittpunkt A mit dem Kreis um D vom Radius $\sqrt{2}$ gerade $\sqrt{3}$ lang ist. Dies mit Zirkel und Lineal zu bewerkstelligen, ist nicht ganz einfach.
Obwohl Euler schon 1771 auf algebraischem Wege bewiesen hatte, dass das (3,2)-Möndchen konstruierbar ist, wurde eine auf antiken Vorbildern beruhende Lösung erst 1936 von A. D. Steele publiziert (Steele 1936, 319 – 321); Hippokrates selbst hat sich vermutlich einer sogenannten Einschiebung (Neusis) bedient. Da letztere eine naheliegende Methode ist, die in etwas veränderter Form auch Schülern jederzeit einfällt, soll sie hier kurz erläutert werden. Anschließend werden wir uns auf einfachem Weg[11] klar machen, dass es für das (3,2)-Möndchen eine konstruktive Lösung geben muss, um schließlich Steeles Vorschlag kennen zu lernen.
Um eine Einschiebung durchzuführen, kann man sich eines Lineals bedienen. Auf diesem markiert man Anfangs- und Endpunkt einer Strecke der gewünschten Länge, die sogenannte Distanz, und versucht nun, das Lineal so durch den fraglichen Punkt, den sogenannten Pol (hier E), zu legen, dass die Markierungen auf die beiden Kurven (hier der Kreis um D und die Mittelsenkrechte m_{DE}) fallen. In der Antike kannte man eine ganze Gattung von Kurven, die genau den Bedürfnissen solcher Einschiebungen angepasst war: die Konchoiden[12]. Einen einfachen, für unser Problem geeigneten Typus derselben zeigt die nachfolgende Abbildung:

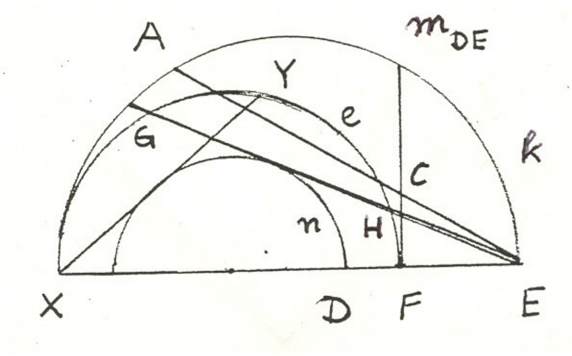


Zur Anwendung auf unser Problem müsste der Abstand Pol/Leitgerade gerade gleich dem Abstand $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ von E zur Mittelsenkrechten m_{DE} sein und die Distanz d gleich $\sqrt{3}$. Welchen Status Einschiebungen ursprünglich in der antiken Geometrie hatten, insbesondere ob sie als zulässige Konstruktionsverfahren angesehen wurden, ist nicht recht klar.[13] Zum Zeichnen von Konchoiden gab es übrigens ein Instrument: das sogenannte Konchoidenlineal.

[11] Eine systematischere Lösung wird unten im Abschnitt 5 vorgestellt.
[12] Mehr über Konchoiden findet man bei Schupp/Dabrock 1993.
[13] Eine ausführliche Diskussion gibt Knorr 1993, 219 - 226.



Um die Konstruktion mit Zirkel und Lineal durchzuführen, beginnen wir wieder mit der Strecke *DE* der Länge $\sqrt{2}$; diese verlängern wir über *D* hinaus bis zum Punkt *X* und zwar so, dass die Strecke *DX* ebenfalls $\sqrt{2}$ lang ist. Über der Gesamtstrecke *XE* ziehen wir den Halbkreis *k*. Der zu konstruierende Punkt *A* liegt auf *k*. Die weitere Konstruktion spielt sich in derjenigen Halbebene bezüglich *XE* ab, in der *k* liegt. Das wird nicht mehr eigens erwähnt werden. Nun halbiere man *DE* in *F* und errichte in *F* die Mittelsenkrechte m_{DE}. Dann liegt der zu konstruierende Punkt *C* auf m_{DE}. Weiter ziehe man über *XF* den Halbkreis *l*. Um *X* ziehen wir einen Kreis mit Radius $\sqrt{3}$. Sein Schnittpunkt mit *l* heiße *Y*. Man verbinde *X* mit *Y* und konstruiere den zu *l* konzentrischen Halbkreis *n*, der die Strecke *XY* berührt.[14]



Im nächsten Schritt legen wir von *E* aus die Tangente an *n*. Die beiden Schnittpunkte mit *l* seien *H* und *G*. Es zeigt sich, dass *HG* ebenfalls $\sqrt{3}$ lang ist. Wir müssen nun noch dafür sorgen, dass diese Strecke zwischen den Halbkreis *k* und die Mittelsenkrechte m_{DE} so eingefügt wird, dass ihre Verlängerung durch *E* geht. Hierzu ziehen wir um *E* den Kreis durch *G*; sein Schnittpunkt mit *k* sei *A*. Schließlich verbinden wir *A* mit *E*. Der Schnittpunkt dieser Strecke mit der Mittelsenkrechten m_{DE} heiße *C*. Wie die Bezeichnungsweise schon suggeriert, ist die Strecke *AC* $\sqrt{3}$ lang. Nun vervollständigen wir, etwa durch Spiegelung an m_{DE}, zu dem gesuchten Fünfeck *ACBDE*.

[14] Hierzu fällt man vom Mittelpunkt des Halbkreises *l* das Lot auf *XY*; der Lotfußpunkt ist dann der Berührpunkt.

Um die angegebene Konstruktion zu verifizieren, zeigt man im ersten Schritt: Die Strecken XY und HG sind gleichlang. Beide sind Sehnen im größeren Kreis l, die den kleineren konzentrischen Kreis n berühren. In dieser Situation sind Sehnen immer gleichlang. Um dies einzusehen, verbinde man den Mittelpunkt des kleineren Kreises mit den Berührpunkten sowie mit den Endpunkten der Sehnen. Es entstehen dann vier nach SsW kongruente Dreiecke.
Im zweiten Schritt weisen wir nach, dass HG und AC gleichlang sind. Um diese Strecken miteinander in Beziehung zu setzen, stellen wir eine Verbindung zu Strecken auf XE her. Nach dem Satz über Sekantenabschnitte bezogen auf den Halbkreis l gilt: (+) $|EG| \cdot |HE| = |XE| \cdot |EF|$. Um eine Beziehung zu den Abschnitten auf EA zu gewinnen, betrachten wir die ähnlichen Dreiecke XAE und CFE.[15] Aus diesen liest man die Beziehung

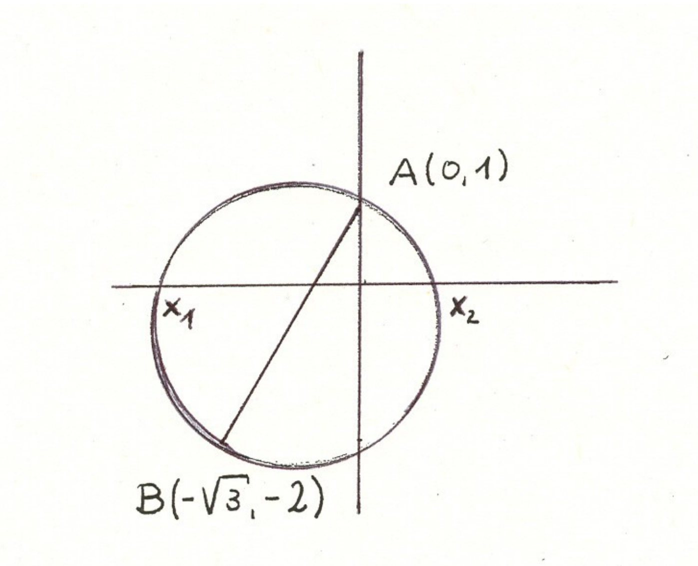
$$(*) \quad |AE| \cdot |CE| = |EF| \cdot |XE|$$

ab. Da nach Konstruktion AE und EG gleichlang sind, erhält man nach Gleichsetzen der linken Seiten von (+) und (*) liefert: $|CE| = |EH|$. Wegen $|GH| = |GE| - |HE|$ und $|AC| = |AE| - |CE|$ ergibt sich schließlich: $|GH| = |AC|$, was zu beweisen war.

5. Konstruktive Lösung quadratischer Gleichungen

Um einzusehen, dass es eine Konstruktion des (3,2)-Möndchens mit Zirkel und Lineal geben muss, algebraisieren wir das Problem (vgl. Heath 1952, 386f). Nennen wir die Länge der Strecke EC x, so soll AE gleich $x + \sqrt{3}$ lang sein. Für die Strecken auf XE gilt andererseits: $|XE| = 2\sqrt{3}$ und $|EF| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die Gleichung (*) von oben schreibt sich dann als $x(x+\sqrt{3}) = 2$. Das ist eine quadratische Gleichung für die gesuchte Größe x. Sind die Lösungen einer solchen quadratischen Gleichung reell, so sind sie konstruierbar, wenn die Koeffizienten der Gleichung konstruierbar sind. Schreibt man unsere Gleichung in der Form $x^2 + \sqrt{3}x - 2 = 0$, so wird die Konstruierbarkeit der Koeffizienten sofort ersichtlich: Die Einheitstrecke ist konstruierbar, also auch eine Strecke der Länge 2 und allgemein jede Strecke natürlichzahliger Länge. Dann konstruiere man das rechtwinklige Dreieck mit Kathetenlängen 1 und 2; seine Hypotenuse ist dann nach Pythagoras $\sqrt{3}$ lang.

[15] Beide sind rechtwinklig – k ist ja Thales-Kreis – und haben den Winkel bei E gemeinsam.



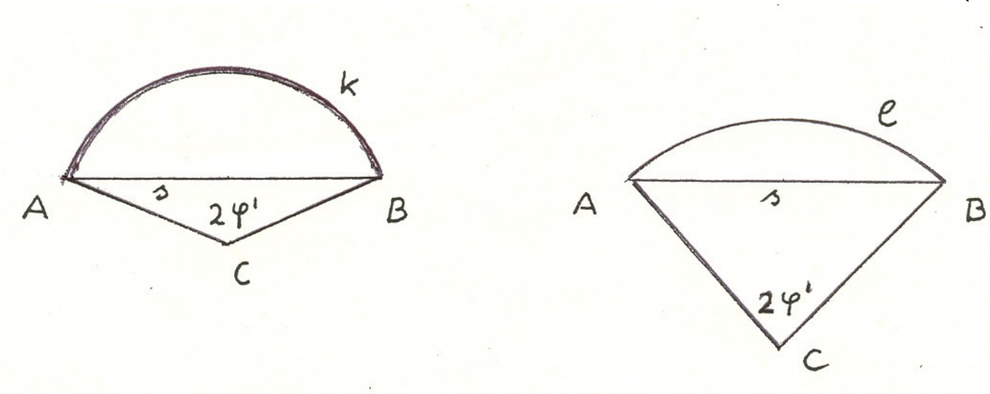
Die vielleicht einfachste und instruktivste Art, quadratische Gleichungen konstruktiv zu lösen, ist der sogenannte Carlyle-Kreis (benannt nach dem schottischen Schrifsteller, Historiker und Philosophen Thomas Carlyle [1795 – 1881]; vgl. DeTemple 1991, 99f). Ist die quadratische Gleichung $x^2 - sx + p = 0$ gegeben[16] mit den Koeffizienten s und p, so verfährt man folgendermaßen. Zuerst konstruieren wir die Punkte $A(0,1)$ und $B(s,p)$. Dann verbinde man diese beiden Punkte und errichte über der Verbindungsstrecke den Kreis. Die Abszissen von dessen Schnittpunkten mit der x-Achse sind die gesuchten Lösungen der quadratischen Gleichung. Dieses Verfahren zeigt deutlich, dass die Konstruierbarkeit der Koeffizienten s und p notwendig für die konstruktive Lösung der quadratischen Gleichung ist.

6. Die Möndchen in der Neuzeit

Die Frage nach den quadrierbaren Möndchen wurde in der Neuzeit wieder aufgegriffen; entscheidend hierbei war die allmähliche Entwicklung der Algebra, denn die allgemeine Frage nach der Konstruierbarkeit lässt sich nur algebraisch lösen. Gewisse Fortschritte erzielten u.a. F. Viète, D. Bernoulli, G. Cramer und D. Wijnquist, wie in Wieleitner 1934 ausführlich dargestellt. L. Euler, der sich bereits als junger Mann 1737 angeregt durch seinen zeitweiligen Mithörer Daniel Bernoulli mit den Möndchen befasst hatte, konnte 1771 auf algebraischem Wege zeigen, dass folgende Möndchen konstruierbar sind: (2,1), (3,1), (3,2), (5,1) und (5,3), während er die Nichtkonstruierbarkeit von (4,1), (4,3), (5,2) und (5,4) nachwies. Die positiven Ergebnisse Eulers wurden unabhängig von diesem 1840 von Thomas Clausen (1801 – 1885) wieder entdeckt; Clausen war es, der anscheinend als erster klar die Vermutung aussprach, dass die von Euler gefundenen fünf konstruierbaren Möndchen die

[16] Die Koeffizienten sind so eingerichtet, dass die weitere Konstruktion einfach zu beschreiben ist. Man kann selbstverständlich auch die übliche Form der quadratischen Gleichung zu Grunde legen, dann muss man allerdings einige Minuszeichen in Kauf nehmen.

einzigen konstruierbaren seien. Die von Clausen wieder aufgegriffene Idee Eulers ist naheliegend: Man stelle eine Gleichung auf, deren Lösung äquivalent ist zur Erzeugung des fraglichen Möndchens. Dann kläre man, in welchen Fällen es eine Lösung gibt, die so geartet ist, dass die Gesamtfigur tatsächlich konstruierbar ist. Hinreichend hierfür ist, dass die Lösung auf einen „Quadratwurzelausdruck“ (Gauß)[17] führt; diese Einsicht liegt der Gaußschen Behandlung der Kreisteilung – also der Konstruktion einbeschriebener regelmäßiger Vielecke – zugrunde, die er im 7. Abschnitt seiner „Disquisitiones arithmeticae“ von 1801 gegeben hat.
Clausen geht von folgender Situation[18] aus: Es seien zwei flächengleiche Sektoren mit gleichlanger Sehne *s* gegeben, deren Bögen mit *k* und *l*, deren Radien mit *r* und *r'* und deren Mittelpunktswinkel mit 2f und 2f ’ bezeichnet werden. Legt man die beiden längs ihrer Sehnen geeignet übereinander, so entsteht einerseits ein Viereck *ACBC'* und andererseits das Möndchen (*k*,*l*):



Dann ist aber das Möndchen flächengleich dem Viereck: Das Möndchen entsteht aus dem ersten Sektor durch Wegnahme des mit dem zweiten Sektor gemeinsamen Teiles (das ist der Kreissektor mit Bogen *l* und Scheitel *C*); das Viereck analog aus dem zweiten ebenfalls durch Wegnahme des gemeinsamen Teiles. Da die ursprünglichen Figuren flächengleich gewesen sind, müssen dies die Reste auch sein. Stellt man sich vor, dass die Bögen *k* und *l* in *m* bzw. *n* gleichlange Teilbögen unterteilt sind, so ergibt sich aus der geschilderten Situation die uns als (*m*,*n*)-Möndchen bekannte Konstellation. Das heißt: Die dem (*m*,*n*)-Möndchen zugrunde liegende Situation entspricht genau dem Fall, dass die beiden Mittelpunktswinkel 2f und 2f ’ kommensurabel sind, also, dass sie sich schreiben lassen als 2f = 2*m*a und 2f ’ = 2*n*a. Die Forderung, dass das geradlinige Möndchen dem krummlinigen flächengleich sein soll, ist erfüllt, da die beiden Kreissektoren laut Voraussetzung flächengleich sind.
Bezeichnet man mit *s* die Länge der Strecke *AB*, so gilt:

---

[17] Das ist ein Ausdruck, der nur aus den üblichen Rechenzeichen (plus, minus, mal, geteilt durch) sowie aus Quadratwurzeln aufgebaut ist und natürlich eine (positive) reelle Zahl darstellt. Beispiele werden weiter unten im Text gegeben. Die Bedingung selbst für Konstruierbarkeit findet sich schon implizit in Descartes' „Geometrie“ (1637); explizit verwendet wurde sie wie bereits oben erwähnt bei Euler 1771.

[18] Erstmals eingehender betrachtet wohl von D. Bernoulli, vgl. Wieleitner 1934, 19f; die Grundidee haben wir aber schon bei Hippokrates kennen gelernt (in der Überlieferung von Alexander).

$$\sin f = \frac{s/2}{r} \text{ bzw. } \sin f' = \frac{s/2}{r'}$$

und damit

$$(1)\ r \sin f = r' \sin f'.$$

Ist nun $f = m$a und $f' = n$a, so ergibt sich hieraus:

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin n\alpha}{\sin m\alpha}$$

Aus der bekannten Formel für die Fläche von Kreissektoren[19] erhält man andererseits:

$$r^2 m\mathrm{a} = (r')^2 n\mathrm{a}$$

also

$$(2)\ \frac{r}{r'} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$$

In Kombination mit (1) ergibt sich hieraus die Gleichung

$$(3)\ \sqrt{m} \cdot \sin n\alpha = \sqrt{n} \cdot \sin m\alpha\ .$$

Da man sowohl sin na als auch sin ma als Polynom in sin a ausdrücken kann, ist die obige Gleichung letztlich nichts anderes als ein Polynom in sin a (oder cos a oder dergleichen). Clausen erkannte nun – wie schon Euler vor ihm - auf Grund von Rechnungen, dass sich für fünf Werte des Paares (m,n) konstruierbare Lösungen der Gleichung (3) ergeben; drei dieser Fälle sind jene, die schon Hippokrates untersucht hatte.

1. *Fall* (m,n) = (2,1): Man erhält die Gleichung sin 2a = $\sqrt{2}$ sin a; wegen sin 2a = 2(cos a)(sin a) wird hieraus:

$$\sin \mathrm{a} = 2(\cos \mathrm{a})(\sin \mathrm{a})$$

mit der Lösung cos a $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (die uninteressante Lösung sin a = 0 wird hier und im Weiteren übergangen). Rechts steht ein Quadratwurzelausdruck, weshalb das Problem konstruktiv mit Zirkel und Lineal lösbar ist: Man konstruiert zuerst eine Strecke der Länge cos a ($= \frac{1}{2}\sqrt{2}$) und dann mit Hilfe der Einheitsstrecke ein rechtwinkliges Dreieck, das den Winkel a enthält. Also ist 2f = 180° und 2f' = 90° - in Übereinstimmung mit Hippokrates.

1. *Fall* (m,n) = (3,1): Man erhält die Gleichung[20] sin 3a = $\sqrt{3}$ sin a; wegen sin 3a = 3sin a – 4 sin³ a wird hieraus

$$3 - 4\sin^2 \mathrm{a} = \sqrt{3},$$

was auf die Lösung sin a = $\frac{1}{2}(\sqrt{3-\sqrt{3}})$ führt. Wieder steht rechts ein Quadratwurzelausdruck, also ist das Problem konstruktiv lösbar. Man findet für a den ungefähren Wert 34,26°. Für 2f ergeben sich etwa 206,76° und für

---

[19] $F = \frac{1}{2} r\alpha$ Wir unterscheiden hier nicht notationell zwischen einem Winkel und seinem Bogenmaß.

[20] Euler arbeitete prinzipiell mit dem Kosinus, weshalb seine Gleichungen etwas anders aussehen; vgl. Euler 1771, 216f.

2f ’ 68,52°; eine Sehne im Umkreisbogen *k* hat die Länge $r\sqrt{3-\sqrt{3}}$. Insbesondere zeigt auch die Rechnung, dass der Umkreisbogen *k* im Falle des (3,1)-Möndchens größer als ein Halbkreis.

2. *Fall* (*m,n*) = (3,2): Gleichung $\sqrt{2}\sin 3a = \sqrt{3}\sin 2a$, woraus sich durch Verwendung der Formeln für den doppelten und den dreifachen Winkel sowie Division durch sin a schließlich ergibt:

$$3(\cos 2a) + 3 = 1 + 4(\cos 2a) + 4\cos^2 a$$

oder

$$\cos 2a = \frac{1}{8}\sqrt{33} - \frac{1}{8},$$

was für 2a den ungefähren Wert 53,62° liefert.

3. *Fall* (*m,n*) = (5,1): Gleichung $\sin 5a = \sqrt{5}\sin a$. Wegen sin 5a = 5(sin a) – $20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha$ wird hieraus schließlich cos a = $\frac{1}{4}(\sqrt{5+4\sqrt{5}}-1)$. Also ergibt sich wieder eine konstruierbare Lösung; für 2a findet man den ungefähren Wert 46,8783°.

4. *Fall* (*m,n*) = (5,3): Gleichung $\sqrt{3}\sin 5a = \sqrt{5}\sin 3a$, was schließlich auf

$$\cos 2a = \frac{\sqrt{\frac{5}{3}} - 1 + \sqrt{\frac{20}{3} + \sqrt{\frac{20}{3}}}}{4}$$

und damit auf den ungefähren Wert 33,59° für 2a.

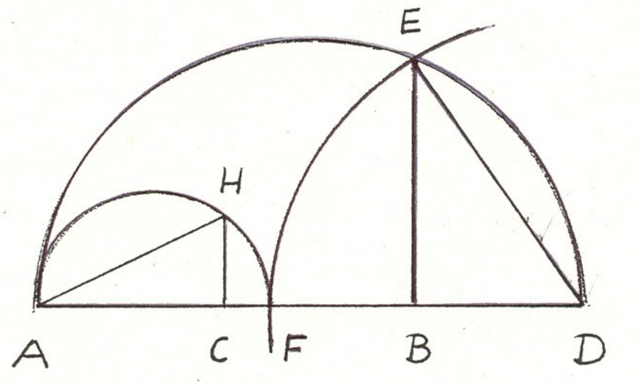
Diese rechnerische Lösung liefert nicht unmittelbar die konstruktive; man kann sich allerdings überlegen, dass man mit Hilfe des Fasskreises aus der Kenntnis des Winkels a eine Konstruktion des Umkreisbogens *k* (in der Bezeichnungsweise von oben) gewinnen kann und damit des geradlinigen und schließlich des krummlinigen Möndchens. Dies ist allerdings konstruktiv gesehen keine sehr befriedigende Lösung; schönere Konstruktionen für das (5,1)- und das (5,3)-Möndchen sind mir allerdings nicht bekannt.

Clausen vermutete, dass es außer den genannten keine quadrierbaren Möndchen gäbe: „Ich glaube schwerlich, dass sich die Größen, die die Winkel der andern Verhältnisse entsprechenden Abschnitte bestimmen, geometrisch finden lassen.“ (Clausen 1840, 376) Die Clausensche Vermutung erwies sich als richtig; es dauerte allerdings bis 1948, bis sie vollständig bewiesen werden konnte.[21] An der schrittweisen Erarbeitung dieses Resultates, das im wesentlichen durch die genaue Untersuchung der sich ergebenden Galois-Gleichungen erzielt wurde, beteiligten sich eine ganze Reihe von Mathematikern, u.a. E. Landau und N. Tschebotarew.

Zum Abschluß möchte ich noch auf eine andere Art der Möndchenquadratur eingehen, wie sie sich bei Ch. Hutton (1737 – 1823) 1814 findet in seiner englischen Bearbeitung des seinerzeit weitverbreiteten und in zahlreichen Auflagen erschienenen mathematischen Unterhaltungswerkes „Recréations

[21] Vgl. Wieleitner 1934 sowie Stevenhagen/Lenstra 1996.

mathématiques ... “ von J. Ozanam. Huttons Konstruktion (vgl. Hutton 1814, 327 – 332) beruht – ohne dass dies vom Autor erwähnt würde – auf den Eulerschen Rechnungen. Sie geht von einem gegebenen Kreis *k* aus (unserem Umkreisbogen), in dem ein Polygonzug mit lauter gleichlangen Kanten entsprechender Anzahl konstruiert werden soll. Nehmen wir als konkretes Beispiel das (3,1)-Möndchen, so geht es um einen einzubeschreibenden Kantenzug *AI*, *IK* und *KL*. Nun verbinde man *A* mit *L* und ziehe durch diese Punkte den Kreisbogen *l*, der dafür sorgt, dass die zu den beiden Sehnen gehörigen Mittelpunktswinkel gleich werden den Mittelpunktswinkel zu den Sehnen *AI*, *IK* und *KL*. Dabei kommt es zuerst einmal darauf an, für *AI* etc. die richtige Länge zu wählen. Dieses Problem wird durch Rechnung gelöst. Wie wir oben gesehen haben, muss im Falle des (3,1)-Möndchens die Länge gleich $\sqrt{3-\sqrt{3}}$ gewählt werden. Dies bewerkstelligt Hutton folgendermaßen:



Man konstruiere die Strecke *AB* gleich dem Durchmesser des gegebenen Kreises *k*. Dann verlängere man über *B* hinaus und trage hierauf von *B* aus nochmals den Radius ab. Der Endpunkt sei *D*. Schließlich sei *C* der Mittelpunkt von *AB*. Nun ziehe man über *AD* einen Halbkreis und errichte in *B* die Senkrechte auf *AB*; ihr Schnittpunkt mit dem Halbkreis sei *E*. Um *D* ziehe man den Kreis durch *E*; sein Schnittpunkt mit *AD* sei *F*. Über *AF* ziehe man wieder einen Halbkreis und errichte in *C* die Senkrechte. Deren Schnittpunkt mit dem Halbkreis über *AF* sei *H*. Behauptet wird nun: *DE* ist der Radius des Kreisbogens *l* und *AH* ist die Länge der gesuchten Sehnen im Kreis *k*.
Um das Möndchen konkret zu konstruieren, trage man von einem beliebigen Punkt *A* auf dem gegebenen Kreis *k* dreimal die Strecke *AH* ab; verbinde *A* mit *H* und ziehe um diese beiden Punkte Kreise mit Radius *DE*. Dann ziehe um deren Schnittpunkt (man muss natürlich den richtigen wählen) den Kreisbogen *l*, der *A* mit *L* verbindet.
Verifizieren lässt sich die angegebene Konstruktion durch Nachrechnen. Man findet, dass $|DE| = r\sqrt{3}$ ist, $|AF| = r\left(3-\sqrt{3}\right)$ und $|AH| = r\sqrt{3-\sqrt{3}}$. Hutton gibt eine analoge, wenn auch wesentlich verwickeltere Konstruktion für das (5,1)-Möndchen an, während er sich beim (3,2)- und (5,3)-Möndchen mit dem

Hinweis begnügt, man müsse in den jeweils gegebenen Kreis Sehnen der Länge $\sqrt{\frac{9}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}}$ bzw. $\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}-\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}}}}$ entsprechend oft eintragen. Wie man sich Strecken dieser Länge geschaffen kann, sagt er allerdings nicht. Natürlich gibt es hierfür ein kanonisches Verfahren, das aber kaum praktikabel und recht unschön ist: Durch Abtragen der Einheitstrecke konstruiere man Strecken der Länge 33 und 16 (um im ersten Beispiel zu bleiben), dann verwende man den Strahlensatz, um eine Strecke der Länge $\frac{33}{16}$ herzustellen, anschließend zieht man mit Hilfe des Höhensatzes die Wurzel und so weiter. So betrachtet liefert die algebraische Lösung eine konstruktive, aber diese ist wenig interessant. Ähnlich verwandte Gauß auch nicht seine Entdeckung der Konstruierbarkeit des 17ecks für dessen Konstruktion; die heute bekannten Konstruktionen wurden erst einige Jahre nach Gauß gefunden. Auch Konstruktionen von Näherungswerten für die Kreiszahl – etwa die sehr exakte von S. Ramanuyan $\left(\pi \approx \frac{355}{113}\right)$ – beruhen darauf, errechnete Näherungswerte (Zu Chongzhi, Otho, Metius) konstruktiv elegant zu realisieren (vgl. Carrega 1989, 94 – 96).

Schließlich sei noch erwähnt, dass man das Problem der Möndchen in mancherlei Hinsicht verallgemeinern kann; Beispiele hierfür findet man bei Wieleitner 1934 sowie in dem neueren, didaktisch orientierten Artikel Heinrich/Walser 1999; verwandte Fragestellungen diskutiert Bareil 2000.

5. Literatur

Bareil, H.: Variations sur un mini-problème de géométrie (Bulletin de l'APMEP No. 432 (2000), 30 – 41.

Bretschneider, A.: Geometrie und die Geometer vor Euclides (Leipzig: Teubner, 1870).

Carrega, J. C.: Théorie des corps. La règle et le compas (Paris : Hermann, 1989).

Clausen, Th.: Vier neue mondförmige Flächen (Journal für die reine und angewandte Mathematik 21 (1840), 375 – 376).

DeTemple, D. W.: Carlyle Circles and the Lemoine Simplicity of Polygon Constructions (American Mathematical Monthly 98 (1991), 97 – 108).

Euler, L.: Considerationes cyclometricae. In: L. Euler "Opera omnia" Series I, volumen 28 "Commentationes geometricae", ed. A. Speiser (Lausanne: Orell Füssli, 1955), 205 – 214.

Heath, Sir Th. : Euclid: The Thirteen Books of the Elements. Vol. 1 (Books I and II) [New York: Dover, 1956].

Heinrich, F./Walser, H.: Verallgemeinerung der „Möndchen des Hippokrates“ (Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 52 Heft 5 (1999), 264 – 270).

Hutton, Ch.: Recreations in Mathematics and Natural Philosophy. Vol. 1 (London, 1814).

Knorr. W.: The Ancient tradition of Geometric Problems (New York: Dover, 1993)

Perrin, D.: Eine Ergänzung zum Bericht über Geometrie der Kommission Kahane: das Beispiel der affinen Geometrie im Collège (Mathematische Semesterberichte 48 (2002), 211 – 245).

Rudio, F.: Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates (Leipzig: Teubne, 1907).

Schönbeck, J.: Thomas Fincke und die Geometria rotundi (erscheint demnächst in Centaurus).

Schupp, H./Dabrock, H.: Höhere Kurven (Mannheim u.a.: BI, 1995).

Scriba, C. J.: Welche Kreismonde sind quadrierbar? (Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 11 Heft 5 (1988), 517 – 539).

Steele, A. D. : Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik und Astronomie Abteilung B, 3 (1936), 287 – 363).

Stevenhagen, P./Lenstra, H. W.: Chebotarev and his Density Theorem (The Mathematical Intelligenzer 18 No. 2 (1996), 26 – 37).

Volkert, K.: Die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone (Mathematische Semesterberichte 46 (1999), 1 – 28).

Wieleitner, H.: Zur Geschichte der quadrierbaren Kreismonde, hg. von J. E. Hofmann. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des neuen Realgymnasiums München für das Schuljahr 1933/34 (München, 1934).

Zenker, T.: Die Möndchen des Hippokrates. Studienarbeit für das Staatsexamen (Universität Heidelberg, 1999) [unveröffentlicht]

Dank: Den Hörern meiner Vorlesung „Geschichte der Geometrie“ (Frankfurt, WS 01/02) möchte ich herzlich für ihre Geduld und Aufmerksamkeit danken. Wichtige Vorarbeiten zu meinem Artikel hat Herr Tim Zenker (Mannheim) mit seiner oben genannten Staatsexamensarbeit geleistet.

Letzte Aktualisierung: 18.9.04