Axiome räumliche Geometrie

(aus Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie (Stuttgart: Teubner, 1968 [11. Auflage])
Grundbegriffe: Punkte, Geraden, Ebenen; Raum

„Erklärung. Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit A, B, C, …; die Dinge des zweiten Systems nennen wir *Geraden* und bezeichnen sie mit a, b, c, …; die Dinge des dritten Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; …
Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen“, „zwischen“, „kongruent“; die genaue und für mathematische zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*.“

Relationen zwischen Punkten und Geraden, Punkten und Ebenen sowie Geraden und Ebenen (zusammengehören, liegt auf, geht durch, inzidieren); weitere Relationen: liegt zwischen, ist kongruent.

Axiome der Verknüpfung

I,1. Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade g, die mit jedem der beiden Punkte zusammengehört.
I,2. Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.
I,3. Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.
I,4. Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es stets eine Ebene e, die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört. Zu jeder Ebene gibt es stets einen mit ihr zusammengehörigen Punkt.
I,5. Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es nicht mehr als eine Ebene, die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört.
I,6. Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden g in einer Ebene e liegen, so liegt jeder Punkt von g in der Ebene e.
I,7. Wenn zwei Ebenen α und β einen Punkt A gemeinsam haben, so haben sie noch einen weiteren Punkt B gemeinsam.
I,8. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

Axiome der Anordnung

II,1. Wenn ein Punkt B zwischen einem Punkt A und einem Punkt C liegt, so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt dann auch zwischen C und A.
II,2. Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B auf der Geraden AC, so dass C zwischen A und B liegt.
Bezeichnung: Alle Punkte der Geraden AB zwischen und A und B bilden die Strecke AB.
II,3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.
II,4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und g eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft; wenn dann die Gerade g durch einen Punkt

der Strecke AB geht, so geht sie gewiss auch durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC.

Axiome der Kongruenz

III,1. Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden g und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden g' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden g' von A' stets einen Punkt B' finden, so dass die Strecke AB der Strecke A'B' kongruent oder gleich ist; in Zeichen $AB \equiv A'B'$.

III,2. Wenn eine Strecke A'B' und eine Strecke A''B'' derselben Strecke AB kongruent sind, so ist auch die Strecke A'B' der Strecke A''B'' kongruent; oder kurz: wenn zwei Strecken einer dritten kongruent sind, so sind sie untereinander kongruent.

III,3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsamen Punkte auf der Geraden g und ferner A'B' und B'C' zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden g' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \equiv A'C'$.

III,4. Es sei ein Winkel $\angle(h,k)$ in einer Ebene e und eine Gerade g' in einer Ebene e' sowie eine bestimmte Seite von g' in e' gegeben. Es bedeute k' einen Halbstrahl der Geraden g', der vom Punkte O' ausgeht; dann gibt es in der Ebene e' einen und nur einen Halbstrahl k', so daß der Winkel $\angle$ (h,k) kongruent oder gleich dem Winkel $\angle$ (h',k') ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $\angle$ (h',k') auf der gegebenen Seite von g' liegen, in Zeichen:

$$\angle (h,k) \equiv \angle (h',k').$$

Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d.h. es ist stets

$$\angle (h,k) \equiv \angle (h,k).$$

III,5. Wenn für zwei Dreiecke ABC und A'B'C' die Kongruenzen

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

gelten, so ist auch stets die Kongruenz

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$$

erfüllt.

Parallelenaxiom

IV. Es sei g eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb g;: dann gibt es in der durch g und A bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und g nicht schneidet.

(Es fehlen jetzt noch die Axiome der Stetigkeit [Vollständigkeit, archimedisches Axiom].).

Bem. Die Axiome I,1 und I,2 sowie I,4 und I,5 lassen sich zusammenfassen, indem man die Existenz „genau einer" Geraden bzw. Eben verlangt. Das Axiom III, 5 kann man durch die etwas stärkere Aussage des üblichen Kongruenzsatzes SWS ersetzen, da dieser aus der Hilbertschen Formulierung folgt.