G. W. Leibniz als Mathematiker

Erhard Scholz

Vorweg

Es wäre völlig unzulässig, den von eigenem Anspruch und Werk her auf eine *scientia universalis* zielenden Denker G.W. Leibniz als Fachwissenschaftler, etwa als "Mathematiker", vorzustellen. Der Titel dieses Beitrages soll nicht in diesem Sinne verstanden werden. Er weist jedoch auf das Paradox hin, eine gegen wichtige Züge unseres Protagonisten verstoßende Einschränkung machen zu müssen, um einen so vielseitigen und mehrschichtigen Autor überhaupt in den Blick nehmen zu können. Ein jeglicher beschränke ihn auf seine Art; bei mir ist es die Perspektive der Mathematikgeschichte. Ich werde aber im Auge behalten, dass Leibniz nicht Vertreter irgend *eines* Faches war. Er produzierte, dilettierte, irritierte und bildete das Wissen seiner Zeit über alle (oder jedenfalls viele) Fächergrenzen hinweg um, *revolutionierte* es im engeren Sinne des Wortes. Nicht zuletzt trug er zur frühneuzeitlichen Umbildung der mathematische Wissens entscheidend bei.

Leibniz wurde aber auch viel weiter zu einem der herausragenden Akteure, Propagandisten und Politiker der Wissenschaft der frühen Neuzeit. Nach einer Phase der Trivialisierung seiner philosophischen Auffassungen im 18.Jahrhundert (Leibniz-Wolffsches *System*) bei gleichzeiter Ausarbeitung eines kleinen Teils seiner wissenschaftlichen Werkes wurde er ab etwa Mitte des 19. Jahrhunderts "wiederentdeckt". Danach wurde er rasch zu einem wichtigen Stichwortgeber für den Übergang zur wissenschaftlichen Moderne im Sinne des 19. und 20. Jahrhunderts, fast sogar zu einem mythisierten, zumindest in seiner universellen Antizipation auch überschätzten Vordenker der mathematischen Wissenschaften. Ich denke dabei an die Leibnizischen Stichwörter *analyis situs* und *characteristica universalis*, denen bei der Herausbildung gänzlich *verschiedener* neuer Zweige der modernen Geometrie (projektive Geometrie, Topologie, Grassmannsche Ausdehnungslehre) und der modernen Logik (Logikkalkül) eine scheinbar wegweisende Rolle zugeschrieben wurde. Hinzu tritt der spezifisch Göttingische Topos (im Göttingen F. Kleins und D. Hilberts, etwa 1890 bis ca. 1930) einer in die realhistorische Welt hinunterprojizierten (angeblichen) 'praestabilierten Harmonie' zwischen mathematischer und physikalischer Erkenntnisgewinnung.

Auf der anderen Seite entstanden umfangreiche und wissenschaftlich solide Editionen von Auszügen des Leibnizschen Werkes. Nur einen winzigen

Bruchteil davon hatte Leibniz zu seinen Lebzeiten publizieren können oder wollen.
1840: Erdmann (Hrsg.), Opera Omnia, 6 Bde.,
1843: Pertz (Hrsg.), Gesammelte Werke, Geschichte, 4. Bde.,
1854: L.A. Foucher de Careil (éd.), Oeuvres, 7 Bde.,
1849: C.I. Gerhardt (Hrsg.), Mathematische Schriften, 7 Bde.,
1875: C.I. Gerhardt (Hrsg.), Philosophische Schriften, 7 Bde.,
1899: C.I. Gerhardt (Hrsg.), Briefwechsel mit Mathematikern,
(nur Anfangsdaten der jeweiligen Edition genannt).

Selbst diese zum Teil umfangreichen Teileditionen erwiesen sich mit der schrittweise besseren Kenntnis des umfangreichen nachgelasssenen Werkes Leibniz' als unzulänglich. Ab 1923 erscheinen nun als *Akademie Ausgabe: Sämtliche Schriften und Briefe von G.W. Leibniz* in 8 Serien,
Ser. I-III: Korrespondenz; I allgemein, politisch, historisch; II philosophisch; III mathematisch, naturwissenschaftlich und technisch,
IV: Politische Schriften,
V: Historische und sprachwissenschaftliche Schriften (Bearbeitung noch nicht begonnen),
VI: Philosophische Schriften,
VII: Mathematische Schriften (der zuletzt erschienene Band VII.3, 2003, enthält die Arbeiten zu "Differenzen, Folgen, Reihen" der Jahre 1672—1676),
VIII: Naturwissenschaftliche, medizinische und technische Schriften (Band VIII.1 in Bearbeitung).

Derzeit sind 43 Bände erschienen, und immer noch handelt es sich nur um einen Bruchteil des Gesamtwerkes. Der Nachlass umfasst etwa 50000 'Stücke'; seine Edierung wird aller Voraussicht nach noch einige Jahrzehnte in Anspruch nehmen. Zur Zeit wird in vier Akademie-Arbeitsstellen intensiv an diesem Vorhaben gearbeitet (Berlin (VIII), Potsdam (IV), Hannover (I, III, VII), Münster (VI), siehe http://www.leibniz-edition.de/). Wir können nur hoffen, dass dieses Langfristprojekt nicht dem derzeitigen Trend zur marktorientierten Umstellung der Forschungsfinanzierung zum Opfer fällt.

Nun kann man wohl "mein" Problem erahnen, das eben nicht nur meines ist. Wollte man versuchen, Leibniz einigermaßen gerecht zu werden, so bedürfte es allein für diesen Zweck einer eigenen Ringvorlesung. Die hier gewählte Eingrenzung wird damit, so hoffe ich, verständlich. Sie entspricht einer *Betrachterperspektive*: Leibniz aus Sicht der Mathematikgeschichte (und selbst dies aus den angedeuteten Gründen vorläufig). Zu wünschen wären als Ergänzung mindestens *fünf weitere Perspektiven*: Leibniz aus Sicht der Philosophie, der Physik (Dynamik), der Geschichtsschreibung, der Technik, und schließlich Leibniz als Jurist, Diplomat und höfischer Intellektueller. Das jedoch sind bloße Wünsche; wir beschränken uns hier auf den zuerst genannten Blick.

Abbildung 1: G. W. Leibniz in jungen Jahren

1. Biographisches

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) wurde am 1. 7. 1646 in Leipzig (nach Gregorianischem Kalender, am 21. 06. 1646 nach der zur Zeit in Sachsen geltenden alten Konvention) geboren. Sein Vater Friedrich L. war 'Aktuar' und Professor der Moral (Philosophie) an der Universität Leipzig, seine Mutter Katharina stammte aus einer wissenschaftlich gebildeten Familie. Gottfried Wilhelm besuchte die Nicolai–Schule und stöberte nach dem Tod seines Vaters (1654) in eigenständiger Lektüre durch dessen Bibliothek. So lernte er autodidaktisch Latein und (rudimentär) Griechisch.

Im Jahre 1661 begann er in Leipzig zu studieren, später auch in Jena und in Altdorf bei Nürnberg. Seine Fächer waren Jura, Philosophie und Mathematik, letztere in sehr traditioneller Fassung, in philosophischer Hinsicht Aristoteles, in mathematischer Euklid (bei E. Waigel, Jena). Das entsprach dem Stand der Universitätslehre im Deutschland der Zeit. Es machte aber auch nicht viel, Leibniz' Hauptfach war sowieso die Jurispudenz. 1666 wurde er in Altdorf mit einem juristischen Thema (*De casibus complexibus*) zum Doktor promoviert. Davon angeregt begann er algebraisch-kombinatorische Studien zu betreiben (*Dissertatio de arte combinatoria* 1666) [GM V, 7–87].

Ein Angebot, an der Universität Altdorf zu lehren, schlug er aus. Ihn zog es zu dem neu entstehenden Wissen des 17. Jahrhunderts, das weitgehend ausserhalb der Universitäten entstand, in höfischen Milieus und informellen oder organisierten Gelehrtenzirkeln, aus denen gerade die ersten Akademien hervorgingen (1662 Royal Society London, 1666 Académie Royale des Sciences Paris).

Dabei machten Leibniz natürlich die Zerstörungswirkungen des 30-jährigen Krieges zu schaffen, die Deutschland materiell, kulturell und politisch gegenüber anderen europäischen Ländern (den Niederlanden, England, Frankreich, Italien) drastisch hatten zurückfallen lassen. Für wissenschaftlich interessierte junge Leute der Generation G.W.L.'s gab es in Deutschland buchstäblich *keine* wissenschaftlichen Arbeitsmöglichkeiten, Institutionen oder gar 'Karriere'-Wege. Leibniz wählte daher den ihm einzig möglich erscheinenden Weg in die Welt der europäischen Wissenschaften: als bürgerlicher Intellektueller am Hofe und im Dienste verschiedener Fürstenhäuser oder zahlungsfähiger (und -williger) Adliger.

Dies führte ihn zunächst (1667ff.) an den Hof des *Kurfüsten von Mainz* (Johann Philipp von Schönborn), gefördert und mit eigenen Aufträgen versehen und teilfinanziert von *J.C. von Boineburg*, einem wohlhabenden und am Mainzer Hof einflussreichen Adligen. Zu Leibniz' Aufträgen gehörte die Ausarbeitung von Vorschläge zur Reform des Rechtswesens, politisch-diplomatische Gutachten (u.a. das Königreich Polen betreffend), philosophisch-theologische Beiträge zur Vorbereitung einer erstrebten "Wiedervereinigung" der christlichen Konfessionen, die Ausarbeitung eines höchst dubiosen und unerbetenen "Ratschlages" für den französischen König Louis XIV zur Durchführung eines Kriegszuges gegen Ägypten (Leibniz versuchte diese Variante als Ablenkungsmanöver gegenüber einem erwarteten Angriff der Heere Louis XIV auf das Rheinland und die Niederlande ins Gespräch zu bringen, allerdings gänzlich erfolglos).

Daneben fand Leibniz erstaunlicherweise aber auch Zeit für eine Fortsetzung seiner arithmetisch-algebraischen Studien. Er begann sich sehr erfolgreich mit *Summen- und Differenzenfolgen* zu beschäftigen, die ihm später zu einem wichtigen Werkzeug der entstehenden Infinitesimalanalysis wurden. Über die Bekanntschaft mit H. Oldenburg, dem Sekretär der Royal Society, konnte er ersten Kontakt mit dem Londoner Wissenschaftlermilieu aufnehmen, über den königlichen Bibliothekar P. de Carcavi mit Wissenschaftlern der Pariser Akademie.

1670 hatte Leibniz die Idee einer *mechanischen 4-Spezies Rechenmaschine*. Darin war er nicht einzigartig. Blaise Pascal hatte um 1643 eine 8-stellige additiv-subtraktive (2-Spezies) Rechenmaschine entworfen, Wilhem Schickard (1592–1635) aus Tübingen arbeitete um 1623/24 an einer 4-Spezies Maschine, von der wir aber nur durch seine Korrespondenz mit J. Kepler etwas wissen. Historische Prototypen oder Modelle von letzterer sind leider nicht erhalten; jedoch ist klar, dass Schickard unterstützt von Mechanikern daran arbeitete (Korte 1981). Unklar ist auch, ob Leibniz etwas von dem Schickardschen Projekt wusste. Möglich erscheint, dass er durch mündliche

Informationen, insbesondere während seiner Zeit in Altdorf, davon erfahren hat (Hecht 1992, 133).

Im Jahre 1671 wurde Leibniz vom Mainzer Kurfürsten (*"consilium aegyptiacum"*) und von Boineburg (in eigener Sache) auf diplomatische Mission nach Paris geschickt. Diplomatisch wurde sein Aufenthalt zu einem Misserfolg; er konnte seinen eigenartigen ägyptischen Kriegszugsplan nicht einmal an geeigneter Stelle vortragen. Trotzdem gelang es ihm, den Kurfürsten davon zu überzeugen, dass ein längerer Paris-Aufenthalt für seinen Auftraggeber von Vorteil war. Tatsächlich gelang es ihm, 1673 in diplomatischer Mission nach London geschickt zu werden, um laufende Friedensverhandlungen zwischen England und den Niederlanden zu unterstützen. An denen hatte auch der Kurfürst ein Interesse.

Leibniz nützte beides als Gelegenheiten, mit Wissenschaftlern der beiden Hauptstädte in Kontakt zu treten. In Paris waren es vornehmlich Christan Huygens (1629–1695) und Pierrre de Carcavi (1600–1684); in London Heinrich Oldenburg (ca. 1618–1677), John Pell (1611– 1685), Robert Hooke (1635–1702), Robert Boyle (1627–1691). Indirekt erfuhr er in diesen Gesprächen auch vom neuen Stern am Londoner Wissenschaftshimmel, Isaac Newton (1642–1727), jedoch kam es nicht zu einem persönlichen Kontakt der beiden.

1673 wurde G.W.L. aufgrund seiner Ankündigung der Rechenmaschine als korrespondierendes Mitglied in die Royal Society aufgenommen. Dies geschah trotz beiderseitigen Enttäuschungen in Gesprächen mit J. Pell, die zeigten, dass es sich bei Leibniz' Resultaten in Sachen Reihen lediglich um Wiederentdeckungen von Ergebnissen handelte, die von anderen Mathematikern vor ihm im Rahmen der sogenannnten *arithmetica infinitorum*, d.h. des symbolischen Rechnens mit unendlichen Summenausdrücken, auch schon gefunden worden waren (J. Wallis, G.de S. Vincent, I. Barrow, N. Mercator).

Auf dem Rückweg von London nach Paris nahm Leibniz den Weg über Holland und trat in Kontakt mit J. Hudde, den neben C. Huygens bedeutendsten niederländischen Cartesianer dieser Zeit, und traf den philosophischen Freigeist B. Spinoza sowie den Naturforscher A. van Leeuwenhoek.

Nach der Rückkehr nach Paris kam es zu einem weiteren Rückschlag; der Kurfürst Johann Philipp starb (L.'s Unterstützer von Boineburg war schon ein Jahr früher verstorben), und der Nachfolger sah nicht ein, warum er einen etwas extravaganten Intellektuellen in Paris in diplomatischer Dauermission finanzieren sollte. Leibniz nahm daher Kontakt mit anderen potentiellen Auftraggebern auf, darunter insbesondere den Herzog Johann-Friedrich von Braunschweig und Lüneburg (Hannover). Hier setzte er seine Idee der mechanischen Rechenmaschine als ein potentiell wichtiges Projekt zur Vereinfachung der Finanz- und Merkantilrechnung des Hofes ein. Allerdings versuchte er, so lang in Paris zu verbleiben, wie er auf eine bezahlte Position an der Académie des Sciences oder am Collège Royal hoffen konnte. Als jedoch im Jahre 1676 die Nachfolge P. de Robervals (1602–1675) an der Académie gegen Leibniz entschieden wurde, sah er keine Chance mehr, auf diesem Weg zum Zuge zu kommen. Nach einem erneuten kurzen Besuch in London kehrte er nach Deutschland zurück, diesmal nach Hannover.

Die Jahre des *Pariser Aufenthaltes* (1671–1676), insbesondere diejenigen nach der Rückkehr aus London (1673ff.), waren die mathematisch produktivste Zeit für Leibniz. Durch C. Huygens wurde er Schritt für Schritt in den aktuellen Stand der Forschung in Algebra, Geometrie, Arithmetik und unendlichen Reihen eingeführt, insbesondere nachdem er in London die bittere Erfahrung hatte machen müssen, dass viele der von ihm gewonnenen Ergebnisse der frühen Periode auch schon von anderen Mathematikern hergeleitet worden waren. Zu seine eigenen wichtigen Ergebnissen dieser Zeit zählen:

– *Summation unendlicher Reihen* durch Beziehung zu Differenzenreihen,

– Integrationssätze (insbesondere die von Leibniz' so genannte *Transmutation*),

– *arithmetische Integration* der Kreisfläche,

– diverse weitere *Quadraturen* (Flächenberechnungen) und *Rektifikationen* (Berechnung von Kurvenlängen),

– weitere *Reihenentwicklungen*, z.B. für $\arctan x \ldots$

– symbolische Darstellung unendlich kleiner Differenzen(-verhältnisse) und ihrer Summen in einem eigenen *Differential- und Integralkalkül*

– Beziehungen zur *Dynamik*.

Die von Leibniz hergestellten Beziehungen zur Dynamik bauten auf zwei Arbeiten aus den Mainzer Jahren auf (*Theoria motus abstracti, Theoria motus concreti* Mainz 1671, GM VI, 61ff.) (Hecht 1992, 24ff.). Darin hatte sich der junge Leibniz mit den Arbeiten von C. Huygens und C. Wren über den elastischen Stoß auseinander gesetzt und den Versuch einer begrifflichen (axiomatisch ausgerichteten) und philosophisch-metaphysischen Fundierung unternommen. Für Leibnizens spätere mathematische Entwicklungen nicht folgenlos war das dabei entwickelte Verständnis des Kontinuums als aus infinitesimalen Elementen aufgebaut. Dem korrespondierte bei Bewegungen eine immanente "Tendenz" (*conatus*) zur Aufrechterhaltung ihres Bewegungszustandes. Das Konzept des *conatus* hatte Leibniz von T. Hobbes übernommen, der es wiederum unter kritischem Anschluss an B. Cavalieris *Indivisible* gebildet hatte. Letztere spielen in der Mathematik des 17.Jahrhunderts eine wichtige Rolle während der frühen Phase einer noch unformalisierten (Infinitesimal-) Analysis.

Ab 1676 stand Leibniz im Dienste des Herzogs von Braunschweig und Lüneburg, später auch Hannover. Er diente unter drei Dienstherren und ihren Frauen, Johann Friedrich (†1679), Ernst August (†1698) und Frau Sophie

Abbildung 2: Gottfried Wilhelm Leibniz als höfischer Intellektueller

samt beider Tochter Sophie Charlotte (ab 1700 Kurfürstin von Brandenburg-Berlin), schließlich unter Georg Ludwig (ab 1714 King George I von England). Während er unter den beiden ersten Chefs erträgliche oder sogar gute Arbeitsbedingungen fand, unterstützt vom kulturellen Interesse der Chefinnen, insbesondere Sophie (später von ferne auch von Sophie Charlotte), wurde die Lage unter dem (nicht zuletzt durch L.'s höfisch-legitimatorisch wichtige Arbeiten zur Geschichte des Welfenhauses zum König von England avancierten) letzten Dienstherren für Leibniz ziemlich unerträglich.

Dabei hatte Leibniz von Anfang an am Hofe vielfältige Beratungsarbeiten übernommen, die wie alles in dieser Welt teils erfolgreich teils weniger erfolgreich verliefen. Hinzu traten den höfischen Horizont weit überschreitende wissenschaftliche Forschungs- und Organisationsaktivitäten. Zu den ersteren gehörten unter anderem die Reform des Rechtswesens, Aufbau und Organisation der herzöglichen Bibliothek (Hannover, später auch Wolfenbüttel) und des Archivwesens, technische Projekte, insbesondere zur Verbesserung der Entwässerung im Harzer Silberbergbau (1679–86 und 1693–95, allerdings mit äußerst durchwachsener Erfolgsbilanz), Studien zur Rechtsansprüchen des Welfenhauses, die seinem Dienstherren beim Erwerb der 'Kurwürde' äußerst dienlich waren (und Leibniz eine Gehaltserhöhung auf 1000 Taler pro Jahr sowie den Titel 'Geheimer Justizrat'). Zum Konflikt insbesondere mit seinem letzten Dienstherren kam es um eine groß angelegte Geschichte des

Welfenhauses, die von seinen Herzögen als genealogisch ausgerichtete Auftragsforschung verstanden wurde, in der Leibniz aber universalhistorische Ansprüche einzubringen versuchte. Das führte zu einer Ausuferung des sowieso sehr umfangreichen Projektes und mehrfache Nichteinhaltung der von den Dienstherren erwünschten Abgabetermine.

An Gesprächen über Philosophie und Wissenschaften war zunächst auch Johann Friedrich, nach dessen Tod nur noch Sophie, die Frau des zweiten Dienstherren und deren Tochter Sophie Charlotte, interessiert. Leibniz machte jedoch weit über die Landesgrenzen hinausgreifende Anstrengungen zur Förderung der Wissenschaften und der Technik. Dazu gehörten vielfältige Initiativen zur Einrichtung wissenschaftlicher Akademien und Gesellschaften. So verfasste er etwa im März 1679 eine Eingabe an Johann Friedrich für die Umwidmung einer ihm zunächst persönlich (bis zu seinem Lebensende) in Aussicht gestellten Zahlung von ein bis zwei Prozent des durch die Verbesserung der Harzer Minen eingefahrenen Gewinns zur Ausstattung *in perpetuum* einer neu einzurichtenden Akademie [A I.2, 159ff.]. Dieses Vorhaben zerschlug sich jedoch schon bald aus zwei Gründen. Der ins Auge gefasste Stifter des Fonds starb noch im Dezember desselben Jahres; ausserdem sollte es sich bald herausstellen, dass die erhoffte Rendite des Leibnizschen Harz-Projektes aussblieb.

Doch wurde Leibniz durch die ersten Erfolge seiner mathematischen Publikationen (siehe unten) ab den 1690er Jahren so weit bekannt, dass er als Berater und Unterstützer von Akademieprojekten an anderen Orten sehr gefragt war: Berlin 1700, Dresden 1703, St. Petersburg 1711, Wien 1712 (Gründungsjahre). Alle Initiativen für Akademieprojekte hatten große Anlaufprobleme, die beiden letzgenannten, darunter die bis zur Jahrhundertmitte erfolgreichste der genannten Gründungen (Petersburg), erfolgten sogar erst nach Leibniz' Tod. Auf die schwierigen Gründungsgeschichten kann ich hier nicht weiter eingehen. Leibniz tat jedenfalls sein bestes, damit die in anderen europäischen Ländern florierende Wissenschaftskultur der "Aufklärung" auch in den ihm erreichbaren deutschsprachigen Fürstentümern und im zaristischen Russland Fuß fassen konnte.

Schon der relative, wenn auch verzögerte, Erfolg der russischen Akademiegründung zahlte sich in der nächsten Generation für die Leibnizianische Tradition der mathematischen Naturwissenschaften aus (Berufungen Daniel und Nikolaus Bernoullis sowie Leonhard Eulers an die St. Petersburger Akademie). Dagegen kam die Berliner Akademiegründung, von Sophie Charlotte nach ihrer Einheiratung als Brandenburg-Berliner Kurfürstin nach Kräften gefördert, durch Widerstände in Brandenburg und in Braunschweig/Hannover nach wenigen Jahren zunächst einmal zum Erliegen. Schon 1711 fand die letzte Akademiesitzung in Berlin unter Leibniz' Vorsitz statt. Nach der Machtübernahme in Preussen durch Friedrich Wilhelm I. im Jahre 1713 hatte die Akademie keine Priorität mehr, um es vorsichtig auszudrücken, und begann ihren eigentlichen Aufstieg erst unter Friedrich II,

Abbildung 3: von Leibniz als Hofhistoriograph des Welfenhauses
(Quelle Abb. 1 bis 3: St. Andrews University)

also erst nach 1740 (L. Euler 1741– 1760 in Berlin, nach einem Zerwürfnis zwischen Friedrich und ihm wieder in Petersburg).

Auf der anderen Seite zerrte Georg/George I. über seine Dienstherrenkette an G. W. (von) Leibniz, dem die Nobilitierung zwar versprochen wurde, der aber nie förmlich zum Freiherrn ernannt wurde, und forderte dessen Konzentration auf die Hausgeschichte der Welfen. Er schränkte Leibnizens wissenschaftliche Aktivitäten mehr und mehr ein und erwartete von ihm die Einräumung eines absoluten Vorrangs für die höfischen Auftragsarbeiten. Leibniz versuchte sich dem durch einen letzten "Sprung nach oben" zu entziehen, reiste an den Kaiserlichen Hof in Wien (Dezember 1712), schaffte es dort aber nur bis zu einer Ernennung zum 'Kaiserlichen Geheimrat' ohne permanente Remuneration. Kurz nach seiner Rückkehr im September 1714 sprach der mittlerweile zum englischen König avancierte George I. ein Reiseverbot für Leibniz aus. Der musste nun in höchster Intensität an dem lange laufenden Projekt der Geschichte des Welfenhauses arbeiten und auch den Kontakt zu auswärtigen Wissenschaftlern drastisch reduzieren. 1715 wurden die Gehaltszahlungen der Berliner Akademie an den nicht mehr anreisefähigen Leibniz eingestellt. Als Leibniz am 14. 11. 1716 starb, waren seine persönlichen Kontakte zu Wissenschaftlern außerhalb Hannovers weitgehend abgestorben. Am Hof wurde er nur noch als Dienstschreiber des Herrscherhauses (gering) geschätzt und in kleinstem Kreise beigesetzt. Ein einziger direkter wissenschaftlicher Nachruf, verfasst von Fontenelle für die Académie des Sciences in Paris, würdigte ihn als einen der großen Wissenschaftler seiner Zeit.

2. Mathematischer Werdegang

Bevor wir uns Leibnizens herausragenden Beitrag zur Mathematik, seine Begründung der Infinitesimalrechnung (Abschnitt 4), etwas näher ansehen werden, werfen wir in einer ersten Annäherung einen Blick auf seinen mathematischen Werdegang und die von ihm bearbeiteten Themen.

Frühe Arbeiten (1666 — 1671)

Schon im biographischen Abriss wurde erwähnt, dass Leibniz sich schon früh für algebraische Kombinatorik interessierte (*De arte combinatoria* 1666) und sich dem Studium von Summen und Reihen zuwandte. Diese wurde ihm zum Repräsentanten einer symbolischen Wissenschaft, die im speziellen Gebiet schon ungefähr das leistete, was er sich allgemeiner als Ziel der Wissenschaft überhaupt erwünschte. Von höchster Bedeutung für seinen begrifflichen Zugang zu Fragen des Unendlichkleinen wurde ihm ergänzend zu diesen symbolisch-technischen Studien das Ergebnis seiner Auseinandersetzung mit der von C. Huygens aufgestellten Theorie des elastischen Stosses.

Leibniz versuchte hier, einen eigenen axiomatischen Zugang zu der von Huygens vertretenen Theorie der Bewegung zu finden. Er formulierte seine *Hypothesis physica nova* (1671), zweistufig aufgebaut aus einer Theorie der "abstrakten" und einer der "konkreten Bewegung" (*Theoria motus abstracti* respektive *concreti*). Dazu entwickelte Leibniz eine Auffassung des geometrischen Kontinuums, der Strecke, die ein Verständnis der Bewegungsproblematik ermöglichen sollte. Anders als Euklid war für den jungen Leibniz ein Punkt anfänglich nicht etwas, "das keine Teile hat" sondern etwas ohne *Ausdehnunggröße* im Sinne der jeweiligen Dimension. Darin folgte Leibniz Cavalieri, der mit seinen *Indivisiblen* eine Art unendlich kleiner Strecken-, Flächen-, oder Raum- "Atome" angenommen hatte, aus deren unendlicher Zusammenfügung (*omnes indivisibilitates*) endliche geometrische (strecken-, flächen- oder raumartige) Kontinua erzeugt werden konnte. Leibniz verstand aber die unendlich kleine Größen anders als Cavalieri im Sinne einer nicht "feststellbaren Ausdehnung", die "kleiner als jedes angebbare Zahlenverhältnis" waren (*extensio inconsiderabilis, inassignabilis, minor quam quae ratione* [A VI.2, 265]). In dieser Formulierung kann man rückblickend eine Andeutung der späteren Grenzwertidee finden. Dies war ein bleibendes Residuum der früheren Auffassung, selbst wenn Leibniz schon nach wenigen Jahren "offiziell" (d.h. bei einer expliziten Diskussion) zur euklidischen Auffassung des Punktes zurückkehrte und den unendliche kleinen Größen, den *Differentia-*

len, nur noch eine formale, rein symbolische Bedeutung zumass.

Leibniz' Formulierung war wohl durchdacht und auch für moderne Mathematiker gut nachvollziehbar. Seit dem 19. Jahrhundert lernte man sie durch Grenzprozesse zu präzisieren. In dieser Zuspitzung entspräche der frühen Auffassung eines Leibnizschen Punktes im Kontinuum eine unendliche Unterteilung einer Strecke a. In diesem Sinne wäre ein *Punkt* dann durch eine Folge ineinander geschachtelter Teilstrecken (Intervalle) zum Beispiel der Längen $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2^2}, \ldots, \frac{a}{2^k}, \ldots$, eine sogenannte *geometrische Intervallschachtelung*, zu charaktisieren. In höheren Dimensionen träte eine unendliche Folge sogenannter "baryzentrischer" Unterteilungen von "Simplizes" oder Zellen an die Stelle der Intervallschachtelung. Im 20. Jahrhundert wurde dieser vom frühen Leibniz inspirierte Zugang zum Kontinuum namentlich von L.E.J. Brouwer und H. Weyl vertreten (Breger 1986b). Die Differentiale des späteren Leibniz wurden im Laufe des 19. Jahrhunderts durch Grenzwertmethoden der reellen Analysis präzisiert. Im letzten Drittel des 20. Jahrhunderts kam es zu einer erneuten Einführung (logisch aktualer) unendlich kleiner Größen im Rahmen der *Nichtstandard-Analysis*. So sind die Leibnizschen Differentiale auf eine weitere Weise mit Mitteln der modernen formalen Logik nachbildbar geworden.

Leibniz hatte neben Cavalieri auch Thomas Hobbes' Arbeiten über Bewegung intensiv studiert und sich dessen Idee des *conatus* angeeignet, einer Art inhärenten Strebens, einer Tendenz, gedachter oder wirklicher Körper zur Ortsveränderung. Solche "conatus" liessen sich nach Leibniz quantitativ miteinander vergleichen und algebraisch zusammensetzen (sogar inklusive ihrer Richtungseigenschaften, in modernisierter Sprache also sogar "vektoriell"). Ungleiche Bewegungen besaßen demnach für Leibniz verschiedene "conatus", während der Zeitfluss selbst in stets gleicher Weise verläuft. Was der *conatus* für die Bewegung waren, galt ihm der Augenblick (*instans*) für die Zeit, als ein infinitesimaler ausdehnungsloser, aber weiter unterteilbarer Teil. Alle solche galten Leibniz als einander gleich. Leibniz' frühe infinitesimale Auffassung des Punktes eignete sich hervorragend für eine geometrisch-symbolische Repräsentation des von Hobbes übernommenen "conatus", also der infinitesimalen Tendenz, einer Bewegung, sowie der Augenblicke eines Zeitablaufes. Daran schloss sich seine Begründung der Dynamik an. In seiner späteren, ausgereiften Darstellung der Infinitesimalrechnung trat das *Differential* als Grenzidee an dessen Stelle. Mehr dazu in (Aiton 1985, 32ff.) und (Hecht 1992, 26ff.).

Pariser Jahre (1671 — 1676)

Während der Zeit seines Pariser Aufenthaltes einschließlich der Reisen nach London und in die Niederlande machte Leibniz seine bedeutendsten mathematischen Entdeckungen. Er entwickelte die Grundzüge des symbolischen Infinitiesimalkalküls, der Differential- und Integralrechnung. Es gibt jedoch *keine einzige Publikation* zu diesem Thema *aus dieser Zeit*. Wir sind durch

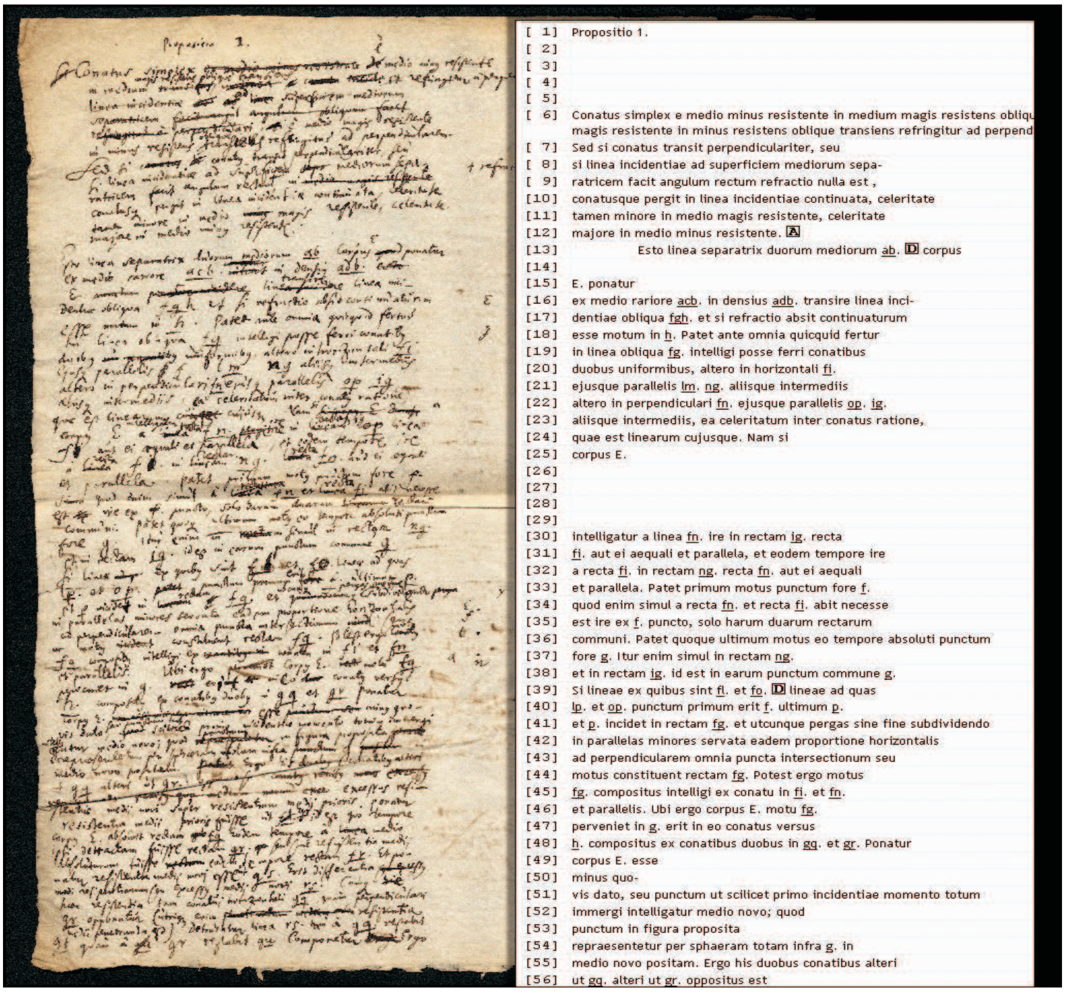


Abbildung 4: Handschrift Leibniz' zur Bewegungstendez *conatus*,
Quelle: Online-Ritter-Katalog, Potsdam, http://zopeman.bbaw.de/ritter

die Korrespondenzen und den ausführlichen Nachlass dennoch über Leibniz' Entdeckungen dieser Periode gut informiert. Der übernächste Abschnitt gibt einen kurzen Abriss des Ergebnisses seiner Arbeiten, weitgehend allerdings aus Sicht der späteren Publikationen. Für mehr Details, insbesondere aus der Entstehungsperiode, siehe (Guicciardini 1999, Bos 1974, Hofmann 1949).

Publikation des Infinitesimalkalküls, 1682ff.

Als Otto Mencke 1682 in Leipzig die *Acta eruditorum*, das erste Gelehrtenjournal in Deutschland, gründete, warb er auch bei Leibniz um aktive Beteiligung. Leibniz war damit ganz einverstanden, bekam er dadurch ja endlich die Gelegenheit, aus seiner wissenschaftlichen Abgeschiedenheit am Braunschweig-Lüneburger Hof herauszutreten und einen Teil seiner schon länger vorliegenden Forschungsergebnisse einer wissenschaftlichen "Öffentlichkeit" vorzustellen. Dabei handelte es sich freilich immer noch um einen äusserst kleinen Kreis von den neuen Wissenschaften gegenüber aufgeschlossenen Gelehrten. Leibniz steuerte zur Gründungsausgabe der *Acta* eine kleine Abhandlung über die arithmetische Kreisintegration bei (Februar 1682) [GM V, 118–122], ein Thema, das er schon in seinen Pariser Jahren erfolgreich behandelt hatte. Das Ergebnis ist heute noch in jedem Analysis- Lehrbuch unter dem Namen *Leibniz-Reihe* zu finden,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots \, . \tag{1}$$

Weitere Publikationen in den *Acta* folgten in regelmässiger Abfolge.

Allerdings hat man sich Leibniz' Abhandlungen nicht wie bei heutigen wissenschaftlichen Publikationen vorzustellen. Er veröffentlichte in der Regel nur Hinweise auf Einzelergebnisse ohne Begründungen. Das lag nicht an Zeitmangel, sondern war Ausdruck einer bewussten Entscheidung. Zum Teil basierte diese wohl darauf, dass Leibniz eher am Auffinden neuer Ergebnisse interessiert als an ihrer detaillierten Begründung, die er den Lesern überließ. Er hatte aber auch noch ein weiteres, extrinsisches Motiv dafür. Das geht aus einem Ratschlag an einen seiner Korrespondenten (W. von Bodenhausen) deutlich hervor:

> Es ist aber guth, daß wenn man etwas würklich exhibiret, man entweder keine demostration gebe, oder ein solche dadurch sie uns nicht hinter die schliche kommen. [GM 7, 359, zitiert nach (Hecht 1992, 56)]

Das neugegründete Journal hatte also für Leibniz hauptsächlich die Funktion, im wissenschaftlichen Konkurrenzkampf Marken zu setzen und Ansprüche zu behaupten. Keinesfalls ging es ihm um eine offene, begründende wissenschaftliche Darstellung. Darin war er noch ganz den Kommunikationsgewohnheiten der Renaissance und der Gelehrtenzirkel des frühen 17. Jahrhunderts verbunden. Die Lektüre seiner Publikationen zur Mathematik in den ersten Jahren der *Acta eruditorum* ist daher sachlich nicht wesentlich einfacher als die der von ihm hinterlassenen Werkmanuskripte.

Auf der anderen Seite enthielten Leibniz' Publikationen deutliche Hinweise, wenn auch häufig in kryptischer Form gegebene, auf Juwelen der neuentstehenden symbolischen Mathematik des ausgehenden 17. Jahrhunderts. Darunter befanden sich zwei Publikationen zu den Grundprinzipien der Infinitesimalanalysis:
1684 *Nova methodus pro maximis et minimis atque ...*,
1689 *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum ...* [GM V, 220–225 und 226–233].

In weiteren Arbeiten demonstrierte Leibniz die Stärke seiner neuen symbolischen Infinitesimalmethoden durch die Lösung bekannter Probleme der mathematischen Physik oder der Geometrie. Schon am Ende der *Nova methodus* von 1684 löste er etwa das von dem französischen Mathematiker Debaune aufgeworfene Problem der Quadratur der Fläche unter der Hyperbel.

Im Jahre 1691 gelang ihm mit seinen Methoden die Lösung des Problems der *Kettenlinie*, d.h. der Kurve, die eine aus frei gegeneinander drehbaren homogenen Elementen unter der Wirkung der eigenen Schwerkraft annimmt. Schon Galilei hatte sich mit dieser Kurve beschäftigt, war aber (fälschlich) davon ausgegangen, dass es sich um eine Parabel handelte. Der junge Huygens und J. Jungius hatten festgestellt, dass dies nicht stimmte, konnten aber zunächst keine Lösungskurve angeben. Andere bedeutende Mathematiker des 17. Jahrhunderts hatten vergeblich versucht, dieses Problem zu lösen. Leibniz wurde auf das Problem nach Beginn seiner Korrespondenz mit Jakob Bernoulli (siehe Abschnitt 3) durch dessen öffentliche Aufforderung zur Behandlung des Problems in den *Acta* (1690) hingewiesen. Ausser ihm legten der jüngere Bruder Bernoullis, Johann, und der nunmehr alte und höchst anerkannte C. Huygens Lösungen des Problems vor. Leibniz' Publikationen fanden sich damit (zum ersten Mal) unter den aktiven Mathematikern Zentraleuopas wieder und wurden nun auch in Fachkreisen zur Kenntnis genommen. Andere analytische Problemlösungen folgten oder waren vorangegangen, darunter die Bestimmung einer Zwangskurve freien Falles, bei der die Vertikalgeschwindigkeit konstant bleibt, die sogenannte Leibnizsche *Isochrone* (1687), und der *Brachystrochrone* (1697), der Kurve schnellsten Falles zwischen Punkten verschiedener Höhe, die nicht auf demselben Lot liegen.

Durch diese Arbeiten wurde Leibniz unter den mathematischen Wissenschaftlern seiner Zeit bekannt und gewann hohe Anerkennung. Am 13. 3. 1700 wurde er als korrespondierendes Mitglied in die Pariser Akademie aufgenommen. Zu diesem Anlass entstand die Arbeit *Essay d'une nouvelle science des nombres* (1700). Darin legte Leibniz seine Auffassungen über das Dualsystem und seine Vorzüge dar. Wir kommen darauf noch einmal kurz im letzten Abschnitt dieses Beitrages zurück.

Weitere Arbeiten (summarisch)

Wir haben bisher nur die wichtigsten und bekanntesten Beiträge Leibniz' zur Mathematik erwähnt und werden es im wesentlichen auch dabei bewenden lassen müssen. Um kein allzu einseitiges Bild zu hinterlasssen, muss aber wenigstens auf *andere mathematische Arbeitsgebiete* unseres Autors verwiesen werden, die auf die ein oder andere Weise ihre Spuren in der späteren Mathematik hinterlassen haben.

Dazu gehören in der *Algebra* die Einführung und Verwendung von *Determinanten* mit umfangreichen Studien zu deren Verwendung, etwa bei der Lösung linearer Gleichungssysteme (heute bekannt als *Cramersche Regel*, benannt nach einer Arbeit Cramers von 1750) und bei der Eliminationstheorie algebraischer Gleichungen (Leibniz 1980). Hinzu traten Studien der komplexen Grössen und eines Nachweises, dass bei kubischen Gleichungen in dem problematischen Fall des *casus irreducibilis* die Formel von Cardano eine reelle Wurzel liefert.

In der *Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie* studierte Leibniz über die frühen Arbeiten zur algebraischen Kombinationslehre weit hinausgehend das im ausgehenden 17. Jahrhundert von verschiedenen Mathematikern betrachtete Problem der *gerechten Verteilung bei vorzeitig abgebrochenen Glücksspielen*, aus moderner Sicht ein Problem des Erwartungswertes von Zufallsprozessen.

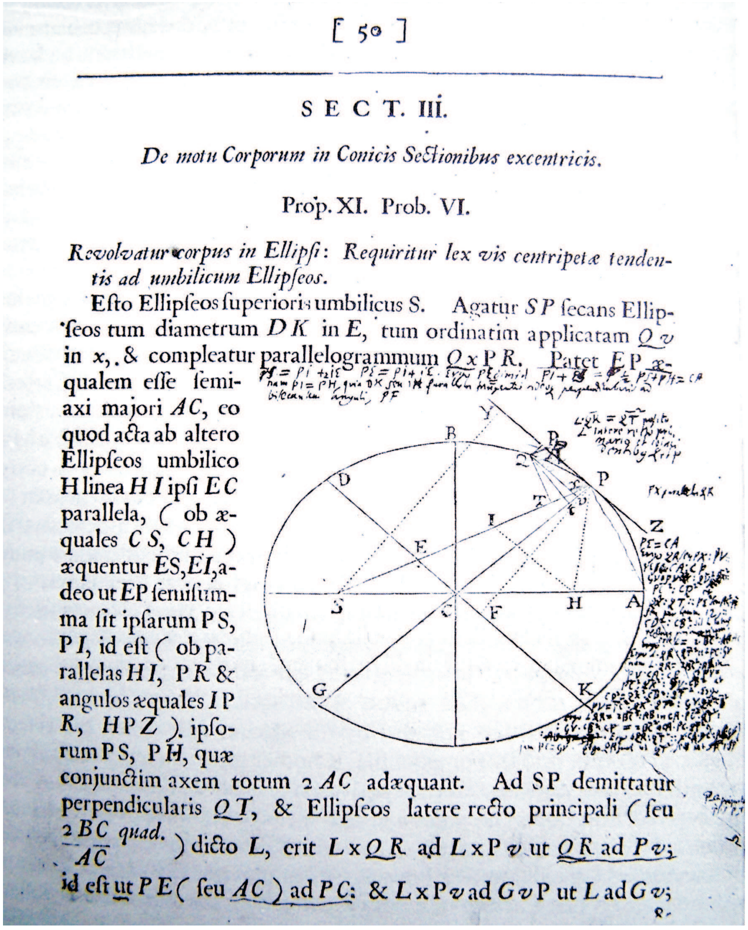
In der *Geometrie* proklamierte Leibniz neben seinen diversen Anwendungen des Infinitesimalkalküls zur Berechnung von Flächeninhalten, Tangenten und Krümmungen an Kurven eine neu zu entwickelnde, von ihm nur andeutungsweise skizzierte *analyis situs*. Dabei ging es ihm um einen symbolischen Kalkül zur direkten Darstellung von Lagebeziehungen im euklidischen Raum (de Risi 2006). Leibniz teilte dazu nichts in seinen Publikationen mit, sondern äußerte sich dazu nur gegenüber engeren Korrespondenten, schriftlich gegenüber Huygens und L'Hôspital, mündlich (nach Einschätzung H. Bregers) wahrscheinlich auch gegenüber C. Wolff. Über diesen mag das von ihm verwendete Stichwort an L.Euler gekommen sein und entwickelte dann ein mathematisches Eigenleben. Im Laufe der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts nahm es den fachterminologisch gefestigten Sinne einer qualitativen Topologie der Mannigfaltigkeiten an und wurde später zur kombinatorischen Topologie einerseits, zur geometrischen Topologie andererseits fortgeschrieben. Mit Leibniz' Wortverwendung hatte das kaum noch etwas zu tun.

Schließlich wurden weitere seiner Beiträge zu einer formalen Erweiterung der zeitgenössischen Mathematik weithin bekannt. Dazu gehörte die von Leibniz mit metaphysischen Spekulationen in enge Verbindung gebrachte *Dualarithmetik*, deren Grundzüge für die Pariser Akademie 1700 zu Papier brachte. Eine erheblich grundlegendere Bedeutung hatte dagegen die von ihm angedeutete *characteristica universalis*, der Traum einer umfassenden formalen Symbolschrift aller Wissenschaften inklusive der Jurispudenz. Leibniz konnte diesen Traum nur teilweise und bereichsbezogen in der Infinitesimalrechnung verwirklichen, darüberhinaus lediglich in bruchstückhaften Andeutungen der *analysis situs* oder der formalen Logik. Für die letztere begann er eine Primzahlkodierung von Urteilen und Urteilsverknüpfung der klassischen Logik zu erkunden. Auf dem von ihm eingeschlagenen Weg kam er allerdings nicht sehr weit (Aiton 1985, 202ff.).

3. Wissenschaftliche Milieus und Auseinandersetzungen

Etablierung als Kopf einer kontinentalen Gruppe von Analytikern, 1690 — ca. 1700

In den Jahren 1687 bis 1690 unternahm Leibniz eine lange Reise nach Süddeutschland, Österreich und Italien, um Materialien für seine Genealogie und die Geschichte des Welfenhauses zu sammeln. In dieser Zeit war ihm


[50]

SECT. III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

Prop. XI. Prob. VI.

Revolvatur corpus in Ellipsi: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.

Esto Ellipseos superioris umbilicus S. Agatur SP secans Ellipseos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QxPR$. Patet EP æqualem esse semiaxi majori AC, eo quod acta ab altero Ellipseos umbilico H linea HI ipsi EC parallela, (ob æquales CS, CH) æquentur ES, EI, adeo ut EP semisumma sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas HI, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsorum PS, PH, quæ conjunctim axem totum $2AC$ adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & Ellipseos latere recto principali (seu $\frac{2BC \text{ quad.}}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv; id est ut PE (seu AC) ad PC: & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv;

Abbildung 5: Leibniz' Anmerkungen zu Newtons *Principia*
Quelle: (Fellmann 1973)

ein regelmässiger wissenschaftlicher Kontakt mit Korrespondenten nur eingeschränkt möglich. Dennoch erfuhr er während seines Wien-Aufenthaltes im Sommer 1687 vom Erscheinen der Newtonschen *Principia* und begann sie etwas später (in Rom) zu studieren. Die Differenz zwischen Newtons und seiner Sichtweise war groß. Newtons Zugang stützte sich ganz auf die klassische geometrische Größenlehre, selbst an den Stellen, an denen er seine neue Methode der "ersten und letzten Verhältnisse" benutzte (Newtons Zugang zu einer geometrisch argumentierenden Infinitesimalrechnung). Leibniz war dagegen an einer symbolisch verallgemeinernden Ausdrucksweise interessiert war und versuchte, sie sowohl bei den Grundprinzipien der Mechanik (Fellmann 1973) als auch bei der Lösung von Anwendungsproblemen zum Tragen zu bringen. Dies war der erste Schritt einer spannenden, langen und komplizierten Geschichte der Rezeption und der Umformung der Newtonschen Mechanik aus Sicht der Leibnizschen (später "kontinentalen") Analysis. Diese zog sich durch das ganze 18. Jahrhundert hindurch und kann erst mit den Arbeiten J.L. Lagranges zur theoretischen Mechanik als vollzogen angesehen werden.

Drei Jahre nach Erscheinen von Leibniz' erster Publikation in den *Acta eruditorum*) wandte sich 1687 ein junger Baseler Mathematiker, *Jakob Bernoulli* (1654–1705) an ihn mit Fragen zu dem von Leibniz nur angedeuteten Infinitesimalkalkül. Nach seiner Rückkehr (1690) konnte Leibniz endlich darauf antworten. Das wurde der Beginn eines langen und fruchtbaren Briefwechsels mit Jakob Bernoulli. Wenig später wurde auch dessen jüngerer Bruder *Johann Bernoulli* (1667–1748) mit einbezogen. Die Bernoulli Brüder unterhielten enge und gute Kontakte zum Pariser Wissenschaftler-Milieu. Johann war einige Jahre Privatlehrer von *Guillaume de l'Hospital* (1661–1704) und eigentlicher Autor des 1696 unter dessem Namen publizierten weithin bekannt gewordenen Lehrbuches der Differentialrechnung, des ersten seiner Art. So entstand im letzten Jahrzehnt eine kleine, aber miteinander auf vielfältige Weise verbundene, länderübergreifende Gruppe von Mathematikern, die die von Leibniz entworfenen symbolische Infinitesimalrechnung zu ihrem Arbeitsgebiet machte und sie mit großem Erfolg in Mathematik und Dynamik anwendete.

Auseinandersetzung mit den Cartesianern

In den 1680/1690er Jahren führte Leibniz eine intensive Auseinandersetzung mit Descartes Auffassungen und den zeitgenössischen Cartesianern. In seinem *Discours de metaphysique* (1686) legte er seine Kritik an Descartes philosophischen Aufassungen des *Discours de la méthode* dar. Schon das wirkte weit in die mathematischen Wissenschaften hinein, weil es dabei auch um Descartes Auffassung der Bewegungsgröße und die Begründung der Optik ging. Im engeren mathematischer Sinn gab es aber eine noch weiter gehende tiefe Unterscheidung zwischen Descartes und Leibniz. Descartes hatte eine deutliche Trennungslinie zwischen Mathematik und Mechanik gezogen. Selbst in seinen neuen symbolischen Methoden hatte er lediglich *algebraische* Beziehungen als zur *Geometrie*, d.h. zur Mathematik im eigentlich Sinne, zugehörig angesehen, während er die Verwendung von (häufig als Approximationen formulierten) Grenzwertüberlegungen oder den Einbezug der Indivisiblenmethode der Mechanik zurechnete. Leibniz war mit diese Trennung nicht einverstanden. Ihm ging es gerade um die Legitimität und Notwendigkeit der Verwendung von Infinitesimalmethoden für die Mathematik. Dem *Transzendenten* im Sinne des Unendlichen schrieb er in der Mathematik eine positive Rolle zu und führte es sogar *als fachterminologischen Begriff* ein (Breger 1986a). Eine Kurve, die mathematisch nur durch Infinitesimalmethoden darstellbar war, ohne einen algebraischen Ausdruck im Descarteschen Sinne zu besitzen, bezeichnete Leibniz als *transzendente Kurve*. Die philosophische Konnotation war durchaus gewollt.

Auf eine in den 1690er Jahren von B. Nieuwentijt, einem niederländischen Cartesianer, eröffnete philosophische Kritik an der Legitimität der Infinitesimalmethode innnerhalb der Mathematik antwortete Leibniz sehr deutlich in einem Beitrag für das französischsprachige Publikum im *Journal des Sçavans* (1694). Er verteidigte seine neuen Methode als zu demjenigen Teil der *Mathématique générale* gehörend, der das Unendliche betraf. Und er begründete die *Notwendigkeit* dieses Teils der "allgemeinen" Mathematik (heute würde man wohl sagen der "reinen Mathematik") keineswegs lediglich rein fachlich-technisch sondern mit einem viel weiter reichenden Argument.

> ... [O]n a fort besoin [de cette partie de la Mathématique générale], en appliquant les Mathématiques à la Physique, parce que le caractère de l'Auteur infini entre ordinairement dans les opérations de la nature. [GM V, 308]

Hier schloss Leibniz offensichtlich an das von Galilei in seinen *Saggiatore* (1623) formulierte Motiv eines in in mathematischen *Lettern* geschriebenen *Buches der Natur* an und führte es weiter. Die Selbstoffenbarung des "unendlichen Autors" des Buches verwendete nach Leibniz' Analyse nun nicht mehr lediglich *Dreiecke und Kreise* als "Buchstaben", wie es der auf die klassische Mathematik anspielende Galilei (vermutlich auch aus rethorisch-didaktischen Gründen) formuliert hatte, sondern *Differentiale* und *Integrale* als notwendige Ergänzung des schon um die *symbolisch-algebraischen Lettern* der Cartesianer erweiterten 'Alphabets' der geometrischen Größenlehre.

Durch die mathematischen Entwicklungen der 1690er Jahre verschob sich das Gewicht deutlich in Richtung der Leibnizschen Auffassung. Die algebraischen Methoden verloren mehr und mehr ihre *ausschließenden* Charakter, ohne jedoch ansonsten ihre Bedeutung in der mathematischen Forschung einzubüssen

Differenzen mit Newton

Auf der anderen Seite waren im Jahre 1687 Isaac Newtons *Philosphiae naturalis principia mathematica* erschienen, das Schlüsselwerk der frühneuzeitlichen Mechanik. Leibniz hatte davon während seiner Südeuropa-Reise durch eine Rezension in den *Acta eruditorum* erfahren (siehe Abschnitt 2) und begann mit einem eingehenden kritischen Studium aus Sicht seiner mathematischen und dynamischen Auffassungen (Fellmann 1973).

Schon bald antwortete er auf die Newtonschen "Herausforderung" mit einer ersten eigenen Arbeit, *Tentamen de motuum coelestium causis* (1687) [GM VI, 144–160]. Er gab hier eine eigene Herleitung des Newtonschen $\frac{1}{r^2}$-Gesetzes für die Gravitationskraft aus den Keplergesetzen mithilfe des Differentialkalküls (speziell 1. Gesetz, Kegelschnittsatz, und 2. Gesetz, Flächensatz). Dabei beließ er es aber nicht bewenden. Er kritisierte darüberhinaus die Newtonsche Auffassung des Gravitationsgesetzes als philosophisch unzureichend. Das hätte Newton wohl nicht einmal bestritten; er sah eine Be-

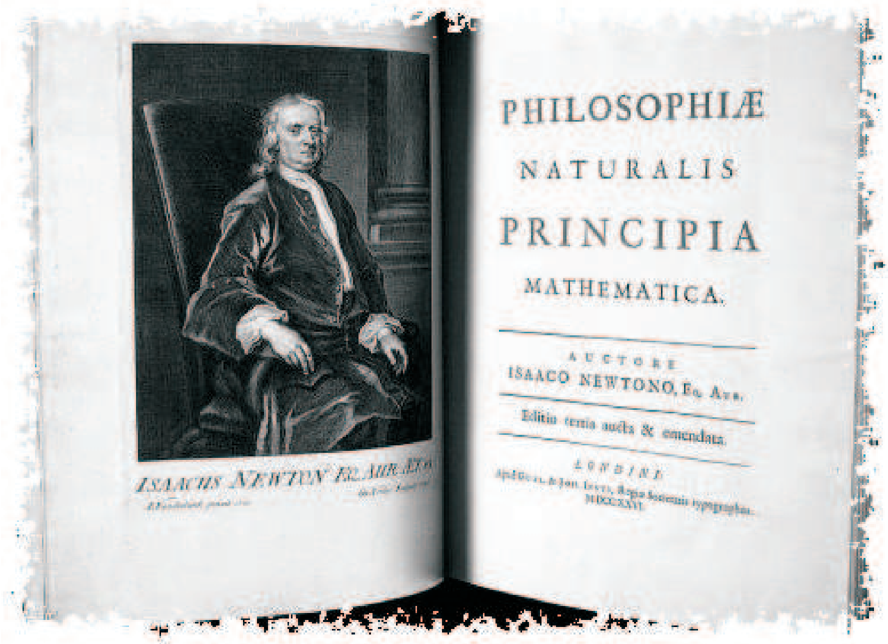


Abbildung 6: Deckblatt I. Newton *Principia* (Dritte Auflage 1726)
Quelle: http://www.mathsisgoodforyou.com/artefacts/principia.htm

scheidung aber als einen zur Zeit unaufhebbaren Mangel an (der im übrigen bis heute nicht aufgehoben ist). In *dieser* Hinsicht vertrat Leibniz eine, wenn auch modifizierte, cartesianische Erklärungshypothese, durch Wirbelbewegungen eines Äthers, durch die seiner Ansicht nach die Kraftübertragung bewirkt wird. Leibniz und seine Nachfolger stellten also der Newtonschen eine ontologisch in einer Kontinuumsbewegung des Äthers untermauerte Mechanik gegenüber, bei der gleichartige Strukturgesetze der beobachtbaren Phänomene auftraten. Daneben gab es natürlich eine wichtige methodisch-technische Differenz in der Verwendung bzw. Ablehnung des Differentialkalküls als (Beschreibungs-) Sprache der Natur.

Ab den späten 1690er Jahren entwickelte sich begleitend zu diesen innerfachlichen Differenzen ein unerfreulicher Prioritätsstreit zwischen den Newtonianern und Leibniz über die Erfindung der Infinitesimalanalysis. Newton hatte schon in den 1660er Jahren eine eigene Methode der symbolischen Infinitesimalrechnung entwickelt, die Methode der *fluents* und *fluxions*. *Fluente* (eingedeutscht) war Newtons Konzept einer veränderlichen Größe $x(t)$, abhängig von einem abstrakten zeitartig gedeuteten Parameter t. Ihre zugehörige *Fluxion* $\dot{x}$ war die Veränderungsrate von $x(t)$, erklärt als Verhältnis "erster und letzter Verhältnisse", in moderner Sprache also als Grenzwert der Differenzenquotienten. Newton berechnete die Fluxionen (Ableitungen) der Fluenten (Funktionen von t) durch Reihenentwicklungen und Grenzbetrachtungen. Das war genial und für damalige Verhältnisse wohl begründet, entsprach aber nicht seinem eigenen Methodenideal. Daher setzte er die Fluxionsrechnung in seinem Hauptwerk (*Principia*) nicht ein, sondern spielte nur äußerst indirekt beim Argumentieren mit "ersten und letzten Verhältnissen" zeitabhängiger geometrischer Größen auf sie an. Newtons umfangreiche Manuskripte über Fluxionsrechnung wurden erst im späten 20. Jahrhundert mit der Herausgabe seiner *Mathematical Papers* wissenschaftsöffentlich zugänglich (Newton 1967ff). Zu seinen Lebzeiten kam es nur zur Veröffentlichung einiger Auszüge, der erste davon im Anhang zu Newtons *Opticks* (1704) unter dem Titel *Tractatus de quadratura curvarum.*

Leibniz hatte also tatsächlich in den 1670er Jahren wieder eine Entdeckung gemacht, deren Kern schon ein Jahrzehnt vorher von Newton entwickelt worden war, wenn auch in anderer Form. Er erfuhr von letzterem allerdings nichts oder jedenfalls erst Jahre, nachdem er seinen eigenen Differentialkalkül der Wissenschaftsöffentlichkeit vorgestellt hatte. In dieser Zeit war im engeren Umfeld Newtons schon bekannt, dass dieser die neue Methode früher als Leibniz entdeckt hatte. Letzterer wurde daher als der eigentliche Urheber der Methode angesehen. Bei der Herausgabe von J. Wallis *Opera* (1695ff.) (zu Lebzeiten von Wallis selbst herausgegeben) erklärte dieser Newton (zutreffend) zum Erfinder des Infinitesimalkalküls und deutete zunächst noch zurückhaltend (aber unzutreffend) an, dass Leibniz als Plagiator anzusehen sei.

Der Konflikt schwelte zunächst für etwa ein Jahrzehnt, spitzte sich aber mit einer Antwort von Leibniz auf Newtons *Opticks* zu, die von seinem Gegner als Beleidigung angesehen wurde. 1710 wurde aus dem Umfeld Newtons heraus (J. Keill) Leibniz gegenüber öffentlich der Vorwurf des Plagiats erhoben. Leibniz wehrte sich dagegen durch einen förmlichen Einspruch. Eine von der Royal Society eingesetzte Untersuchungskommission entschied 1712 jedoch *gegen* Leibniz, ohne diesen überhaupt anzuhören oder auch nur anzuschreiben, allein auf der Basis vorgelegter Briefe und Notizen von J. Wallis und I. Newton (publiziert als *Commercium epistolicum* 1713). Damit war Leibniz kurz vor seinem Lebensende, zu einer Zeit, als sein Dienstherr ihm die wissenschaftlichen Bewegungsfreiheit nahm und als angehender König von England sowieso auf Seiten der Royal Society und ihren Würdenträgern stand (unter ihnen herausragend I. Newton), wissenschaftlich zutiefst diskreditiert. Auf dem Kontinent sah man zwar den Spruch der Kommission der Royal Society als nicht stichhaltig an; eine endgültige historische "Rehabilitierung" Leibnizens ergab sich aber erst durch das Bekanntwerdens der mathematischen Manuskripte der Pariser Zeit (1671–1676), in allen Details schließlich in (Hofmann 1949).

4. Infinitesimalrechnung

Werfen wir nun einen Blick auf Leibniz' Auffassung der Mathematik des Infinitesimalen als einer symbolischen Sprache, die speziell auf die prozessuale Ausdrucksweise eines von ihm angenommenen "auteur infini" des Buches der Natur zugeschnitten war. Wir werden bei dieser ersten Annäherung mit möglichst wenig technischen Einzelheiten auskommen, können sie aber naturgemäß nicht ganz vermeiden.

Wir hatten schon gesehen, dass nach Leibniz das *Kontinuum* nicht aus Punkten zusammengesetzt zu denken ist, sondern ein Ganzes ist. Umgekehrt kann es in Teile zerlegt werden, die selber jedoch wieder von der Natur des Kontinuums, also wieder unendlich teilbar, sind. *Punkte* sind dabei bestmögliche Ortsbestimmungen im Kontinuum. Sie können im Sinne des jungen Leibniz als Abstraktionen von unendlichen Teilungsprozessen (Hecht 1992, 87), (Breger 1986b) und damit selber als *infinitesimale* (also "unendlich kleine") Kontinua aufgefasst werden. Im Sinne des späteren ("reifen") Leibniz, gibt es zu jedem Punkt (im Sinne Euklids, also unteilbar) unendliche viele fiktive weitere Punkte mit infinitesimalem Abstand, die jedoch am Ende einer Rechnung, vom Standpunkt des Endliche betrachtet, miteinander identifiziert werden können. Eine *Kurve* ist in beiden Sichtweisen als ein unendliches "Polygon" mit infinitesimalen Kanten zu denken. Dabei ist zu beachten, dass die Zerlegung in infinitesimale Kanten *nicht eindeutig* ist, sondern auf völlig verschiedene Weisen vollzogen werden kann. Dies hat wichtige Konsequenzen für die darauf aufbauenden Rechnungen. In der Fachterminologie der Leibnizianer sprach man von der Wahl einer "Progression der Variablen"; darauf gehen wir hier aber nicht weiter ein (siehe dazu (Bos 1974)). *Eindeutig* sind jedoch die *Verhältnisse* oder *Proportionen* zwischen korrespondierenden infinitesimalen "Elementen" (Kanten etc.).

Bei Betrachtung einer ebenen Kurve mit Abszisse x und Ordinate $y = f(x)$ sind also zwar die zugehörigen *Differentiale* dx und dy nicht eindeutig bestimmt, aber nach Leibniz ist an jeder Stelle x_o ihr Verhältnis am *Steigungsdreieck* der Tangente ablesbar. Genauer formuliert, die infinitesimalen Differentiale stehen *in Proportion* (in der Sprache Euklids) mit den endlichen Werten der Ordinate y und der sogenannten "Subtangente" t, das ist die Strecke unter der Tangente (siehe Abb. 7):

$$dy : dx = y : t \tag{2}$$

Das aus den Differentialen dx, dy und der infinitesimalen Kante ds der Kurve gebildete Dreieck kann also durch ein ähnliches endliches Dreieck der Anschauung und der Argumentation zugänglich gemacht werden.

Bei dieser Überlegung spitzte Leibniz eine schon von B. Pascal eingeführte Idee des "charakteristischen Dreiecks" zur Beschreibung von Tangenten an einer Kurve zu. Er wagte sich nun aber auch an die symbolische Bearbeitung der Infinitesimalen selbst und iterierte dabei sogar die Bildung unend-

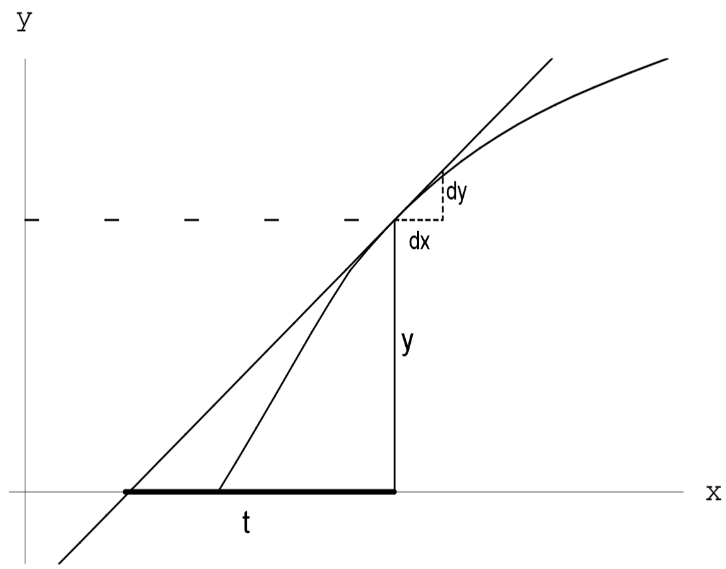


Abbildung 7: Funktion y=f(x) mit Tangente, Subtangente t (fett), Steigungsdreieck, und ins Endliche vergrößertem Differentialdreieck (fein gestrichelt)

lich kleiner Größen, bildete also zu den Differentialen dx, dy ... Differentiale höherer Stufe $d^2x, d^2y, dxdy$ usw.. Dabei waren die Differentiale erster Stufe dx ... unendlich klein gegenüber endlichen Größen, Differentiale zweiter Stufe $d^2x, dxdy$ ... wiederum unendlich klein gegenüber den dx etc. (Bos 1974). Untereinander standen jeweils Differential gleicher Stufe in Verhältnissen, die durch Proportionen mit endlichen Größen a und b ausdrückbar waren, etwa

$$\frac{dxdy}{dtdt} = \frac{a}{b}$$

Aus seiner Rechenerfahrung mit Folgen (a_i) endlicher Zahlen

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_i \ldots$$

und ihren endlichen Differenzenfolgen (b_k),

$$b_0 = a_1 - a_0,\ b_1 = a_2 - a_1,\ \ldots,\ b_k = a_{k+1} - a_k =: \Delta_k((a_i)))$$

sowie daraus gebildete höhere Differenzenfolgen, etwa (c_k)

$$c_0 = b_1 - b_0,\ c_1 = b_2 - b_1,\ \ldots,\ c_k = b_{k+1} - b_k \ldots = \Delta_k^2((a_i))$$

(Notation leicht modernisiert) gewann Leibniz Rechenregeln mit Differenzen erster und höherer Ordnung und übertrug sie auf das Rechnen mit Differentialen. Diese fasste er ja als Folge (*progressio*) unendlich kleiner Differenzen auf. So kam er auf die Rechenregeln für Differentiale, die er in seiner *Nova* *methodus* ... (1684) ohne Begründung vorstellte (x, y variable Größen, a, b Konstanten):

$$\begin{aligned} d(x+y) &= dy + dy & (3) \\ d(ax) &= adx \\ d(xy) &= ydx + xdy \qquad \text{“Leibniz Regel”} & (4) \\ d(\frac{dx}{dy}) &= \frac{ydx - xdy}{y^2} & (5) \end{aligned}$$

Bei endlichen Folgen sind Differenzen und Summenbildung zueinander “fast” inverse Operationen. Bildet man etwa zu den oben angegebenen ersten Differenzen (b_k) die Summe

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 + \ldots + b_k &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{k+1} - a_k) \\ &= a_{k+1} - a_0 \ , \end{aligned}$$

so erhält man die Differenz aus den Randtermen der Ausgangsfolge. Bei $a_0 = 0$ also den (im Index) um 1 verschobenen oberen Term, a_{k+1}. Durch “Übertragung in das Unendliche”, d.h. einer aus unendlich kleinen Summanden dy gebildeten unendlichen Summen $\mathcal{S}$, erhielt Leibniz die infinitesimale Summationsregel $\mathcal{S}dy = y$. Er notierte die Summenbildung allerdings zunächst noch in Anlehnung an Cavalieri durch einen symbolische “Operator” *omn* für *omnes* — alle.

In seinen Publikationen führte Leibniz ab 1686 ein langestrecktes “$\mathcal{S}$” [GM V, 226ff.] als Zeichen für die unendliche Summenbildung ein und schrieb seinen “Satz” über die Beziehung zwischen Summation und Differentialbildung nun in der Form

$$\int dy = y \qquad (6)$$

In heutige Terminologie übersetzt, war dies die Leibnizsche Fassung des *Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.*

Die Brüder Jakob und Johann Bernoulli nahmen Leibniz' Einsicht als Einstieg in die Berechnung unendlicher Summmen von Differentialen. Sie *erklärten* die Operation $\int \ldots$ kurzerhand durch ihre Eigenschaft, diejenige variable Größe (in späterer Terminologie *Funktion*) anzugeben, deren Differential unter dem $\int$-Zeichen steht. Aus diesem Grund bezeichnete Jakob B. die Operation als *Integral* (1690), im Wortsinne einer Wiederherstellung (in neuerer Sprache “Stammfunktionsintegral”). Leibniz erschien dies zunächst begrifflich nicht ganz angemessen, lenkte aber bald ein (Aiton 1985, 168). Aufgrund seiner Autorität erschien es für die kommenden Generationen der Analytiker (in der kontinentalen Tradition) bis tief in das 19. Jahrhundert als selbstverständlich, dass das Integral im Sinne der “Wiederherstellung”, also als Stammfunktionsintegral, eingesetzt werden konnte, um die Berechnung

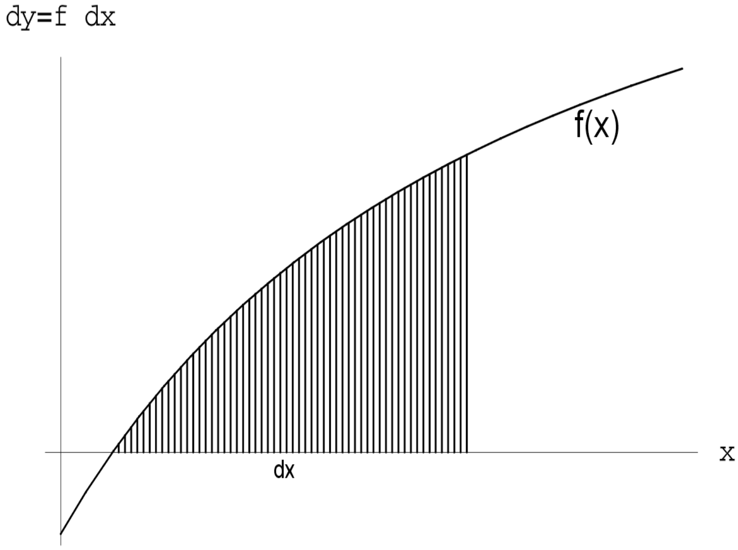


Abbildung 8: Integration als (unendliche) Summe von Differentialen: $\int dy$

unendlicher Summen aus unendlich kleinen Größen durch symbolische Methoden zu bewerkstelligen. So konnte man etwa Flächen, Kurvenlängen, Volumina etc. erheblich leichter berechnen als mit den Mitteln der vormodernen Mathematik. Während des 19. Jahrhunderts wurden dann aber die Fragen des Zusammenhangs zwischen Stammfunktionen und unendlichen Summationen mit vorher unbekannter logischer Schärfe neu gestellt und verfeinert beantwortet. Das führt aber auf ein ganz anderes Thema (*Riemann-* und *Lebesgue-Integral* (Jahnke 1999, Kap. 9, T. Hochkirchen)).

Wichtig für die Verwendung des neuen Infinitesimalkalküls waren weitere Transformationsregeln von Integralen, darunter ein von Leibniz als *Transmutation* bezeichneter Satz zur Umformung von Rechtecksummen infinitesimaler Breite in Summen von Dreiecken infinitesimaler Breite. Das führt aber auf technische Probleme der Leibnizschen Analysis, die hier nicht weiter diskutiert werden sollen (siehe etwa (Bos 1974, Guicciardini 1999)).

Alles in allem war Leibniz' Methode der *Infinitesimalen*, soweit es die Integration betrifft, eine modifizierte Fortentwicklung der *Indivisiblen* von Buonaventura Cavalieri und seinen Nachfolgern, bei denen Kurvenlängen ebenso durch Zusammensetzung unendlich kleiner Bögen, Flächeninhalte durch Zusammensetzung unendlich dünner Streifen und Volumina durch Summation unendlich dünner Schichten berechnete wurden. Allerdings stimmte Leibniz — um dies noch einmal zu betonen — nicht mit Cavalieris in die Mathematik übertragener *atomistischer* Auffassung überein, also der Annahme einer Unteilbarkeit letzter unendlich kleiner Teile des Kontinuums (daher der Name *Indivisible*). Die Leibnizschen *Infinitesimale* waren ja nicht nur endlich sondern sogar wieder unendlich unterteilbar; und dies war nicht nur von philosophischer Bedeutung (Differentiale höherer Ordnung, siehe oben).

Bei beiden Varianten (Cavalieris und Leibnizens) handelte es sich um eine Fortführung und Zuspitzung von Ansätzen des *Archimedes* (287– 212 v.C.). W. Orth stellt in einem anderen Beitrag dieses Bandes den mit Gleichgewichtsargumenten geführten Vergleich von Zylinder, Kegel und Kugel aus der *Methodenschrift* des Archimedes vor. Die antike Methode der *Exhaustion* erforderte im Rahmen der klassischen griechischen Größen- und Proportionentheorie erheblichen Scharfsinn einer auf die spezifische geometrische Konfiguration zugeschnittenen Analyse; Archimedes verwendete ein starkes heuristisches Prinzip, das die Exhaustion im Grunde sogar hätte ersetzen können, die Balancierung aufsummierter unendlich dünner Schichten. Leibniz' symbolische Methode der Infinitesimalrechnung war für solche Probleme geschaffen und erleichterte ihre Lösung erheblich.

Zur Illustration analysieren wir zur Abrundung dieses Abschnittes die Archimedische Konstellation unter Verwendung des Leibnizschen Kalküls. Daran kann seine Stärke sehr gut ermessen werden. Das entsprechende Manuskript Archimedes' war Leibniz allerdings unbekannt; es wurde erst im Jahre 1908 durch J.J. Heiberg wieder entdeckt (siehe Beitrag W. Orth).

Es handelt sich also hier um eine *historisch-didaktische Explikation*, nicht um die Wiedergabe einer bei Leibniz explizit ausgeführten Überlegung.

Wir betrachten wie Archimedes eine Kugel vom Radius r, die in einem Kreiskegel mit Grundfläche des Radius $\tilde{r} = 2r$ und Höhe $h = 2r$ liegt, der wiederum von einem geraden Kreiszylinder derselben Grundfläche und Höhe umschlossen wird (Abbildung 9).

Für eine Schnittebene parallel zur Grundfläche, im Abstand $\overline{OA} = x$ von der Deckebene des Zylinders, hatte Archimedes eine elementargeometrisch begründete Proportion hergeleitet (Archimedes 1963, 387), die wir hier in den Bezeichnungen der Abbildung ($\overline{DA} = 2r$) notieren:

$$\overline{DA}^2 : (\overline{BA}^2 + \overline{CA}^2) = 2r : x \tag{7}$$

Nun folgte bei Archimedes ein höchst raffiniertes Argument des Gleichgewichts "dünner" Voluminascheiben, die in einen Punkt P im Abstand $2r$ von der Deckebene auf der Achse verschoben wurden. Im Leibnizschen Kalkül rechnet man direkt mit den Volumeninfinitesimalen der Form

$$dV = F(x)\, dx$$

zu einer Querschnittsfläche $F(x)$ des jeweiligen Körpers. Mit der Flächeninhaltsformel $F = \pi r^2$ eines Kreises des Radius r folgt wegen der kreisförmigen Querschnitte in allen drei Fällen für den Zylinder $F_{Zyl} = \pi\overline{DA}^2$, für die Kugel $F_{Ku} = \pi\overline{CA}^2$ und für den Kegel $F_{Ke} = \pi\overline{BA}^2$. Die geometrische Beziehung (7) des Archimedes wird daher leicht umgeschrieben zu

$$\frac{x}{2r} F_{Zyl} = F_{Ku} + F_{Ke} \,.$$

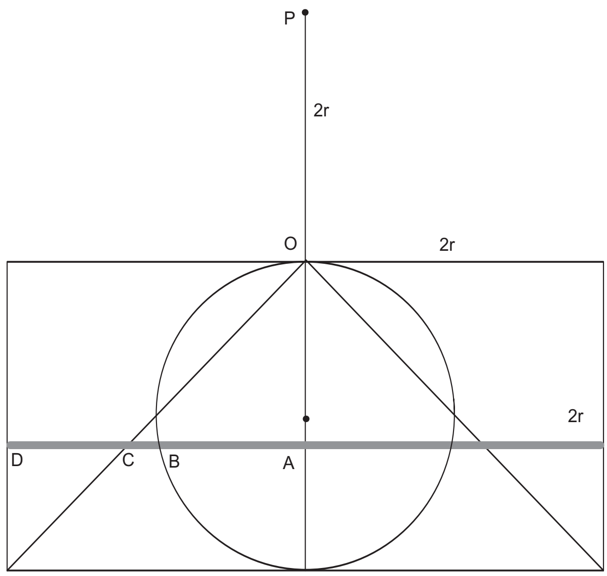


Abbildung 9: Archimedes' Figur von Kegel, Kugel und Zylinder,
Radius der Zylindergrundfläche $2r$, Kugelradius r, $\overline{OA} = x$

Dies führt auf eine Beziehung zwischen den Leibnizschen Volumeninfinitesimalen der drei Körper:

$$\int \frac{x}{2r} F_{Zyl} dx = \int F_{Ku} dx + \int F_{Ke} dx$$

Auf der rechten Seite der Gleichung stehen dann die Volumina der jeweiligen Körper, dargestellt als Integrale von Volumendifferentialen, $\int F_K dx = V_K$, mit der Abkürzung K für Kugel oder Kegel. Die auf der linken Seite auftretenden Zylinderquerschnittsflächen sind konstant; daher ist dort das denkbar einfachste Integral (nach der Konstante) zu berechnen, $\int x dx = \frac{1}{2}x^2$. So folgt

$$\int \frac{x}{2r} F_{Zyl} dx = \frac{F_{Zyl}}{2r} \int_0^{2r} x dx = \frac{F_{Zyl}}{2r} \frac{(2r)^2}{2} = F_{Zyl} \frac{2r}{2} = \frac{1}{2} V_{Zyl}$$

und damit

$$\frac{1}{2} V_{Zyl} = V_{Ku} + V_{Ke} \ .$$

Verwendet man die von Archimedes hergeleitete Beziehung zwischen Kegelvolumen und Zylindervolumen,

$$V_{Ke} = \frac{1}{3} V_{Zyl} \ ,$$

so folgt nun durch einfache Umstellung der Terme

$$V_{Ku} = \frac{V_{Zyl}}{2} - V_{Ke} = \frac{V_{Zyl}}{2} - \frac{V_{Zyl}}{3} = \frac{V_{Zyl}}{6}$$

In anderen “Worten” (Zylindervolumen eingesetzt)

$$V_{Ku} = \frac{\pi(2r)^3}{6} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Durch Vergleich mit den anderen Volumina ergibt sich

$$V_{Zyl} : V_{Ke} : V_{Ku} = 6 : 2 : 1$$

Der Kegel bis zur Ebene der Kugelmitte hat das Volumen $\tilde{V}_{Ke} = (\frac{1}{2})^3 V_{Ke}$ und ein der Kugel umbeschriebener Zylinder $\tilde{V}_{Zyl} = (\frac{1}{2})^2 V_{Zyl}$ im Vergleich mit dem vom Archimedes ursprünglich betrachteten “zu großen” Zylinder V_{Zyl}. Damit folgt die von Archimedes angegebene Proportion (Archimedes 1963, 386):

$$\tilde{V}_{Zyl} : \tilde{V}_{Ke} : V_{Ku} = \frac{3}{2} : \frac{1}{4} : 1 \tag{8}$$

Schon dieses einfache Beispiel lässt erahnen, wie gut der Leibnizsche Kalkül auf das Aufgabenprofil der Rechnung mit Infinitesimalen zugeschnitten war, ganz im Sinne einer bereichsbezogenen Verwirklichung der Idee einer *characteristica universalis*, gleich ob mit oder ohne Annahme eines “auteur infini”.

Einer von vielen möglichen Ausblicken

Wir wollen diese kurze Einführung in die Leibnizsche Welt der Mathematik nicht ohne einige Bemerkungen zu seiner mechanischen Rechenmaschine abschließen; ausführlichere Darstellungen gibt es viele, darunter (Hecht 1992, Mackensen 1974, Korte 1981, Badur/Rottstedt 2004).

Wir hatten schon erwähnt, dass es unklar ist, wie viel Leibniz über B. Pascals oder W. Schickards Rechenmaschine wusste. Seine eigene Grundsatzidee für eine mechanische Realisierung der Grundrechenarten ist um 1670 entstanden. Ein erstes Prinzipmodell stellte er bei seinem ersten Besuch in London 1673 der Royal Society vor. Das war allerdings technisch noch völlig unausgereift und weckte bei den Experten der Society ebensoviel Interesse wie Misstrauen gegenüber der Verlässlichkeit der Versprechungen dessen Protagonisten. Das hinderte ihn nicht daran, seine Erfindung bei seiner wenig später erfolgenden Bewerbung in Hannover in den höchsten Tönen und mit universellem Verwendungsanspruch anzupreisen. Nach kurzen Andeutungen der Funktionsweise der Maschine malte er die praktischen Vorzüge des Rechnens mit ihr farbenprächtig aus:

> . . . Welches [das mechanische Rechnen, E.S.] dann vor Rechen-Cammern, Contoirs, Meß=Kunst, Fortification, Schiffart, ja ganze Mathesin und Mechanick, auch Commercien, undt Financen, einen unglaublichen nuzen haben, die Menschliche Arbeit darinn auff die Helffte mindern, auch so gar unnöthige Menge der

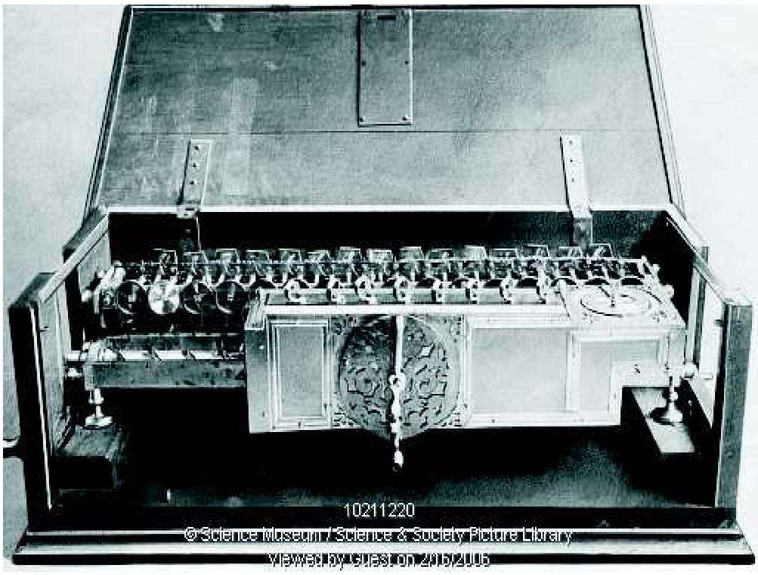


Abbildung 10: Leibniz Rechenmaschine von 1694,
Quelle: Science Museum, London

> dazu brauchenden Personen und viele Gagen ersparen kan. Zu geschweigen wie allerhand Tabulae in obgedachten Scientien, einmahl vor allemahl zu erleichterung Menschlicher arbeit, dergestalt durch dazu bestelte Leüte auszurechnen, da sonsten bekand, daß in den Tabulis Logarithmorum, so ein herrliches werck, unterschiedene dazu besoldete Personen über 20 Jahr zubracht. [A I, 488, siehe (Hecht 1992, 133)]

Im Jahr 1675 stellte er nach intensiver Arbeit der Pariser Académie einen verbesserten 8-stelligen Prototyp vor. Leibniz' wichtigste konstruktive Idee war dabei die Einführung einer sogenannten *Staffelwalze* (englisch *stepped reckoner*) zur mechanischen Realisierung der Multiplikation (bzw. Division) durch mehrfache Addition (Subtraktion).

Die dabei auftretenden mechanischen Probleme, insbesondere beim Zehnerübertrag, waren für die damalige Technik erheblich. Leibniz' Mechanik schaffte bei mehrfacher Zehnerübertragung lediglich zwei Stellen und hakte dann aus.

Beispiel: $99999999 + 1 \mapsto 99999900$

Leibniz umging das Problem durch die Einführung von Zusatzscheiben die anzeigten, wenn bei einem mechanischen Rechenvorgang solches Aushaken eintrat. Der Rechner musste dann entweder das provisorische Ergebnis von Hand (allerdings aufgrund der Anzeige der Zusatzscheiben) nachkorrigieren oder durch eine weitere Operation des Rechenwerkes die liegengebliebenen Zehnerübergänge in einem eigenen Rechengang nacharbeiten (Badur/Rottstedt

2004). Leibniz arbeitete sein Leben lang an Verbesserungen seiner Rechenmaschine. Ein bedingt funktionsfähiges Exemplar aus dem Jahr 1694 steht im Londoner Science Museum (Abb. 10)

Leibniz stieß hier wie an anderen Stellen, insbesondere seinen Bemühungen zur Verbesserung der Wasserhebewerke des Harzer Berbaus, auf das grundsätzliche Problem fehlender Voraussetzungen für eine systematische technische Umsetzung wissenschaftlicher Ideen während der frühen Neuzeit. So blieben seine Hinweise auf die vielfältige praktische und wissenschaftliche Nutzbarkeit der mechanischen Rechenmaschine Programm und Traum — nicht untypisch für das 17. und frühe 18.Jahrhundert. Ein erstes voll funktionsfähiges (technische weiterentwickeltes) Exemplar wurde von P.M. Hahn 1774 auf Basis des Leibnizschen Entwurfkonzeptes realisiert.

In den Bereich der wissenschaftlich-technischen *Utopie* gehörte auch Leibnizens Skizzenentwürfe einer auf dem Dualsystem aufbauenden mechanischen Rechenmaschine (Mackensen 1974). Sie schlossen an seine arithmetischen Arbeiten für die Aufnahme in die Pariser Académie an und standen auch in Bezehung zu seinen weit fliegenden Spekulationen über die Interpretationen des chinesischen *I Ging*. Leibniz glaubte in den dort auftretenden Hexagrammstrukturen eine tief liegende Beziehung zwischen seiner eigenen und der chinesischen Metaphysik zu erkennen. Auch darin spannte er den spekulativen Bogen wohl viel zu weit (Aiton 1985, 245ff.,325ff.).

Sein umfassendes Interesse, das so viele intellektuelle und praktische Tätigkeitsfelder einbezog, kann aber gerade in unserer Zeit der *Spätmoderne*, ihrem Zwang zur ausdifferenzierenden Spezialisierung und der direkten Ausrichtung wissenschaftlicher Aktivität auf "Commerzien, Finanzen" oder gar "Fortification" eine höchst notwendige Herausforderung bleiben. Leibniz kämpfte sein Leben lang, nicht immer mit gleichem Erfolg, darum, die "Scientien" einschließlich der historischen Forschung und der Metaphysik als Gegengewichte gegen eine einsinnige Ausrichtung auf den von ihm durchaus anerkannten "nuzen" zu achten. Auch steht das ihm so nahe liegende Thema *China* im gerade anbrechenden Jahrhundert wieder an hoher Stelle auf der Tagesordnung. Ob im enger werdenden Austausch der Kulturen eine Assimilation der jeweils 'anderen' Metaphysiken angebracht ist — heute wäre diese wohl eher praxisphilosophisch zu akzentuieren — und falls ja in welcher Austauschrichtung stärker, muss allerdings wie schon zu Leibniz' Zeiten fraglich erscheinen. Real ablaufende Veränderungen dieser Art sind meistens ungewollt; allein schon deswegen erscheint die Frage als schlecht gestellt. Stattdessen sollte es uns um die Herausbildung einer Weltkultur gehen, die ihre lebendige Diversität zu schätzen weiß.

Acknowledgment/Danksagung: Ich danke Herrn H. Breger, Leiter des Leibniz Archivs Hannover, und C. J. Scriba, Hamburg, für die sorgfältige Durchsicht des Manuskriptes und zahlreiche Anmerkungen zur Präzisierung des Textes.

Literatur

Aiton, Eric. 1985. *Leibniz. A Biography.* Bristol/Boston: Adam Hilger.

Archimedes. *Werke.* Im Anhang: Kreismessung und Methodenlehre, übersetzt und herausgegeben von A.Czwalina, F. Rudio, H.G. Zeuthen. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft

Badur, Klaus; Rottstedt, Wolfgang. 2004 "Und sie rechnet doch richtig! Erfahrungen beim Nachbau einer Leibniz-Rechenmaschine". *Studia Leibnitiana* 36: 129–146.

Bos, Henk J. M. 1974. "Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus." *Archive for History of Exact Sciences* 14:1–90.

Breger, Herbert. 1986. "Leibniz' Einführung des Transzendenten". *Studia Leibnitiana* Sonderheft 14: 119–132.

Breger, Herbert. 1986. "Leibniz, Weyl und das Kontinuum". *Studia Leibnitiana Suppl.* 26: 316–330.

Fellmann, Emil. 1973. *G.W. Leibniz. Marginalia in Newtoni Principia Mathematicae.* Paris: Vrin.

Guiccardini, Niccolo. 1999. "Newtons *Methode* und Leibniz' *Kalkül.*". In (Jahnke 1999, Kap. 3).

Hecht, Hartmut. 1992. *Gottfried Wilhelm Leibniz. Mathematik und Naturwissenschaften im Paradigma der Metaphysik.* Stuttgart/Leipzig: Teubner.

Hofmann, Joseph E. 1949. *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672 - 1676).* München: Leibniz Verlag. Englisch: *Leibniz in Paris 1672-1676.* Cambridge: University Press 1974.

Jahnke, Hans-Niels (Hrsg.). 1999. *Geschichte der Analysis.* Heidelberg etc.: Spektrum.

Korte, Bernhard. 1981. *Zur Geschichte des maschinellen Rechnens.* Bonn: Bouvier.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. 1849-1863. *Mathematische Schriften.* Hrsg. C.J. Gerhardt, 7 Bände. Berlin/Halle: Schmidt. Nachdruck Hildesheim: Olms 1971.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. 1923ff. *Sämtliche Schriften und Briefe.* Hrsg. von der Berlin-Brandenburgischen und der Göttinger Akademie der Wissenschaften, vormals Preussische Akademie, danach Akademie der Wiss. der DDR, 8 Serien. Darmstadt, später Leipzig, Berlin: .

Leibniz, Gottfried Wilhelm. 1980. *Der Beginn der Determinantentheorie. Leibnizens nachgelassene Schriften zum Determinantenkalkül.* Hrsg. E. Knoblich. Hildesheim: Gerstenberg.

Mackensen, Ludolf von. 1974. "Leibniz als Ahnherr der Kybernetik — ein bisher unbekannter Vorschlag einer 'Machina arithmetica dyadicae'." *Studia Leibnitiana Suppl.* 13: 255–268.

Newton, Isaac 1687. *Philosophiae naturalis principia mathematica.* London. ^{2}1713 (Cambridge), ^{3}1726 (London).

Newton, Isaac 1687. *Mathematical Papers.* Ed. T. Whiteside, 8 vols. Cambridge: University Press.

de Risi, Vincenzo. 2006. *The Analysis Situs 1712-1716, Geometry and Philosophy of Space in the Late Leibniz.* Basel: Birkhäuser [im Druck].

[A] = Akademie Ausgabe (Leibniz 1923ff.)
[GM] = Gerhardt Mathematische Schriften (Leibniz 1849-1863)