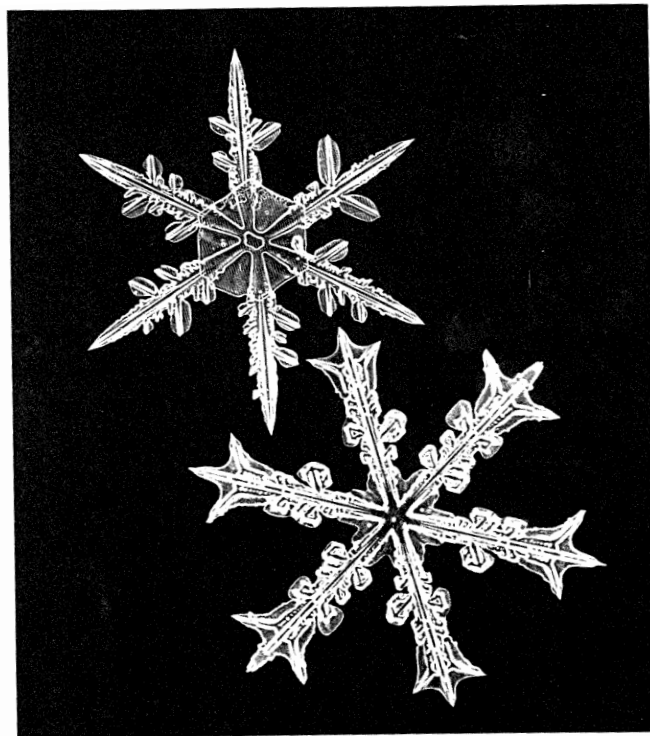


Klassische Gestalten und moderne Strukturen in Geometrie und Kristallographie

§13.7 (Fragment) und §14 (geplant) von
Lineare Algebra und Analytische Geometrie III

Egbert Brieskorn

aus dem Nachlass herausgegeben von Erhard Scholz
mit Anhang von E. Scholz zur Geschichte der Kristallographie



Digitale Edition (open access) bei
IMAGINARY – open mathematics
<https://imaginary.org/de>
Copyright Kategorie Creative Commons BY-NC
(Ausschluss kommerzieller Weiterverwendung)
Letzte Bearbeitung (E. Scholz) 27. 06. 2019



Musica und Pythagoras, Kloster Aldersbach, Codex Clm 2599

Vorbemerkung des Herausgebers

Die ersten beiden Bände von Egbert Brieskorns *Lineare Algebra und Analytische Geometrie* (im folgenden LA) erschienen als Ausarbeitungen seiner Vorlesungen gleichen Titels am Mathematischen Institut der Universität Bonn vom WS 1978/79 und SS 1979. Der Autor beabsichtigte, die während der vorangegangenen Jahrzehnten in den Hintergrund geratene Beziehung zwischen linearen algebraischen Methoden und klassischen Themen der Geometrie wieder deutlicher sichtbar zu machen. Der erste Band LA I (§1–10) mit den elementareren Teilen der linearen Algebra erschien im Jahr 1983 [55, Bd. 1]. Weitere Themen mit den Schwerpunkten Klassifikation der Endomorphismen von Vektorräumen (§11), Sesquilinearformen einschließlich einer Einführung in die klassischen Gruppen (§12), der *Geometrie im Euklidischen Raum* (§13) und eine Darstellung der *geometrischen Kristallographie* (§14) waren für einen zweiten Band geplant (vgl. den späteren Gesamtplan in drei Bänden S. 729). Im Laufe der Ausarbeitung wuchs das Material für die Darstellung der Geometrie im Euklidischen Raum jedoch so an, dass eine weitere Bandteilung notwendig wurde. Der zweite Band LA II erschien daher 1985 ohne die Paragraphen 13 und 14. Der Autor glaubte sie “hoffentlich im kommenden Jahr” in einem geplanten dritten Band LA III nachliefern zu können [55, Bd. 2, Vorwort, p. VII]. Tatsächlich konnte er 1986 die Abschnitte 13.1 bis 13.6 der Geometrie im Euklidischen Raum als korrigiertes und druckfähig aufbereitetes Typoskript an den Vieweg-Verlag übergeben. Dieser Teil liegt seit Frühjahr dieses Jahres in gedruckter Form beim Verlag Springer Spektrum unter dem Titel LA III vor [57]. Darin sind der Abschnitt 13.7, in dem E. Brieskorn die Theorie der Polyeder von der klassischen Sicht bis zu modernen Ideen der p -Topologie von Mannigfaltigkeiten schildern wollte, und der Paragraph 14 zur geometrischen Kristallographie jedoch nicht enthalten.

In der Zwischenzeit hatte E. Brieskorn den Vorlesungszykel Lineare Algebra I, II ein weiteres Mal gelesen (WS 1983/84, SS 1984). Sein Ziel, die euklidische Geometrie aus Sicht der modernen Mathematik relativ ausführlich darzustellen und dabei die am Anfang von Band I angedeutete Beziehung zur geometrischen Kristallographie auszuführen [55, Bd. 1, pp. 1ff], war

im Rahmen einer zweisemestrigen Anfangsvorlesung jedoch offenbar auch für ihn nicht zu erreichen. Im Sommersemester 1987 und im darauf folgenden Wintersemester hielt er aufeinander folgend die Vorlesungen *Symmetrische Polyeder* und *Geometrische Kristallographie*.¹ Sie entsprachen den Themenschwerpunkten vom Abschnitt 13.7.1 des Paragraphen 13 und von Paragraph 14 des geplanten Bandes LA III. In ihnen versuchte unser Autor, eine Brücke zwischen den Grundvorlesungen und Spezialvorlesungen des damaligen Hauptstudiums zu schlagen. Eineinhalb Jahre vorher war ihm dies in einem anderen Themengebiet gut gelungen: mit seiner Doppelvorlesung *Ebene algebraische Kurven* (SS 1985, WS 1985/86), deren Ausarbeitung, unterstützt von seinem damaligen Assistenten Horst Knörrer, als Buch erschien [58].

Noch ging er davon aus, das gesamte Material einer modernen Darstellung der Geometrie im euklidischen Raum, Polyedertheorie und geometrischer Kristallographie in dem noch ausstehenden Band III der LA darstellen zu können. Im März 1988 lagen Teile des Abschnitts 13.7 zur Polyedertheorie und Material für Paragraph 14 vor, für die zusammen weitere rund 280 Seiten zusätzlich zu dem schon an den Verlag übergebenen Teil der LA III eingeplant waren. In dieser Zeit gab es einen intensiven Austausch mit dem Verlag über geplante Abbildungen zu dem noch nicht ausgearbeiteten Paragraphen zur Kristallographie. Im August 1988 schrieb der Autor an die Verlagslektorin “Ich arbeite fleißig am Band 3”.²

In der Einleitung zu 13.7 wollte E. Brieskorn eine umfassende mathematische, philosophische und historische Gesamtschau auf die Theorie der Polyeder und ihre vielfältigen Bezüge zu den Naturwissenschaften und der Kunst von der Antike bis zur Moderne entfalten. Allein dieser Textabschnitt wuchs in den folgenden zwei Jahren auf über 350 Seiten an und liegt in einer unvollendeten, teilweise korrigierten Typoskriptfassung vor. Die über die

¹Im Sommersemester 1988 hielt der Hrsg. auf Anregung und unter reger, also kritischer, Beteiligung von E. Brieskorn eine 2-stündige Vorlesung zur *Geschichte der kristallographischen Symmetriekonzepte im 19. Jahrhundert* (vgl. [320, Kap. 1]). Die letzte Sitzung am 13. 07. 1988 bestritt E. Brieskorn mit einem Ausblick zum Thema Dirichlet-Zellen und Delauney- (Delone-) Typen.

²E. Brieskorn an U. Schmickler-Hirzebruch, 27.08.1988, Kopie im Nachlass Brieskorn.

Einleitung hinausgehenden mathematischen Abschnitte kamen bis auf den Anfang des Abschnitts 13.7.1 *Die kombinatorische Geometrie und Topologie der Polyeder* nicht mehr zur Ausführung. In den Jahren 1989 und 1990 gab es noch sporadische Korrespondenz zwischen dem Autor und dem Verlag. Danach brach sie ab.

Mit Beginn der 1990er Jahre rückte für Brieskorn die Auseinandersetzung mit dem Leben und Werk Felix Hausdorffs und ab 1995 die Edition der *Gesammelten Werke Felix Hausdorffs* in das Zentrum seiner wissenschaftlichen Aktivitäten.³ Die weitere Arbeit an der Vorlesungsausarbeitung wurde dadurch zunächst unterbrochen und kam schließlich ganz zum Erliegen. Selbst das fertig ausgearbeitete, korrigierte und schon an den Verlag übergebene Typoskript von 13.1 bis 13.6 blieb daher zu Lebzeiten des Autors ungedruckt.

Im Mai 2013, wenige Monate vor seinem Tod, übergab Herr Brieskorn die vorhandenen Materialien zum Abschnitt 13.7 und Paragraph 14 des Projekts LA (Typoskript, wenige Seiten Manuskript und viele Abbildungen) an den Herausgeber dieses Bandes (ES) und schlug vor, sie mit Unterstützung durch Gert-Martin Greuel in leicht bearbeiteter Form digital zu publizieren.⁴ Etwa zeitgleich nahm er Kontakt mit Andreas Beschorner auf, um ein im Jahre 2006 begonnenes, aber zunächst nicht fortgeführtes Vorhaben neu zu beleben, die Abschnitte 13.1 bis 13.6 in LATEX zu setzen und ebenso digital zu veröffentlichen.

Beträchtliche Anteile des geplanten dritten Bandes der LA können nun, drei Jahrzehnte nach ihrem ursprünglichen Entwurf, der interessierten Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden. Sie sind nach Inhalt und Ausarbeitungsstand unterteilt in zwei Stücke (siehe die Übersicht zum Gesamthalt LA I-III, S. 729):

- a) Die vom Autor fertig ausgearbeiteten Abschnitte 13.1 bis 13.6 unter dem Titel *Lineare Algebra und Analytische Geometrie III. Geometrie im Euklidischen Raum* [57].

³Siehe dazu [176, Teilband IB, pp. 1026ff.] und [161].

⁴Nach der Fertigstellung dieses Bandes werden die Text- und Bildmaterialien zu LA III in die Bestände Nachlass Brieskorn in der Bonner Universitätsbibliothek eingegliedert.

- b) Die hier edierten, vom Autor unfertig hinterlassenen Abschnitte von 13.7 und §14 unter dem Titel *Klassische Gestalten und moderne Strukturen in Geometrie und Kristallographie*.

Die digitale Publikation von a) und b) erfolgt nun parallel bei *Imaginary*. Der dabei für Teil b) gewählte Titel wurde im Jahr 1988 zwischen Autor und Verlag für den geplanten dritten Band insgesamt abgesprochen. Er trifft aber in besonderer Weise auf die hier erscheinenden Abschnitte von b) zu.

Um die Lesbarkeit des Textes zu verbessern, sind außer minimalen Texteingriffen vorsichtige Umstellungen im Bildmaterial vorgenommen und Zwischenüberschriften in den langen und ursprünglich wenig gegliederten Text der Einleitung zum Abschnitt zur Polyedertheorie (13.7) eingefügt worden. Außerdem wurde die Nummerierung der Gliederung neu gefasst. Die geplante Einbettung in die Gesamtarchitektur von LA I bis III geht aus den ergänzenden Anmerkungen und der Übersicht über den Aufbau der drei Bände hervor (siehe S. 729). Die im detaillierten Inhaltsverzeichnis (Feingliederung, S. 728) aufgelisteten thematischen Punkte stammen (mit Ausnahme der vom Herausgeber in den Text eingefügten Zwischenüberschriften) vom Autor selbst. Sie entsprechen in der Art den Inhaltsverzeichnissen von LA I bis LA III.

Aufgrund der vielfältigen offenen Enden des Manuskripts erschien es nicht sinnvoll und sogar unmöglich, eine Abrundung des Fragments seitens des Herausgebers vorzunehmen. Der folgende Text beschränkt sich daher weitgehend auf die Wiedergabe der von Egbert Brieskorn eigenhändig fertiggestellten Teile des im Nachlass vorhandenen Typoskripts. Die formale Gestaltung des Typoskripts wurde, so weit dies im TEX-Satz machbar und sinnvoll erscheint, beibehalten; ebenso Sprache und Rechtschrift des Originals, bis auf eine Ausnahme: Der Autor schlug zu Beginn der Satzarbeiten für LA-III vor, eine gemäßigte Anpassung an die neue Rechtschrift vorzunehmen (phonetische Anpassung ß-ss). Korrekturen waren selbst in den unkorrigierten Typoskripten selten notwendig und wurden nur vorgenommen, um offensichtliche Tippfehler zu korrigieren. Die in der Regel sehr detailliert in den

laufenden Text integrierten Literaturangaben des Typoskripts sind durch TEX-förmige Verweise ersetzt worden. Zuweilen mussten Quellennachweise im Text des Autors ergänzt werden.

Der verwendete TEX-Stil verdankt sich der Initiative von Andreas Beschorner. In den Grundzügen wurde er mit E. Brieskorn im Jahre 2005 abgesprochen. Für die VerTEXung des Typoskripts der hier vorliegenden Stücks leistete Frau Petra Bäsell (Kaiserslautern) einen erheblichen Beitrag.

Frau Schmickler-Hirzebruch danke ich für ihre freundliche Beratung und großzügige Unterstützung durch ihr noch vorliegendes Bildmaterial. Gert-Martin Greuel hat die Arbeit an der Herausgabe dieses Bandes über einen langen Zeitraum technisch und organisatorisch begleitet und die digitale Publikation der sich ergänzenden Teilbände a) und b) bei *Imaginary* angeregt. Den Mitarbeitern von *Imaginary*, insbesondere Andreas Matt gebührt besonderer Dank für die Umsetzung.

Alle Beteiligte danken Frau Heidrun Brieskorn für die Zustimmung zu der gewählten Form der Publikation.

Erhard Scholz, Wuppertal im Juni 2019

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung des Herausgebers	v
1 Einleitung (zu LA III §13.7, unvollendet)	1
1.1 Platonische und Archimedische Polyeder	1
1.2 Kepler: Geometrie als ein göttlicher “Widerschein” . .	100
1.3 Exkurs: Kettenbrüche, diophantische Approximation .	172
1.4 Kepler über Fibonacci-Zahlen, Phyllotaxis	191
1.5 Halbreguläre und rhombisch monoedrische Polyeder .	252
1.6 Raumteilungen, Kugelpackungen, Wurzelsysteme . . .	296
1.7 Kristallstrukturen, Tammes Problem	332
1.8 Konfigurationsräume von Kugelpackungen	371
1.9 Exkurs: Klassische geometrische Konfigurationen . . .	410
1.10 Nachtrag: Kleiner Exkurs zu Flächenornamenten . . .	464
2 Kombinatorische Geometrie u. Topologie der Polyeder	
(LA III §13.7.1, Fragment)	475
2.1 Polytope und Polytopkomplexe	475
2.2 Simplices und simpliziale Komplexe	516
2.3 Kategorien von Polytopkomplexen	530
2.4 Sphärischer Dodekaederraum, Ikosaedersingularität . .	551
2.5 Kombinatorische und pl-Mannigfaltigkeiten	570
2.6 Ausblick: Geplanter Aufbau von LA III §13.7 (Hrsg.)	600

3	Material zu <i>Geometrische Kristallographie</i> (geplant als §14)	611
	(Abbildungen E. Brieskorn, Text Hrsg.)	
3.1	Kristallklassen und Kristallsysteme	612
3.2	Einfache Formen der Kristallographie	615
3.3	Gitter, Gittersysteme und Bravaistypen	624
3.4	Raumgruppen	628
3.5	Eine Brücke zur Zahlentheorie	633
3.6	Arithmetische Theorie der Raumgruppen	649
3.7	Kristallstrukturen idealisiert als Punktsysteme	654
3.8	Duale Gitter, Fourieranalyse periodischer Funktionen	657
3.9	Röntgenstrukturanalyse von Kristallen	659
3.10	Kristallformenn ausgewählter Mineralien (Beispiele)	662
4	Anhang zur <i>Geschichte der Kristallographie</i> (E. Scholz)	689
	Abbildungsverzeichnis	719
	Feingliederung (zu Kap 1 und 2 von E.B.)	725
	Inhalt von LA I bis III	729
	Literatur	731
	Namensverzeichnis	761
	Sachverzeichnis	767

1 *Einleitung* (zu LA III §13.7, unvollendet)

Πᾶν δὴ τὸ ἀγαθὸν καλόν,
τὸ δὲ καλὸν οὐκ ἄμετρον.

Nun ist alles Gute schön,
das Schöne aber darf
des Ebenmaßes nicht entbehren.

(Platon, Timaios, 87c 4-5)

1.1 Platonische und Archimedische Polyeder

In der unendlichen Vielfalt der Erscheinungen der Natur nehmen die lebenden Wesen und besonders wir Menschen auf vielfältige Weise Formen und Gestalten wahr. Manche von ihnen sind einfach und regelmäßig. In ihnen ist uns die Möglichkeit gegeben, gesetzmäßige Strukturen in der Natur denkend zu erkennen. Solche Erkenntnis ist für uns notwendig, und sie wird durch unsere Erfahrung bestätigt. Zugleich empfinden wir solche Gestalten als schön, und wir empfinden bei ihrem Anblick Freude. Warum? Das Wahrnehmen einer Gestalt gibt uns in unmittelbarer Weise Gewissheit, dass unsere Erkenntnis wahr ist – die notwendige Bestätigung der Erkenntnis durch die Erfahrung hingegen ist oft nur mittelbar. Schönheit ist der Glanz der Wahrheit. Letzten Endes – so glaube ich – ist dies der Grund unserer Freude über die Schönheit der Gestalt: Sie ist ein Moment des Einswerdens mit der Wirklichkeit.

Doch können wir Schönheit der Gestalt und Regelmäßigkeit der Form nicht nur wahrnehmen – wir können auch selbst Gebilde schaffen, regelmäßige Gestalten, die uns schön erscheinen. In vielen Kulturen zeugt eine reiche Vielfalt von Kunstwerken von dieser schöpferischen Fähigkeit der Menschen, angefangen von schön und zweckmäßig gestalteten Gebrauchsgegenständen über ornamentale Schmuckformen bis hin zu den großen Schöpfungen der Musiker, der Dichter, der Maler, Bildhauer und Baumeister. Merkwürdigerweise scheint es sich mit der Schönheit dieser Werke aber so zu verhalten: Je größer die Kunst ist, desto weniger liegt ihre Schönheit in einer einfachen Regelmäßigkeit. Wir können diese Schönheit empfinden, doch ihr tiefer innerer Grund bleibt dem Denken verborgen. Was durch solche Kunst in uns zum Erscheinen gebracht wird, liegt – glaube ich – tiefer als das, was unser Denken erreicht.

Auch Mathematik kann man als einen Prozess der Schaffung von Gestalten sehen. "Ein Mathematiker ist wie ein Maler oder ein Dichter einer, der Muster macht", sagt Hardy in seinem Essay "A Mathematicians Apology" [173], und er fährt fort: "Wenn seine Muster dauerhafter sind als die Ihren, dann deswegen, weil sie aus Ideen gemacht sind". Und er sagt weiter:

Die Muster des Mathematikers müssen wie die des Malers oder des Dichters schön sein; die Ideen müssen sich wie die Farben oder die Worte in harmonischer Weise zusammenfügen [173, p.14].

Dass Schönheit für ihre Schöpfungen wesentlich ist, wissen die Mathematiker. Worin sie aber besteht, ist schwer zu sagen, und noch schwerer, was ihr eigentlicher Grund ist. Doch soviel scheint klar zu sein, dass in der Mathematik Schönheit in direkterer Weise als in der Kunst mit Einfachheit, Gesetzmäßigkeit und harmonischer Beziehung der Teile zueinander und zum Ganzen verbunden ist.

Wir nehmen in der Natur Gestalten wahr, Strukturen der Wirklichkeit, und wir versuchen, sie zu verstehen, indem wir ein System von Begriffen schaffen, ein Muster, eine Figur aus Ideen, eine mathematische Theorie. Aber: Was tun wir, wenn wir das tun? Und warum tun wir es? Was ist

Struktur, Begriff, Gestalt, Idee? Was erkennen wir damit? Die Natur? Die Wirklichkeit? Was ist wirklich? Das sind sehr alte Fragen. Viele Antworten wurden gegeben, Antworten, von denen einige die Entwicklung unserer Wissenschaft und unserer Technik in entscheidender Weise bestimmt haben. Diese Entwicklung hat in eine tiefe Krise geführt – wir sind im Begriff, die Erde mit all ihrem wunderbaren Leben zu zerstören und uns selbst zu vernichten. Darum müssen wir alle die alten Fragen neu stellen. Die Mathematiker müssen sich neu fragen: Was ist das Verhältnis von Idee und Wirklichkeit? Man kann über diese Frage nicht nachdenken, ohne beides – mathematische Ideen und Strukturen der Wirklichkeit – wenigstens an Beispielen kennengelernt zu haben. Das Beispiel, das wir in diesem Buche immer wieder aufgenommen und wenigstens ansatzweise entfaltet haben, ist die Idee der Symmetrie. Diese Idee, eine zentrale, leitende Idee der modernen Physik, von den Mathematikern in zweieinhalb Jahrtausenden entfaltet, hat ihre ersten klar erkennbaren Ursprünge in den Lehren der Pythagoreer und der Philosophie Platons, und eine frühe und historisch besonders wichtige Ausprägung dieser Idee sehen wir in den **Platonischen Körpern**. Ihnen wollen wir uns jetzt zuwenden.

Dabei dient diese Einleitung nur einer Darstellung der geschichtlichen Entwicklung in ganz großen Zügen und der Einordnung in größere Zusammenhänge. Erst danach entwickeln wir die Theorie in moderner Gestalt.

Wir beginnen mit einigen Bemerkungen über Namen und Herkunft der regulären Polyeder. Zuerst sprechen wir über die Namen, und zwar ausführlich, weil gerade dadurch der geistesgeschichtliche Zusammenhang deutlich wird. In der Sprache sind uns Anfänge unseres Denkens aufgehoben, die den Anfängen unserer Wissenschaft noch vorausgehen.

Ein Polyeder ist eine von endlich vielen ebenen Vieleckflächen begrenzte räumliche Figur. Das ist die Bedeutung des Wortes **“Polyeder”**. Das griechische πολύς bedeutet viel, und ἔδρα bedeutet umgangssprachlich “Sitz, Sitzplatz, Platz, Grundlage, Basis”.

In der mathematischen Fachsprache war es neben dem allgemeiner und häufiger gebrauchten $\beta\alpha\sigma\iota\varsigma$ der Terminus für die begrenzenden Seitenflächen. πολύεδρος bedeutet also vielflächig, und als substantiviertes Adjektiv wäre

es mit Vielfächner oder Vielflach zu übersetzen. Der vollständige Terminus bei Euklid ist στερεόν πολυέδρον (Euklid XII, Prop. 17). Im umgangssprachlichen Sinn bedeutet στερεός “starr, hart, fest” und wird dementsprechend im Lateinischen mit “solidus” übersetzt. In der mathematischen Fachsprache Euklids ist damit ein dreidimensionales Gebilde gemeint (Euklid XI, Definition 1: Ein räumliches Gebilde ist, was Länge, Breite und Tiefe hat.). Dabei ist στερεόν auch wieder als substantiviertes Adjektiv gebraucht. Der vollständigere Terminus, der z. B. in Euklid XI bei den Definitionen von Prisma und Pyramide als Oberbegriff verwendet wird, ist σχῆμα στερεόν (lat: figura solida), im Deutschen zu übersetzen mit “räumliches Gebilde” oder “räumliche Figur”. Die bedeutungsverwandten Worte σχῆμα im Sinne von “Figur” und εἶδος im Sinne von “Figur” oder “Form” sind seit Euklid Teil der mathematischen Fachsprache. So lautet etwa Definition 1 der Data von Euklid: Man sagt, dass geradlinig begrenzte Figuren (σχῆματα) durch die Formen (εἶδει) gegeben sind, wenn jeder der Winkel und die Verhältnisse der Seiten gegeben sind. Die Wörter σχῆμα, εἶδος, σῶμα gehören zum ältesten Teil des Wortschatzes der griechischen Geometer. Eine Aufzählung dieser ältesten Wörter gibt Charles Mugler, “Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs” [266, p. 11]: Kreis, Mönchchen, Rhombus, Trapez, Würfel, Pyramide, Prisma, Sphäre, Kegel, Zylinder; Länge, Breite, Höhe; Punkt, Linie, Fläche, Körper; Mittelpunkt, Scheitel, Pol, Achse, Basis, Schnitt, Abschnitt, Grenze, Seite, Rand, Winkel, Gnomon; Name, Figur, Form – gerade, krumm, rund, stumpf, konkav, konvex, recht, gleichschenkelig, ungleichschenkelig, inmitten, äußerst, ganz, übrig, gemeinsam, ähnlich, gleich – treffen, zusammentreffen, eindringen, gerichtet sein, ruhen auf, gegenüberliegen, berühren, verbinden, verlängern, teilen, schneiden, knicken, enthalten, ausfüllen, ausschöpfen, drehen, beschreiben, einbeschreiben.

Bevor σχῆμα, εἶδος, σῶμα Wörter der mathematischen Sprache wurden, waren sie zuerst Wörter der Umgangssprache und dann – im Verlauf dieses Prozesses – Gegenstand intensiver philosophischer Reflexion. Wir geben zunächst die umgangssprachliche Bedeutung. σχῆμα bedeutet: Haltung, Stellung, Gestalt, **Figur**, **Form**, äußere Erscheinung, Äußeres, Außenseite, Aussehen, Anblick, Bild, Art und Weise, Beschaffenheit, Zu-

stand, Verhältnis, Lage. εἶδος bedeutet: Aussehen, **Gestalt**, schöne Gestalt, Schönheit, Beschaffenheit, Wesen, Zustand, Stellung, Gestaltung, Form. σῶμα bedeutet: **Körper**, Leib, Individuum, Wesen, Körperliches, Materielles, Materie, Stoff, Substanz, Sache, Ding, Atom.

Materie, Substanz, Form – das sind seit Platon und Aristoteles Begriffe, um die das europäische philosophische Denken sich bemüht hat, und die auch in der Entwicklung der europäischen Naturwissenschaft eine grundlegende Rolle gespielt haben. Es ist ganz unmöglich, dies hier irgendwie adäquat zu beschreiben.

Wenn man beispielsweise begrifflich machen wollte, was hier mit εἶδος gemeint ist, müsste man die platonische Ideenlehre darstellen. Das kann ich nicht. Ich zitiere stattdessen einige Sätze von Carl Friedrich von Weizsäcker aus dem zwölften Kapitel seines Buches “Aufbau der Physik” [370]:

Das Bleibende oder das Wesen – damit ist der Ansatz der platonischen Philosophie bezeichnet. In ihr ist das, was ist und weder wird, noch vergeht, das Eidos, die Form oder Gestalt; eben das Wesen, wenn wir einen Ausdruck der deutschsprachigen Tradition benutzen. Das für die mathematische Naturwissenschaft wichtigste Beispiel sind die mathematischen Strukturen. Die in den Sand gezeichneten Kreise entstehen und vergehen und sind keine wahren Kreise; vom Kreis selbst jedoch, vom mathematischen Kreis, gibt es Erkenntnis seiner zeitüberdauernden Struktur. Eidos ist aber auch das Gerechte selbst, im Unterschied zu den nicht endenden Zweideutigkeiten unseres menschlichen Handelns. Eidos ist das Vorbild menschlicher Gemeinschaft, der Politeia, wie es der Philosoph nachzeichnet. Eidos ist in der mythischen Sprache des Timaios das ewige Vorbild, als dessen Abbild Himmel und Erde in mathematischer Ordnung gemacht sind. ... Auch in der griechischen Eidos-Philosophie bedeutete Eidos oder Form keineswegs nur mathematisierbare Struktur. Wir haben eingangs andere Bedeutungen des Eidos zitiert: das Gerechte, das vollkommen Schöne bei Platon, die Seele selbst bei Aristoteles. Die Reduktion des Wissens auf mathematische Strukturen

ist insofern keine Rückkehr zur griechischen Philosophie, sondern eine Radikalisierung der neuzeitlichen Naturwissenschaft. Sie folgt damit freilich einer in der griechischen Logik, Mathematik, Astronomie, Musiktheorie schon angelegten Tendenz, die in der ausgezeichneten Rolle der Mathematik bei den Pythagoreern und bei Platon wirksam wurde.

In dem angedeuteten philosophiegeschichtlichen und wissenschaftsgeschichtlichen Zusammenhang interessiert uns insbesondere die Entwicklung und der Bedeutungswandel der Wortverbindung $\sigma\chi\eta\mu\alpha$ $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{\omicron}\nu$ die schon bei Platon vorkommt und bei Euklid der Terminus für "räumliche Figur" geworden ist. Diese Entwicklung wird bei Charles Mugler in seinem Buch "Platon et la recherche mathématique de son époque" [265, p. 32–43], wie folgt dargestellt. Platon gibt in seinem Dialog Menon 76A [287] folgende Definition des Begriffs $\sigma\chi\eta\mu\alpha$: "Ich sage in der Tat, dass eine Figur ($\sigma\chi\eta\mu\alpha$) die Grenze ist, wo ein Körper $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{\omicron}\nu$ aufhört, und ich sage das für alle Figuren, so dass ich also zusammenfassend eine Figur als die Grenzfläche eines Körpers definieren möchte." Platon fasst also als das Wesentliche an einem Körper, als seine Gestalt, ihre Grenzfläche auf – heute würden wir in der Mathematik sagen: den Rand – das ist für ihn das $\sigma\chi\eta\mu\alpha$, während er das raumausfüllende Gebilde selber entweder mit dem archaischen $\sigma\delta\mu\alpha$ bezeichnet oder mit $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{\omicron}\nu$. Beide Bezeichnungen für Körper kommen im Timaios neben einander vor, außerdem auch noch die Verbindung $\tau\omicron$ $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{\omicron}\nu$ $\epsilon\acute{\iota}\delta\omicron\varsigma$, bei der ich mir nicht sicher bin, ob $\epsilon\acute{\iota}\delta\omicron\varsigma$ synonym zu $\sigma\chi\eta\mu\alpha$ im obigen Sinn ist oder nicht. Das Interessante ist nun, dass bei diesen Worten von Platon zu Euklid eine Bedeutungsverschiebung stattfindet. Das Wort $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{\omicron}\nu$ behält seine Bedeutung, aber $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{\omicron}\nu$ $\sigma\chi\eta\mu\alpha$ ist jetzt nicht mehr die Grenzfläche eines räumlichen Körpers, sondern der von dieser Grenzfläche umschlossene Raum. Das wird in den stereometrischen Definitionen zu Buch XI ganz deutlich, z. B. XI, Def. 12, 13, 14. Die Grenzfläche selbst hingegen, das, was Platon $\sigma\chi\eta\mu\alpha$ nennt, heißt jetzt $\acute{\epsilon}\pi\iota\varphi\alpha\nu\epsilon\iota\alpha$. So lautet X, Def. 2: $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\omicron\upsilon$ $\delta\grave{\epsilon}$ $\acute{\pi}\acute{\epsilon}\rho\alpha\varsigma$ $\acute{\epsilon}\pi\iota\varphi\alpha\nu\epsilon\iota\alpha$, also etwa: Die Begrenzung eines Körpers ist seine Oberfläche. Platon hat seine Auffassung im Timaios konsequent durchgehalten: Das Wesentliche an den regulären Polyedern ist für ihn das

regelmäßige Schema, nach dem die begrenzenden Flächen aneinandergefügt sind. Man hat diese Auffassung häufig merkwürdig oder sogar schwer begreiflich gefunden, da man eben – was natürlich auch richtig ist – in der Nachfolge Euklids ein Polyeder als den dreidimensionalen von den Seitenflächen begrenzten Körper ansah. Vom heutigen Standpunkt aus stellt der Ansatz Platons jedoch die höhere Abstraktionsstufe dar. Wir werden sehen, dass durch ihn das Wesen der für die Polyeder charakteristischen kombinatorischen Struktur genau erfasst wird. Soviel zur Geschichte des Wortes $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\nu$ und des Oberbegriffs $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\nu$ $\sigma\chi\eta\mu\alpha$.

Während nicht näher bestimmte Polyeder unter dem Oberbegriff $\sigma\chi\eta\mu\alpha$ $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\nu$ oder $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\nu$ $\pi\omicron\lambda\upsilon\epsilon\delta\rho\omicron\nu$ subsumiert wurden, führten die griechischen Mathematiker für bestimmte Polyeder besondere Namen ein, die auch heute noch im Gebrauch sind. So definiert Euklid zum Beispiel im Buch XI der Elemente - dem ersten der drei stereometrischen Bücher – **Prismen** und **Pyramiden** ($\pi\rho\iota\sigma\mu\alpha$ und $\pi\upsilon\rho\alpha\mu\iota\varsigma$). Zur Benennung der Platonischen und der Archimedischen Polyeder verbanden die Griechen das Zahlwort für die Zahl der Seitenflächen mit dem Wortbestandteil $\epsilon\delta\rho\acute{o}\nu$. So waren die Namen der fünf Platonischen Körper:

$\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\epsilon\delta\rho\acute{o}\nu$	<u>Tetraeder</u>	Vierflächner
$\acute{\epsilon}\chi\acute{\alpha}\epsilon\delta\rho\acute{o}\nu$	<u>Hexaeder</u>	Sechseflächner
$\acute{o}\kappa\tau\acute{\alpha}\epsilon\delta\rho\acute{o}\nu$	<u>Otaeder</u>	Achtflächner
$\delta\omicron\delta\epsilon\kappa\acute{\alpha}\epsilon\delta\rho\acute{o}\nu$	<u>Dodekaeder</u>	Zwölfflächner
$\epsilon\iota\kappa\omicron\sigma\acute{\alpha}\epsilon\delta\rho\acute{o}\nu$	<u>Ikosaeder</u>	Zwanzigflächner

So jedenfalls heißen die fünf Körper in der $\sigma\upsilon\nu\alpha\gamma\omicron\gamma\acute{\eta}$ dem großen Sammelwerk von acht Büchern von Pappos, das gegen Ende des 3. Jahrhunderts n. Chr. entstanden sein muss. Bei Euklid wird das Tetraeder $\pi\upsilon\rho\alpha\mu\iota\varsigma$ genannt, das Hexaeder $\chi\upsilon\beta\omicron\varsigma$. Soviel zu den Namen.

Woher kommen die regulären Polyeder? In der belebten und in der unbelebten Natur kennen wir heute viele Dinge, deren kombinatorische oder symmetrische Struktur wir durch die regulären Polyeder beschreiben können. Ich nenne einige Beispiele, auf die wir später noch näher eingehen wollen oder über die schon berichtet wurde. Die einfachsten Beispiele sind gewiß die

Kristalle. Es gibt Mineralien, deren Kristalle fast vollkommen die Gestalt eines regulären Tetraeders, Hexaeders oder Oktaeders annehmen können. Reguläre Dodekaeder und Ikosaeder sind keine Kristallformen. Nicht reguläre Dodekaeder sind jedoch als einfache Kristallformen möglich, und nicht reguläre Ikosaeder als zusammengesetzte Kristallform. Beide kommen zum Beispiel beim Pyrit vor, neben Hexaedern, Oktaedern und anderen Formen, die wir später noch kennenlernen.

Die meisten anderen Dinge mit der Struktur der regulären Polyeder sind mikroskopisch klein oder submikroskopisch: Die ikosaederförmigen Capside der Viren, die dodekaederförmigen Kalkskelette der Coccolithen, die kunstvollen Kieselskelette der Radiolarien, welche Symmetrie und kombinatorische Struktur aller regulären Körper zeigen, die Kieselnadeln im Skelett der Schwämme, auch sie mit den Symmetrien des Tetraeders, des Oktaeders und des Ikosaeders, und schließlich die Pollenkörner vieler Pflanzen sind einige der schönsten Beispiele aus der belebten Natur. Aus der unbelebten Natur gibt es wichtige Beispiele in der Chemie und Physik. In der Chemie spielt die Symmetrie von Molekülen eine große Rolle. Beispielsweise haben die Chemiker ein Borhydrid synthetisiert, dessen zwölf Boratome so angeordnet sind wie die Ecken eines regulären Ikosaeders. In der Festkörperphysik sind als neuestes und aufregendes Beispiel die Quasikristalle zu nennen, deren Struktur mit dem regulären Dodekaeder und Ikosaeder und mit deren vierdimensionalen Analoga zusammenhängt.

Von all diesen Beispielen regulärer Strukturen in der Natur konnten den Mathematikern und Naturforschern der Antike nur die Kristallformen bekannt sein. Ich kenne jedoch in den aus der Antike überlieferten mathematischen Texten keinen Hinweis auf die Form der Kristalle. Soweit ich weiß, verbindet sich erst in der Renaissance das Interesse an der Kristallgestalt mit dem Studium der aus der Antike überlieferten mathematischen Formen.

Es erscheint mir daher richtig, die Entdeckung der regulären Polyeder nicht als einen einfachen Vorgang des Nachbildens natürlicher Gestalten zu begreifen, sondern als Teil eines umfassenden schöpferischen Prozesses, in dem die Menschen versuchen, die Wirklichkeit zu verstehen. Die ersten Anfänge, wenn es denn solche überhaupt gibt, liegen vielleicht im Bereich

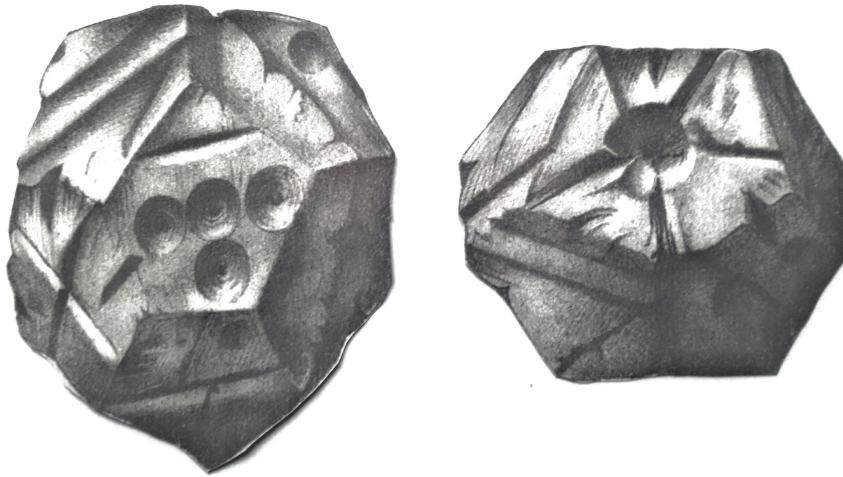


Abbildung 1.1: Dodekaeder von Monte Loffa (nach Lindemann 1896)

der Kulte, der Mythen und der Kunst. Ich denke dabei an die ägyptischen Pyramiden und an Funde von aus Bronze und aus Stein gemachten Dodekaedern in Gebieten, die von den Kelten und den Etruskern besiedelt wurden, aber auch an die mythischen Elemente in den Lehren von Pythagoras und von Platon. Bei Ausgrabungen auf dem Monte Loffa bei Padua kam ein Dodekaeder aus Steatit zutage, dessen Seitenflächen Zeichen aus Strichen und Punkten tragen. Die folgende Abbildung dieses Dodekaeders stammt aus einer Abhandlung von F. Lindemann mit dem Titel "Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen" [239], Sie zeigt das Dodekaeder vom Monte Loffa in ungefähr 80% der Originalgröße. Lindemann kommt nach sorgfältigen Erwägungen zum Fundort, zu begleitenden Funden und zu dem, was über die in Frage kommenden historischen Epochen und Völker in Oberitalien und deren Zahlzeichen bekannt ist, zu dem Schluss, dass dies Polyeder in die erste Hälfte des 1. Jahrtausends v. Chr. zu datieren ist, also in die frühe

Eisenzeit, dass es ferner zum etruskischen Kulturkreis gehört, und dass die Zeichen darauf Zahlzeichen sind, welche aus ägyptischen Zahlzeichen abgeleitet sein könnten. Er meint, dass die Entdeckung des Dodekaeders als einer besonderen Gestalt auf die Anschauung der Pyrit-Kristalle aus Elba zurückgehen könnte, und dass Pythagoras die Figur des Dodekaeders vielleicht durch Berührung mit der etruskischen Kultur kennenlernte.

Wie dem auch sei – die Geschichte solcher von Menschen geschaffenen Gestalten reicht viel weiter zurück bis in vorgeschichtliche Zeiten. In Schottland, vor allem im Nordosten von Schottland in Aberdeenshire, machte man erstaunliche archäologische Funde: Von Steinzeit-Menschen gefertigte Gebilde aus Stein von vollendeter Formgebung mit der Symmetrie der platonischen Körper.

Es handelt sich dabei um außerordentlich sorgfältig und genau bearbeitete Steinkugeln mit einem Durchmesser von etwa sieben Zentimetern. Als Material wurden die verschiedensten Gesteinsarten verwendet: Gabbros, Dolerite, Diorite, Granite, Tongesteine, Sandsteine, Quarzite, Serpentine, Hornblende-Gneise und granitische Gneise. Einige davon, wie Serpentine, sind weich, andere aber sehr hart. Granitischer Gneis hat die Härte 6-7 auf der Skala von Mohs. Wenn man bedenkt, was an Werkzeug zur Bearbeitung dieses Steins zur Verfügung stand, kann man vermuten, dass die Herstellung einer einzigen Kugel monatelang gedauert hat.

In Schottland sind einige hundert Steinkugeln gefunden worden. Bekannt sind bisher 387 Exemplare, so Dorothy N. Marshall in einem Übersichtsartikel "Carved stone balls" [244]. Nur wenige dieser Funde sind in einen archäologisch gesicherten Kontext eingeordnet. Einige Kugeln kamen bei den Ausgrabungen von Skara Brae auf den Orkneys zutage, andere wurden in oder bei Steinkistengräbern, Dolmen und Grabhügeln gefunden. Aus der Kenntnis dieser Fundorte und auf Grund von Altersbestimmungen von Begleitfunden durch Messung des Gehalts an radioaktivem Kohlenstoff lässt sich die geschichtliche Epoche bestimmen, der die Steinkugeln angehören. Sie stammen aus dem 3. Jahrtausend v. Chr., aus einer Zeit, die man in Hinsicht auf das nördliche und mittlere Europa als spätes Neolithikum noch mit zur Jungsteinzeit rechnet, in Hinsicht auf das südliche Europa und den

vorderen Orient zur Kupferzeit. Eine der auffälligsten Erscheinungen dieser Zeit war die Megalithkultur, von der in West- und Nordeuropa Felskammergräber, Dolmen, Steinkisten, Menhire und Steinkreise zeugen – zum Beispiel Stonehenge in England oder Knowth in Irland. Die Steinwände von einigen dieser Monumente sind mit ebenen Mustern geschmückt, die völlig jenen auf den sphärischen Flächen der Steinkugeln entsprechen. Gleichartige Muster findet man auch auf der Keramik dieses Kulturkreises (“grooved ware”). All dies zeugt von der Vorliebe der Menschen jener Zeit für rein geometrische Muster und geometrische Formen, und die Tatsache, dass sie diese Formen aus hartem Stein herausarbeiteten, zeigt wohl, dass sie damit etwas schaffen wollten, was dauert. Ob darüber hinaus diese Gebilde einem bestimmten Zweck dienten, weiß man nicht. Der Einfluss der kontinentalen Glockenbecherkultur brachte das Ende dieser Tradition.

Es soll jetzt im einzelnen wenigstens das Wichtigste über die Formen der neolithischen Steinkugeln und die Muster ihrer Verzierungen berichtet werden. Dr. Alison Sheridan vom Royal Museum of Scotland in Edinburgh war so freundlich, besonders schöne Exemplare – aus der Sicht eines Mathematikers – aus den Beständen des Museums für mich auszuwählen und zu kommentieren, und der Photograph des Museums hat viel Mühe aufgewendet, um sie so schön wie möglich zu photographieren und die Muster der Verzierungen mit allen Details zu zeigen. Wie gut ihm das gelungen ist, zeigen die Bildtafeln der folgenden Seiten. Unter den Bildern sind die Signaturen angegeben, durch welche die Objekte im Museum registriert sind, und außerdem – soweit bekannt – Fundort und Material.

Wenn bisher von Steinkugeln die Rede war, dann nur mangels eines besseren Wortes. Einige der Objekte sind zwar tatsächlich Kugeln aus Stein, deren sphärische Oberfläche durch ein eingeritztes Muster von Linien unterteilt oder verziert ist – oder auch beides zugleich. Eine solche Unterteilung kann z.B. durch drei paarweise zueinander senkrechte Großkreise geschehen, so dass eine Unterteilung der Sphäre in 8 sphärische Dreiecke mit lauter rechten Winkeln entsteht. Eine Verzierung kann z.B. aus mehreren Systemen von konzentrischen Kreisen bestehen, jeweils umschlossen von einem kreisringförmigen Winkelband, das übrigens bemerkenswerterweise stets die

gleiche Orientierung hat. Ein sehr schönes Beispiel ist AS 29 mit 9 Familien von Kreisen (Abb. 1.6).

Die meisten Objekte sind jedoch nicht einfach Kugeln. Vielmehr ist ihre Form aus einer Kugel herausgearbeitet worden, indem in den Zwischenräumen eines meist regelmäßig verteilten Systems von Kugelkalotten oder auch nur an den Rändern derselben der Stein bis zu einer gewissen Tiefe herausgemeißelt wurde. Bei AS 16 (Abb. 1.5) und AS 111⁵ sieht man das sehr deutlich. Die so aus den Kalotten entstehenden Buckel können am Randkreis eine deutlich sichtbare Kante behalten oder aber durch Abschleifen dieser Kante gerundet werden, und die Oberfläche des Buckels kann mit einem Muster aus Linien und Punkten verziert sein oder auch nicht.

Häufige Muster für Verzierungen sind Spiralen, Systeme konzentrischer Kreise, kreisringförmige Winkelbänder, Scharen paralleler Linien, Linien- gitter oder Punktgitter, und schließlich Kreisflächenteilungen in Quadranten, wobei die Quadranten alternierend mit zwei verschiedenen anderen Mustern verziert sind. Eine der prachtvollsten Verzierungen zeigt eine besonders sorgfältig gearbeitete Kugel aus Towie, Aberdeenshire, AS 10 (Abb. 1.4). Drei der vier Buckel sind verziert. Die eine Verzierung ist ein System von konzentrischen geschlossenen Kurven mit 3-zähliger Symmetrie, von denen jede aus drei Kreisbögen besteht. Eine bewundernswert einfache Lösung des Problems, einen Kreis durch ein System von Kurven mit dreizähliger Symmetrie zu approximieren. Der zweite Buckel ist mit einem System von 4 miteinander verbundenen Doppelspiralen geschmückt, der dritte mit einer freier gestalteten komplexen Muster aus Spiralen, gekrümmten Winkelbändern und Mäandern. Wie man sieht, ist das Muster der Verzierung nur auf einer der vier Flächen mit seiner dreizähligen Symmetrie der räumlichen Symmetrie des Körpers angepaßt, denn dieser hat ganz perfekt die Symmetrie des Tetraeders. Noch viel weniger entspricht dieser räumlichen Tetraedersymmetrie die unterschiedliche Verzierung der vier Flächen. Dieser merkwürdige Gegensatz zwischen Symmetrie des Körpers und Asymmetrie der Flächen- Ornamente scheint – mit einigen Ausnahmen – die Regel zu sein, soweit überhaupt Ornamente vorhanden sind. Als Mathematiker kann ich mir die-

⁵Ohne Abbildung, Hrsg.

sen Widerspruch nicht erklären, und so soll im folgenden von den vielfältigen Mustern der Oberfläche nicht mehr die Rede sein, obwohl gerade sie für den Archäologen viel interessanter und aufschlussreicher sind als die räumliche Symmetrie der Körper.

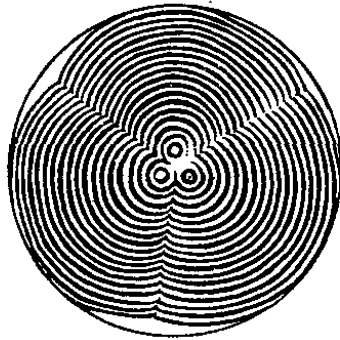


Abbildung 1.2: Eine Verzierung von AS 10 (nach Marshall 1976)

Soweit die Oberfläche der Steinkugeln durch Buckel gegliedert ist, kann man versuchen, die Regelmäßigkeit ihrer Gestalt durch die Zahl und Anordnung dieser Buckel zu fassen. Ihre Zahl liegt bei den Kugeln, über die D.N. Marshall berichtet, zwischen 3 und 160. Nicht bei allen, besonders nicht bei denen mit vielen Buckeln, erkennt man eine einfache Regelmäßigkeit im Sinne von Symmetrie (Beispiele: AS 29, AS 80, Abb. 1.6). Bei der großen Mehrzahl jedoch, bei vielleicht rund zwei Dritteln aller Kugeln liegt die Symmetrie der platonischen Körper vor, also die Symmetrie des Tetraeders, des Hexaeders oder des Pentagondodekaeders. *Sit venia verbo!* Denn diese Feststellung ist ein doppelter Anachronismus. Zum einen schuf man diese Gebilde rund zweitausend Jahre vor Plato. Zum andern lässt sich ihre Regelmäßigkeit wegen ihrer eleganten, fließenden Gestalt mit dem auf einfachste geometrische Elemente abgestellten griechischen Begriff der Regularität kaum fassen, eher schon hingegen mit dem modernen Symmetriebegriff des 19. Jahrhunderts n. Chr. Wie die Schöpfer dieser Gestalten selbst deren Regelmäßigkeit begriffen, können wir kaum ahnen. So sei mir also die ahistorische Rede von der “Symmetrie der Steinzeitkugeln” erlaubt!

Der häufigste Typ von Steinkugeln hat die Symmetrie des Würfels und hat 6 Buckel, deren Flächen den 6 Flächen des Würfels entsprechen. Beispiele: AS 12, AS 13 (Abb. 1.3), AS 79, AS 111.⁶ Natürlich ist auch diese Aussage über das “Entsprechen” eine mehr als problematische Interpretation!

Danach kommt – der Häufigkeit nach – ein Typ von Steinkugeln mit der Symmetrie des Tetraeders. Die meisten von diesen Kugeln haben 4 Buckel, die den 4 Flächen eines Tetraeders entsprechen. Beispiele: AS 10, AS 16 (Abb. 1.4, 1.5). Bei einigen gibt es jedoch zusätzlich zu diesen 4 großen Buckeln 4 kleinere in den Zwischenräumen der großen, die dann den Ecken des Tetraeders oder den Flächen des dualen Tetraeders entsprechen. Beispiel: AS 176 (Abb. 1.5).

Ein weiterer, nicht so häufiger Typ, mit nur sieben Exemplaren, ist gewissermaßen dual zum erstgenannten, häufigsten Typ. Er hat die Symmetrie des Würfels und 8 Buckel, die den 8 Ecken des Würfels bzw. den 8 Flächen eines dualen Oktaeders entsprechen. Beispiele: AS 117, AS 178 (Abb. 1.9).

Schließlich gibt es – für den Mathematiker der Gipfel der ganzen unglaublichen Leistung – auch einen Typ mit der Symmetrie des Pentagondodekaeders und mit 12 Buckeln, die eben jenen 12 Dodekaederflächen entsprechen. Wie oft dieser Typ vorkommt, kann ich den hier sehr summarischen Angaben des Artikels von Marshall nicht entnehmen. Beispiele für diesen Typ: AS 109, AS 116 (Abb. 1.8).

Es mag sein, dass es weitere Typen mit der Symmetrie der platonischen Körper oder auch anderer Polyeder – Prismen und Antiprismen – gibt. Da ich selbst leider noch keine Gelegenheit hatte, diese Steine in die Hand zu nehmen und zu betrachten, vermag ich das nicht sicher zu sagen. So gibt es zum Beispiel einige Kugeln mit 14 Buckeln, z.B. eine im Ashmolean Museum in Oxford. Von dieser meint K. Critchlow, wenn ich ihn recht verstehe, dass diese den 14 Flächen eines hexagonalen Antiprismas “entsprechen”, wobei ich mit dieser Aussage lediglich die räumliche Anordnung beschreiben will. Siehe K. Critchlow: “Time stands still – New Light an Megalithic Science” [92]. Critchlow hat wohl als erster auf die große kulturgeschichtliche Bedeutung dieser steinzeitlichen Schöpfungen hingewiesen. Ich bin durch

⁶Die letzten beiden ohne Abbildung, Hrsg.

sein Buch auf die Steinkugeln aufmerksam geworden.

Die Beschreibung einer Steinsphäre als Fläche mit Buckeln ist zwar verständlich, aber eigentlich unangemessen angesichts einer solch eleganten Gestalt wie der von AS 178 (Abb 1.9). Allerdings gibt es nur ganz wenige Beispiele von solcher Vollkommenheit. Angemessener wäre vom mathematischen Standpunkt aus eine Beschreibung, welche die ganze Fläche mit allen Feinheiten ihrer Krümmung erfasst. Eine Möglichkeit hierzu böte eine analytisch-geometrische Beschreibung der Fläche oder doch ähnlicher Flächen durch eine Gleichung, am einfachsten natürlich durch eine reell algebraische Gleichung.

Die Nullstellenmenge einer solchen Gleichung $F(x, y, z) = 0$ soll genau die Symmetrie des Standardwürfels im euklidischen Raum mit den rechtwinkligen cartesischen Koordinaten x, y, z haben. Wir verlangen zur Vereinfachung darüber hinaus, dass das Polynom F invariant unter den Symmetrieoperationen des Würfels ist, also unter beliebigen Permutationen und Vorzeichenwechseln der Koordinaten. Der Ring dieser invarianten Polynome wird von den elementarsymmetrischen Funktionen von x^2, y^2, z^2 erzeugt, also von

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2, \\ &x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2, \\ &x^2y^2z^2. \end{aligned}$$

Wäre F quadratisch, also $F(x, y, z) = c(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + d$, dann hätte die Nullstellenmenge eine höhere Symmetrie als der Würfel. Also muss F mindestens den Grad 4 haben. Nehmen wir an, dass es genau diesen niedrigsten möglichen Grad hat. Dann hat F offenbar folgende Form:

$$a(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + b(x^2 + y^2 + z^2)^2 + c(x^2 + y^2 + z^2) + d.$$

Dabei ist $a \neq 0$ wegen der Symmetriebedingung. Wir dürfen daher o.B.d.A. setzen: $a = -2$. Wir tun dies, weil wir folgende Identität benutzen wollen:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Setzen wir dann noch $\lambda = b - 1$ und $\mu = c$ sowie $\nu = d$, so erhalten wir die

gesuchten Gleichungen in der Form

$$x^4 + y^4 + z^4 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2)^2 + \mu(x^2 + y^2 + z^2) + \nu = 0$$

mit reellen Parametern λ, μ, ν . Diese Gleichungen fand E. Goursat in seiner Arbeit: “Etude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d’un polyèdre régulier” [155]. Ein Modell einer solchen Fläche für einen speziellen Satz von Parameterwerten λ, μ, ν mit $\lambda = \nu = 0$ und $\mu = 0$ befindet sich in Paris im Palais de la Découverte. Eine Photographie davon zeigt Bild 48 aus Gerd Fischers Buch “Mathematische Modelle” [140]. Wir reproduzieren dies Bild mit freundlicher Genehmigung von Autor und Verlag (Abb. 1.10). Wie man sieht, ist die vor fast 5000 Jahren entstandene neolithische Fläche – AS 178 – der Fläche von Goursat recht ähnlich, und für mein Empfinden ist sie mindestens genau so schön.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass jene von Menschen der Steinzeit geschaffenen Gestalten das Ergebnis eines wirklich schöpferischen Aktes waren und nicht etwa das einer “einfachen” Abstraktion von in der Natur wahrgenommenen Formen. Und doch hat die Natur, hat das Leben auf dieser Erde Gebilde mit den gleichen Formen hervorgebracht, lange bevor zum ersten Male ein Mensch einen Stein in die Hand nahm, um ihm eine Form zu geben. Nur waren diese Gebilde für die Menschen früher nicht als Gestalten wahrnehmbar, denn sie waren winzig klein, klein wie Körner des Blütenstaubs.



Abbildung 1.3: Neolithische Steinkugeln.

Oben: AS 13, Argyllshire. Quarzit – Sandstein.

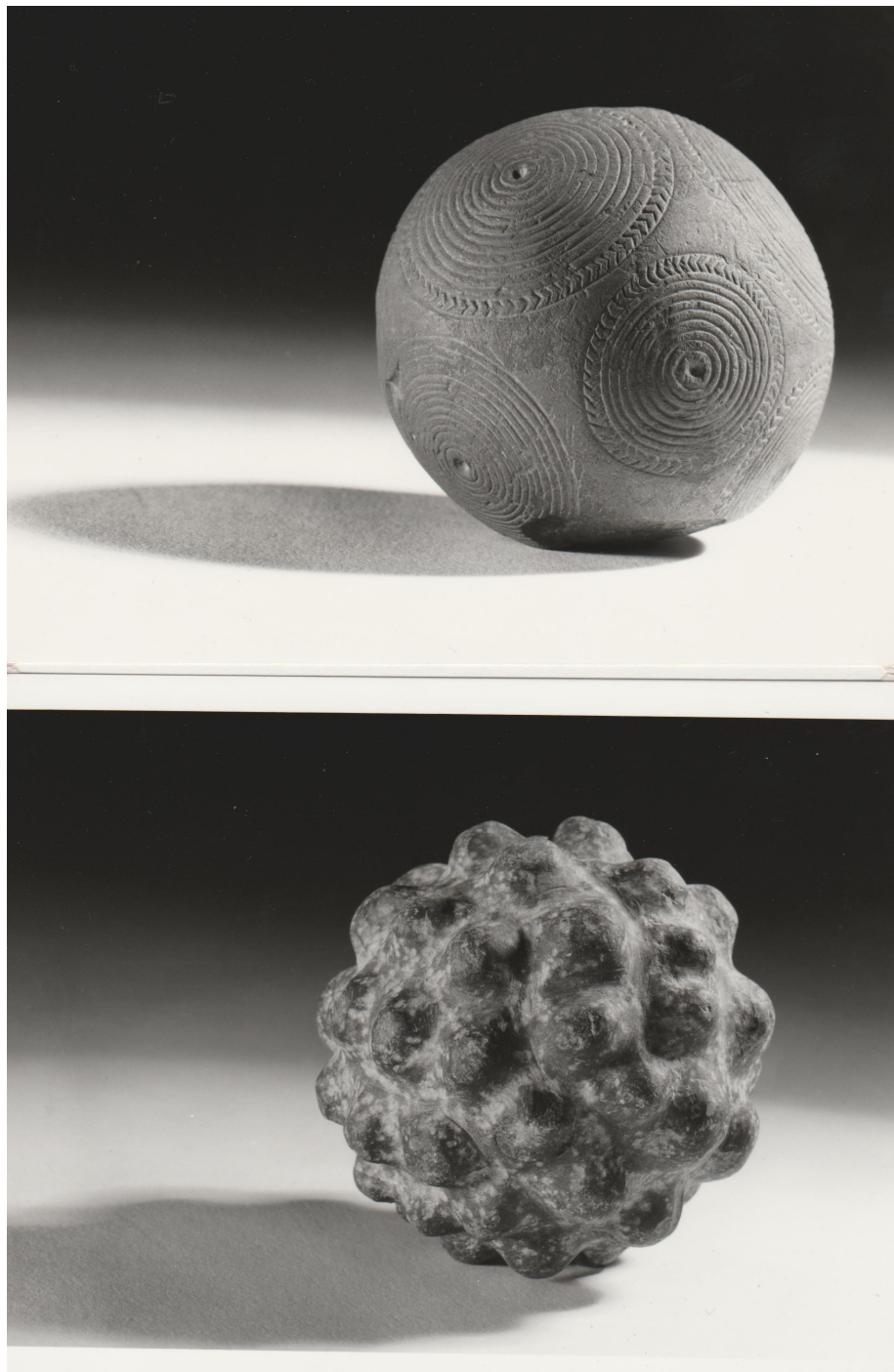
**Unten: AS 122, Uriair, Aberfeldy, Perthshire. Greenstone.
National Museums of Scotland**



Abbildung 1.4: Neolithische Steinkugel AS 10. Glass Hill, Towie, Aberdeenshire. National Museums of Scotland.



**Abbildung 1.5: Neolithische Steinkugeln.
Oben: AS 16, Water of Leith, Edinburgh.
Unten: AS 176, Methlick, Aberdeenshire.
National Museums of Scotland**



**Abbildung 1.6: Neolithische Steinkugeln.
Oben: AS 29, Fordoun, Kincardineshire. Sandstein, 9 Kreismuster.
Unten: AS 80, Fyvie, Aberdeenshire. Greenstone. 53 Buckel.
National Museums of Scotland.**



**Abbildung 1.7: Neolithische Steinkugel
mit spiralförmiger Dekoration.
Oben: Blick in Richtung der Polachse.
Unten: Blickrichtung senkrecht zur Polachse.
National Museums of Scotland**

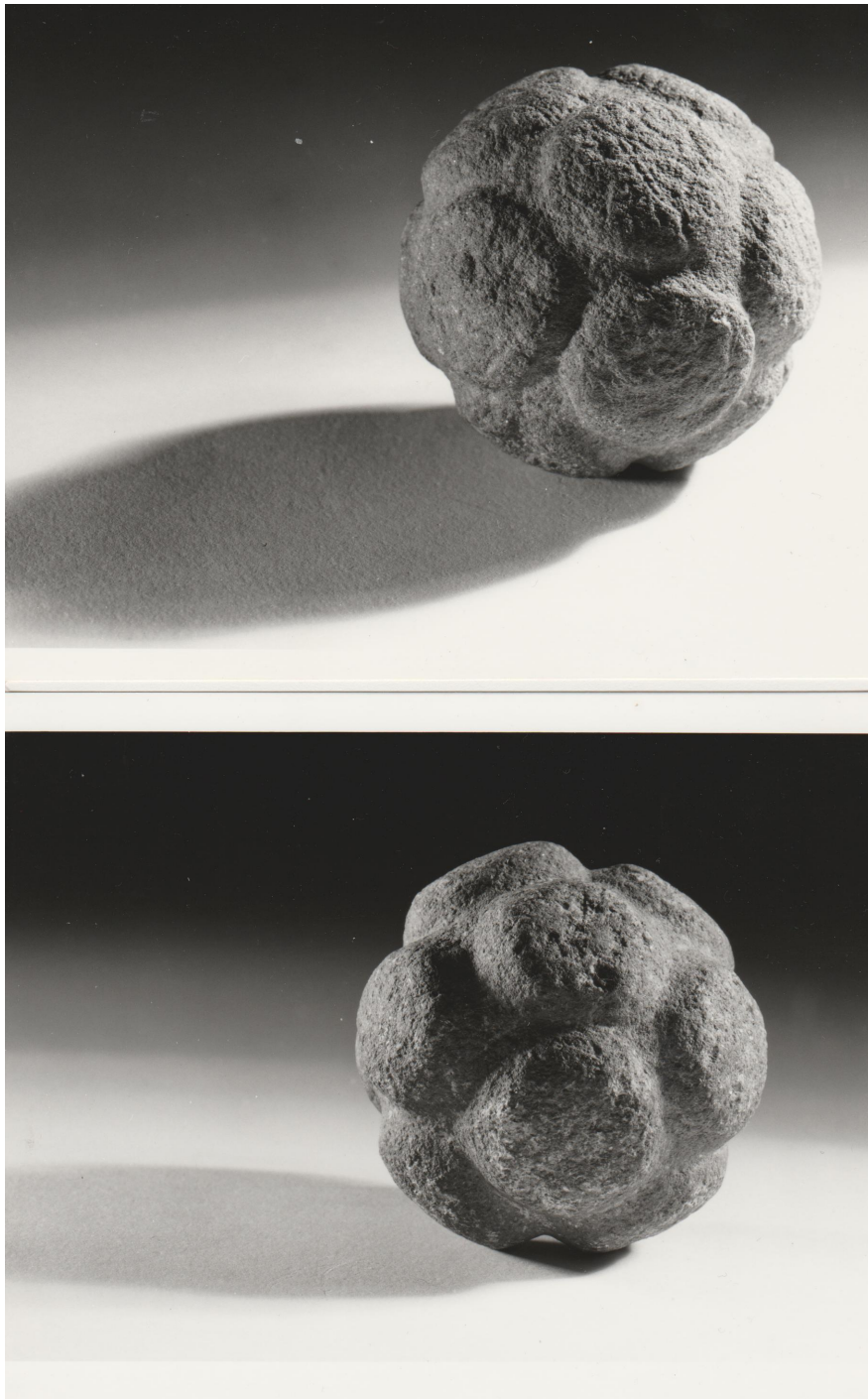


Abbildung 1.8: Neolithische Steinkugeln
Oben: AS 109, Aberdeenshire. Greenstone.
Unten: AS 116, möglicherweise Aberdeenshire. Granit.
National Museums of Scotland



Abbildung 1.9: Neolithische Steinkugeln.
Oben: AS 117, wahrscheinlich Aberdeenshire. Granit.
Unten: AS 178, Ardkeeling Strypes, Moray (?)
National Museums of Scotland



Abbildung 1.10: Fläche vierten Grades mit Würfelsymmetrie. Diese Fläche gehört zu einer 3-parametrischen Familie von Quartiken, die 1887 von E. Goursat beschrieben wurde. Ihre Gleichung ist von der folgenden Form:

$$x^4 + y^4 + z^4 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2)^2 + \mu(x^2 + y^2 + z^2) + v = 0.$$
 Die hier abgebildete Fläche hat die Parameterwerte $\lambda = 0, \mu = -1, v = 0$.
 Fotografie von G. Fischer.

Am Blütenstaub können wir Mathematiker etwas lernen: Das Wundern und das Nachdenken darüber, was wir tun, wenn wir so denken, wie wir denken. Es sei mir darum gestattet, ein wenig davon zu berichten.

Zur Erinnerung: Die Pollenkörner der höheren Blütenpflanzen dienen der Übertragung der Erbanlagen einer Pflanze auf eine andere Pflanze der gleichen Art. Wind oder Wasser, Insekten oder Vögel verbreiten sie. Gelangt ein Pollenkorn auf die empfängnisbereite Narbe einer Blüte, dann nimmt es aus dieser Wasser und andere artspezifische Substanzen auf. Unter deren Einfluss keimt es und bildet einen Pollenschlauch, der sich seinen Weg zwischen den Zellen des Griffels hindurch in das Innere des Fruchtknotens bahnt und Zugang zur Samenanlage findet. Durch den Pollenschlauch wandern drei Kerne, ein vegetativer Kern und zwei generative männliche Kerne. Der vegetative Kern leitet das Wachstum des Schlauchs. Von den generativen Kernen verschmilzt einer mit der Eizelle. Daraus wächst der Embryo heran, der ein Würzelchen und ein oder zwei Keimblätter bildet. Der andere generative Kern vereinigt sich mit zwei weiteren Kernen des Embryosacks zu einem triploiden Kern, aus dem sich im heranreifenden Samen ein Nährgewebe für den Embryo bildet.

Pollenkörner sind nur einige tausendstel Millimeter groß. Sehr kleine, wie die vom Vergissmeinnicht, haben einen Durchmesser von weniger als 10μ , bei sehr großen liegt der Durchmesser zwischen 100 und 200 μ . Betrachtet man diese winzigen Gebilde aber durch das Elektronenmikroskop, dann zeigt sich eine unerschöpfliche Vielfalt von Formen und Mustern. Professor W. Punt vom Institut für Paleobotanik und Palynologie der Universität Utrecht war so liebenswürdig, mir aus seinem großen Schatz von elektronenmikroskopischen Aufnahmen eine kleine Auswahl für dieses Buch zur Verfügung zu stellen. Diese Auswahl habe ich unter dem Gesichtspunkt getroffen, dass die Formen für Mathematiker leicht erkennbar sein sollten. Sie kann in keiner Weise die reiche Vielfalt der Formen zeigen, und schon gar nicht die unendliche Mannigfaltigkeit der feineren Strukturen der Oberfläche. Gerade in diesen kommt aber das Besondere einer Art zum Ausdruck. Sie haben taxonomische Bedeutung und gestatten Rückschlüsse auf evolutionäre Trends. Sie sind nicht einfach Verzierung, "Dekoration" – auch wenn die Palynologen

diese Strukturen so bezeichnen. Auch wenn man eine Funktion dieser Strukturen oft nicht kennt, kann man erwarten, dass es sie in vielen Fällen doch gibt. Grundsätzlich jedenfalls ist klar, dass die Struktur der Hülle des Pollenkorns dazu dient, die Erfüllung ihrer Aufgaben zu ermöglichen: Transport, Schutz des Inhalts, Keimung. Insbesondere ermöglichen die bei den meisten Pollenkörnern vorhandenen Öffnungen zum einen die Hydratisierung des ausgetrockneten Pollenkorns durch Wasser aus der Narbe, zum anderen das Herauswachsen des Pollenschlauches aus dem Korn in die Narbe, wenn diese an einer Öffnung mit dem Korn in Kontakt ist.

Wenn jetzt etwas zur Morphologie von Pollen gesagt wird, empfiehlt es sich, vor oder bei der Lektüre die Aufnahmen von Pollenkörnern auf den Bildtafeln zu betrachten. Die folgenden Bemerkungen zur Morphologie sind extrem unvollständig. Mehr dazu findet man natürlich in der Fachliteratur, z.B. in dem folgenden Werk, auf das ich mich beziehe: G. Erdtman: "Handbook of Palynology", Hafner Publ. Co., N.Y. 1969 [120].

Ein Pollenkorn besteht aus einer äußeren Hülle (sporodermis) und dem von ihr umfassten Inhalt, Protoplasma und Kernen. Die Hülle besteht aus mehreren, verschiedenartigen Schichten, die durch Öffnungen und verschiedene andere Elemente strukturiert sind. Ihre globale geometrische Form und ihre Symmetrie wird teilweise durch die Anordnung der erwähnten Strukturelemente oder die Krümmungsverhältnisse der Oberfläche oder durch beides bestimmt. Gestalt in dem hier gemeinten umfassenden Sinn umfasst für mich dies alles, und all dies wird in der Morphologie von Pollen auch tatsächlich berücksichtigt. Daher sind die folgenden Themen zu behandeln:

- (A) Die Öffnungen
- (B) Die Form
- (C) Die Symmetrie
- (D) Die Struktur der Sporodermis.

(A) Die Öffnungen.

Art, Zahl und Anordnung der Öffnungen gehören zu den auffälligsten Merkmalen und tragen wesentlich zur Bestimmung von Form und Symmetrie bei.

Für die Form der Öffnungen gibt es eine ganze Reihe von Möglichkeiten. Eine Öffnung kann eine Furche sein (colpus) oder eine angenähert kreisförmige Öffnung (porus). Ferner kann eine Öffnung die Form eines Sterns mit drei furchenartigen Armen haben. Sie kann auch eine komplexe Form haben, mit einer äußeren Öffnung in Form eines colpus oder porus und mit einer inneren Öffnung, die man os nennt, und die wiederum rund oder in verschiedenen Richtungen gestreckt sein kann. Schließlich können statt Öffnungen auch nur öffnungsähnliche dünne Regionen vorhanden sein, oder es kann sein, dass Öffnungen nicht mit Sicherheit auszumachen sind.

Die Zahl der Öffnungen kann je nach Art die verschiedensten Werte annehmen, z.B. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12 oder 30. Für eine bestimmte Art ist sie im allgemeinen, aber nicht immer, konstant. Es gibt z.B. Arten, deren Pollenkörner 3, 4 oder 5 regelmäßig angeordnete colpi haben.

Auf die verschiedensten Arten der Anordnung der Öffnungen wird weiter unten eingegangen.

(B) Die Form.

Angesichts der Vielfalt der Formen und der fließenden Übergänge im Verlauf der Evolution und auch angesichts der Variabilität innerhalb der Arten muss natürlich jede Klassifikation im Grunde inadäquat bleiben, und die relativ beste Beschreibung bleibt schließlich doch einfach die Abbildung. Trotzdem ist eine wenn auch grobe Typeneinteilung der Formen nicht nutzlos, und es gibt eine Reihe von Merkmalen, die man dabei berücksichtigen kann. So liefern in gewissen Fällen die colpi eine Unterteilung der angenähert sphärischen Oberfläche, und diese ist von der gleichen Art wie jene, die bei der Projektion eines zentralsymmetrischen Polyeders auf eine Kugel um das Zentrum entsteht. Die colpi entsprechen dabei den Kanten, und eine Ecke entspricht einem Punkt oder einer Region, wo mehrere colpi zusammenlaufen (apocolpium). Die von den colpi und den apocolpia begrenzten Flächenstücke nennt man dann mesocolpia. Wunderschön sieht man die zum Pentagondodekaeder gehörige Flächenteilung beim Wasserknöterich (*Polygonum amphibium* L.) (Abb 1.13). Eine hexaedrische Flächenteilung hat der gelbe Lerchensporn (*Corydalis lutea*). Der Finger-Lerchensporn hingegen (*Corydalis solida*) zeigt interessanterweise eine tetraedrische Flächenteilung,

während die räumliche Gestalt des Pollenkorns eher hexaedrisch ist, wobei die sechs colpi 6 der 12 Diagonalen der Flächen des Würfels entsprechen (Abb 1.14).

Laufen die colpi nicht in Ecken zusammen oder sind gar keine colpi vorhanden, sondern z.B. pori, dann kann man trotzdem versuchen, eine Unterteilung in Regionen vorzunehmen. Beispielsweise zerfällt bei einigen der abgebildeten Pollenkörner die Oberfläche bei genügend starker Idealisierung in natürlicher Weise in Regionen positiver und negativer Krümmung. Man kann sich vorstellen, dass eine solche Fläche aus einem Polyeder durch Glätten der Ecken und Kanten und Deformieren der Flächen entstanden ist. Den Polyeder-Ecken entsprechen "konvexe" Regionen starker positiver Krümmung, den Polyederflächen entsprechen "konkave" Regionen schwacher positiver Krümmung, und den Kanten können Regionen negativer Krümmung entsprechen. Bei hexaedrischer Symmetrie, z.B. beim Sandmohn (*Papaver argemone*) (Abb 1.15), ist die Fläche ähnlich wie die, die wir vorher bei einer neolithischen Steinsphäre und bei der Quartik von Goursat gesehen haben. Auch bei hexaedrischer Flächenteilung durch colpi gibt es übrigens eine verblüffende Ähnlichkeit mit Steinsphären, z.B. AS 13 (Abb 1.3) und *Corydalis lutea* (Abb 1.14). Außer dem Hexaeder kommen auch Tetraeder und Pentagondodekaeder vor und auch andere Polyeder.

In den Fällen, in denen keine "polyedrische" Form vorliegt – und das ist die Mehrzahl – behilft man sich notgedrungen mit partiellen Bestimmungen der Form durch Merkmale wie z.B. konvex, konkav, sphärisch, ellipsoidisch, konvexer Querschnitt usw.

(C) Die Symmetrie.

Im Falle der oben verkürzend "polyedrisch" genannten Form ist die Symmetrie – wenigstens dem ersten äußeren Anschein nach und bei genügender Idealisierung – die gleiche wie die des entsprechenden Polyeders. Merkwürdigerweise wird diese Symmetrie aber von den Palynologen nicht besonders hervorgehoben, und das gilt sogar für die höchstmögliche Symmetrie, die des Dodekaeders.

Hingegen wird die Symmetrie im nicht-polyedrischen Fall genauer be-

handelt. In der großen Mehrzahl der Fälle gibt es hier eine ausgezeichnete Symmetrieachse, die zudem polarisiert, d.h. orientiert ist. Dies ist auf die Art der Entstehung der Pollenkörner zurückzuführen. Wie auch Sporen entstehen sie nämlich meist in Vierergruppen, den sogenannten Tetraden, die sich später in 4 einzelne Pollenkörner, die Monaden, teilen. Bei gewissen Gattungen bleiben die Pollenkörner einer Tetrade aber auch nach der Reifung zusammen, z.B. beim Rohrkolben, bei den Ericaceen und bei einigen unserer einheimischen Orchideen, z.B. bei den Gattungen *Listera* und *Epipactis*. Bei den Tetraden gibt es zwei verschiedene mögliche Anordnungen. Die eine hat Tetraedersymmetrie und kommt hauptsächlich bei den zweikeimblättrigen Arten vor. Die andere hat die Symmetrie eines quadratischen Prismas und kommt hauptsächlich bei den einkeimblättrigen Arten vor. Die Anordnung der Pollenkörner in Tetraden führt nun in jedem Korn einer Tetrade zur Auszeichnung einer Achse: Sie verläuft in radialer Richtung vom inneren (proximalen) zum äußeren (distalen) Pol.

Diese polarisierte Achse ist in vielen Fällen die ausgezeichnete Symmetrieachse. Sie kann z.B. 3-zählig sein – der wohl häufigste Fall – aber auch 2, 4, 5, 6- oder 8-zählig. Durch diese Achse können außerdem Symmetrieebenen gehen. Zusätzlich kann es eine horizontale Symmetrieebene senkrecht zur Achse geben – oder auch nicht. Ein solches System von Symmetrieelementen erzeugt eine Symmetriegruppe. Es ist nicht schwer, alle überhaupt mathematisch möglichen Symmetriegruppen aufzuzählen, und wir werden das später auch tun. Die Palynologen scheinen aber diese mathematisch wohldefinierten Symmetriegruppen kaum zu benutzen. Sie begnügen sich mit der Angabe einiger Symmetrieelemente. Vielleicht ist für sie die Symmetrie nicht so wesentlich. Und angesichts der Komplexität der feineren gestaltlichen Merkmale dürfte die eindeutige Zuordnung einer Symmetriegruppe zu einer bestimmten Art von Pollen in der Tat oft schwierig oder unmöglich sein.

Nach diesen Bemerkungen zur Form und Symmetrie lassen sich nun die verschiedenen möglichen Anordnungen der Öffnungen genauer beschreiben. In jedem Fall ist die Anordnung – per definitionem – mit der Symmetrie des Pollenkorns verträglich. Bei Polyedersymmetrie können, wie schon

beschrieben, die colpi den Kanten des Polyeders entsprechen. Die Lage der Öffnungen, z.B. der Pori, kann aber auch durch die Kantenmittelpunkte oder durch die Mittelpunkte der Flächen des Polyeders bestimmt sein. Im nicht polyedrischen Fall mit einer ausgezeichneten polarisierten Achse gibt es viele Möglichkeiten für die Lage der Öffnungen, z.B. an einem der beiden Pole oder auch an beiden, auf dem Äquator, auf zwei Breitenkreisen, in einer oder in zwei Zonen am oder um den Äquator und schließlich auf einer von Pol zu Pol verlaufenden Spirale.

(D) Die Struktur der Sporodermis.

Die Abbildungen von Pollenkörnern zeigen eine reich gegliederte und vielfältige Feinstruktur der Sporodermis mit vorspringenden Elementen wie z.B. Dornen oder Höckern oder mit netzartig verzweigten Graten und dazwischen liegenden Durchbrüchen oder mit wabenartigen Einteilungen durch dünne Wände (muri). Elektronenmikroskopische Aufnahmen mit höherer Auflösung enthüllen darüber hinaus noch weitere Feinheiten. Die folgende Beschreibung der Topographie der Sporodermis von Pollen ist stark vereinfacht und schematisiert. Sie gilt auch für Sporen.

Die Sporodermis besteht – grob gesagt – aus zwei Hauptschichten: aus dem äußeren Exine (exinium) und dem inneren Intine (intinium). Manchmal ist eine dritte, äußerste Schicht da, das Perine, die aber leichter vergeht. Das Exine ist die am reichsten strukturierte Schicht. Es ist sehr dauerhaft, und dies ermöglicht es den Paläobotanikern, das Vorkommen gewisser Pflanzengattungen in früheren Erdzeitaltern durch den morphologischen Vergleich von fossilem und rezentem Pollen und Sporen nachzuweisen. Übrigens zeigt dieser Vergleich, dass im Verlauf der Evolution auch innerhalb einer Art die Gestalt des Pollens sich wandeln kann.

Topographisch unterscheidet man beim Exine wiederum zwei Strata: das äußere, stark gegliederte Sexine (exinium sculptum) und das darunter liegende, homogenere Nexine (exinium non sculptum). Beim Sexine sind dann noch einmal zwei Zonen zu unterscheiden: eine äußere, das Dach (tectum), und eine innere Zone, in der das Dach tragende Stäbe (bacula) mit Zwischenräumen (interstitia) abwechseln. Außen auf dem tectum sitzen die

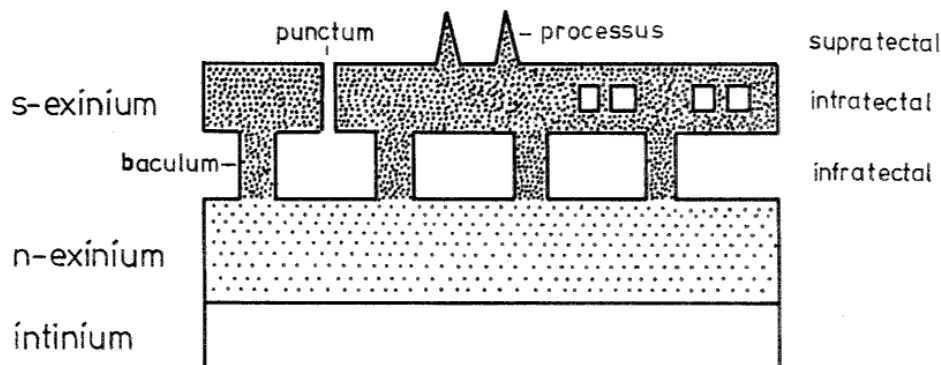


Abbildung 1.11: Stratifikation des Sporoderms

vorspringenden Elemente (processus). Das tectum selbst kann durch kleine Öffnungen durchbrochen sein oder auch nicht. (Hier sind nicht die colpi, pori usw. gemeint.) Die Zeichnung in Abbildung 1.11 gibt schematisch die topographische Stratifikation der sporoderms wieder.

Alle Elemente der tectalen Struktur haben ihrerseits auch wieder artspezifische Mikro-Formen, und diese sind morphologisch relevant. Sie gehören zur Beschreibung der Gestalt eines Pollenkorns.

Sehr gut sieht man die Struktur des Sporoderms auf der rund 10 000-fach vergrößernden Aufnahme des Pollens von *Schlumbergia truncata* in Abbildung 1.16.

Ein wunderschönes Beispiel ist in Abbildung 1.13 abgebildet: der Pollen der Glockenrebe *Cobaea scandens*, die u.a. in Brasilien beheimatet ist und von Fledermäusen bestäubt wird, z.B. von *Glossophaga soricina*, *Anoura caudifer* und *Anoura geoffroyi* (K. Dobat: "Blüten und Fledermäuse" [103]).

Das Pollenkorn von *Cobaea scandens* ist ein kleines Wunder. Das Sporoderm ist durch muri wabenartig in 5-eckige und 6-eckige Zellen eingeteilt. Diese Einteilung und die Anordnung der pori folgt einem bestimmten mathematischen Gesetz. Die folgende Figur lässt das Schema der Teilung der Kugeloberfläche in Zellen und die Anordnung der pori deutlich hervortreten.

Es sind 32 pori vorhanden. Ihre Anordnung hat die Symmetrie des Ikosa-

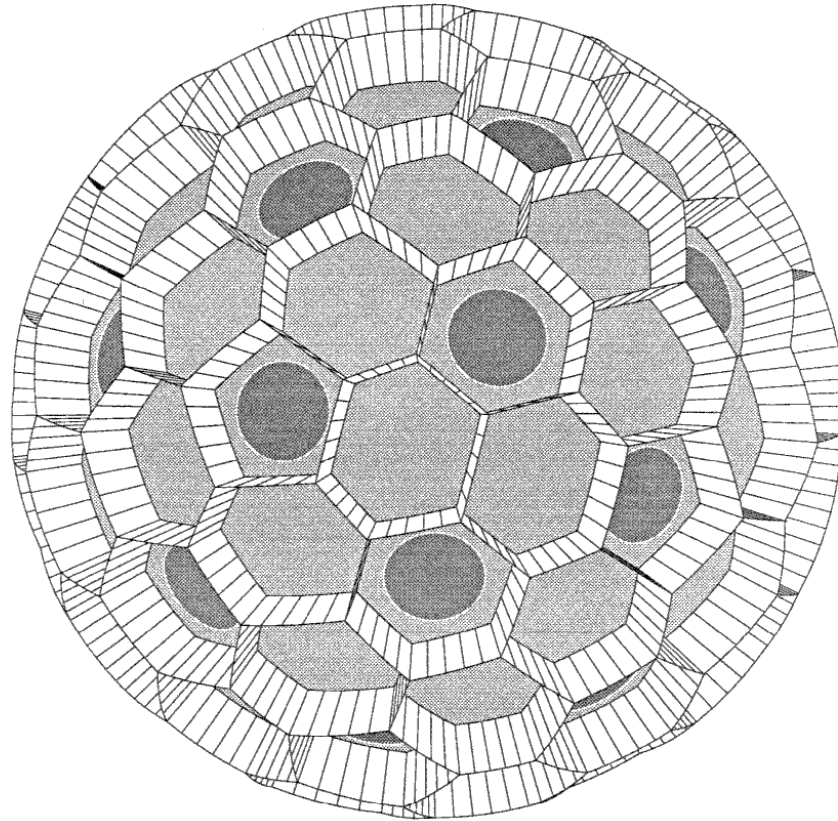


Abbildung 1.12: Schema des Pollenkorns von *Cobeia scandens*.

eders. Die Zentren von 12 pori sind die Ecken eines Ikosaeders, die Zentren der übrigen 20 sind die Flächenmittelpunkte. Anders gesagt: Die 32 Zentren sind die Flächenmittelpunkte des archimedischen Polyeders (5,6,6), das in Abbildung 1.40 abgebildet ist. Noch anders gesagt: Die Zentren sind die Ecken des dualen Polyeders. Dieses ist ein Pentakisidodekaeder. Es ist von 60 äquivalenten Dreiecken begrenzt. Bei Projektion auf die Kugeloberfläche werden daraus sphärische Dreiecke mit den Winkeln $2\pi/5$, $2\pi/6$, $2\pi/6$. Es gibt zwei Arten von Ecken: In 12 Ecken stoßen 5 Dreiecke zusammen, in 20 Ecken 6. Stützt man diese Ecken, dann entstehen 12 reguläre 5-Ecke und 20

Sechsecke. Außerdem werden aus den 60 Dreiecken des Pentakisdodekaeders 60 andere Sechsecke. Insgesamt entsteht so ein Polyeder mit 12 pentagonalen und 80 hexagonalen Seitenflächen. Bei Projektion auf die Kugeloberfläche ergibt sich eine Zerlegung in 92 Zellen wie beim Pollen von *Cobaea scandens*.

Warum berichte ich das alles? Weil ich meine, dass wir daran etwas lernen.

Blütenstaub – daran können wir lernen, wie die Natur in unendlicher Vielfalt und in stetem Wandel neue Gestalten schafft, wie sie auch im Aller-kleinsten kunstvoll gestaltet. Im Gespräch mit einem Palynologen, der sein ganzes wissenschaftliches Leben der Morphologie der Pollenkörner und ihrer Evolution gewidmet hat, wird mir bewusst, dass unsere mathematischen Begriffe von Form und Symmetrie zwar einige Aspekte von Gestalt erfassen, aber eben nur einige und vielleicht nicht einmal die wichtigsten. Gestalt ist mehr als Symmetrie oder Summe von Strukturen, morphologisches Anschauen und Denken ist anders, umfassender und ganzheitlicher als das, wozu wir Mathematiker durch Anlage und Ausbildung neigen. Mathematiker und Physiker erheben so oft den Anspruch, dass gerade ihre Art des abstrahierenden Denkens das Wesentliche der Natur erfassen werde. Bernhard Riemann hat es so ausgedrückt:

Naturwissenschaft ist der Versuch, die Natur durch genaue Begriffe aufzufassen ... Durch diesen Prozess wird unsere Auffassung der Natur allmählich immer vollständiger und richtiger, geht aber zugleich immer mehr hinter die Oberfläche der Erscheinungen zurück. [301, p. 521]

In diesem “aber” steckt eine nur halb ausgesprochene Antithese. Klar formuliert fand ich sie bei einem Dichter, Italo Calvino:

... Herr Palomar. Erst wenn man die Oberfläche der Dinge kennengelernt hat – schließt er – kann man sich aufmachen, um herauszufinden, was darunter sein mag. Doch die Oberfläche der Dinge ist unerschöpflich.[73, p. 55]

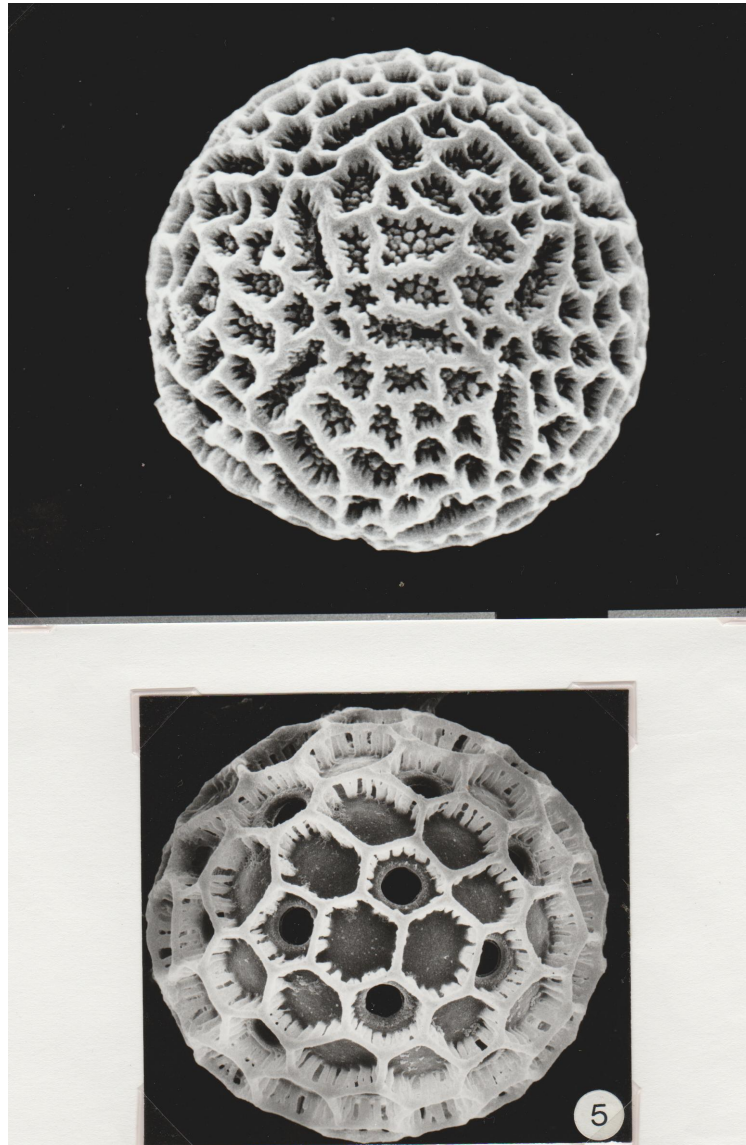


Abbildung 1.13: Oben: Pollen von *Polygonum amphibium* L. – Wasserknöterich. Unten: Pollen von *Cobaea scandens* Cav. – Kletternde Glockenrebe. Bilder von W. Punt.

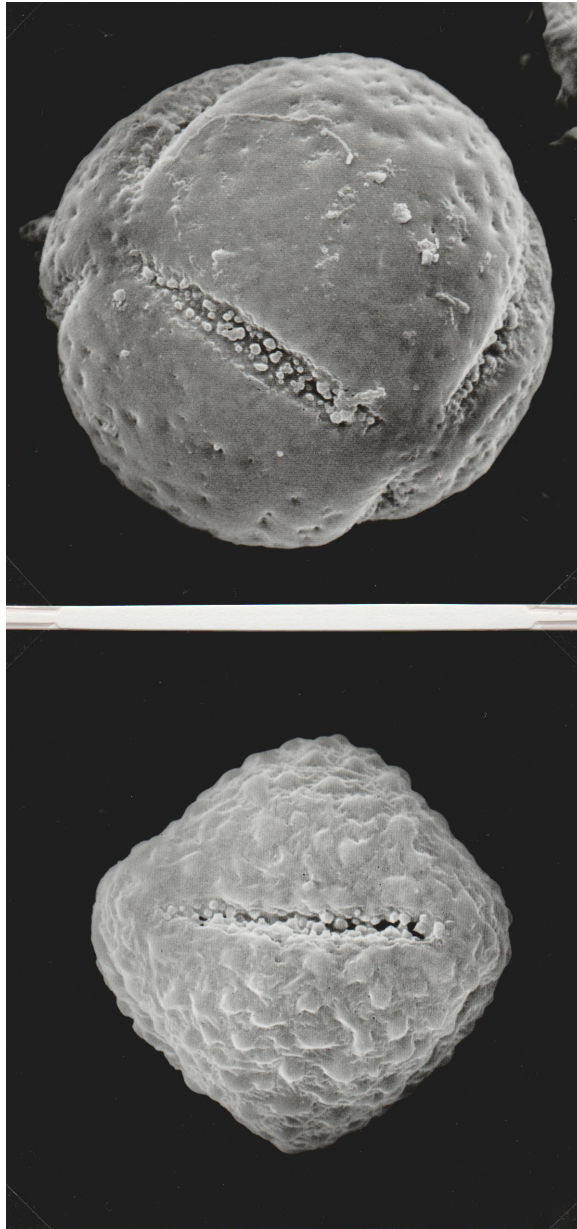


Abbildung 1.14: Oben: Pollen von *Corydalis lutea* (L.) Dc.
– Gelber Lerchensporn. Unten: Pollen von *Corydalis solida* (L.)
ClairvauX – Fingerlerchensporn. Bilder von W. Punt.

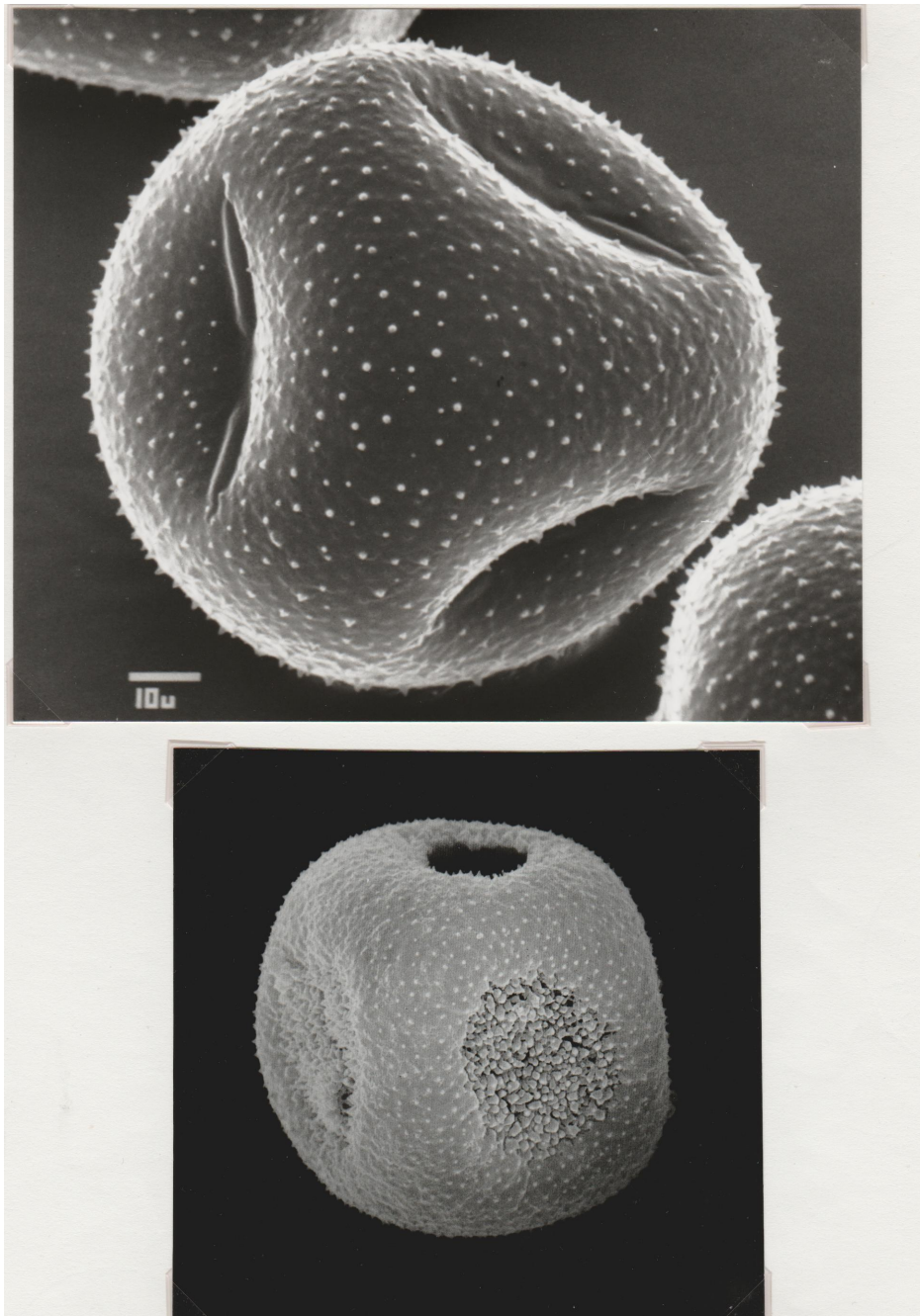


Abbildung 1.15: Oben: Pollen von *Selenicereus wittii* – Königin der Nacht. Unten: Pollen von *Papaver argemone* L. – Sandmohn. Bilder von W. Barthlott (oben) und W. Punt (unten).

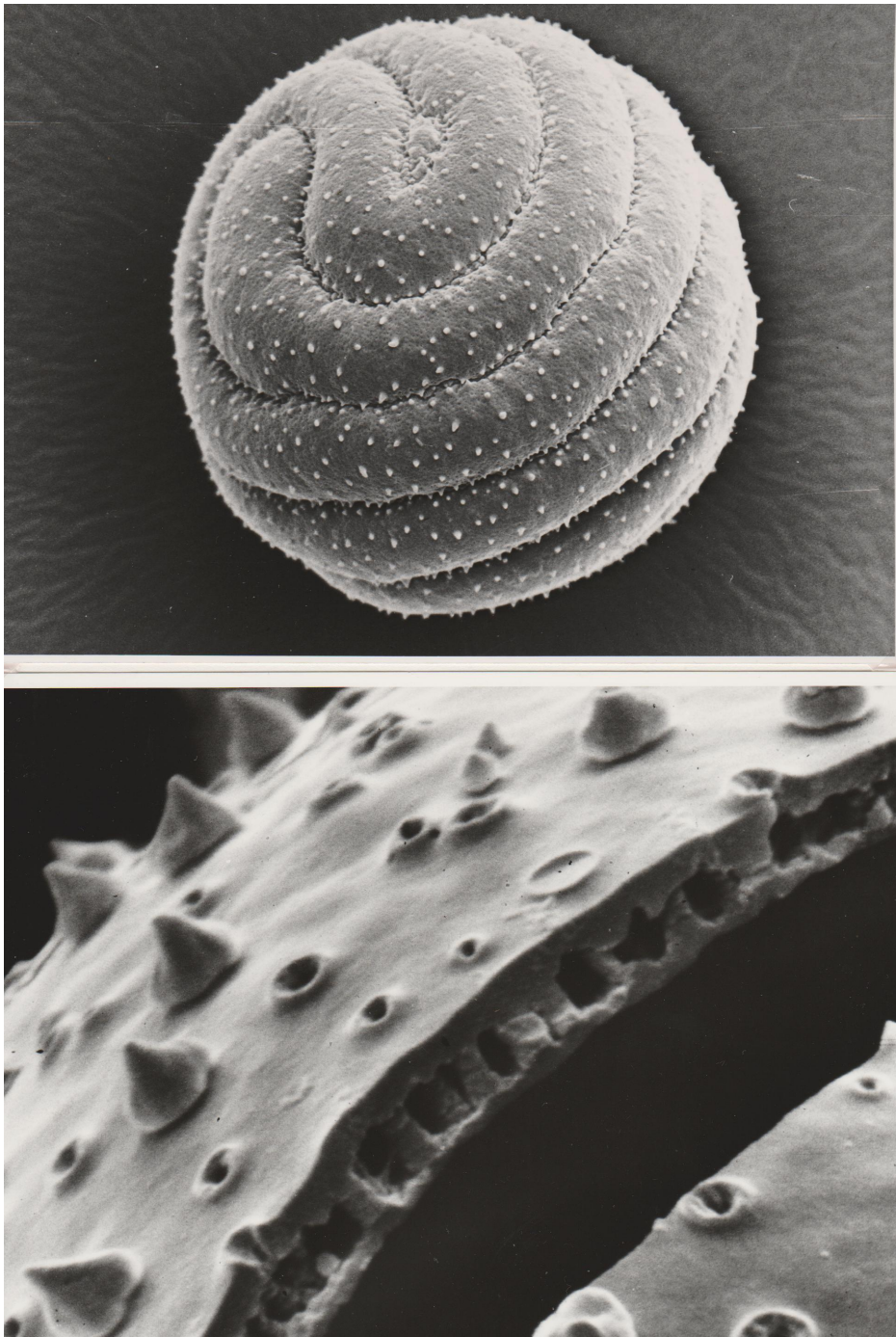


Abbildung 1.16: Oben: Pollen von *Crocus korolkowii*.
Unten: Sporoderm von *Schlumbergeria truncata*, Cactaceae,
Feinstruktur durch Zertrümmerung mit Ultraschall sichtbar
gemacht, Vergrößerung ca. 7000 – 10 000 x.
Bilder von W. Barthlott

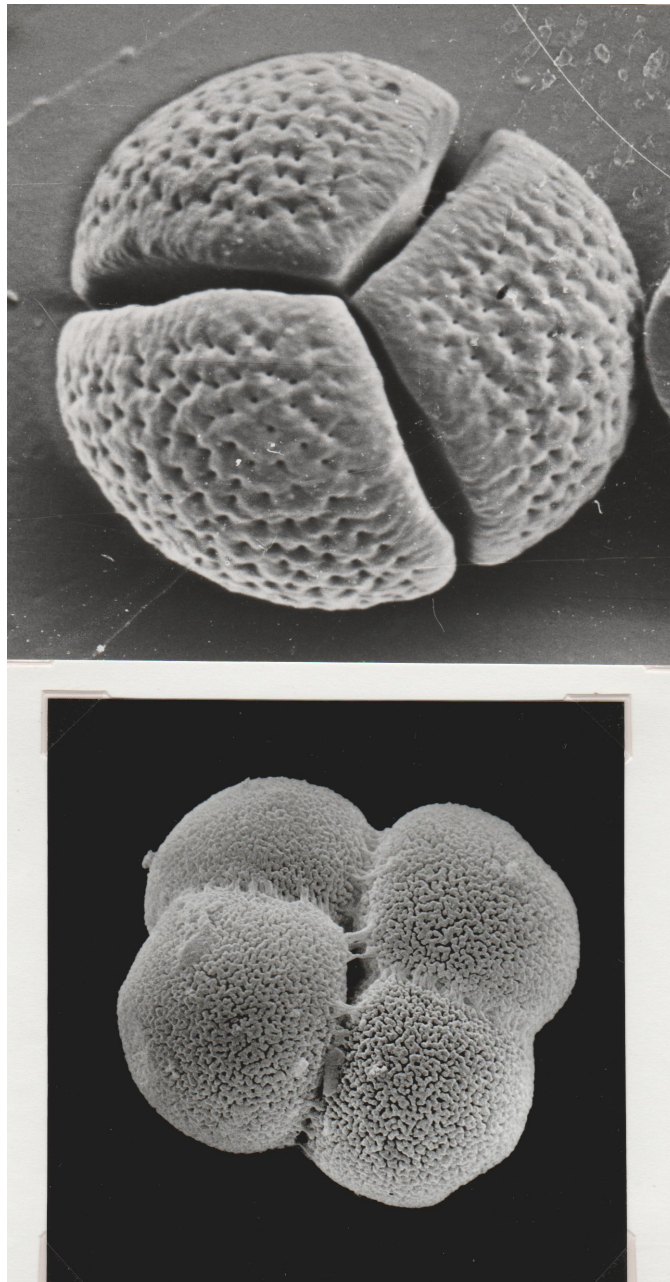


Abbildung 1.17: Oben: Sporentetrade von *Lycopodium* L. spec. – Bärlapp. Unten: Pollentetrade von *Typha latifolia* L. – Breitblättriger Rohrkolben.
Bilder von W. Barthlott (oben) und W. Punt (unten).

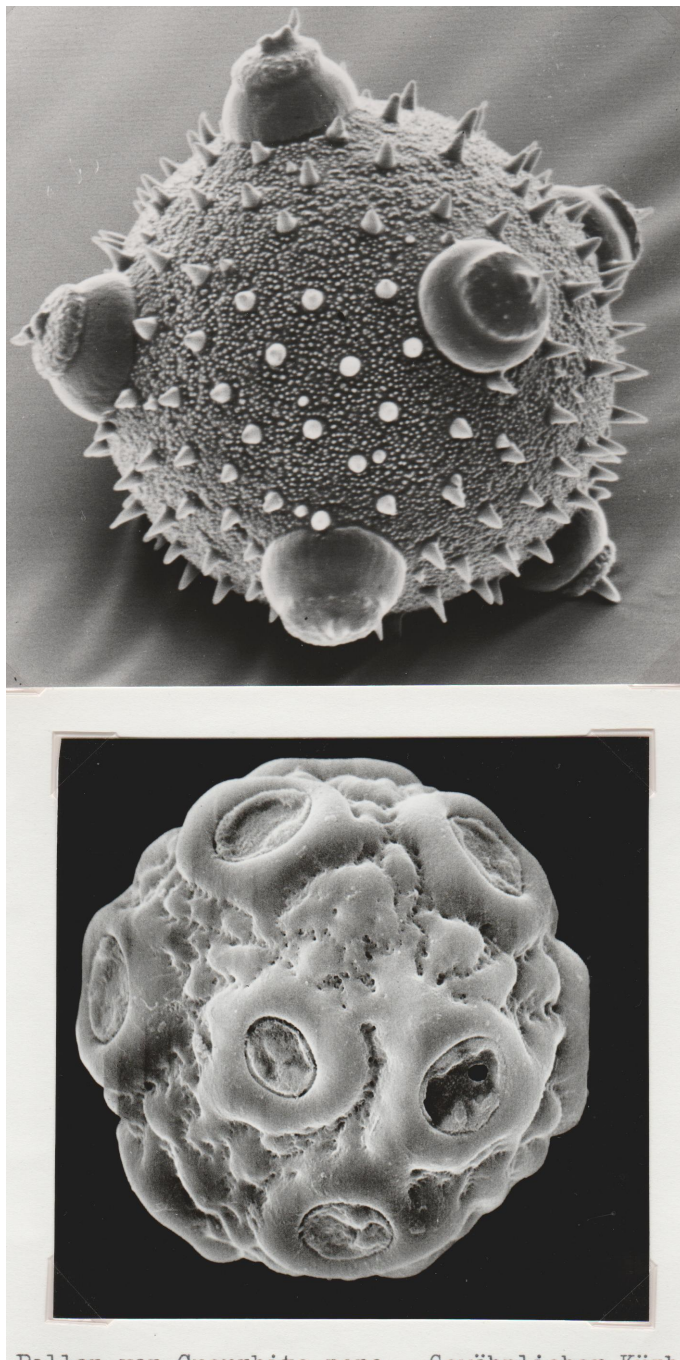


Abbildung 1.18: Oben: Pollen von *Cucurbita pepo* – Gewöhnlicher Kürbis. Unten: Pollen von *Fumaria officinalis* L. – Gemeiner Erdrauch. Bilder von W. Barthlott (oben) und W. Punt (unten).

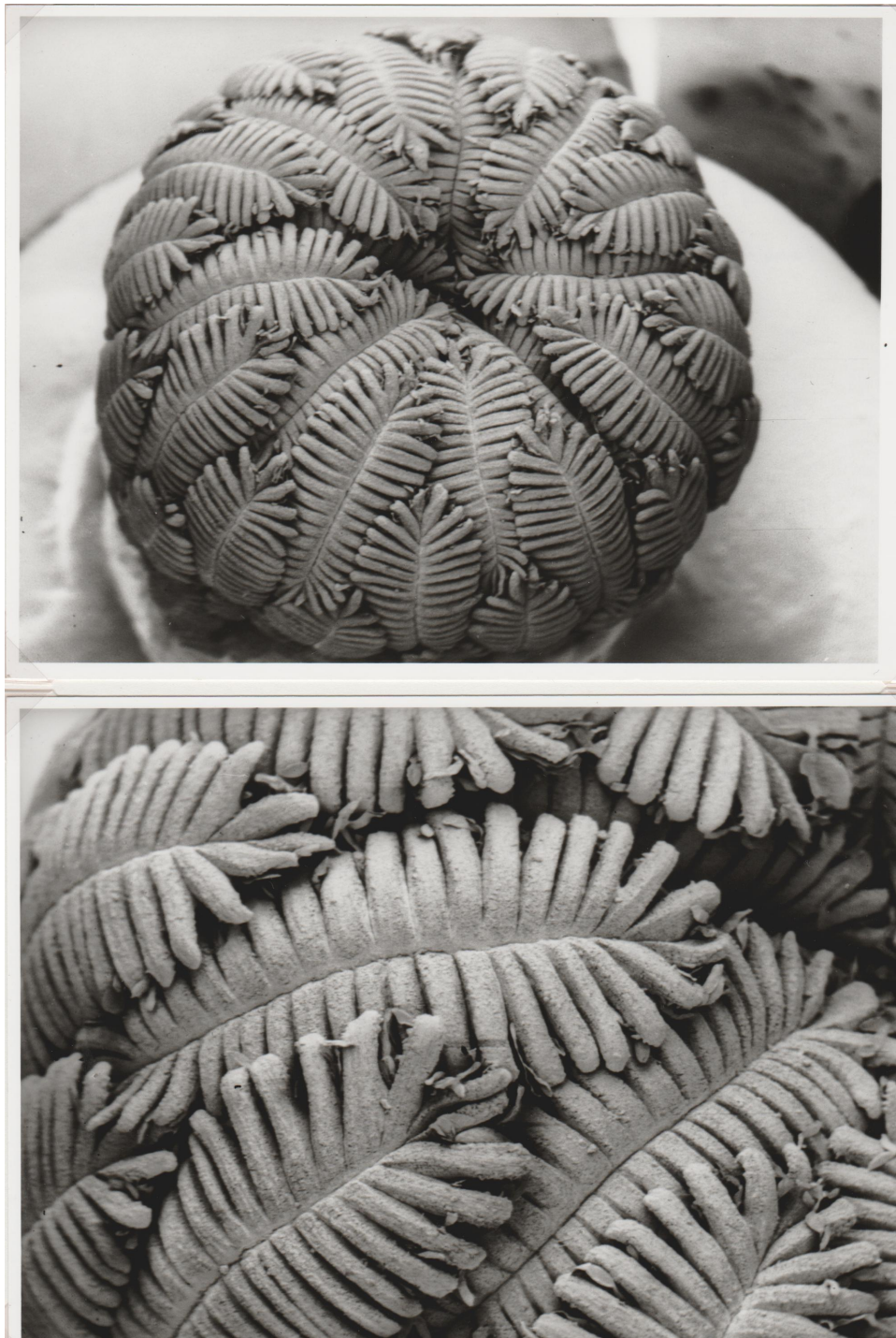


Abbildung 1.19: *Pelecyphora aselliformis* – Asselkactus. Vergrößerung: oben 40x, unten 56x. Bilder von W. Barthlott.

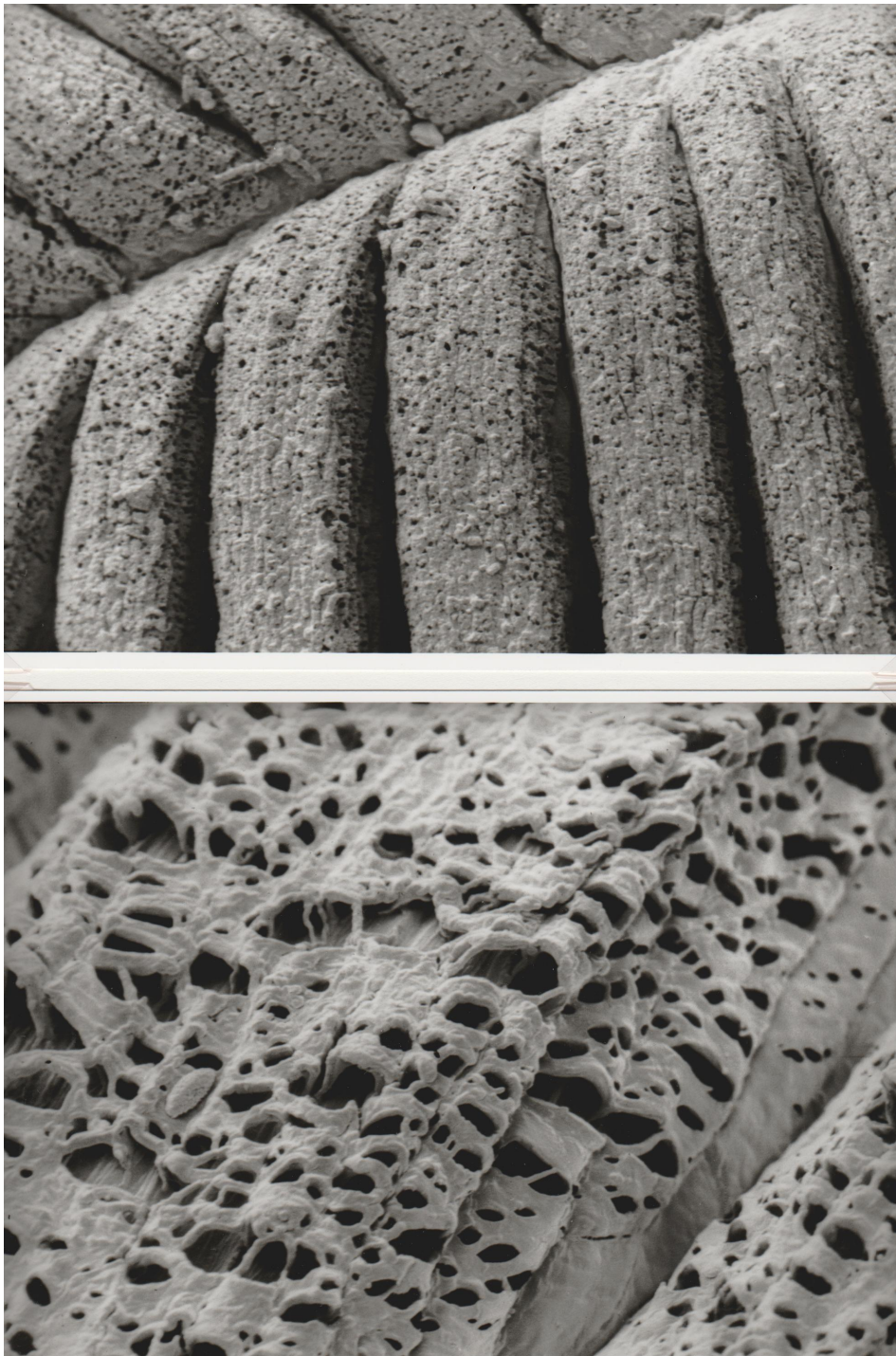


Abbildung 1.20: *Pelecyphora aselliformis* – Asselkaktus.
Vergrößerung: oben 225x, unten 1125x. Bilder von W. Barthlott.

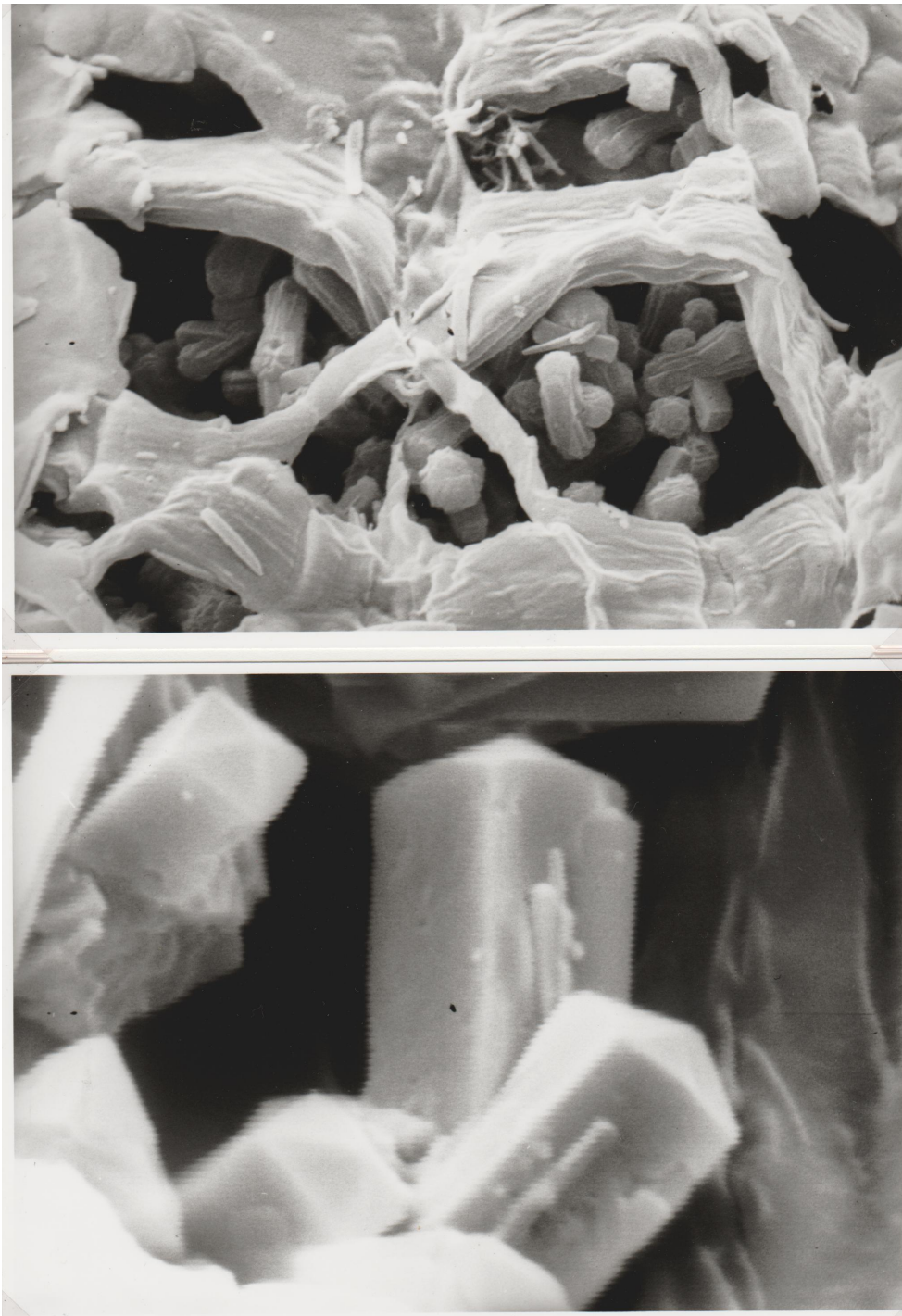


Abbildung 1.21: *Pelecyphora aselliformis* Asselkaktus. Vergrößerung: oben 5625x, unten 22500x. Bilder von W. Barthlott.



Abbildung 1.22: Coccusphäre von *Braarudospaera bigelowi*, Deflandre 1947. Fundort Walbersdorf, Österreich, Miozän. Vergrößerung 8500x.

Das Kalkskelett dieser goldbraunen Alge besteht aus 12 pentagonalen Platten, die gesetzmäßig aus jeweils 5 Einheiten aufgebaut sind. Jede Einheit besteht aus mehreren Schichten. Jede Schicht besteht aus gleichsinnig orientierten Mikrokristalliten von Calcit. Bild von S. Jafar.

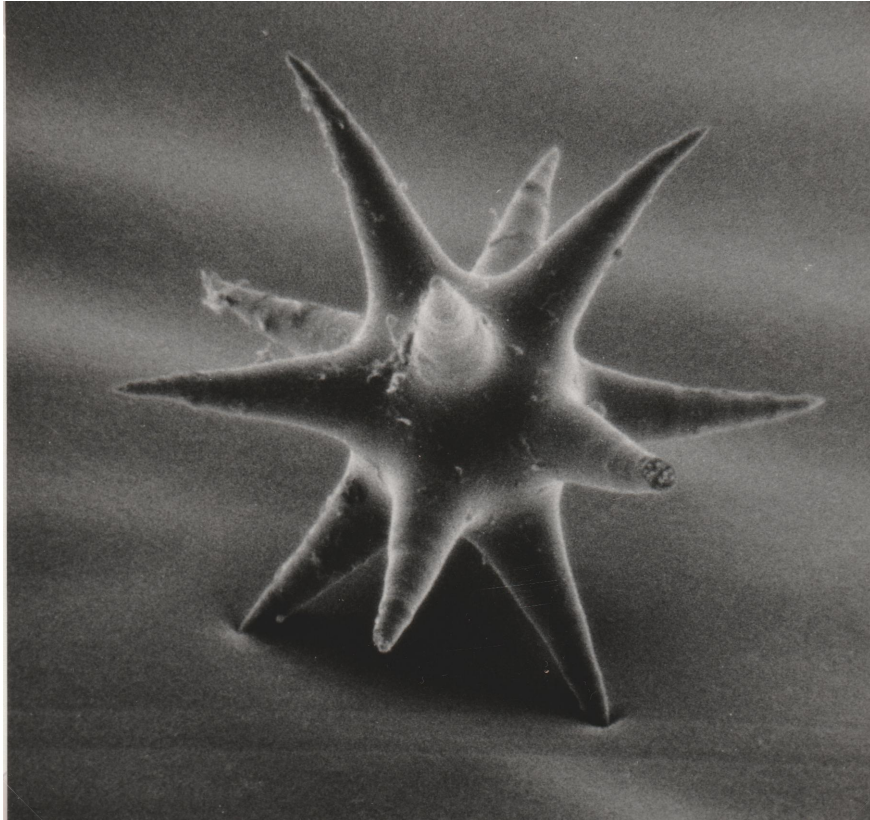


Abbildung 1.23: Schwammnadel eines Schwammes der Klasse Demospongia (Sollas 1895). Mikrosklerit aus SiO_2 vom Euaster-Bautyp. Durchmesser etwa 0.1 mm, Vergrößerung etwa 1500x. Fundort: Adria, recent. Bild von R. Below.

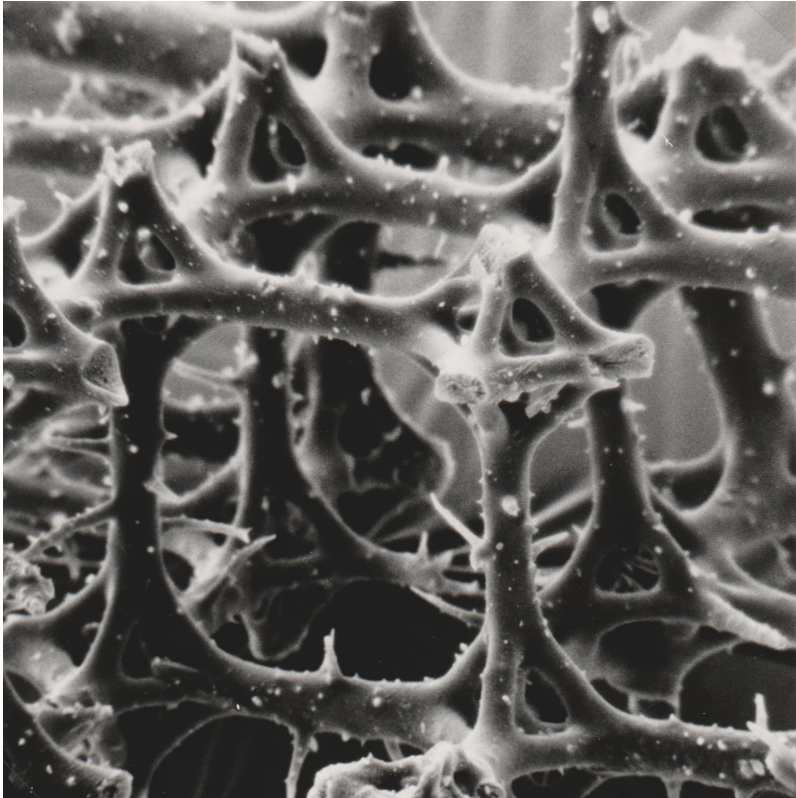


Abbildung 1.24: Skelettfragment eines Kieselschwammes. Stamm: Porifera. Klasse: Silicea. Unterklasse: Hexactinellida. Ordnung: Lychniskida. Fundort: Oberg, Niedersachsen. Alter: etwa 75 Millionen Jahre.

Das kubische Gitter des Skeletts aus amorphem SiO_2 entsteht durch Zusammenwachsen von Skelettnadeln. Diese Nadeln heißen nach ihrer Form Hexactine, weil sie sechs Strahlen haben, die ein rechtwinkliges Achsenkreuz bilden. Sekundäre Verbindungen bilden oktaedrische Netze um die Zentren der Hexactine. Diese oktaedrischen "Laternen" geben der Ordnung den Namen (*λύχνος* = Leuchte, Licht). Bild von R. Belov.

Wie leicht und scheinbar mühelos nimmt unsere Anschauung Gestalten wahr! Wie scheinbar selbstverständlich gilt unserem ästhetischen Empfinden der Schwung einer bestimmten Linie, die Wölbung einer Fläche als schön, die einer anderen nicht! Aber wie schwer ist die genaue Erfassung einer Form durch das Denken, wie schwer ihre rationale Rekonstruktion! Gilt das schon für unser heutiges, hochentwickeltes System von mathematischen Begriffen, um wieviel mehr musste es für das frühe mathematische Denken der Antike gelten. Nur dann würde es zum Ziel kommen können, wenn es sich auf die einfachsten Formen richtete. Dreiecke, Vielecke, Kreise, Sphären und Polyeder waren solche einfachen Gegenstände. Das durch Denken Erkennbare, das Einfache und Regelmäßige wurde zum Vollkommenen und Schönen.

“Die ältesten Beispiele für die regulären Polygone, als Produkte menschlicher Kultur, wurden auf altägyptischen Wanddekorationen gefunden. Bis zu der achtzehnten Dynastie (etwa um 1660 v.u.Z.) kamen ausschließlich die Polygone 4, 8 und 16 vor. Das Fünf- und Sechseck scheinen erstmalig in der babylonischen Kultur vorzukommen” (zitiert nach Fejes Tóth [350, p. 116]). Man findet jedoch in ägyptischen Grabkammern als Hyroglyphe vielfach gereiht auf Deckengewölben und Wandfriesen einen fünfzackigen Stern mit der Bedeutung: Stern, Morgenstern, Stunde, Zeit für das Gebet. Der fünfzackige Stern im Kreis ist die Hyroglyphe für Unterwelt. Auf babylonischen Zeichnungen findet man auch das Pentagramm (G. Junge: “Flächenanlegung und Pentagramm”, *Osiris* 8 (1948), zitiert nach B.L. van der Waerden, “Erwachende Wissenschaft” [355, p. 167]).

Das Pentagramm war ein Erkennungszeichen der Pythagoreer, und es war für sie ein Symbol der Gesundheit, das heißt des harmonischen Verhältnisses aller Kräfte des Leibes und der Seele. Quellen für diese Aussage nennt Thomas Heath in “A History of Greek Mathematics” [181]: Lucian, “Pro lapsu inter salutandum” [241, p. 447f.] und Scholium 609 zu “Die Wolken” von Aristophanes [3]. Eine nützliche und leicht zugängliche Quellensammlung zu den Pythagoreern bietet “The Pythagorean Sourcebook and Library” [168]. Dort findet man im Anhang II eine Liste von Bedeutungen, welche die Pythagoreer der Zahl 5 beilegten, darunter die folgenden: Unsterblichkeit, Vereinigung von Männlichem und Weiblichem, Friedfertigkeit,

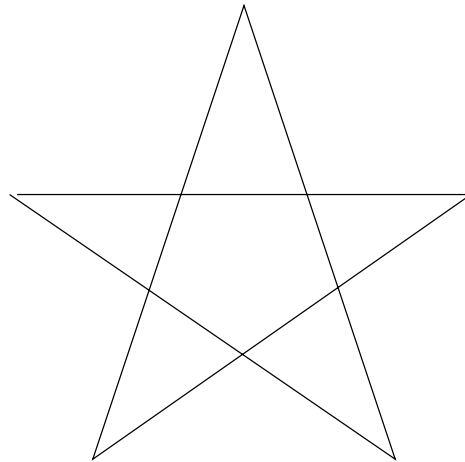


Abbildung 1.25: Pentagramm

Gerechtigkeit, Weitsicht, Licht. Es ist wirklich diabolisch, dass das Pentagramm, das Symbol der Pythagoreer, heute auf den Waffen der Weltmächte zu finden ist, durch die in jedem Augenblick dem Leben auf der Erde Tod und Vernichtung droht. Es ist ziemlich schwierig, verlässliche Aussagen über die Pythagoreer zu machen. Die meisten Quellen, die über sie berichten, sind neu-pythagoreische und neu-platonische Quellen, und es ist oft nicht feststellbar, wieweit diese tatsächlich genuin pythagoreisches Gedankengut wiedergeben. Ebensovienig oder noch weniger lässt sich mit Sicherheit sagen, was davon auf Pythagoras selbst und was auf seine Schule zurückgeht. Das Folgende steht also unter dem Vorbehalt, dass Irrtümer im einzelnen möglich und sogar wahrscheinlich sind.

Pythagoras wurde etwa um 580 v. Chr. in Samos geboren, und etwa um 500 v. Chr. oder einige Jahre später ist er gestorben. In seiner Jugend kam er auf Reisen wahrscheinlich mit den Weisheitslehren ägyptischer Priester, möglicherweise auch mit denen der Chaldäer in Berührung und erwarb auch mathematisches Wissen. Er entfaltete dann eine Lehrtätigkeit in Samos. Etwa im Alter von 40 Jahren verließ er Samos, vermutlich wegen der Tyrannis des Polykrates. Um 530 kam er nach Süditalien ins damalige "Großgriechenland", wo sich zu dieser Zeit griechische Macht und griechische Kultur

konzentrierten. Er ließ sich in der griechischen Siedlung Kroton am Golf von Tarent nieder. Kroton wurde zu diesem Zeitpunkt oligarchisch von der griechischen Aristokratie regiert. Pythagoras gründete eine Schule, eine religiöse Lebensgemeinschaft, die sich bald über einen großen Teil von Großgriechenland ausdehnte.

Unter den Schülern oder Anhängern des Pythagoras gab es verschiedene Gruppen – ob schon zu seinen Lebzeiten, wie Iamblichus und Porphyrius berichten, oder erst nach seinem Tode, wie van der Waerden in “Erwachende Wissenschaft” behauptet, kann ich nicht entscheiden. Die ἀκουσματικοί, das heißt die “Hörer”, nahmen das Gehörte, die Lehren und Lebensregeln ohne Beweise, Argumente oder Diskussion gläubig an und behielten sie so getreu wie möglich. Für die μαθηματικοί, die “Studenten”, hingegen gehörten zum μαθημα, zum Gelernten, die vollständig und genau ausgearbeiteten Begründungen für dies Wissen. Dies ist aber ein wesentlicher Zug unserer Wissenschaft, der Mathematik, und hier ist ein Ursprung ihres Namens.

Bei der Gründung seines Bundes schloss Pythagoras vermutlich an die orphischen Mysterien und den Kult des Apollo an. Über die religiöse Erfahrung hinaus bezog er auch das politische und das persönliche Leben der Mitglieder der Gemeinschaft in die teilweise asketischen Bestimmungen zur Lebensgestaltung mit ein. Die aristokratische politische Orientierung ermöglichte es, dass die Pythagoreer bis etwa 480 Einfluss auf die politischen Geschehnisse Krotons im Sinne der Aristokratie nehmen konnten. Als sich die Machtverhältnisse zu Gunsten der Demokratie verschoben, brachen ab 504 Verfolgungen gegen den pythagoreischen Bund aus, die schließlich zu seiner Zerspaltung führten. Ein Teil der überlebenden Pythagoreer kehrte nach Griechenland zurück und war dort noch einige Zeit wirksam.

So wirkte z.B. in Theben der Pythagoreer Philolaos, ein älterer Zeitgenosse von Sokrates und Demokrit. Er war anscheinend der erste Pythagoreer, der die Lehren der Schule schriftlich niederlegte. Wir haben von ihm nur Fragmente, deren Autorschaft nicht gesichert ist, die zum Teil aber als echt gelten. Obwohl sie nur mit Vorsicht zur Charakterisierung der ursprünglichen Lehre herangezogen werden dürfen, will ich doch einige Sätze daraus zitieren (ich zitiere nach H. Diels - W. Kranz: “Die Fragmente der

Vorsokratiker”).

1. Die Natur aber ward in der Weltordnung aus grenzenlosen und grenzebildenden Stücken zusammengefügt, sowohl die Weltordnung als Ganzes κόσμος wie alle in ihr vorhandenen Dinge.
2. Notwendig müssen die vorhandenen Dinge alle entweder grenzebildend oder grenzenlos oder beides zugleich sein. Dagegen nur grenzenlos (oder nur grenzebildend) können sie wohl nicht sein. Da sie also offenbar weder aus lauter Grenzebildendem bestehen noch aus lauter Grenzenlosem, so ist doch klar, dass die Weltordnung und, was in ihr ist, aus grenzebildenden und grenzenlosen Stücken zusammengefügt wurde. Das beweist auch die Beobachtung in der Wirklichkeit. Denn diejenigen von den wirklichen Dingen, welche aus grenzebildenden Stücken bestehen, sind auch grenzebildend, aber die aus grenzebildenden und grenzenlosen sind sowohl grenzebildend wie grenzenlos, dagegen die aus grenzenlosen werden auch grenzenlos erscheinen.
3. Von vornherein wird es nicht einmal ein Objekt der Erkenntnis geben können, wenn alles grenzenlos wäre.
4. Und in der Tat hat ja alles, was man erkennen kann, Zahl. Denn es ist nicht möglich, irgendetwas mit dem Gedanken zu erfassen oder zu erkennen ohne diese.
5. Die Zahl fürwahr hat zwei besondere Formen, Ungrades und Grades, und eine Dritte aus beider Mischung entstandene, Grad-Ungrades. Jede der beiden Formen aber hat viele Gestalten, die jedes Ding selbst von sich aus anzeigt.
6. Mit Natur und Harmonie verhält es sich so: Das Wesen der Dinge, das ewig ist, und die Natur gar selbst erfordert göttliche und nicht menschliche Erkenntnis, wobei es freilich ganz unmöglich wäre, da irgendetwas von den vorhandenen Dingen von uns auch nur erkannt würde, wenn nicht das Wesen der Dinge zugrunde läge, aus denen die Weltordnung zusammentrat, sowohl der grenzebildenden wie der grenzenlosen. Da aber diese

Prinzipien (1 und 2) als ungleiche und unverwandte zugrunde lagen, so wäre es offenbar unmöglich gewesen, mit ihnen eine Weltordnung zu begründen, wenn nicht Harmonie dazu gekommen wäre, auf welche Weise diese auch immer zustande kam. Das Gleiche und Verwandte bedurfte ja durchaus nicht der Harmonie, dagegen muss das Ungleiche und Unverwandte und ungleich Geordnete notwendigerweise durch eine solche Harmonie zusammengeschlossen sein, durch die sie imstande sind, in einer Weltordnung niedergehalten zu werden. [101, p. 406ff.]

Für die Pythagoreer also ist die Welt eine Vielheit von Gegensätzen. Aber sie ist kein Chaos, sie ist Kosmos, ist geordnet. "Pythagoras war der erste, der die Welt Kosmos nannte, weil sie vollkommen ist und ausgestattet mit unendlicher Schönheit und lebenden Wesen", berichtet Photius, ~820–891 n.Chr. Was Einheit in die Vielheit der Gegensätze bringt und sie zu einem Kosmos vereinigt, ist die Harmonie. Diese Harmonie hat ihren Grund in Zahlenverhältnissen. Wer diese Zahlenharmonie ergründet, nähert sich dem Göttlichen selbst.

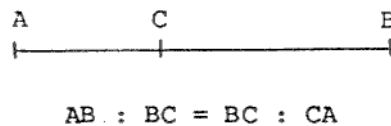
Sinnfälligstes Beispiel für die Begründung harmonischer Verhältnisse in Verhältnissen von Zahlen ist der Zusammenhang zwischen den Harmonien der Töne und den Zahlenverhältnissen der Längen schwingender Saiten, den die Pythagoreer am Monochord erforschten. Harmonie der Welt wird hier gleichzeitig denkend erkannt und sinnlich wahrgenommen. Diese Empfindung der Harmonie hat eine tiefe Wirkung auf die menschliche Seele. Durch sie kann der Mensch sich selbst als einen Mikrokosmos begreifen und innere Harmonie gewinnen.

Dieser Weg der Läuterung war das Besondere der religiösen Gemeinschaft der Pythagoreer. Ihre Suche nach der durch Zahlen begründeten Harmonie in der Musik und nach der Harmonie der Sphären in der Astronomie hat die Richtung des griechischen Denkens, vor allem dasjenige Platons, und damit mittelbar der europäischen Wissenschaft entscheidend mitbestimmt. Das Bild von der Musica mit dem Monochord und mit dem Pythagoras aus einer Klosterhandschrift, das dieses Buch als Frontispiz schmückt, ist ein getreuer Widerhall dieser alten pythagoreischen Lehre. Wir werden noch

sehen, welche Wirkung dieses Denken über den Platonismus und Neuplatonismus dann in der Renaissance entfaltet hat. Auf dem Wege über die 1462 von Cosimo de' Medici und Marsilio Ficino gegründete Florentinische Akademie, die zum Zentrum des Renaissanceplatonismus wurde, führte es zum Programm der Mathematisierung der neuzeitlichen Naturwissenschaften. Keplers Weltharmonik beispielsweise ist ganz durchdrungen von der Suche nach den weltbildenden harmonischen Verhältnissen. Davon wird später noch zu reden sein.

Wieviel Mathematik die Pythagoreer selbst entwickelt haben, ist schwer mit Sicherheit feststellbar. Man weiß nicht sicher, welche Platonischen Körper sie kannten. Ihre Untersuchung der Zahlenverhältnisse bei der Harmonie von Tönen lieferte die Ansätze zur Entwicklung der mathematischen Proportionenlehre, die wahrscheinlich durch *Eudoxos* voll ausgebildet wurde und in Buch V von Euklids Elementen dargestellt ist. (Zu den Anfängen der Proportionenlehre vgl. Szabó, "Anfänge der griechischen Mathematik" [346].) Die Teilung der Seite eines Monochords, die einem Tonintervall entspricht, nannten die pythagoreischen Musiktheoretiker den "Schnitt", und diese Teilung führt in natürlicher Weise zu mathematischen Problemen der Teilung von Strecken. Eine besonders ausgezeichnete Teilung, die allerdings wohl nicht direkt aus der Musiktheorie herzuleiten ist, wird bei Euklid in Buch VI, Definition 3 definiert:

Eine Strecke heißt nach äußerem und mittlerem Verhältnis geteilt, wenn sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt so verhält wie der größere Abschnitt zum kleineren.



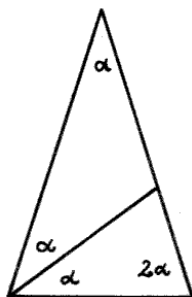
Die Terminologie wird in der Euklidübersetzung von Thaeer wie folgt erklärt: "Es ist eine Teilung, bei der die Teile äußeres und mittleres Glied einer

dreigliedrigen Proportion sind, deren anderes äußeres Glied die ganze Strecke ist.” Im 19. Jahrhundert wurde diese Teilung der **“goldene Schnitt”** genannt, in der Renaissance **“proportio divina”**. Dieser Schnitt war den Pythagoreern zweifellos bekannt. Er ist wichtig für die klassische Athenische Architektur der perikleischen Zeit. (Überlegungen zur Entdeckung dieser Teilung findet man bei *Siegfried Heller*: “Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer”[186].)

Bei Euklid wird der goldene Schnitt mehrfach behandelt: II.11; VI.30; XIII.1-6,8,9. Die Sätze II.11 und VI.30 sind Konstruktionen für den goldenen Schnitt. Proposition XIII.1 würde man heute wohl so formulieren: Teilt man ein Intervall der Länge a durch den goldenen Schnitt in ein größeres Intervall der Länge b und ein kleineres der Länge $a - b$, dann ist das Verhältnis a/b die folgende irrationale Zahl τ :

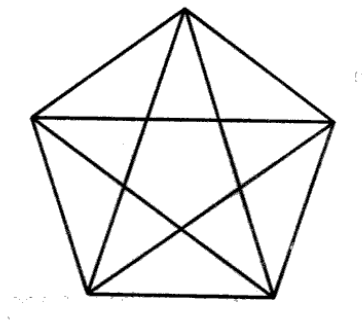
$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Der Buchstabe τ ist der Anfangsbuchstabe des griechischen Wortes $\tauμή$ das “Schnitt” bedeutet. In einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Basiswinkel doppelt so groß sind wie der Winkel α an der Spitze, teilt die Winkelhalbierende eines Basiswinkels die gegenüberliegende Seite offensichtlich im Verhältnis des goldenen Schnitts.



Es gilt dann $\alpha = \pi/5$. Daher kann man aus diesem Dreieck natürlich ein reguläres 5-Eck konstruieren (Euklid IV.10,11). Der goldene Schnitt führt so zur Konstruktion des regulären Pentagons. Anders gesagt (Euklid XIII.8):

Die Diagonalen des regulären Pentagons sind die Seiten des Pentagramms. Sie teilen sich gegenseitig im Verhältnis des goldenen Schnitts, und die Seiten des Pentagons sind so lang wie der längere Abschnitt.



Auf welche Weise die Pythagoreer das reguläre Pentagon und das Pentagramm konstruiert haben, wissen wir nicht. Dass sie es konnten, wird im allgemeinen nicht bezweifelt.

Schwieriger ist die Frage, ob die Pythagoreer alle regulären Polyeder kannten, und ob und in welchem Sinne sie diese konstruieren konnten. Hierzu zitiere ich zunächst ein Scholion, das heißt eine kurze Erklärung oder Auslegung, zu Buch XIII der Elemente:

In diesem Buch, dem XIII., werden die fünf platonischen Körper konstruiert, die aber nicht von ihm stammen; sondern drei der genannten fünf Körper, nämlich Würfel, Pyramide und Dodekaeder, gehören den Pythagoreern, Oktaeder und Ikosaeder dem Theaitetos. Nach Plato heißen sie, weil dieser sie im Timaios erwähnt. Euklids Namen trägt auch dieses Buch, weil er es in die Reihe der Elemente eingefügt hat.

J.L. Heiberg hat im Band V seiner "Euclidis Elementa" [121] eine große Anzahl solcher Scholia zusammengetragen. Nach seinen Angaben, loc. cit. p. 654, findet sich das eben zitierte Scholion nur im Codex Vaticanus 190 und ist von erster Hand. Nach Heiberg – vgl. den Bericht hierüber bei Heath [181, Vol 1, 64-74] – stammt dieses Manuskript aus dem 10. Jahrhundert. Es ist

eines der ältesten und zuverlässigsten Euklid-Manuskripte, das nicht nur auf die Euklidausgabe des *Theon von Alexandria* aus dem 4. Jahrhundert nach Christus zurückgeht, sondern auch auf eine aus früheren Quellen schöpfende Vorlage. Nach Meinung von Thaer [122, p. 471] ist dies Scholion vielleicht auf einen Euklid-Kommentar von *Pappos* (um 320 n. Chr.) zurückzuführen, nach Meinung von Heath wahrscheinlich auf *Geminus* (um 70 v. Chr.), auf den sich *Proclus* (410–485 n. Chr.) in seinem Euklid-Kommentar beruft. Die Meinungen der Kenner darüber, wie zuverlässig die Aussage dieses Scholion, das ja schon damals über weit zurückliegende Geschichte berichtete – Euklids Elemente wurden um 300 v. Chr. geschrieben – gehen weit auseinander (vgl. van der Waerden [355, p. 282–286], Szabó [346, p. 79–84], Heath [181, vol 2, 413f., vol. 3, 438f.], Sachs [309] und Waterhouse [361]).

Wie dem auch sei und was auch immer die nichtmathematischen Ursprünge der regulären Figuren gewesen sein mögen – die mathematische Herausarbeitung ihres Begriffs und ihrer Konstruktion beginnt jedenfalls mit den Pythagoreern. Platon, um 427 v. Chr. geboren, um 347 v. Chr. gestorben, kommt auf Reisen um 390 mit den Pythagoreern in Italien, in Tarent in Berührung und nimmt das Gedankengut der Pythagoreer auf. 387 v. Chr. gründet er seine Akademie, die fast ein Jahrtausend lang bestehen sollte, bis 529 n. Chr. In dieser Akademie führen Mathematiker wie *Eudoxos* und *Theaitetos*, die in der Philosophie die Schüler, in der Mathematik die Lehrer Platons waren, die Untersuchungen der Pythagoreer fort. Man muss sich klarmachen, dass die Entdeckung der Platonischen Körper etwas anderes ist als ihre Konstruktion, da “Konstruktion” verschiedene Bedeutungen haben kann und da eine Konstruktion etwas anderes ist als ein Existenzbeweis – für einen Platonisten existieren die regulären Polyeder nicht etwa deshalb, weil sie konstruiert worden sind, sondern sie sind vor aller Konstruktion. Die Konstruktion der regulären Polyeder mag am Anfang auf kombinatorische Weise erfolgt sein, durch kombinieren, das heißt durch zusammenfügen, vereinigen, verbinden, anordnen von Elementen nach einem bestimmten Schema. Diese Elemente könnten die Seitenflächen gewesen sein, aber – wie wir noch sehen werden – auch andere Figuren. In dem Maße, wie sich die griechische Mathematik entfaltete, wie sich die Proportionenlehre,

die Theorie der Irrationalitäten, die Planimetrie und Stereometrie und insbesondere die Begriffe von Kongruenz und Ähnlichkeit entwickelten, war es möglich, die metrischen Eigenschaften der regulären Polyeder genau zu erfassen und den Begriff der Regularität herauszuarbeiten. Wann immer und wo immer bei den Pythagoreern oder in der Akademie die einzelnen Stufen dieses Prozesses durchlaufen worden sein mögen, am Ende steht jedenfalls im Buch XIII von Euklid eine exakte, auf den metrischen Eigenschaften der regulären Polyeder beruhende Konstruktion der fünf platonischen Körper und, ganz am Schluss, die allerdings nur unvollkommen formulierte und bewiesene Einsicht, dass es nur diese 5 regulären Polyeder geben kann.

Euklids Proposition XIII.18 liegt eine allerdings unzureichende Definition der **Regularität** eines Polyeders durch die folgenden Eigenschaften des Polyeders zugrunde: Das Polyeder ist konvex – dies ist bei Euklid offenbar überall implizit angenommen – und die Seitenflächen sind reguläre untereinander kongruente Vielecke. Diese Eigenschaften haben aber außer den fünf regulären Polyedern auch noch die trigonale und die pentagonale Bipyramide mit gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen. Die Definition der Regularität muss also dahingehend ergänzt werden, dass an jeder Ecke die gleiche Anzahl von Seitenflächen zusammengefügt werden muss. Mir scheint, dass dies in XIII.18 stillschweigend als selbstverständlich vorausgesetzt wird. Übrigens sind die eben erwähnten beiden Gegenbeispiele die einzigen – vgl. V.A.Zalgeller: “Convex polyhedra with regular faces” [388].

Die Behandlung der regulären Polyeder bei Platon und bei Euklid enthält im Keim zwei Ansätze, die sich miteinander verbinden und einander ergänzen, aber doch wohl voneinander zu unterscheiden sind, und zwar auch in ihrer weiteren geschichtlichen Entfaltung. Der eine Ansatz ist der einer kombinatorischen Geometrie. Für diese ist die grundlegende Struktur vom heutigen Standpunkt aus die durch die Inklusionsrelation teilweise geordnete Menge der Seiten, Kanten und Ecken des Polyeders, und die Regelmäßigkeit der Figur wird durch ihre **kombinatorische Symmetrie** erfasst. Der andere Ansatz geht von dem mit der Metrik gegebenen Kongruenzbegriff der euklidischen Geometrie aus und erfasst die Regelmäßigkeit der Figuren durch ihre **metrische Symmetrie**. Hier ist die grundlegende Struktur vom heuti-

gen Standpunkt aus die Symmetriegruppe des regulären Polyeders und ihre Operation auf dem Polyeder selbst.

Man wird sich selbstverständlich davor hüten müssen, diese modernen Fassungen des Symmetriebegriffs mit den Vorstellungen zu verwechseln, welche die Mathematiker zu Euklids Zeiten mit dem Wort “Symmetrie” verbanden. Das griechische Wort $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ hat umgangssprachlich die Bedeutungen “Ebenmaß, richtiges Verhältnis, Harmonie”, und $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ bedeutet “abgemessen, verhältnismäßig, ebenmäßig, gleichmäßig, übereinstimmend, regelmäßig gebaut, symmetrisch”. Im mathematisch-fachsprachlichen Sinne wird $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ einmal im Sinne von “Kommensurabilität” verwendet, zum anderen im Sinne von “Ausmessung”, insbesondere von “Ausmessung der verschiedenen Teile einer Figur”. Es ist offensichtlich, dass diese zweite Bedeutung, die eine ähnliche Funktion hat wie unser moderner Symmetriebegriff, zu Euklids Zeiten nicht in einer allgemeinen Definition fassbar war. Sie wäre es heute auch nicht, weil man keine allgemeine Definition dafür angeben kann, was die Teile einer Figur sind. Hingegen kann man die Teile sehr wohl bestimmen, wenn von bestimmten einfachen Figuren wie Polygonen oder Polyedern die Rede ist: Die Teile sind dann Ecken, Kanten, Seiten, ebene und räumliche Winkel. So verwundert es nicht, dass im Zusammenhang mit regulären Polygonen und Polyedern bei Euklid das Wort $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ nie auftaucht, sondern reguläre Objekte einfach direkt durch entsprechende Eigenschaften ihrer Teile definiert werden: reguläre Polygone als gleichseitige und gleichwinklige ebene geradlinige begrenzte Figuren, reguläre Polyeder als räumliche Figuren, die von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst werden (Euklid XIII.18).

Selbstverständlich ist die oben angedeutete strukturtheoretische Betrachtungsweise und insbesondere die Zerlegung des Symmetriebegriffs in einen kombinatorischen und einen metrischen Symmetriebegriff erst das Ergebnis einer zweieinhalbtausendjährigen Entwicklung. Im griechischen Symmetriebegriff scheinen mir aber doch schon beide Ansätze im Keim vorhanden und so miteinander verbunden zu sein, wie es dem Wesen jener regelmäßigen Gestalten entspricht, deren mathematische Erfassung eine der höchsten Leistungen der griechischen Mathematik war.

Mehr noch als bei Euklid sehe ich die Wirkung dieses Symmetriebegriffs in der frühesten uns erhaltenen systematischen Darstellung der regulären Polyeder, in Platons Dialog *Timaios*. Dieser Dialog ist nicht die Arbeit eines Mathematikers, obgleich Mathematik darin enthalten ist. Er ist das Werk eines großen Denkers, und wie jedes solche Werk lässt sich auch dieser Dialog auf verschiedene Weise begreifen. Man kann ihn als Schöpfungsmythos sehen, in dem das Chaos durch Zahl und Gestalt geordnet zum Kosmos wird, als eine groß angelegte Kosmogonie. Man kann diesen Dialog auch als eine auf der mathematischen Entdeckung der regulären Polyeder basierende Theorie von Grundzuständen der natürlichen Erscheinungen und als eine darauf aufbauende Zusammenschau des damaligen naturkundlichen und medizinischen Wissens sehen. *C.F.von Weizsäcker* sieht im *Timaios* den “Versuch einer deduktiven Naturwissenschaft” (vgl. “Platonische Naturwissenschaft im Laufe der Geschichte” in [369, p. 252]).

Viele Einzelheiten in diesem Dialog lassen sich in verschiedener Weise deuten oder bleiben rätselhaft. Daher ist der *Timaios* seit der Antike immer wieder neu kommentiert worden. Da für die Deutung Kenntnisse nötig sind, die mir fehlen, stütze ich mich auf solche Kommentare, und zwar die von A.E. Taylor “A Commentary an Plato’s *Timaeus*” [348] und von F.M. Cornford “Plato’s *Cosmology*” [87], außerdem auf das Buch von Charles Mugler “Platon et la recherche mathématique de son époque” [265]. Ich zitiere Platons Text nach der gebräuchlichsten modernen Ausgabe, der von Ioannes Burnet [72] und nach der Übersetzung von Hieronymus Müller [267]. Die im *Timaios* vorgetragene Gedanken sind im Zusammenhang mit der gesamten vorhergehenden Entwicklung griechischen philosophischen Denkens zu sehen, mit den ionischen Naturphilosophen *Thales*, *Anaximandros* und *Anaximenes*, mit *Heraklit* und *Parmenides*, mit *Empedokles*, *Anaxagoras* und *Leukippos* und selbstverständlich mit den Pythagoreern und mit *Sokrates*. Ob im *Timaios* auch eine Auseinandersetzung mit *Demokrit* stattfindet, ist zweifelhaft, aber der Vergleich mit Demokrit trägt für uns zur Erhellung bei.

Selbstverständlich kann ich diesen philosophischen Hintergrund nicht darstellen. Nur so viel sei in extremer Verkürzung gesagt. Die ionischen

Naturphilosophen, die zugleich Mathematiker und Naturforscher sind, versuchen als erste, die wahrnehmbaren Erscheinungen auf einen einheitlichen Urgrund zurückzuführen, hinter dem Werden, Entstehen und Vergehen ein unzerstörbares Sein zu erkennen. Thales sieht den Urstoff im Wasser, Anaximandros in einem unbegrenzt ausgedehnten Körperlichen, Anaximenes in der Luft, aus der sich durch Verdünnung Feuer, durch Verdichtung Wind, Wolken, Regen, Wasser, Erde und Gestein bilden: Bei Heraklit gibt es kein unveränderliches Sein, nur ewigen Wechsel der Erscheinungen, und dieses Prinzip des Fließens und Werdens stellt sich im Feuer dar. Bei Empedokles schließlich gibt es vier unzerstörbare Urelemente: Feuer, Wasser, Erde und Luft. Unter der Wirkung der Kräfte Liebe und Hass mischen und trennen sie sich, und so entsteht Ordnung und Unordnung im ewigen Kreislauf.

Eines erzeugt und zerstört der Dinge Verbindung; das andre,
Kaum erstarkt, verfliegt, wenn wieder Stoffe sich scheiden.
Unaufhörlich wechselt dies ab, es kommt nie zu Ende:
Bald in Liebe vereint tritt alles in Einem zusammen,
Bald vom Hasse entzweit strebt jegliches wieder nach Trennung.
...

Zweierlei kund' ich: Bald wächst aus mehreren Teilen ein Ganzes,
Bald auseinander tritt wieder das Eine in mehrere Teile:
Feuer und Wasser und Erde und Luft unendlich an Höhe ... [271,
p. 138].⁷

Die Frage nach dem Sein $\acute{\omicron}\nu$ und dem Werden $\gamma\epsilon\nu\epsilon\sigma\iota\varsigma$ wird durch Timaios 51e6-52b6 so beantwortet: Es gibt dreierlei: die Gestalten ($\epsilon\acute{\iota}\delta\omicron\varsigma$), die Bilder ($\mu\upsilon\mu\epsilon\mu\alpha\tau\alpha$) und den Raum ($\chi\omicron\rho\omicron\alpha$). Die Gestalten sind unentstanden und unvergänglich, sie sind. Sie sind durch das Denken erkennbar. Sie sind die Urbilder der Erscheinungen, die $\pi\alpha\rho\alpha\delta\iota\gamma\mu\alpha\tau\alpha$. Die Erscheinungen sind ihnen ähnlich, nachgebildet, sind ihre Bilder. Sie werden, entstehen und vergehen.

Sie werden durch die sinnliche Wahrnehmung erfasst. Der Raum ist das Gefäß ($\acute{\upsilon}\pi\omicron\delta\omicron\chi\eta$), das alles Werden in sich aufnimmt, ihm eine Stelle gewährt. Der Raum ist gestaltlos, allempfänglich und unvergänglich. Er

⁷Aus Nestles Übersetzung von Philolaos, Fragment 17 [101], Hrsg.

ist nicht sinnlich wahrnehmbar und wird durch eine merkwürdige, schwer verständliche Art von uneigentlichem Denken erfasst. Man tut gut daran, diesen Raum nicht mit unserem mathematischen Begriff des euklidischen Raumes zu verwechseln und auch nicht mit dem leeren Raum des Demokrit: Er ist erfüllt vom Werdenden und erscheint dadurch mannigfaltig. Timaios nimmt die Lehre des Empedokles von den vier Elementen auf, aber er gibt den Elementen in seinem System von Sein, Raum und Werden eine andere Bedeutung. Bei Timaios sind die *vier Elemente* keine Grundstoffe, keine Substanzen, sondern bestimmte, im Wechsel der Erscheinungen wiederkehrende grundlegende Qualitäten, Beschaffenheiten, Zustände. Entsprechend der Unterscheidung von Sein und Werden ist dabei zu unterscheiden zwischen den hier und da zu beobachtenden, sich entwickelnden und wieder verschwindenden Zuständen, etwa Feuer (49e5-6) und ihrem Urbild, dem "Feuer selbst für sich selbst" (51b8). Letzteres ist das Urbild, die Gestalt, ersteres dessen Abbild. Wir würden ja heutzutage beispielsweise auch zwischen einem in einer bestimmten experimentellen Situation beobachteten Aggregatzustand und dem Begriff des entsprechenden Aggregatzustandes unterscheiden.

Würde nun die Bewegung und Transformation der Elemente nur durch Zufall und Notwendigkeit bestimmt, etwa durch anziehende und abstoßende Kräfte, so wäre sie nach der Meinung des Timaios tot und seelenlos, und es gäbe keinen Kosmos, kein wohlgeordnetes Weltall, sondern Chaos, allenfalls eine gewisse räumliche Trennung der Elemente. Also steht für ihn fest, dass die Elemente eine ihre Transformation bestimmende Form haben, die durch Zahlen und Gestalten beschreibbar ist, und zwar auf die schönste und beste nur mögliche Weise (53b).

Und nun kommt die großartige Idee des Timaios, diese naturphilosophische Theorie der Elemente mit der von den Pythagoreern und von der platonischen Akademie entwickelten Theorie der regulären Polyeder zu verbinden. Das Bindeglied ist die Idee des Körpers ($\sigma\tilde{\omicron}\mu\alpha$). Die Elemente Feuer, Wasser, Erde und Luft werden als Erscheinungen im Raum wahrgenommen, und sie bilden ein durch räumliche Struktur geordnetes Ganzes, das heißt aber einen Körper (53c4-5). Die einfachsten räumlichen Körper der Mathe-

matiker andererseits sind die Polyeder, und die schönsten unter ihnen sind die regelmäßigen. Und während es unendlich viele ebene regelmäßige Gestalten gibt – die regulären n -Ecke – gibt es im Raume nur endlich viele reguläre Polyeder, sogar nur sehr wenige: nur fünf. Dies ist einer der frühesten Klassifikationssätze der Mathematik, und in ihm ist eine wichtige besondere Eigenschaft des dreidimensionalen Raumes angesprochen. Es entspricht daher der grundlegenden Rolle des Raumes in der Theorie des Timaios, auch diesen fünf idealen räumlichen Formen der Mathematik eine grundlegende Rolle zuzuweisen. Das geschieht nun dadurch, dass Timaios sie den auch als Körpern betrachteten physikalischen Formen, den Elementen, zuordnet. Deren Zahl ist nun allerdings nur vier, so dass Timaios unter den fünf regulären Polyedern vier auswählen muss. Das tut er, und er ordnet den Elementen die ausgewählten Polyeder auf die folgende Weise zu:

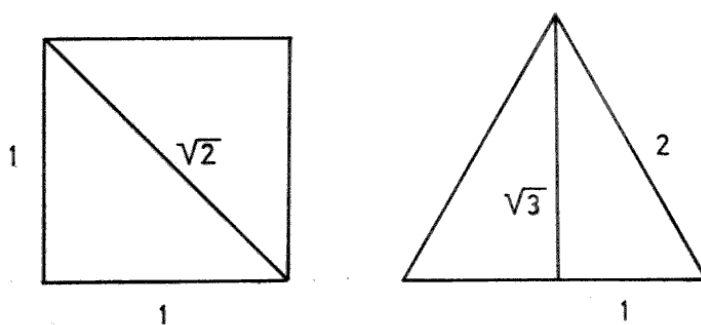
Erde	–	Hexaeder
Feuer	–	Tetraeder
Luft	–	Oktaeder
Wasser	–	Ikosaeder.

Wenn man genau liest, bemerkt man, dass Timaios auch dabei seiner Unterscheidung von Urbildern und Bildern treu bleibt, indem er die Zuordnung zweimal vornimmt: einmal auf der Ebene der Gestalten (56a1-4) – hier wird z. B. der Gestalt des Feuers die Gestalt ($\epsilon\acute{\iota}\delta\omicron\varsigma$) des Tetraeders zugeordnet – und einmal auf der Ebene der Erscheinungen (56a4-8) – hier entsprechen den “Feuer” genannten Zuständen tetraedische Körper ($\sigma\omicron\mu\alpha\tau\alpha$). Letztere nun denkt sich Timaios als eine Art von Korpuskeln, die mikroskopisch klein sind und erst durch Aggregation in großer Zahl sichtbar werden (56b7-c3).

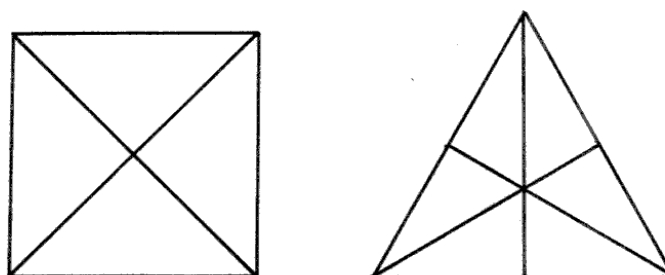
Hier könnte man sich nun an die Atomisten *Leukippos* und *Demokritos* aus Abdera erinnern fühlen. Zwischen den Vorstellungen von Demokrit und denen des Timaios bestehen jedoch große Unterschiede. Die Atome des Demokrit sind zwar auch unsichtbar klein, aber sie bestehen alle aus einer festen, undurchdringlichen Substanz. Außerhalb der Atome ist leerer Raum. Die Korpuskeln des Timaios sind keine Substanz, sondern geometrisch geformte Teilchen, die für bestimmte Grundzustände charakteristisch sind,

und sie befinden sich im Raum, der nicht leer, sondern von ihnen erfüllt ist. Die Atome Demokrits sind in ständiger ungeordneter Bewegung und wirken aufeinander durch Berührung. Die Bewegung der Teilchen des Timaios wird von einer ordnenden, alles durchdringenden und erfüllenden lebendigen Seele gelenkt, und ihre Wechselwirkung bestimmt ein mathematisches Prinzip. Die Atome Demokrits haben zwar eine feste geometrische Form, doch die Vielfalt der möglichen Formen ist beliebig. Für die Korpuskeln des Timaios gibt es nur vier mögliche Formen: Hexaeder, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder. Endlich: Die Atome Demokrits sind unteilbar, die Korpuskeln von Timaios hingegen sind zwar einfache Grundgestalten, aber nicht unzerlegbar. Sie sind aus noch einfacheren unzerlegbaren Bestandteilen nach einem bestimmten Schema aufgebaut.

Hier kommen wir nun auf das zurück, was wir schon weiter oben über Platons Auffassung der Polyeder ausgeführt haben: Das Wesentliche an ihnen ist die Gestalt und Anordnung der begrenzenden Flächen. Dementsprechend würde es naheliegen, die Polyeder aus diesen begrenzenden regulären Dreiecken, Vierecken und Fünfecken aufzubauen. Das überraschende ist nun, dass Platon noch einen Schritt weiter geht und diese regulären Vielecke noch weiter in zwei ganz bestimmte Arten von Dreiecken zerlegt, beziehungsweise umgekehrt die regulären Polyeder aus ihnen aufbaut. Und zwar sind dies die beiden Dreiecke, die durch Halbieren eines Quadrates und eines gleichseitigen Dreiecks entstehen.



Zusammen mit dem gleichseitigen Dreieck galten sie in der pythagoreischen Tradition als die drei schönsten Dreiecke – wohl deswegen, weil die Verhältnisse ihrer Winkel einfachste Verhältnisse natürlicher Zahlen sind, nämlich $1 : 1 : 1$ für das gleichseitige Dreieck, $1 : 1 : 2$ für das rechtwinklig gleichschenklige und $1 : 2 : 3$ für das halbe gleichseitige Dreieck. Platon zerlegt nun die Quadrate des Hexaeders und die gleichseitigen Dreiecke von Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder in Dreiecke dieser beiden Typen, und zwar so, wie im folgenden Bild.



Auf diese Weise wird das Hexaeder aus 24 Dreiecken des ersten Typs aufgebaut und Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder aus 24, 48 und 120 Dreiecken des zweiten Typs (54d2-55c4).

Als Bausteine der entsprechenden mikroskopischen Korpuskeln sind Dreiecke der zwei Typen von variabler Größe zugelassen, wobei die verschiedenen Größen den verschiedenen “Gattungen” entsprechen, in die jedes der vier Elemente zerfällt (57d).

Die Transformation der Elemente, die “Phasenübergänge” sozusagen von einem Grundzustand oder einer Mischung von Grundzuständen zu einer anderen derartigen Mischung, erklärt Timaios nun so, dass die Korpuskeln sich im lebendigen Fluss der Erscheinungen in ihre elementaren Bestandteile auflösen und aus diesen Bausteinen neue Korpuskeln aufgebaut werden. Die Gesamtheit der möglichen Umwandlungen wird dabei durch einen Erhaltungssatz bestimmt, ein rein mathematisches Prinzip: Die Gesamtzahl der elementaren Bestandteile der an einem Transformationsprozess beteiligten Teilchen vor und nach der Umwandlung ist gleich. Diese Zahl ist also – modern gesagt – eine Invariante. Ein Beispiel aus dem Timaios: Eine Wasser-

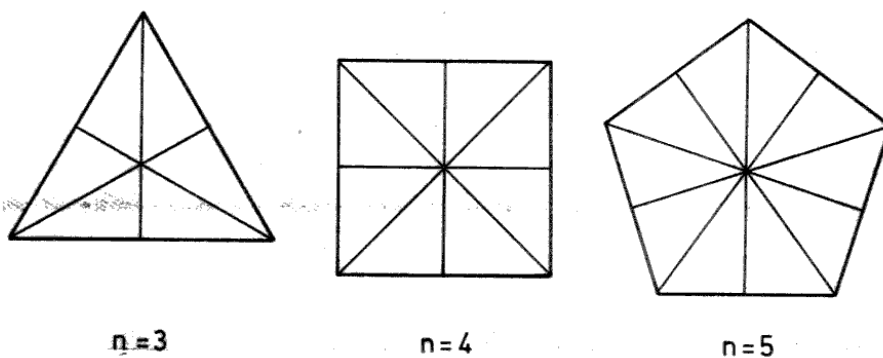
korpuskel ist in eine Feuerkorpuskel und zwei Luftkorpuskeln umwandelbar, denn ein Ikosaeder hat 120 Elementardreiecke, und ein Tetraeder aus 24 sowie zwei Oktaeder aus je 48 Elementardreiecken haben zusammen ebensoviel Elementardreiecke von der gleichen Art.

Die Elemente sind also nicht die letzten Bausteine, sie sind sozusagen nur Worte oder Silben der Sprache, in der die Natur zu beschreiben ist, ihrerseits zusammengesetzt aus Buchstaben, und diese letzten Bausteine sind im Timaios zwei mathematische Formen, die beiden Typen von **Elementardreiecken**. Es bleibt aber eine Frage: Warum sieht Platon gerade diese als die elementaren Formen an? Dass hier wirklich gefragt werden muss, deutet er selber an (54a1-b2). Für die Zwecke seiner Transformationstheorie hätte Platon genausogut mit den Quadraten und den gleichseitigen Dreiecken operieren können, welche die Polyeder als Seiten begrenzen. Ein von Platon vorgebrachtes Argument ist, dass jedes Vieleck sich in Dreiecke zerlegen lässt. Das würde erklären, warum das Quadrat ihm nicht als elementare Form gilt, sondern in Dreiecke zerlegt wird. Aber beim Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder sind die Seiten bereits Dreiecke, und zudem sogar gleichseitige Dreiecke, also im Sinne der pythagoreischen Tradition, die schönsten Dreiecke überhaupt. Warum also werden sie weiter zerlegt? Die Antworten der Kommentatoren auf diese Frage scheinen mir größtenteils an der Sache vorbeizugehen (siehe z. B. [87, p.231-239], [266, p.121-122]). Ich will versuchen, eine Antwort auf diese Frage zu geben, bei der ich mich von meiner Einsicht in die Natur des mathematischen Problems leiten lasse. Ich meine, dass Platon sich vielleicht von ähnlichen Überlegungen hat leiten lassen.

Bei meiner Antwort gehe ich von Platons erklärter Absicht aus, diejenigen Dreiecke auszuwählen, die für die Zusammensetzung der regulären Polyeder am schönsten sind (54a2-3). Am schönsten, das heißt doch wohl: dem Wesen des Problems entsprechend. Und was ist das Problem? Ein regelmäßiger Körper, genauer: der Rand eines regulären Polyeders, soll aus einfachen, elementaren Bausteinen durch Aneinanderfügen aufgebaut werden. Die einfachsten denkbaren Bausteine sind Dreiecke. Der Rand des Polyeders hat bereits Struktur: Er ist in die Seiten unterteilt, in reguläre n -Ecke, $n = 3, 4, 5$. Der Aufbau aus elementaren Dreiecken muss natürlich mit die-

ser vorgegebenen Struktur verträglich sein. Das bedeutet: Jedes einzelne n -Eck zerfällt weiter in elementare Dreiecke oder wird umgekehrt aus diesen aufgebaut. Ferner soll der Aufbau aus elementaren Dreiecken natürlich mit der Regelmäßigkeit des Polyeders verträglich sein. In der Sprache von heute kann man das so präzisieren: Jede eigentliche oder uneigentliche Bewegung, die das Polyeder mit sich selbst zur Deckung bringt, muss jedes Elementardreieck der Zerlegung auch wieder mit einem Elementardreieck zur Deckung bringen. Schließlich wird verlangt, dass die Bausteine elementare Bausteine sein sollen. In dieser Forderung stecken eigentlich zwei Bedingungen. Zum einen: Zum Aufbau eines Polyeders sollen so wenig Arten von Elementardreiecken verwandt werden wie möglich, nämlich nur eine. Zum anderen: Es soll keine noch feinere Zerlegung in kleinere Dreiecke geben, die allen anderen vorher genannten Bedingungen genügt.

In der mathematischen Sprache von heute können wir die Bedingungen des Problems wie folgt zusammenfassen: Die Unterteilung des Randes eines regulären Polyeders in die regulären n -Ecke, welche seine Seiten bilden, soll so fein wie möglich zu einer Unterteilung in "elementare" Dreiecke verfeinert werden, und zwar so, dass die Unterteilung mit der Operation der Symmetriegruppe des Polyeders verträglich ist und die Symmetriegruppe transitiv auf der Menge der Elementardreiecke operiert. Für den heutigen Mathematiker ist klar, dass dies Problem nur eine Lösung hat:



Warum ist das klar? Für jedes Elementardreieck muss offenbar eine Ecke mit einer Ecke des n -Ecks zusammenfallen. Man sieht dann leicht,

dass eine zweite Ecke des Elementardreiecks ein Kantenmittelpunkt sein muss. Die dritte Ecke eines solchen Elementardreiecks geht durch die Spiegelungen an den Symmetriegeraden des n -Ecks in die entsprechenden Ecken der anderen Dreiecke. Da diese sich lückenlos aneinanderfügen und das n -Eck überdecken, stoßen sie längs der Symmetriegeraden zusammen. Die dritte Ecke liegt daher auf allen Symmetriegeraden. Sie ist also der Flächenmittelpunkt des n -Ecks. Es gibt daher tatsächlich nur eine Unterteilung, die allen Bedingungen unseres Problems genügt. Man nennt diese Unterteilung die **baryzentrische Unterteilung**.

Das griechische Wort βαρυσ bedeutet "schwer", und das Baryzentrum, κεντρον του βαρεος ist der Schwerpunkt. Der erste, der diesen Begriff systematisch entwickelt hat, war *Archimedes* in seiner Schrift "Über das Gleichgewicht ebener Flächen oder über den Schwerpunkt ebener Flächen" [2, p.177-210]. Insbesondere gibt er dort in Proposition 14 die Konstruktion für den Schwerpunkt eines Dreiecks an: "In jedem Dreieck ist der Schwerpunkt der Punkt, in dem sich die Strecken im Dreieck schneiden, welche die Ecken mit den Mittelpunkten der Seiten verbinden." Diese Konstruktion kommt bei Euklid so nicht vor. Im gleichseitigen Dreieck fallen natürlich die in der Schwerpunktkonstruktion benutzten Mitteltransversalen mit den Mittelsenkrechten und mit den Winkelhalbierenden zusammen, deren Schnittpunkte die Mittelpunkte des Um- und des Inkreises sind (Euklid IV.5 und IV.4). Insofern war die ausgezeichnete Rolle der Kanten- und Flächenmittelpunkte für die regulären Dreiecke natürlich schon vorher bekannt, und es ist gut denkbar, dass den Mathematikern in Platons Akademie die Figur für die baryzentrische Unterteilung des regulären Dreiecks gut bekannt war.

Jedenfalls stimmt für $n = 3$, also für Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder, die baryzentrische Unterteilung genau mit Platons Konstruktion überein. Für $n = 4$, also für das Hexaeder, ist die baryzentrische Unterteilung feiner als die von Platon angegebene Unterteilung, aber immerhin sind die bei den beiden Unterteilungen verwendeten Elementardreiecke von der gleichen Art, d. h. ähnlich. Übrigens bestimmt Archimedes den Schwerpunkt eines Parallelogramms auch einfach als Schnittpunkt der Diagonalen, loc. cit. Prop.10.

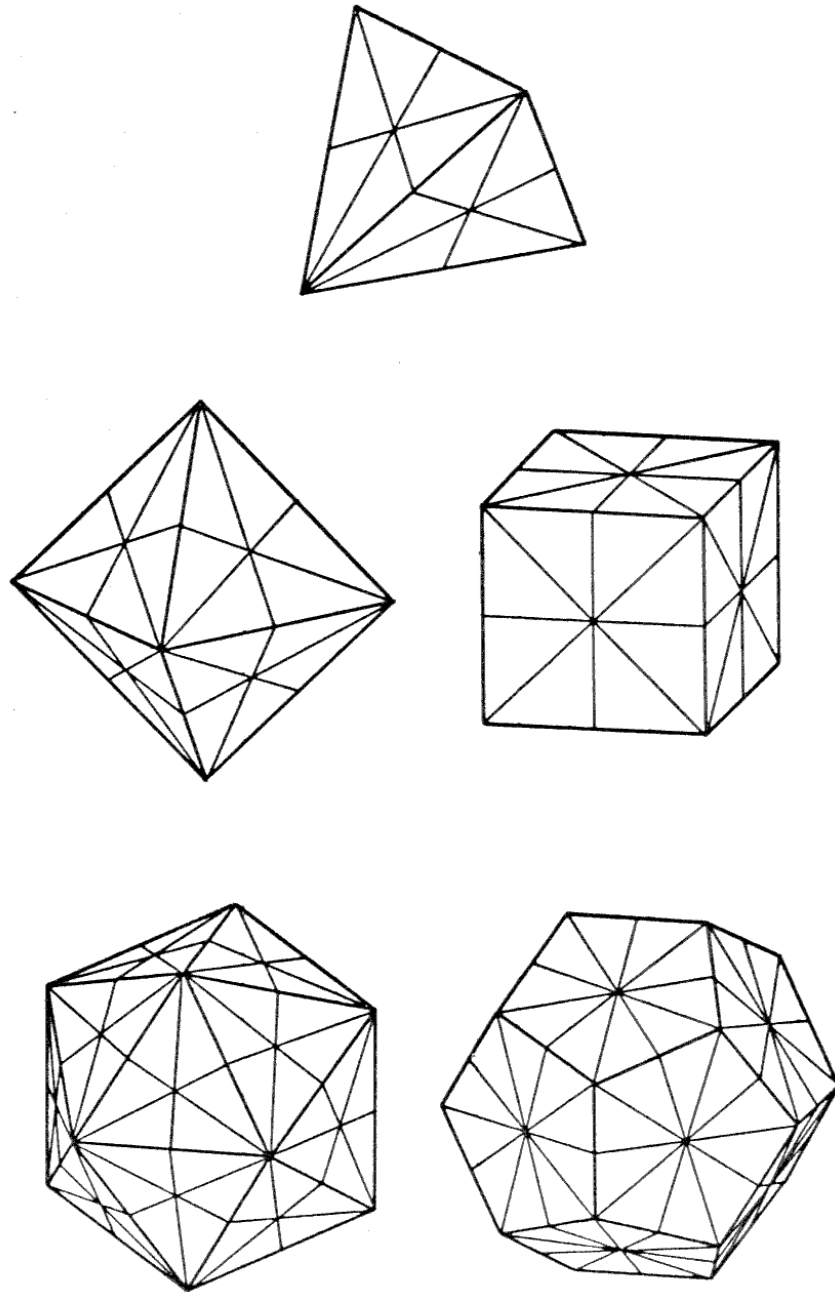


Abbildung 1.26: Baryzentrische Unterteilung der platonischen Körper

Für $n = 5$ wird im Timaios keine Unterteilung angegeben. In diesem Fall ergibt sich bei baryzentrischer Unterteilung des regulären 5-Ecks ein Dreieck, welches bei Euklid in der Konstruktion des einem Kreise um- beziehungsweise einbeschriebenen regulären 5-Ecks vorkommt (Euklid IV.12,13). Es hat die Winkel $\pi/5, 3\pi/10, \pi/2$. Das Winkelverhältnis dieses Dreiecks ist $2 : 3 : 5$. Dies Verhältnis ist nicht so einfach wie die Verhältnisse der drei schönsten Dreiecke der Pythagoreer, und es mag sein, dass dies für Platon der Grund war, das Dodekaeder auszusondern und ihm nicht ein Element zuzuordnen, sondern das Ganze, das Alles (55c4-6).

Wir werden später sehen, dass der Übergang von den regulären Polyedern zu ihrer baryzentrischen Unterteilung in jeder Hinsicht dem Wesen der Sache gemäß ist. Einerseits entspricht es genau der begrifflichen Vorgehensweise der modernen kombinatorischen Geometrie. Dabei geht man von der Menge der Seiten, Kanten und Ecken, die durch die Inklusionsrelation teilgeordnet ist, zu dem zugehörigen **Kammersystem** über. Die kombinatorischen **Kammern** sind dabei die maximalen total geordneten Teilmengen der ursprünglichen Menge, also die Fahnen aus einer Ecke, einer sie enthaltenden Kante und einer diese enthaltenden Seite. Man sieht sofort, dass diese Kammern genau den **Elementardreiecken** der baryzentrischen Unterteilung entsprechen. Andererseits entspricht die baryzentrische Unterteilung auch genau einer modernen gruppentheoretischen Betrachtungsweise. Denn die Symmetriegruppen der regulären Polyeder werden von Spiegelungen erzeugt, und die zugehörigen Spiegelungsebenen zerlegen den Raum in geometrische **Kammern**, und die Elementardreiecke der baryzentrischen Unterteilung sind gerade die Durchschnitte dieser Kammern mit dem Rand des Polyeders. Von einem etwas allgemeineren Standpunkt aus sind die Elementardreiecke Fundamentalbereiche für die Operation der Symmetriegruppe auf dem Rand des Polyeders. Der Begriff des Fundamentalbereichs wurde erst im vorigen Jahrhundert von Felix Klein herausgearbeitet, nachdem man die Bedeutung des Gruppenbegriffs schon klar erkannt hatte [223, 224].

Die Entstehung des Gruppenbegriffs, die Durcharbeitung der Geometrie der Spiegelungsgruppen und die Entfaltung der kombinatorischen Geometrie war ein sehr komplexer historischer Prozess, und dieser war das Werk vieler

bedeutender Mathematiker des 19. und 20. Jahrhunderts. Umso mehr muss man bewundern, wie genial Platon und die Mathematiker der Akademie das Wesen dieser regelmäßigen Gestalten erfassten.

Zum Verhältnis von antiker Naturphilosophie und moderner Naturwissenschaft gibt es einige schöne und lesenswerte Aufsätze von *Erwin Schrödinger* und *Werner Heisenberg*, auf die ich hier gern verweisen möchte: E. Schrödinger: “Die Natur und die Griechen” [322], W. Heisenberg: “Gedanken der antiken Naturphilosophie in der modernen Physik” und “Platons Vorstellungen von den kleinsten Bausteinen der Materie und die Elementarteilchen der modernen Physik”, beide nachgedruckt in Heisenbergs gesammelten Werken [184, Bd. 1].

In Euklids Elementen wird die Konstruktion der fünf regulären Polyeder in Buch XIII ausgeführt, und zwar in den Propositionen 13, 14, 15, 16 und 17. Euklids Konstruktion unterscheidet sich in mehrfacher Hinsicht von der, die Platon im Timaios andeutet.

Platon baut seine Figuren auf kombinatorische Weise aus flächenhaften Elementen durch Aneinanderfügen von Elementardreiecken auf. Dabei spielt die Lage der Figur im Raum keine Rolle, da auf Grund der vorangegangenen Analyse die metrischen Bestimmungsstücke der Dreiecke und das kombinatorische Schema des Aufbaus festgelegt sind und dass diese die erzeugte Figur bis auf Kongruenz eindeutig bestimmen. Allerdings wird für diese eindeutige Bestimmtheit kein Beweis gegeben, und er wäre mit den damaligen Mitteln wohl auch kaum mit der Strenge zu führen gewesen, welche die Mathematiker damals schon verlangten – das zeigt gerade der unvollkommene Beweis zu Euklids letztem Satz, Proposition 18 in Buch XIII.

Bei Euklid wird die Konstruktionsaufgabe zunächst einmal dahingehend präzisiert, dass die Figuren einer Kugel von gegebenem Durchmesser beschrieben werden sollen. In einem Halbkreis des Thales mit diesem Durchmesser werden in einem ersten Schritt auf Grund der vorangegangenen Analyse gewisse mit dem Durchmesser linear inkommensurable Strecken konstruiert. Diese werden in einem zweiten Schritt benutzt, um eine ebene Figur zu konstruieren, ein reguläres 3-Eck, 4-Eck oder 5-Eck, das als Ausgangspunkt der weiteren Konstruktion dient, und dessen Ecken eine Teilmenge

der Eckenmenge des zu konstruierenden Polyeders bilden. Durch Errichten von Senkrechten auf der Ebene, in der diese Ausgangsfigur liegt, werden dann die übrigen Ecken des Polyeders unter Benutzung der im ersten Schritt gefundenen Strecken konstruiert und die Ecken durch Kanten miteinander verbunden. Schließlich wird das so konstruierte Polyeder in die Sphäre mit dem gegebenen Durchmesser eingeschlossen, so dass alle Eckpunkte auf dieser Sphäre liegen. Dies ist das allgemeine Schema der Konstruktion. Ein derartiger Ansatz macht es notwendig, dass für jedes der fünf Polyeder eine jeweils besondere Konstruktion durchgeführt werden muss.

Das Tetraeder wird als reguläre trigonale Pyramide konstruiert, das Oktaeder als reguläre tetragonale Bipyramide, und das Hexaeder als reguläres tetragonales Prisma. Die Konstruktion des Ikosaeders geht davon aus, dass nach Fortlassen von zwei antipodalen Eckpunkten die 10 Eckpunkte eines speziellen pentagonalen Antiprismas übrig bleiben. Dessen Ecken werden nun umgekehrt zuerst konstruiert, und danach werden die beiden noch fehlenden Eckpunkte des Ikosaeders hinzugefügt.

Die Konstruktion des Dodekaeders schließlich benutzt, dass man einem regulären Dodekaeder wie folgt – und übrigens auf fünf verschiedene Weisen – ein reguläres Hexaeder einbeschreiben kann. Man wählt in einer pentagonalen Seitenfläche des Dodekaeders eine Diagonale. Durch jeden ihrer Endpunkte geht eine dreizählige Rotationsachse des Dodekaeders, und die zugehörigen Rotationen überführen die gegebene Diagonale in weitere Diagonalen benachbarter Seitenflächen. Durch Fortsetzung dieses Prozesses erhält man von der gewählten Diagonale ausgehend insgesamt 12 Diagonalen, und zwar in jedem der 12 Fünfeckflächen des Dodekaeders eine. Diese 12 Diagonalen bilden die Kanten eines Hexaeders. Seine acht Ecken sind eine Teilmenge der 20 Ecken des Dodekaeders. Euklids Konstruktion des Dodekaeders kehrt nun die gerade beschriebene Konstruktion um: Zuerst wird das Hexaeder konstruiert, und dann zu jeder Kante davon dasjenige Pentagon des Dodekaeders, welches diese Kante als Diagonale hat. Die beigefügten Zeichnungen zeigen für alle fünf regulären Polyeder die einzelnen Stufen der euklidischen Konstruktion und außerdem das Verhältnis a der Länge der

5. primi
26. primi

cum $B E C$, arcus sit tertia pars circumferentia, erit $B E$, sexta pars eiusdem; Ac propterea recta $B E$, latus hexagoni, atque semidiametro proinde $B D$, equalis, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Igitur anguli $B D E$, $B E D$, equalis erunt. Quoniam ergo anguli $B D F$, $B F D$, trianguli $D B F$, equalis sunt angulis $B E F$, $B F F$, trianguli $E B F$, & latus $B F$, commune; Erunt & latera $D F$, $E F$, equalia.

13. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphaera complecti; & demonstrare, quod sphaerae diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT datae sphaerae diameter $A B$, circa quam semicirculus describatur $A C B$; & ex $A B$, auferatur tertia pars $B D$, ut sit $A D$, ipsius $D B$, dupla; at uero $A B$, eiusdem $D B$, tripla; & ipsius $A D$, sesquialtera. Deinde ducta $D C$, perpendiculari ad $A B$, connectantur rectae $A C$, $B C$. Ad interuallum rectae $H E$, quae equalis sit ipsi $D C$, describatur circulus $E F G$, cuius centrum H , in quo triangulum equilaterum inscribatur $E F G$, adiunganturque rectae $H F$, $H G$, quae singulae equalis erunt ipsi $D C$, cum equalis sint ipsi $H E$, ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H , ad planum circuli perpendicularis $H I$, quae equalis ponatur rectae $A D$, & ex I , demittantur rectae $I E$, $I F$, $I G$. Dico solidum contentum quatuor triangulis $F E C$, $I E F$, $I F G$, $I E G$, esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam latera $D A$, $D C$, trianguli $A D C$, equalia sunt lateribus $H I$, $H E$, trianguli $I H E$, & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothesi, & 3. defin. lib. 11. erit basis $A C$, basi $I E$, equalis. Non aliter ostendemus eandem rectam $A C$, equalis esse rectis $I F$, $I G$. Rursus quia tres lineae $A D$, $D C$, $D B$, proportionales sunt

4. primi.

Abbildung 1.27: Eine Seite der ausgezeichneten Euklid-Ausgabe von Christophorus Clavius von 1574. Sie zeigt die Konstruktion des einer gegebenen Sphäre einbeschriebenen regulären Tetraeders.

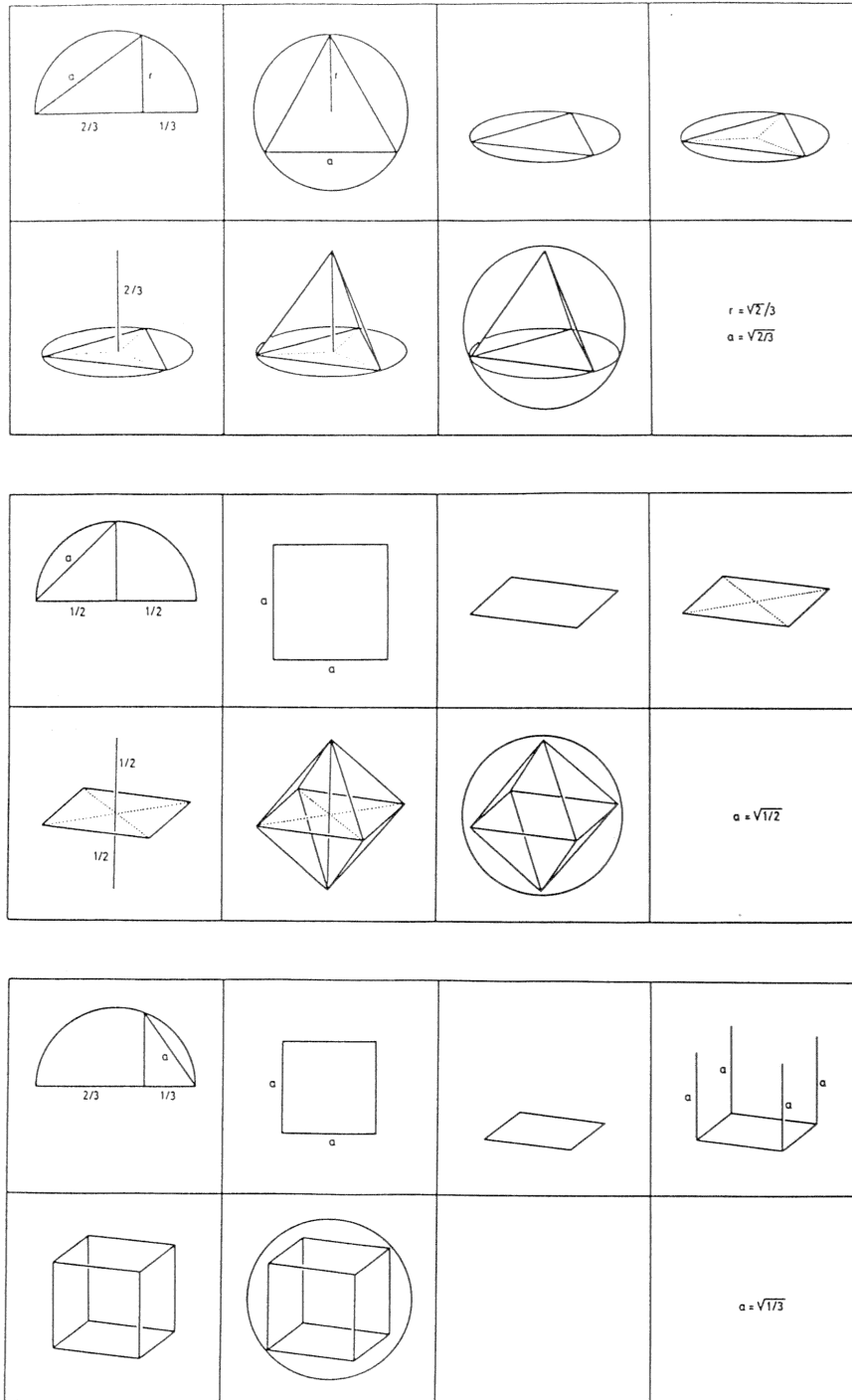


Abbildung 1.28: Konstruktion von Tetraeder, Oktaeder, Hexaeder bei Euklid

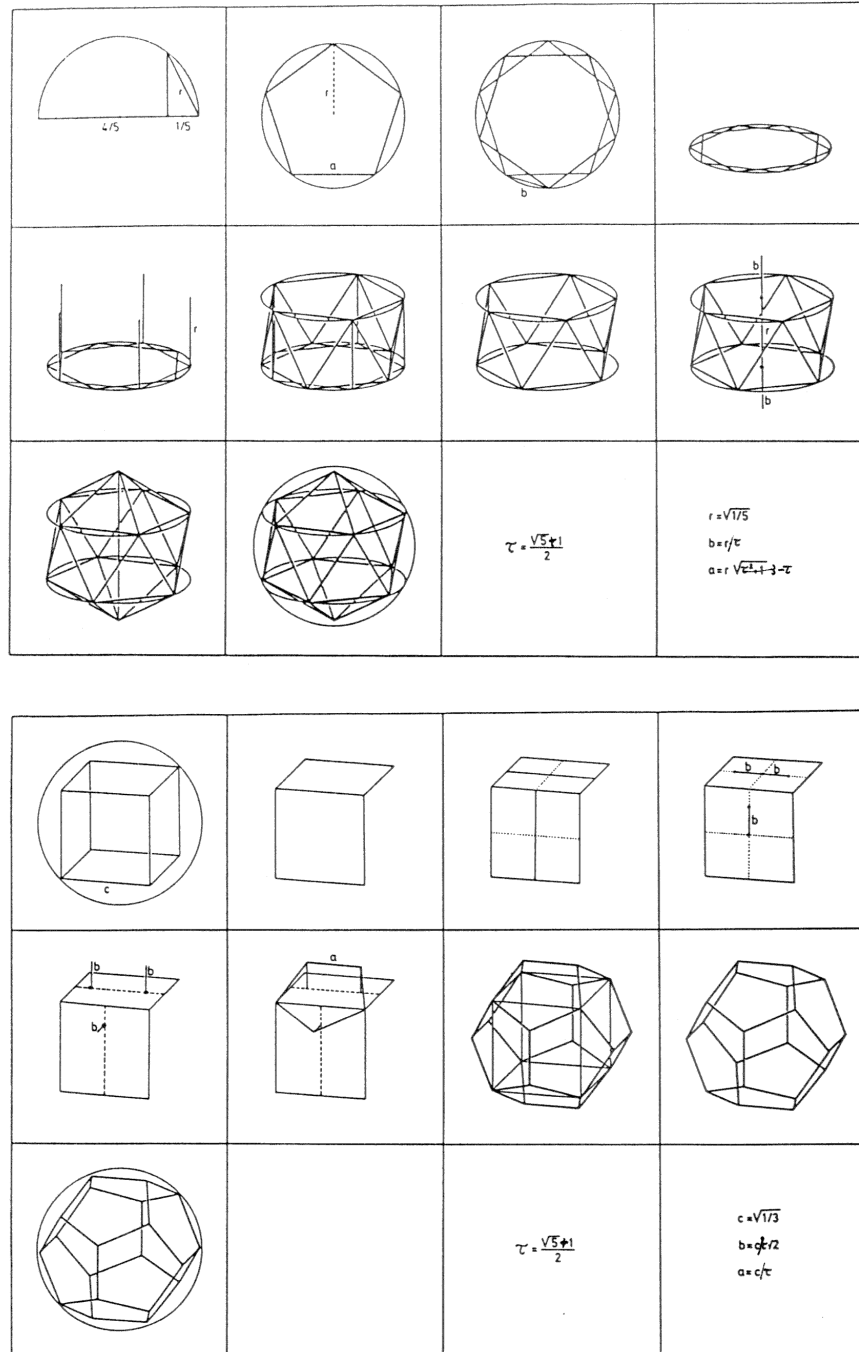


Abbildung 1.29: Konstruktion von Dodekeder, Iksaeder bei Euklid

Kanten des Polyeders zum Durchmesser der umbeschriebenen Sphäre, das sich natürlich aus Euklids Konstruktion ergibt (Abb. 1.28, 1.29).

Wir fassen unseren Vergleich der Konstruktionen von Platon und Euklid zusammen. Euklids Konstruktion ist vollkommen streng, während die eindeutige Ausführbarkeit von Platons Konstruktion erst später bewiesen wurde. Platons Konstruktion ist überwiegend kombinatorisch, die von Euklid ist mehr metrisch. Platon geht von den Seitenflächen der Polyeder aus. Euklid von den Eckpunkten. Platons freie Konstruktion legt die Lage der Figuren im Raum nicht fest, Euklid bestimmt sie genau. Bei Euklid wird die Symmetrie der Figur durch die Regularität und Kongruenz der Seitenflächen erfasst, bei Platon durch den Aufbau der Seitenflächen aus Elementardreiecken jeweils einer Art. Euklid gibt im Rahmen eines einheitlichen Konstruktionsprinzips für jeden der fünf Fälle eine besondere Konstruktion. Diese enthält Elemente, welche jeweils eine Symmetrieachse der Polyeder auszeichnen und dadurch die vollkommene Symmetrie der Polyeder zeitweise aufheben. Für Platons Konstruktion gilt das nicht: Sie ist homogen, und sie ist – geeignet modifiziert – universell.

Diese Gegenüberstellung hat nicht den Zweck, irgendwelche Gegensätze zwischen Euklid und den Mathematikern der platonischen Akademie zu konstruieren. Sie soll vielmehr dazu dienen, uns verschiedene Momente jenes historischen Prozesses bewusst zu machen, in dem sich das streng deduktive Denken der mathematischen Wissenschaft entfaltete. Dass in diesem Prozess die Idee der räumlichen Symmetrie in der Gestalt der regulären Polyeder zum ersten Mal eine strenge begriffliche Fassung fand, war einer der ersten Beweise für die Kraft dieses Denkens.

Diese ersten Anfänge mit Sorgfalt zu beschreiben – darum ging es mir vor allem in dieser Einleitung. Über die weitere Entwicklung werde ich aus historischer Sicht nur mit wenigen Andeutungen berichten. Zur weiteren Geschichte der Polyeder in der Antike ist dabei zum mindesten das Folgende zu erwähnen.

Euklid war nicht der erste, der mathematische Untersuchungen über die regulären Polyeder veröffentlicht hat. Es gab eine Abhandlung von Aristaios, der wahrscheinlich ein älterer Zeitgenosse Euklids war, die den Titel $\tau\omicron\nu\ \epsilon$

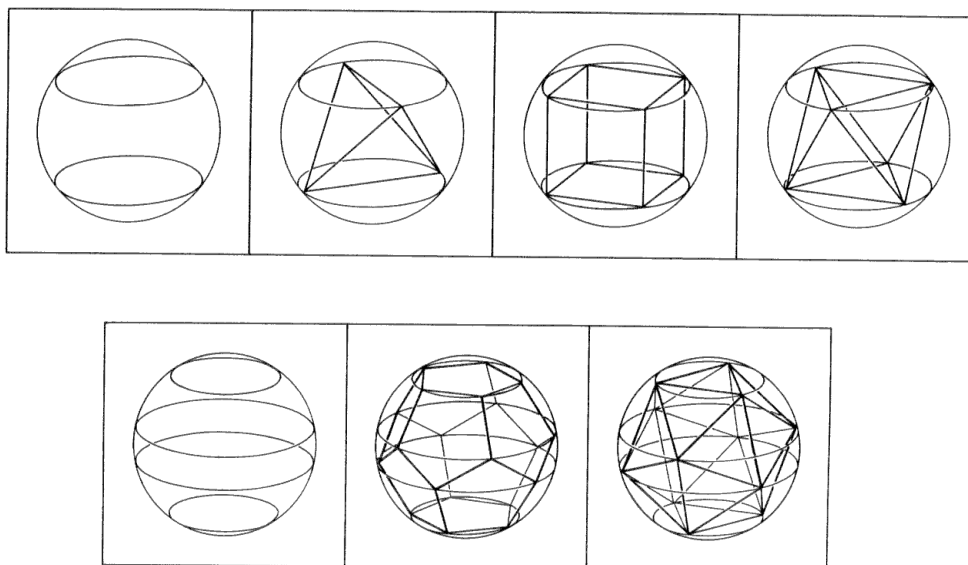
σχημάτων σύγκρισις trug, also: “Vergleich der fünf Figuren”. Darin bewies er unter anderem, dass der gleiche Kreis das Fünfeck des Dodekaeders und das Dreieck des Ikosaeders umschreibt, wenn Dodekaeder und Ikosaeder der gleichen Sphäre einbeschrieben sind. Nach Euklid gab es von den größten Mathematikern des 3. vorchristlichen Jahrhunderts, Archimedes und Apollonius, Untersuchungen über regelmäßige Polyeder. Archimedes entdeckte die 13 halbbregulären Körper, die heute nach ihm benannt sind, die Archimedischen Polyeder. Diese Arbeit des Archimedes ist uns nicht erhalten geblieben, wir wissen von ihr nur durch einen Bericht des Pappos, auf den wir nachher noch eingehen. Apollonius hat anscheinend in mehreren Abhandlungen über reguläre Polyeder geschrieben, unter anderem anscheinend über den Vergleich von Oberfläche und Volumen von Dodekaeder und Ikosaeder. Diese Schriften sind uns verloren gegangen. Wir haben nur Hinweise auf sie aus einem Buch des Hypsicles (um 150 v. Chr.), das in der mittelalterlichen Tradition auch das XIV. Buch des Euklid genannt wurde. Dieses Buch schließt direkt an die Untersuchungen von Aristaios und Apollonius an. Der zitierte Satz des Aristaios wird erneut abgeleitet, und als Hauptresultat beweist Hypsicles den folgenden Satz über den Vergleich von Oberfläche und Volumen von Dodekaeder und Ikosaeder: b und c seien die Längen der längeren und der kürzeren Teilstrecken, in die das Einheitsintervall durch den goldenen Schnitt zerlegt wird. Würfel, Dodekaeder und Ikosaeder seien der gleichen Sphäre einbeschrieben. Dann gilt: Die folgenden vier Verhältnisse sind alle einander gleich:

$$\begin{array}{ll} \text{Dodekaedervolumen} & : \text{Ikosaedervolumen} \\ \text{Dodekaederfläche} & : \text{Ikosaederfläche} \\ \text{Würfelkante} & : \text{Ikosaederkante} \\ \sqrt{1+b^2} & : \sqrt{1+c^2} \end{array}$$

Als zeitlich nächster Autor von Rang, der über reguläre und halbbreguläre Polyeder geschrieben hat, ist Pappus aus Alexandria zu erwähnen, der nach Meinung von Moritz Cantor [75, Bd. 1, p.441] an der Schwelle vom 3. zum 4. nachchristlichen Jahrhundert gelebt hat, und dessen συναγωγή, lateinisch “collectio” genannt, so viel historisch wertvolles Material gerettet hat. Von

den ursprünglich acht Büchern sind die letzten sieben erhalten. Wir legen unserem Bericht die Ausgabe von F. Hultsch [278] zugrunde.

In Buch III gibt Pappos in den Propositionen 54-58 neue Konstruktionen der regulären Polyeder. Den Konstruktionen liegt das folgende einheitliche Schema zugrunde. Für die gegebene Sphäre wird eine Polachse ausgezeichnet. Dazu senkrecht werden parallele Breitenkreise auf die Sphäre gelegt: zwei für Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder – und zwar für alle drei die gleichen – und vier für Dodekaeder und Ikosaeder – und zwar wiederum für alle beide die gleichen. Diesen Kreisen werden in geeigneter Lage für das Tetraeder Durchmesser und für die übrigen Körper reguläre 3-Ecke, 4-Ecke oder 5-Ecke einbeschrieben. Auf diese Weise konstruiert Pappos die Eckpunkte der regulären Polyeder. Die beigefügten Zeichnungen veranschaulichen seine Konstruktion.



Beim Vergleich der Konstruktionen von Euklid und Pappos meine ich folgendes zu sehen: Die Konstruktion von Pappos ist einheitlicher und eleganter. Sie betont stärker die Rotationsachsen als Symmetrieelemente der Polyeder, und sie wählt – implizit – andere Achsen als durch die Konstruktion ausgezeichnete Elemente. Die folgende kleine Tabelle zeigt die Zähligkeit der ausgezeichneten Achsen für beide Konstruktionen, wobei

diese Angabe im Falle von Euklids Konstruktion des Dodekaeders eine Sache der Interpretation ist.

	Euklid	Pappos
Tetraeder	3	2
Hexaeder	4	4
Oktaeder	4	3
Ikosaeder	5	3
Dodekaeder	2	5

Nimmt man beide Konstruktionen zusammen und sieht – was allerdings wohl erst in späterer Zeit klar wurde – die Symmetrie von Hexaeder und Oktaeder sowie die von Ikosaeder und Dodekaeder als “gleich” an, dann fehlen unter den eigentlichen Symmetrieelementen also nur die zweizähligen Achsen von Hexaeder und Oktaeder. Der wohl interessanteste Aspekt der Konstruktion von Pappos ist die Tatsache, dass die Konstruktion von Hexaeder und Oktaeder sowie von Ikosaeder und Dodekaeder jeweils die gleichen parallelen Breitenkreise benutzt. Pappos stellt dies nach Durchführung der Konstruktion in allen einzelnen Fällen als nachträgliche Folgerung fest. Der “tiefere” Grund für diese Tatsache wurde erst 1940 von H.S.M. Coxeter gesehen:

S sei eine Sphäre, P ein S einbeschriebenes reguläres Polyeder, G seine Symmetriegruppe, $x \in S$ eine Ecke von P und $y \in S$ die radiale Projektion eines Flächenmittelpunktes von P auf S . Dann ist der Orbit Gx die Eckenmenge von P und der Orbit Gy die Eckenmenge des zu P dualen der Sphäre S einbeschriebenen Polyeders Q . Nun gilt aber: Die Menge der Abstände der Ecken von P zum Punkt y ist gleich der Menge der Abstände von Q zum Punkt x . Beweis:

$$\{d(gx, y) \mid g \in G\} = \{d(x, g^{-1}y) \mid g \in G\} = \{d(x, hy) \mid h \in G\}.$$

Das System der parallelen Breitenkreise auf S durch die Ecken von P senkrecht zur Achse durch den Pol y ist also kongruent zum System der parallelen

Breitenkreise durch die Ecken von Q senkrecht zur Achse durch den Pol x . Mehr dazu findet man in Coxeters Meisterwerk "Regular Polytopes" [89, §5.8 und p. 238f.].

Aus den Konstruktionen der regulären Polyeder von Euklid und Pappos ergibt sich auch das Verhältnis R/r der Radien R und r der umbeschriebenen und der eingeschriebenen Sphären (Buch III, loc.cit. und Buch V, Prop. 39, Prop. 43). Es gilt:

$$R/r = \begin{cases} \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} & \text{für das Tetraeder,} \\ \sqrt{3} \cdot 1 & \text{für Oktaeder und Hexaeder,} \\ \sqrt{3} \cdot \sqrt{7 - 4\tau} & \text{für Hexaeder und Dodekaeder .} \end{cases}$$

Dies Ergebnis kann man modern wie folgt formulieren:

$$R/r = \tan \frac{\pi}{p} \cdot \tan \frac{\pi}{q} .$$

Dabei ist p die Zahl der Kanten einer begrenzenden Fläche und q die Zahl der Kanten an einer Ecke. Das Paar (p, q) hat also die Werte $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 5)$ und $(5, 3)$ für Tetraeder, Oktaeder, Hexaeder, Ikosaeder und Dodekaeder. Ferner vergleicht Pappos in Buch V, 52 bis 56 das Verhältnis der Volumina von regulären Polyedern mit gleicher Oberfläche. Er findet: Ordnet man die fünf regulären Polyeder einerseits nach aufsteigender Anzahl der berandenden Flächen, andererseits – bei gleicher Oberfläche – nach aufsteigendem Volumen, so ergibt sich die gleiche Ordnung. Insbesondere hat unter den fünf regulären Polyedern mit gleicher Oberfläche das Ikosaeder das größte Volumen. Diese Untersuchungen von Pappos stehen im Zusammenhang mit seinem Interesse für das isoperimetrische Problem. Einen interessanten modernen Bericht über das isoperimetrische Problem für Polyeder gibt übrigens L. Fejes Tóth in seinem schönen Buch "Reguläre Figuren" [350, II.4.3 und II.4.7].

Das isoperimetrische Problem bildet auch den Ausgangspunkt für Pappos' Bericht über die Archimedischen Polyeder im zweiten Teil von Buch V. Dort schreibt er in Cap. 19:

Gott, der Ursprung und Schöpfer von allem, habe dem Kosmos zu Recht die Gestalt der Sphäre gegeben, da er ja aus allen die schönste gewählt habe, lehren die Philosophen, die, wenn sie die natürlichen Eigenschaften der Sphäre darlegen, auch dies hinzufügen, da die Kugel von allen Figuren mit gleicher Oberfläche (dem Inhalte nach) die größte sei. Aber zunächst wollen wir bezüglich der Körper, mit denen die Kugel zu vergleichen ist, einiges auseinandersetzen. Wenn man sich nämlich auch viele räumliche Figuren mit mancherlei Begrenzungsflächen in Gedanken vorstellen kann, so kommen doch zunächst einmal die in Betracht, die in bestimmter Ordnung angeordnet erscheinen. Von dieser Art sind nicht nur die fünf Figuren des göttlichen Platon, das heißt das Tetraeder und Hexaeder, das Oktaeder und das Dodekaeder und schließlich das Ikosaeder, sondern auch jene 13 von Archimedes entdeckten, die von gleichseitigen und gleichwinkligen Polygonen begrenzt werden, welche jedoch nicht einander ähnlich sind. [278, Buch V, Cap. 19, p. 351f.]⁸

Die zur Charakterisierung der Archimedischen Polyeder notwendige weitere Bedingung, dass alle Ecken kongruent sind, setzt Pappos anscheinend stillschweigend voraus. Er zählt dann die 13 Archimedischen Polyeder auf, indem er für jedes Art und Anzahl der begrenzenden Vielecke angibt. Die Reihenfolge der Aufzählung entspricht diesem simplen kombinatorischen Prinzip: Zunächst wird nach der Zahl der begrenzenden Vielecksflächen geordnet, und innerhalb jeder Gruppe mit gleicher Zahl von Flächen nach der maximalen Eckenzahl der Seitenflächen. Anschließend wird die Zahl der Ecken und der Kanten berechnet. Die Zahl der Kanten ist natürlich die Hälfte der Summe der Kantenzahlen aller Flächen, und die Zahl der Ecken ist der Quotient aus der Summe der Eckenzahlen aller Flächen und der Zahl derjenigen Flächen, die in einer Ecke zusammenstoßen.

⁸Übersetzung von E.B., Hrsg.

Wir fassen Pappos Ergebnisse in einer kleinen Tabelle zusammen. Diese zeigt in der ersten Spalte das sogenannte **Archimedische Symbol** (n_1, \dots, n_k) mit dem man die Archimedischen Polyeder ebenfalls charakterisieren kann. Hier ist k die Anzahl der Flächen, die an einer Ecke zusammenstoßen, und n_i ist die Eckenzahl der i -ten Fläche. Dabei sind die k Flächen so numeriert, dass aufeinanderfolgende Flächen eine gemeinsame Kante haben, und dass mit einer Fläche mit minimaler Eckenzahl angefangen wird. In den folgenden 6 Spalten wird die Zahl der begrenzenden 3-Ecke, 4-Ecke, 5-Ecke, 6-Ecke, 8-Ecke und 10-Ecke angegeben. Die letzten drei Spalten geben die Zahlen b_2, b_1 und b_0 der Flächen, Kanten und Ecken an. Die beigefügten Bilder zeigen die 13 Archimedischen Polyeder (Abb. 1.30). Es ist nützlich, sich eine gute geometrische Anschauung von diesen Polyedern zu verschaffen, denn es wird sich herausstellen, dass sie in unserer Theorie der eckentransitiven Polyeder eine wichtige Rolle spielen.

<i>Symbol</i>	3	4	5	6	8	10	b_2	b_1	b_0
(3, 6, 6)	4			4			8	18	12
(3, 4, 3, 4)	8	6					14	24	12
(4, 6, 6)		6		8			14	36	24
(3, 8, 8)	8				6		14	36	24
(3, 4, 4, 4)	8	18					26	48	24
(4, 6, 8)		12		8	6		26	72	48
(3, 5, 3, 5)	20		12				32	60	30
(5, 6, 6)			12	20			32	90	60
(3, 10, 10)	20					12	32	90	60
(3, 3, 3, 3, 4)	32	6					38	60	24
(3, 4, 5, 4)	20	30	12				62	120	60
(4, 6, 10)		30		20		12	62	180	120
(3, 3, 3, 3, 5)	80		12				92	150	60

Flächen-, Kanten-, und Eckenzahlen Archimedischer Polyeder

Während das Studium der Mathematik in den alten Zentren Alexandria und Athen gegen Anfang des 6. Jahrhunderts ausstarb, konnte es nach Konstantinopel hinübergerettet werden, in das letzte Zentrum hellenistischer Kultur. Hier wirkten als Baumeister der Hagia Sophia – 537 vollendet –

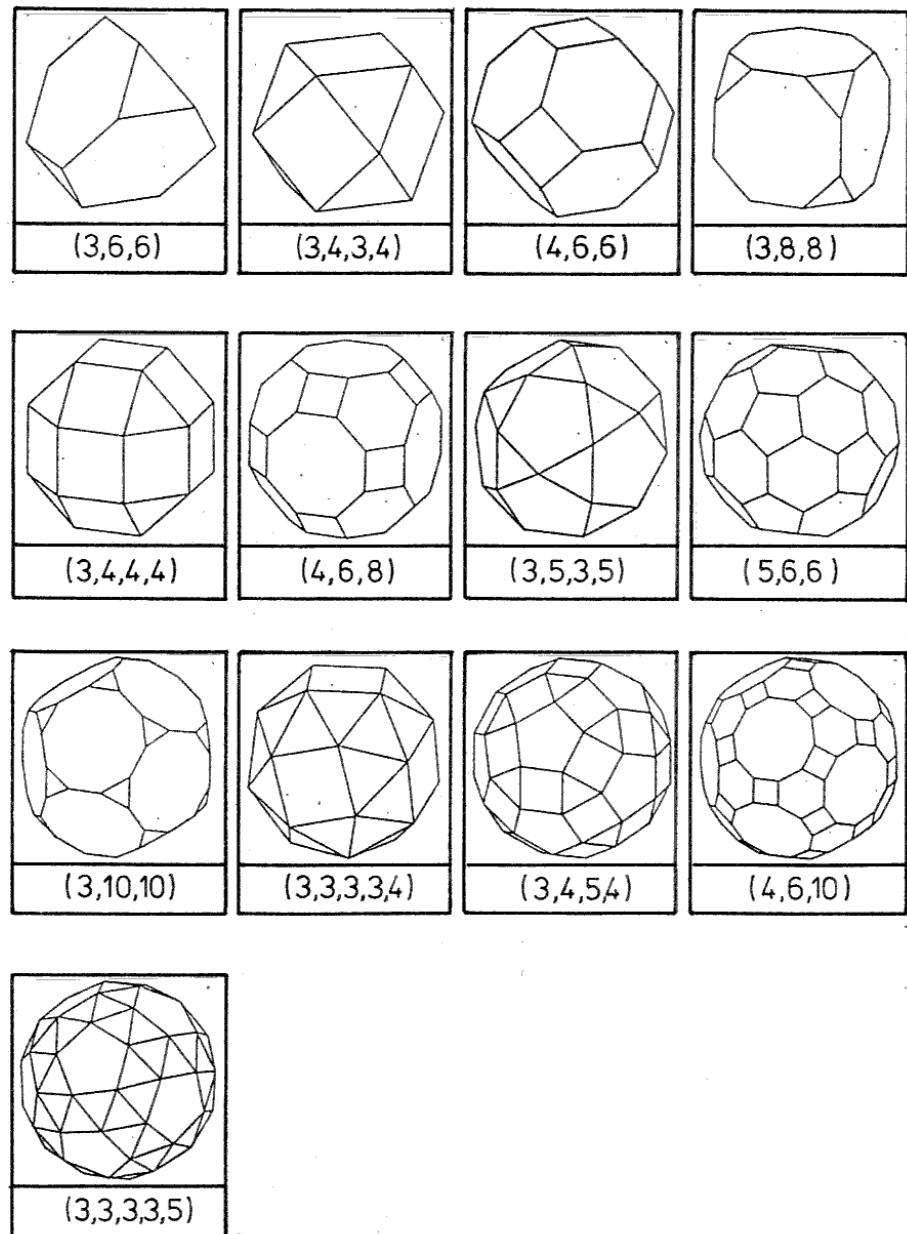


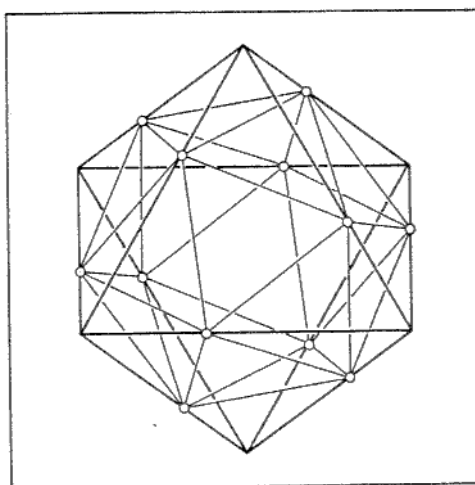
Abbildung 1.30: Die Archimedischen Polyeder

die Architekten und Mathematiker *Anthemios von Tralles* und *Isidorus von Milet* (442–537). Es war vermutlich ein Schüler des Isidorus, der jene Arbeit über reguläre Polyeder verfasste, die im Mittelalter das XV. Buch von Euklid genannt wurde. Heiberg, dem wir die beste kritische Ausgabe der Werke Euklids verdanken, meint, wegen seiner “*demonstrationes maxime vituperandae, obscurae et perversae*” könne dieser Schüler nicht genügend Kenntnisse gehabt haben [183, V,1; p.38]. Ich finde aber die Konstruktionen dieser Arbeit, die ja vielleicht auf Isidorus selbst zurückgehen, doch interessant und will darüber kurz berichten.

Ziel der Arbeit ist es, für jedes geordnete Paar von verschiedenen regulären Polyedern P und Q eine Konstruktion anzugeben, wie man dem Polyeder P ein Polyeder Q' vom Typ Q einbeschreiben kann. Was “einbeschreiben” heißt, wird nicht definiert. In erster Approximation könnte man wohl sagen, dass dabei die Eckenmenge von Q' eine Teilmenge der Eckenmenge von P sein soll, oder aber eine Menge von ausgezeichneten Punkten auf den Kanten von P (z.B. Kantenmittelpunkte) oder aber eine Menge von ausgezeichneten Punkten auf den Flächen von P oder auch im Inneren von P . Es ergeben sich so $5 \cdot 4 = 20$ Probleme, und für jedes wird eine Lösung angegeben. Das erste und einfachste Problem ist, einem Hexaeder ein Tetraeder einzubeschreiben. Lösung: Die Menge der 8 Ecken des Hexaeders zerfällt in die 2 Eckenmengen zweier dualer Tetraeder. Bei Problem 2 soll einem Tetraeder ein Oktaeder einbeschrieben werden. Die Lösung: Die Kantenmittelpunkte des Tetraeders sind die Ecken des Oktaeders. In Problem 3 soll einem Hexaeder ein Oktaeder einbeschrieben werden, und in Problem 4 einem Oktaeder ein Hexaeder. Die Lösung: In beiden Fällen sind die Flächenmittelpunkte des gegebenen Polyeders die Ecken des gesuchten einbeschriebenen Körpers. Genauso werden die Probleme 5 und 7 gelöst, einem Ikosaeder ein Dodekaeder einzubeschreiben und einem Dodekaeder ein Ikosaeder. Die beigefügten Zeichnungen illustrieren diese Konstruktionen.

Wie man einem Dodekaeder ein Hexaeder einbeschreibt, haben wir schon bei Euklids Konstruktion des Dodekaeders besprochen. Besonders schön finde ich die Lösung des Problems, einem Oktaeder ein Ikosaeder einzubeschreiben (Problem 16). In der Sprache von heute lässt sich die Lösung so

formulieren: Man teile eine Kante des Oktaeders durch den goldenen Schnitt. Durch die Lösung von Problem 2 operiert die aus 12 Drehungen bestehende Tetraedergruppe einfach transitiv auf der Kantenmenge des Oktaeders. Dadurch werden alle 12 Kanten im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt. Die 12 Teilpunkte sind die Ecken des gesuchten Ikosaeders. Die beigefügte Zeichnung illustriert diese schöne Konstruktion.



Von einem modernen mathematischen Standpunkt aus stecken in diesen Konstruktionen aus der Schule des Isidorus die Keime zu zwei wichtigen Ideen, die erst im 19. Jahrhundert voll entfaltet wurden – wobei ich natürlich vor einer historischen Überinterpretation dieser Aussage warnen muss. Die erste Idee ist die der Dualität: Hexaeder und Oktaeder sind zueinander dual, ebenso Dodekaeder und Ikosaeder. Das Tetraeder ist zu sich selbst dual – Maurolycus.⁹ Die zweite Idee ist grundlegend: Die Symmetriegruppe eines Polyeders operiert auf dem Polyeder mitsamt seiner geometrisch kombinatorischen Struktur. Sie operiert auf der Menge der Ecken, der Kanten und der Flächen. Die Ecken, die Kantenmittelpunkte, die Flächenmittelpunkte oder auch andere ausgezeichnete Punktgruppen sind spezielle Orbits der Symmetriegruppe. Einige dieser Punktsysteme lassen sich auch als Orbits echter Un-

⁹Francesco Maurolycus (1494–1575) sprach von “korrelativen Polyedern” [268]. Coxeters verweist in seinen historischen Anmerkungen zu Elemente Band XV auf ihn [89, p. 30] (Anm. Hrsg.).

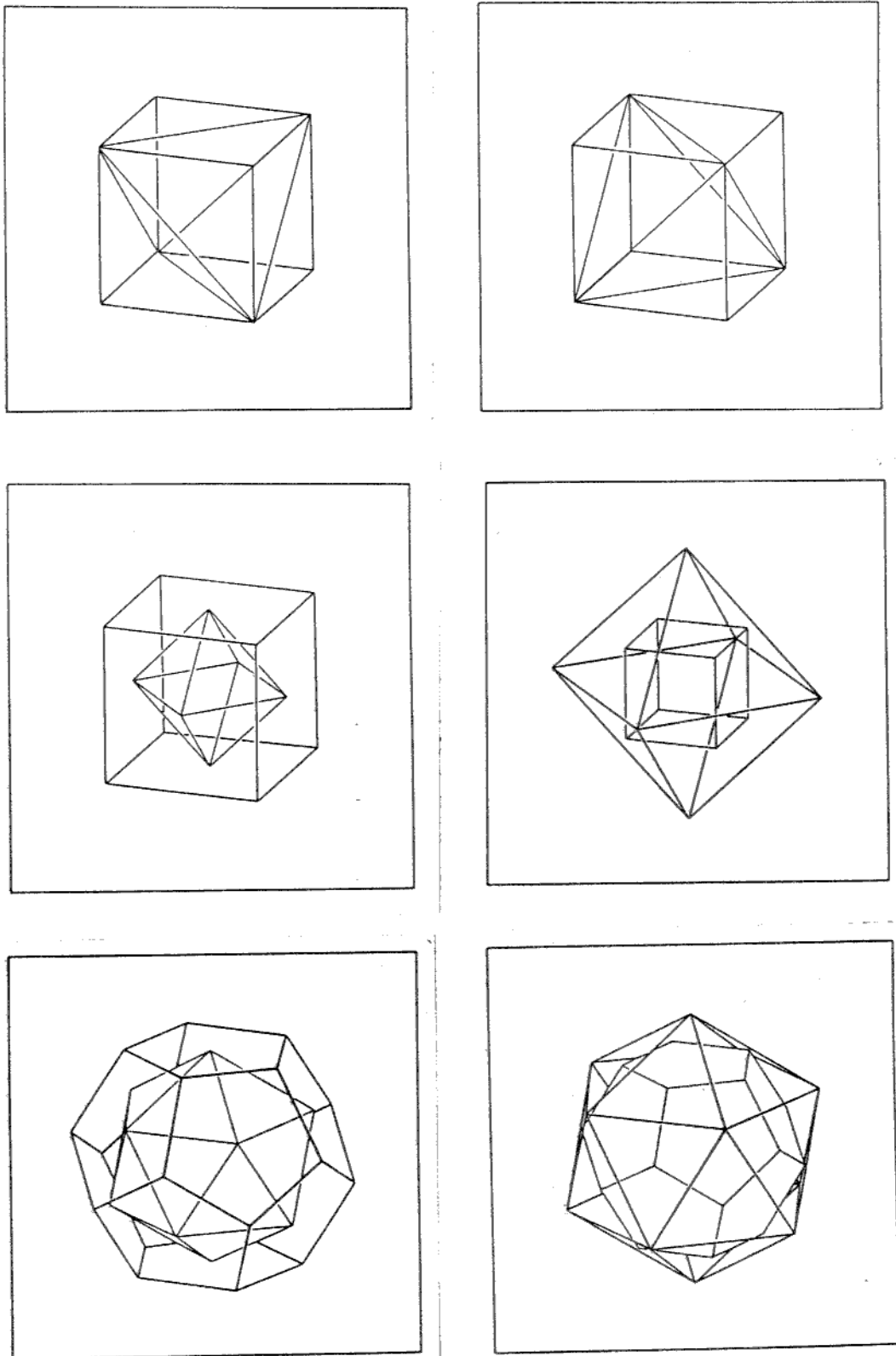


Abbildung 1.31: Paare ineinander eingeschriebener regulärer Polyeder nach Anthemios von Tralles ("Elemente Buch XV")

tergruppen der Symmetriegruppen auffassen. So können z.B., wie wir oben gesehen haben, die 12 Ecken des Ikosaeders als Orbit der Tetraedergruppe aufgefasst werden. Aus moderner Sicht entspricht also den Konstruktionen des Isidorus eine ziemlich detaillierte Diskussion von Inklusionsrelationen zwischen Untergruppen der Symmetriegruppen der regulären Polyeder, die Aufzählung ihrer Nebenklassen sowie die Bestimmung ihrer Symmetrieelemente.

In seinem Buch “Erwachende Wissenschaft” schließt Van der Waerden seinen kurzen Bericht über Isidorus mit dem Satz: “Nach diesen letzten Regungen ist die Flamme der griechischen Mathematik erloschen” [355, p. 479].

Das Erbe der Griechen übernahmen neben den Indern vor allem die Araber. Gegen Ende des 8. Jahrhunderts wurde Bagdad das erste große wissenschaftliche Zentrum des Kalifats. Man übersetzte und studierte die Werke der griechischen Philosophen und Mathematiker, aber auch die der Inder, und trieb eigene Forschung. Die Mathematiker in Bagdad interessierten sich u.a. besonders für Trigonometrie und für die Berechnung geometrischer Figuren. Viele von ihnen waren auch gleichzeitig Astronomen. So war es auch bei dem bedeutenden arabischen Mathematiker Abū-l-Wafā Muhammad ibn Muhammad al-Būzḡanī (940-997/8). Von ihm ist uns u.a. ein Werk über “praktische” Geometrie überliefert: “Buch über das, wessen ein Handwerker aus den geometrischen Konstruktionen bedarf”, und zwar in einer persischen Übersetzung. Der Historiker Woepcke, der über diese Abhandlung 1855 ausführlich berichtet hat [378], vermutet – u.a. wegen einer Reihe von Fehlern –, dass sie in der vorliegenden Form nicht von Abū-l-Wafā selbst stammt, sondern von einem Schüler. Das zwölfte und letzte Kapitel dieser Abhandlung handelt von der Unterteilung der Kugeloberfläche in reguläre sphärische Polygone. Es werden mehrere Konstruktionen – einige fehlerhaft – für die Unterteilung der Sphäre angegeben, die durch radiale Projektion der einbeschriebenen 5 Platonischen Körper entstehen. Anschließend wird das gleiche für 5 von den archimedischen Polyedern geleistet, nämlich $(3, 4, 3, 4)$, $(3, 5, 3, 5)$, $(5, 6, 6)$, $(4, 6, 6)$ und $(3, 6, 6)$. Die Polyeder werden allerdings mit keinem Wort erwähnt, aber es scheint mir klar, dass die Konstruktion ihre

Kenntnis voraussetzt. Damit ist zum ersten Mal durch exakte mathematische Konstruktionen die Verbindung zwischen der euklidischen Geometrie der Polyeder und der sphärischen Trigonometrie hergestellt. Dies war ein wichtiger Schritt, dessen volle Bedeutung erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts deutlich wurde, als man die Symmetriegruppen der regulären Polyeder auf der Sphäre operieren ließ, ihre Fundamentalbereiche bestimmte und ihre Orbits klassifizierte und so zu einer systematischen Bestimmung aller eckentransitiven und aller flächentransitiven Polyeder kam. Die folgenden Abbildungen zeigen die sphärische Projektion der regulären Polyeder ohne und mit Unterteilung (Abb. 1.32, 1.32), außerdem die sphärischen Projektionen der 13 archimedischen Polyeder; für die baryzentrisch unterteilten regulären Polyeder siehe Abbildung 1.26.

Der Übergang von den durch ebene Polygone begrenzten Polyedern zu der Unterteilung der zweidimensionalen Sphäre durch sphärische Polygone stellt einen in mehrfacher Hinsicht bedeutenden Schritt dar. Zum einen eröffnet er, wie bereits gesagt, die Möglichkeit zu einer einheitlichen gruppentheoretischen Behandlung – die allerdings erst viele Jahrhunderte später realisiert wird. Zum zweiten vereinheitlicht er auch die kombinatorische Behandlung. Denn es wird sich – auch dies allerdings erst sehr viel später – zeigen, dass die alternierende Summe der Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen einer solchen Unterteilung eine von der Unterteilung unabhängige grundlegende topologische Invariante der Sphäre ist, und wenn diese Tatsache bekannt ist, erleichtert sie natürlich umgekehrt die Bestimmung aller regelmäßigen Unterteilungen. Zum dritten wird durch den Übergang zur Unterteilung der Kugeloberfläche nahegelegt, die Verbindung zu Problemen der regelmäßigen Unterteilung anderer Flächen herzustellen. Man kommt so zu einheitlichen gruppentheoretischen und kombinatorischen Methoden bei der Untersuchung regelmäßiger Unterteilungen der Sphäre, der euklidischen Ebene und der hyperbolischen Ebene. Diese Untersuchungen sollten sich später, in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, auch als wichtig für die Funktionentheorie, die Algebra und die algebraische Geometrie erweisen, z.B. in Felix Kleins “Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom 5. Grade” [225].

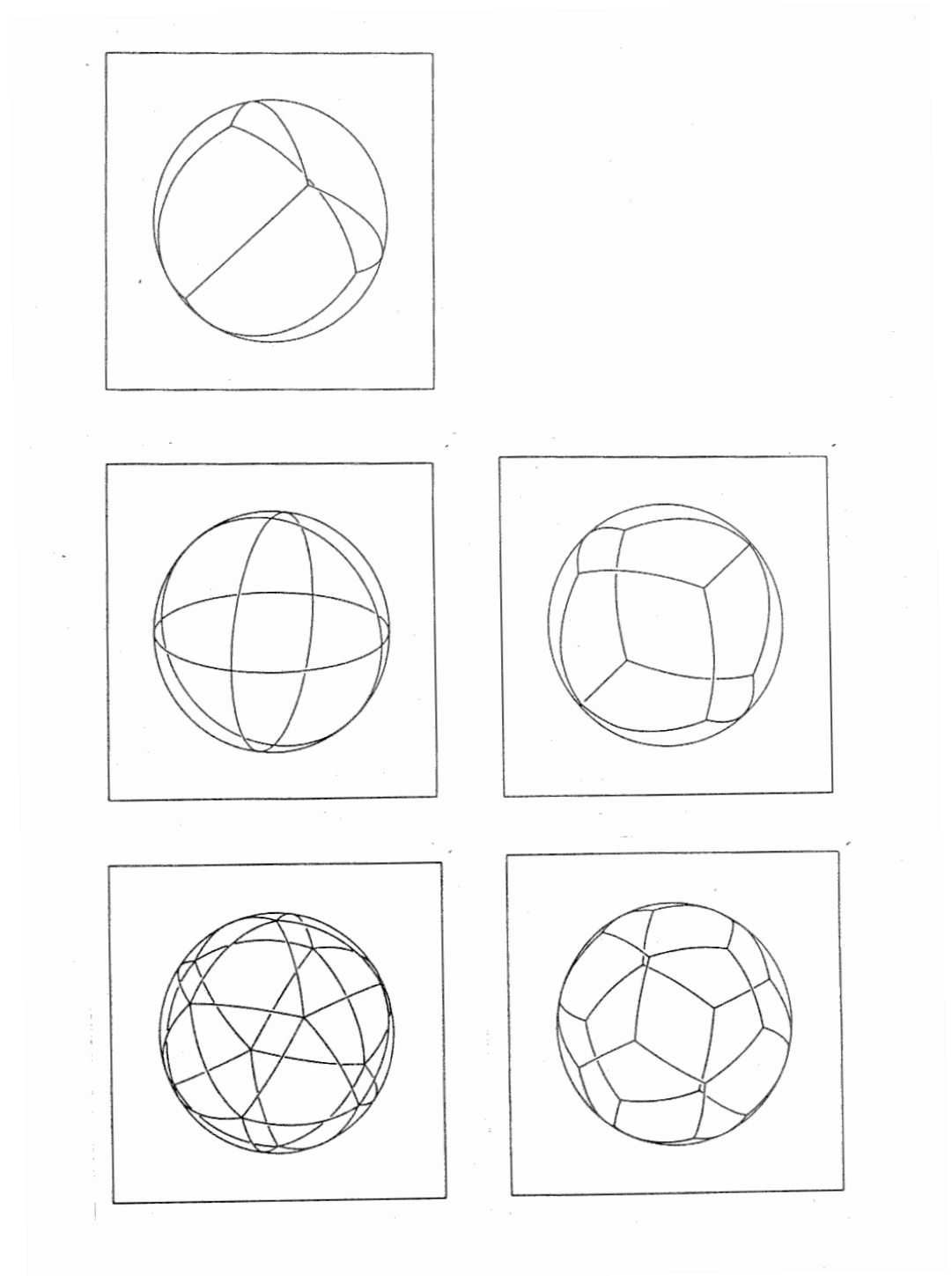


Abbildung 1.32: Die Flächenteilungen der Sphäre zu den 5 platonischen Polyedern

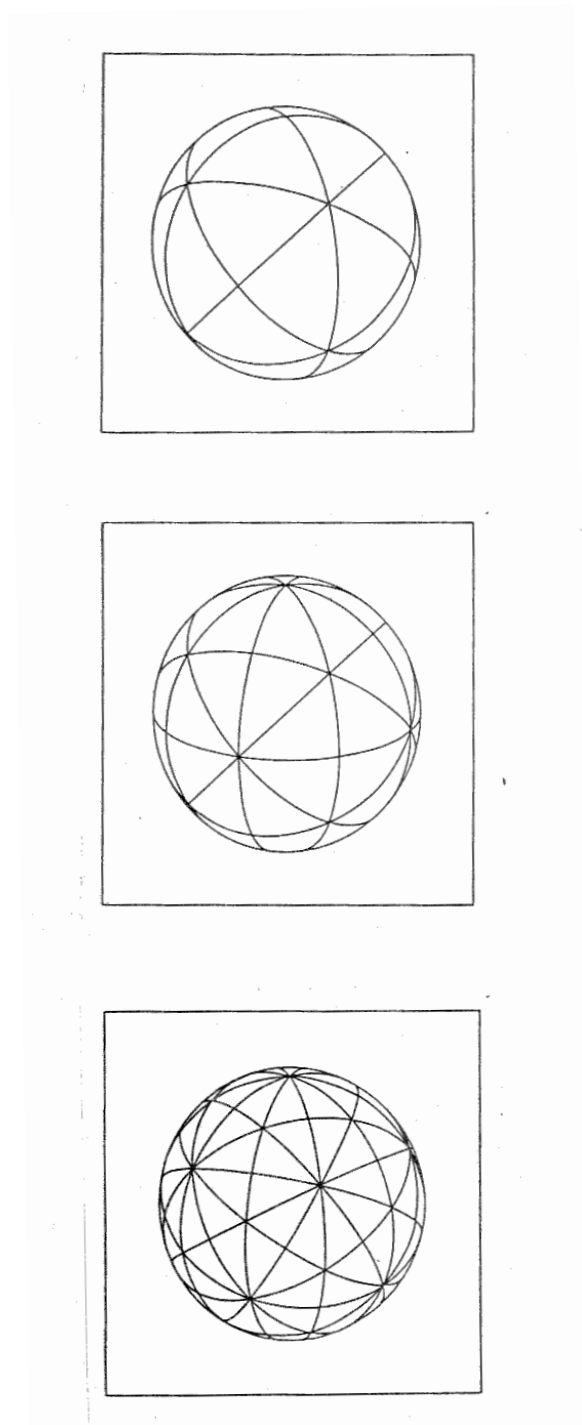


Abbildung 1.33: Die 3 Flächenteilungen der Sphäre zu den 5 baryzentrisch unterteilten platonischen Polyedern

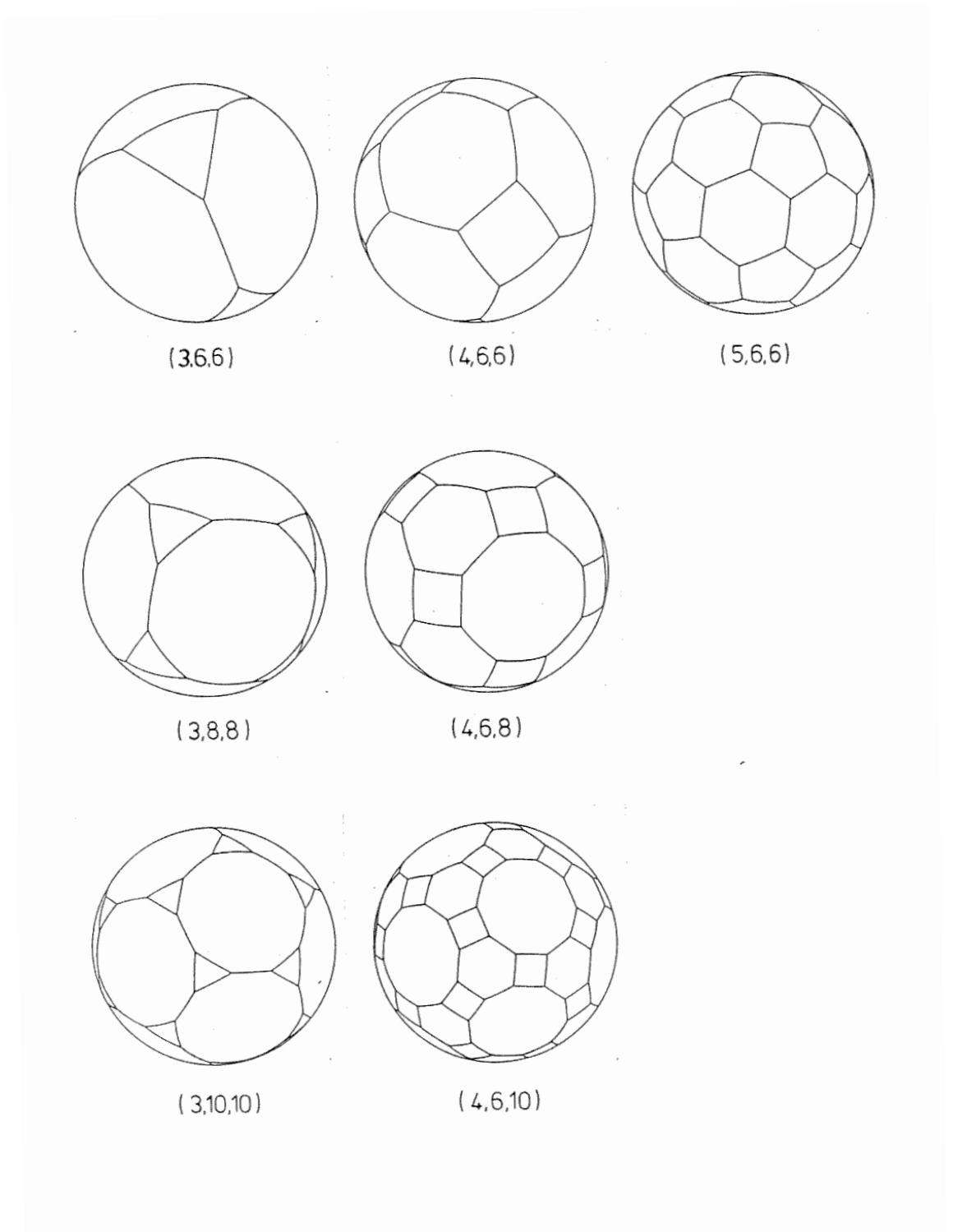


Abbildung 1.34: Archimedische Flächenteilungen der Sphäre I

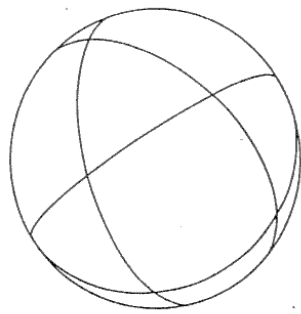
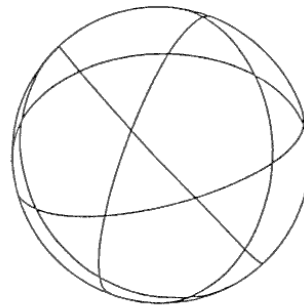
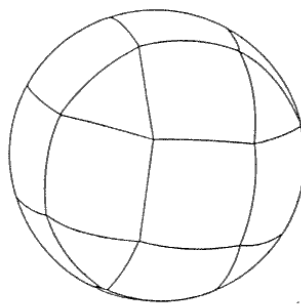
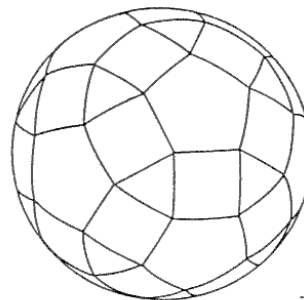
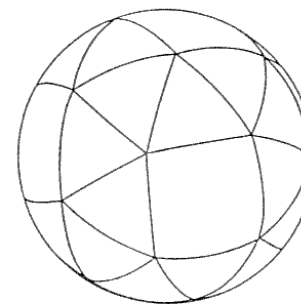
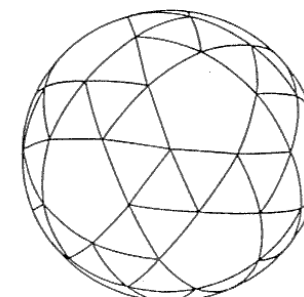
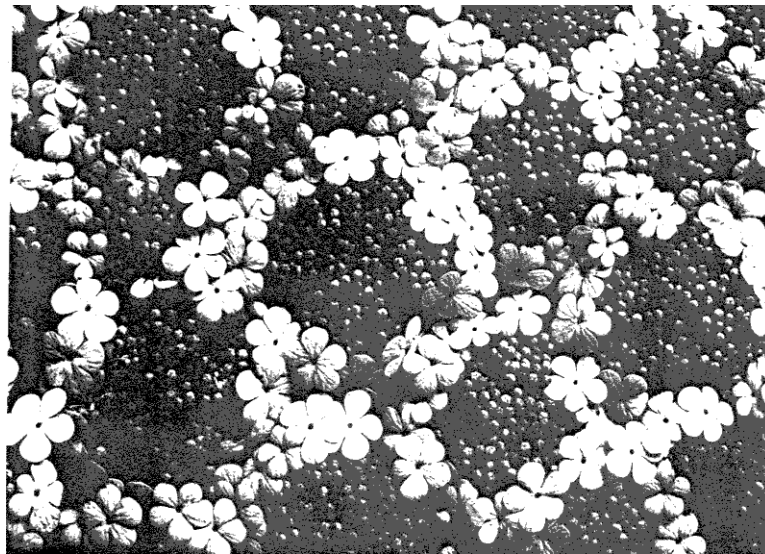
 $(3,4,3,4)$  $(3,5,3,5)$  $(3,4,4,4)$  $(3,4,5,4)$  $(3,3,3,3,4)$  $(3,3,3,3,5)$

Abbildung 1.35: Archimedische Flächenteilungen der Sphäre II

Dass solche Probleme der Unterteilung von Flächen für arabische Mathematiker nahe lagen, hängt vielleicht auch damit zusammen, dass in ihrem Kulturkreis, aber auch bei den Ägyptern, Persern, Indern und Chinesen, der Schmuck von Flächen durch regelmäßig angeordnete kunstvolle Ornamente weit verbreitet war. Und in der Natur sehen wir solche Flächen – oder Raumteilungen ja auch: In der Teeschale, wenn der heiße grüne Pulvertee sich abkühlt, bei den Waben der Bienen oder bei den Blütendoldenrispen des Schneeballs.



Zu dem Zeitpunkt, als Abū-l-Wafā sich mit der Unterteilung der Sphäre in reguläre sphärische Polygone befasste, befand sich die Mathematik im christlichen Europa noch auf einem sehr niedrigen Niveau. Gegen Ende des 9. Jahrhunderts verstärkten sich jedoch zunehmend die Kontakte mit der arabischen Welt. Man lernte die griechische Mathematik, aber auch die neueren Ergebnisse der Inder und Araber, durch Übersetzungen aus dem Arabischen kennen, besonders intensiv im 12. und 13. Jahrhundert. Dabei ging es zunächst nur um die elementarsten mathematischen Kenntnisse, etwa die ersten Bücher der Elemente des Euklid. Allmählich stieg aber das Niveau. So schrieb *Thomas Bradwardine* aus Oxford (etwa 1290-1349) eine “*Geometria speculativa*”, in der er sich u.a. mit sternförmigen Vielecken, mit

der Existenz von nur 5 regulären Polyedern und mit dem Problem der Zerlegung des Raumes in kongruente reguläre Polyeder beschäftigt [34]. Auch eignete man sich allmählich die sphärische Trigonometrie der Alten und der Araber an. Außer der “speculativen”, d.h. theoretischen Geometrie entwickelte sich in jener Zeit eine “praktische” Geometrie, deren sich die Zimmerleute, Schmiede, Mechaniker und Künstler bedienten, und es erschien eine vielfältige ihren Bedürfnissen entsprechende Literatur, nicht nur in lateinischer Sprache, sondern in den jeweiligen lebenden Nationalsprachen. In der Renaissance entwickelten die Architekten, Ingenieure und Künstler ein starkes Interesse für die Mathematik im allgemeinen, und für die Perspektive und die Darstellung geometrischer Gestalten im besonderen. Sie stellten die verschiedensten geometrischen Figuren, z.B. Kurven, aber vor allem auch Körper mit gekrümmten und ebenen Begrenzungsflächen dar und erfanden auch neue dazu.

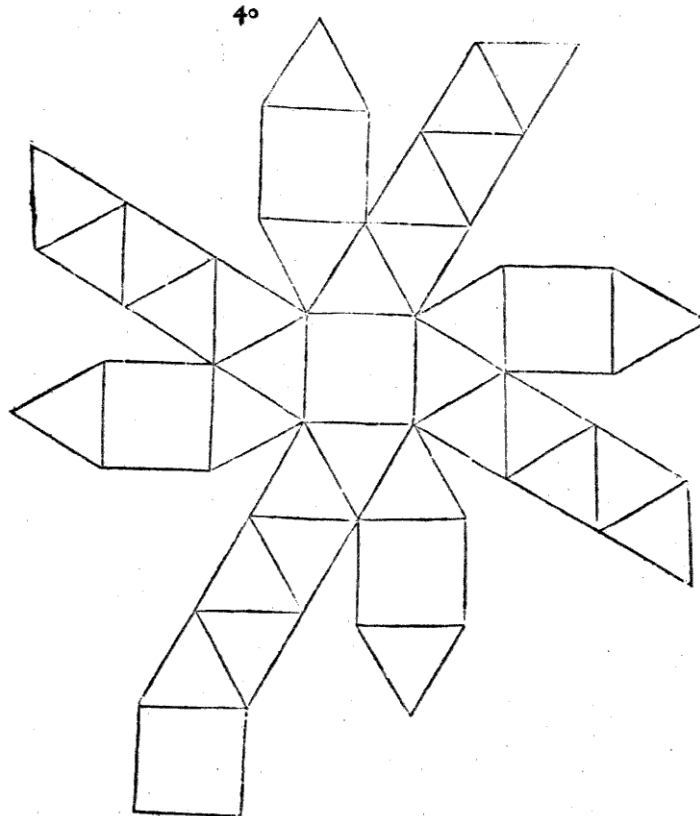
So findet man in der Basilika San Marco in Venedig ein schönes Mosaik, das *Paolo Ucello* (1397-1475) zugeschrieben wird und ein regelmäßiges Sternpolyeder zeigt, das kleine Sterndodekaeder, das als mathematische Figur erst mehr als hundert Jahre später von Kepler konstruiert wurde (Abb 1.37).

Von dem Maler *Piero della Francesca* (1416-1492) gibt es ein Bildnis von Fra Luca Pacioli, auf dem reguläre Polyeder aus Kristall zu sehen sind, und er hat auch eine Abhandlung über reguläre Polyeder geschrieben. *Albrecht Dürer* gab 1525 in seiner “Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in linien ebenen und gantzen corporen” [109] die Netze der regulären Polyeder an und außerdem die der Archimedischen Polyeder $(3,6,6)$ $(3,8,8)$, $(3,4,3,4)$, $(4,6,6)$, $(3,4,4,4)$, $(3,3,3,3,4)$, $(4,6,8)$. Eine Reproduktion seines Netzes für $(3,3,3,3,4)$ ist beigefügt (Abb 1.36). 1568 gab der Nürnberger Goldschmied Wenzel Jamitzer eine Sammlung von 120 perspectivischen Zeichnungen der regulären Polyeder und anderer Figuren heraus, die von diesen durch Abschneiden der Ecken, Einkerbungen der Kanten, Aushöhlen oder Erhöhen der Seiten und Kombinationen dieser Operationen abgeleitet sind. Die Sammlung enthält aber nur einige der Archimedischen Polyeder und ein Sternpolyeder und hat wohl mehr künstlerischen Wert.

Aus diesem Nürnberger Umkreis von Wenzel Jamitzer stammt vielleicht auch ein um 1570 entstandener kunstvoll gearbeiteter Pultkasten, der jetzt im Frankfurter Museum für Kunsthandwerk steht und der hier abgebildet ist. In Einlegearbeit aus verschiedenfarbigen, z.T. schwarz eingefärbten Hölzern, Perlmutter und Elfenbein zeigt er in perspektivischer Darstellung eine ausgeklügelte Komposition von rund dreißig geometrischen Figuren (Abb 1.38). Darunter sind die 5 platonischen und 3 der 13 Archimedischen Polyeder – $(3, 4, 3, 4)$, $(3, 5, 3, 5)$, $(4, 6, 8)$ – sowie ein Tetraeder, das in ein Hexaeder einbeschrieben ist – also aus der Antike überlieferte Figuren – aber auch solche, die erst in der Renaissance entdeckt oder studiert wurden, und die charakteristischerweise Selbstdurchdringungen aufweisen, außerdem ein interessantes Polyeder, das vielleicht der Urheber dieser Komposition selbst konstruiert hat. Die Komposition folgt nicht nur ästhetischen Prinzipien, sondern sie illustriert auch in der Auswahl und der beziehungsreichen Anordnung der Figuren einige interessante mathematische Prinzipien, die sich auf die Erzeugung der Figuren beziehen, auf ihre Symmetrie und auf die zwischen ihnen bestehenden Verwandtschaften. So wird die Dualität von Figuren durch ihre Gegenüberstellung, Durchdringung, Kombination und Vereinigung betont, und das Vorhandensein gemeinsamer Symmetrieachsen durch vertikale Anordnung mit zusammenfallenden Achsen. Ein besonders interessantes Erzeugungsprinzip besteht darin, die Kantenmittelpunkte eines Polyeders als Eckpunkte eines neuen Polyeders zu betrachten. So entsteht aus Hexaeder oder Oktaeder das Kuboktaeder $(3, 4, 3, 4)$ und aus Icosaeder oder Dodekaeder das Ikosidodekaeder $(3, 5, 3, 5)$. Die Fruchtbarkeit dieses Prinzips wird sich später beim Beweis des Fundamentalsatzes der konvexen Typen von Steinitz zeigen. Ich begnüge mich mit diesen Andeutungen und überlasse es dem Leser, dies kleine Kunstwerk selber eingehend zu betrachten.

Auch ein anderes Werk über reguläre Polyeder ist in engem Zusammenhang mit den Bedürfnissen der künstlerischen Praxis entstanden: *Fra Luca Pacioli's* "Divina Proportione", 1497 vollendet, 1509. veröffentlicht. Darin preist er den hohen künstlerischen Wert des goldenen Schnitts, konstru-

Das Sechsi corpus/ so das auffhan wirt/ hat es sechs gefierte/ vnd zwey vnd dreyßig Dyangliche felder/ so man das zusamen leget/ gewint es vier vnd zweynßig eck/ vnd sechßig scharpfer seyen.



Das Eident vnd nach folget corpus/ so es offen leyt/ hat es sechs achte ecketer/ vñ achte sechs ecketer/ vnd zwelf vier ecketer felder/ vñ so man das zusamen leget/ so gewint es acht vnd vierßig eck/ vnd zwo vnd sibentßig scharpfer seyen.

Abbildung 1.36: Das Netz des Archimedischen Polyeders $(3, 3, 3, 3, 4)$ aus Albrecht Dürers Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheid.



Abbildung 1.37: Marmoreinlegearbeit in San Marco in Venedig entworfen von Paolo Ucello um 1425. Für das Bild und die Information danke ich Lucio Saffaro, Bologna.



Abbildung 1.38: Pultkasten, um 1570 entstanden. Einlegearbeit, verschiedenfarbige Hölzer, Perlmutter, Elfenbein. Museum für Kunsthandwerk, Frankfurt, Inventarnr. WNK 2. Photographie: Museum für Kunsthandwerk.



Abbildung 1.39: Gedrechselte Kunststücke aus Elfenbein im Grünen Gewölbe in Dresden.

Links: Elfenbeinpokal, Georg Friedel, Dresden, Ende 16. Jhd. Mitte: Elfenbeinpokal, Georg Wecker, Dresden 1581. Rechts: Kunststück aus Elfenbein, Dresden, um 1600.

Photos des Museums, reproduziert aus dem Buch von Klaus Maurice: *Der drehelnde Souverän Materialien zu einer fürstlichen Maschinenkunst.*

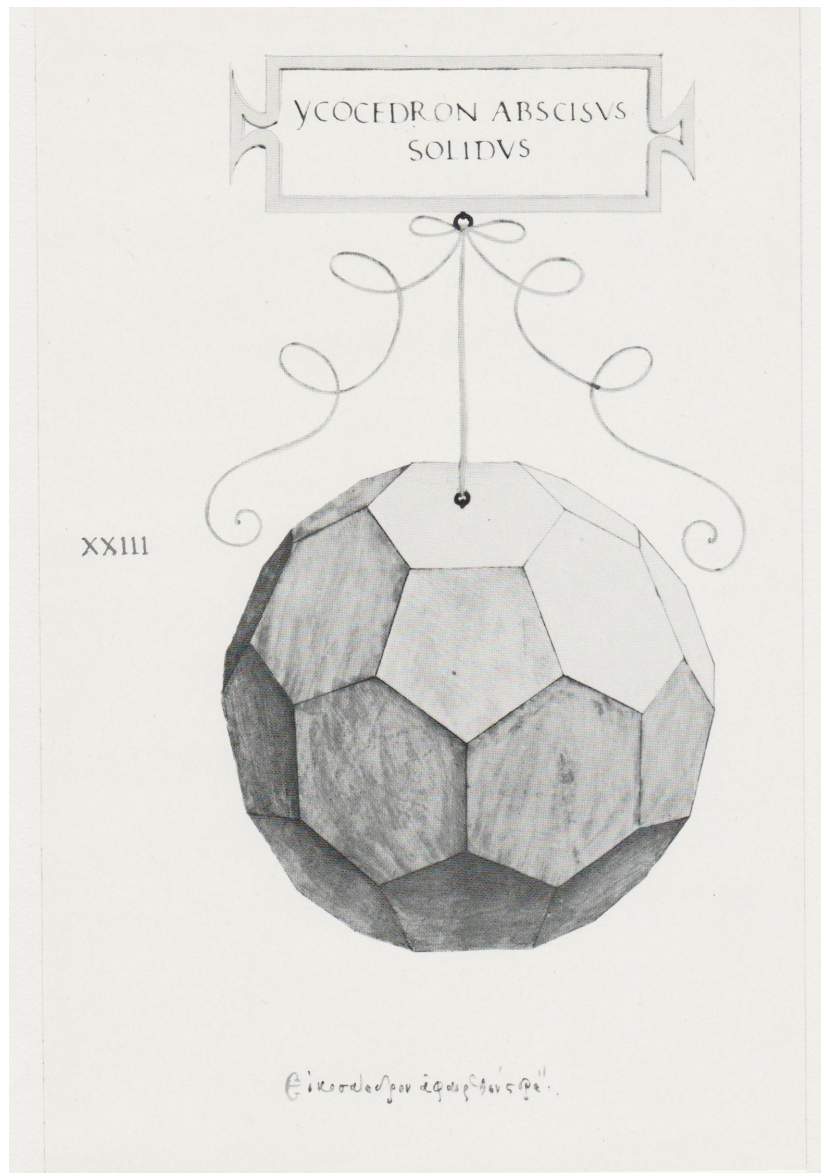


Abbildung 1.40: Archimedisches Polyeder (5,6,6). Abbildung XXIII der Illustrationen von Leonardo da Vinci zu Fra Luca Pacioli's "Divina Proportione" von 1497.

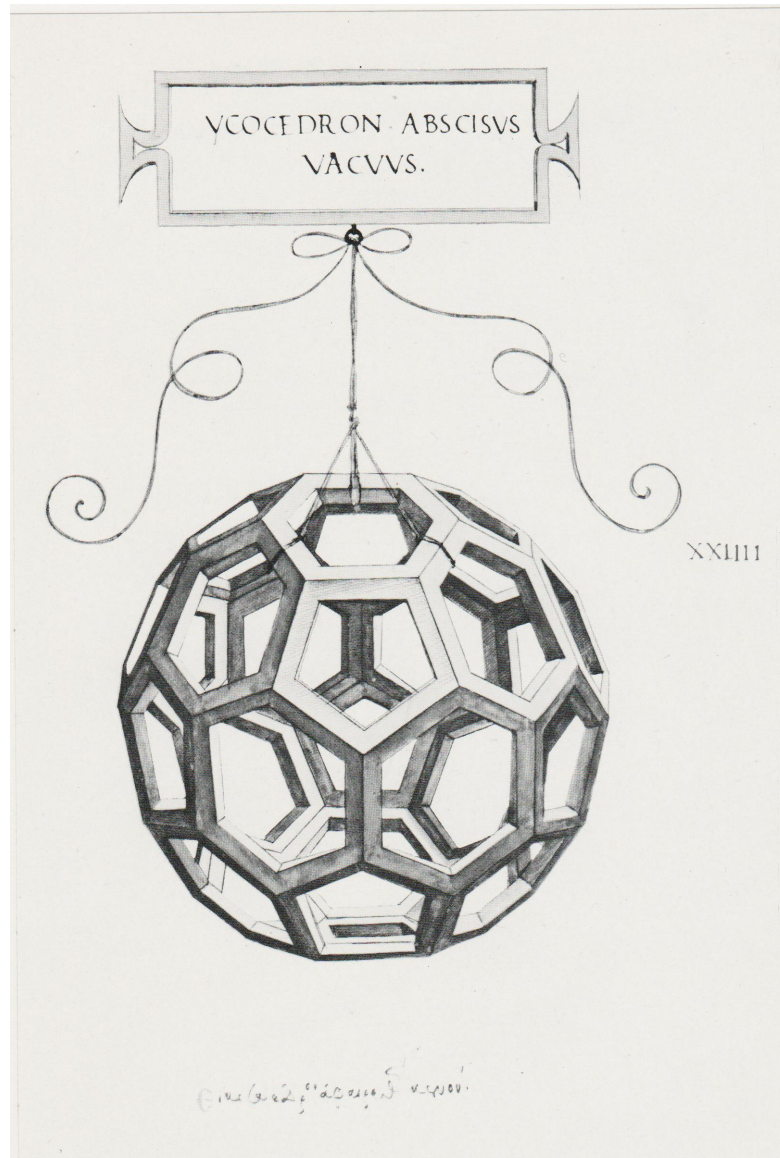


Abbildung 1.41: Archimedisches Polyeder (5,6,6). Abbildung XXIV der Illustrationen von Leonardo da Vinci zu Fra Luca Pacioli's "Divina Proportione" von 1497.

iert umständlich die regulären Polyeder, behandelt die Einbeschreibung dieser Polyeder ineinander (mit Fehlern) und beschreibt schließlich eine Reihe von Polyedern, die aus den regulären Polyedern durch Abschneiden der Ecken und pyramidales Erhöhen der Flächen abgeleitet sind, darunter die Archimedischen Polyeder (3, 6, 6), (3, 4, 3, 4), (4, 6, 6), (5, 6, 6), (3, 5, 3, 5) und (3, 4, 4, 4). Die mathematische Bedeutung dieses Werkes ist nicht sehr groß, aber es wird dadurch schön, dass Leonardo da Vinci die im Text beschriebenen Polyeder auf vielen sehr schönen und sorgfältig ausgeführten Tafeln dargestellt hat. Zwei beigefügte Reproduktionen zeigen seine Tafeln für das Archimedische Polyeder (5, 6, 6), leider ohne die Farben (Abb. 1.40, 1.41).

Von den drei alles überragenden Gestalten am Beginn der neuzeitlichen Naturwissenschaft, Galilei, Kepler und Descartes, haben zwei, Kepler und Descartes, wesentliche Beiträge zur Theorie der Polyeder geleistet. Der deutsche Astronom *Johannes Kepler*, 1571 geboren, 1630 gestorben, hat den Inhalt seines Forscherlebens selbst wie folgt beschrieben:

Drei Dinge waren es vor allem, deren Ursachen, warum sie so und nicht anders sind, ich unablässig erforschte, nämlich die Zahl, Größe und Bewegung der Bahnen der Planeten. [211, p. 9]¹⁰

Man muss genau hinhören, um die Bedeutung dieses Satzes zu verstehen. “So” das zielt auf das Sosein, auf die Beschreibung des Seienden durch Gesetze, die aus Erfahrung und Beobachtung durch die Arbeit des Naturforschers gewonnen werden. “Warum”, “so und nicht anders”, das ist die Frage nach dem eigentlichen, dem letzten Grund der Erscheinungen. Diese Frage ist nicht identisch mit der Frage, wie die Gesetze lauten. In diesem Punkt hat Wittgenstein recht:

Der ganzen modernen Weltanschauung liegt die Täuschung zu grunde, dass die sogenannten Naturgesetze die Erklärungen der Naturerscheinungen seien” (Tractatus) [377, 6.371].

Ob die Frage nach dem “Warum” einen Sinn hat, das schon ist für uns Heutige ein tiefes philosophisches Problem. Für Kepler nicht. Ihm ging es um die Antwort.

¹⁰Wenn nicht anders vermerkt, Übersetzung der Kepler-Zitate vom Autor E.B. (Hrsg.).

1.2 Kepler: Geometrie als ein göttlicher “Widerschein”

Keplers Antwort:

Die Geometrie ist einzig und ewig, ein Widerschein aus dem Geiste Gottes. Dass die Menschen an ihr teilhaben, ist mit einer Ursache dafür, dass der Mensch ein Ebenbild Gottes ist. Nichts in der Welt ist von Gott planlos geschaffen,

zitiert nach Max Caspar [214, p. 14], der in der Einleitung zu seiner Übersetzung von Keplers Weltharmonik die Einstellung Keplers folgendermaßen zusammenfasst: Als Werk des allweisen und allmächtigen Gottes muss diese Welt die schönstmögliche und vollkommenste sein. Die Vollkommenheit aber besteht in bestimmten von der Geometrie dargebotenen Verhältnissen. Diese Verhältnisse sind urbildlich im göttlichen Wesen da. Als Ebenbild Gottes trägt auch der Mensch diese Verhältnisse in seinem Geist. Daher ist er fähig, sie in ihrer Verwirklichung in der Welt, die Gottes Abbild ist, zu erkennen. Und nun zitiere ich Carl Friedrich von Weizsäcker aus seinem Buch “Die Einheit der Natur” [367].

Dieses Wiedererkennen, dieser Gottesdienst ist die Naturwissenschaft.

Das ist Platonismus in christlicher Sprache . . .

Kepler formuliert hier nicht nur eine These philosophischer Theologie, er beschreibt zugleich die Weise, wie er die Naturwissenschaft tatsächlich vollzieht. Er erlebte seine großen Entdeckungen mit einem Enthusiasmus, der ihn das Entdecken selbst als ein Hineinschauen in die göttlichen Geheimnisse erfahren ließ und somit als einen Gottesdienst. In der Geschichte der Naturwissenschaft ist dies freilich Keplers persönliche Meinung geblieben; dies war nicht lehrbar, so wie seine Beschreibung der Planetenbahnen als Ellipsen um die Sonne lehrbar war. Aber bis zum heutigen Tage empfinden Naturwissenschaftler oft ähnlich wie Kepler, gerade die großen Produktiven. Von Einstein ist der

Satz überliefert: ‘Was versuchen wir denn anderes als Seine Linien nachzuzeichnen.’ Aber mit dem fortschreitenden Verfall des religiösen Glaubens in der Neuzeit ist das Zutrauen der Naturwissenschaftler zu den Worten, die Kepler noch gebrauchte, immer geringer geworden. Es fällt ihnen schwerer, ihr Erlebnis der wissenschaftlichen Entdeckung noch in solchen Worten auszusprechen.

Damit aber wird das philosophische Problem deutlicher, das bei Kepler und wohl letzten Endes auch bei Platon, selbst im Sinne ihrer eigenen Überzeugungen, ungelöst bleibt. Es ist die tatsächliche Vermittlung zwischen dem höchsten Punkt der Philosophie, dem Einen oder der Idee selbst, und der Vielheit der sinnlichen Erfahrungen. Dass die glückende Gesetzeserkenntnis der Naturwissenschaft von ihren eigenen Schöpfern als ein Stück dieser Vermittlung erlebt wird, ist eine Erfahrung von höchster Wichtigkeit. Aber diese Erfahrung ist damit, dass sie erlebt wird, noch nicht verstanden. [367, p. 115f.]

Aus dem Gesagten wird deutlich, welche große Bedeutung regelmäßige geometrische Figuren für Kepler haben mussten. Die aus der Antike bekannten Figuren, die Kreise und Kegelschnitte, die regelmäßigen Vielecke, die Sphären, die Platonischen und Archimedischen Polyeder, hat er studiert und seinen kühnen Gedankengebäuden eingefügt. Und er hat ihnen neue Figuren hinzugefügt, die er entdeckt oder doch als erster exakt konstruiert hat. Seine wichtigsten Werke in diesem Zusammenhang sind das “Mysterium Cosmographicum” und “Harmonice Mundi”. Über beide will ich jetzt kurz berichten.

Das “Mysterium Cosmographicum” ist Keplers erstes Werk [211]. Er veröffentlichte es 1596 als 25-jähriger. Ausgangspunkt war das 1540 erschienene Werk von Nikolaus Kopernikus “Liber de revolutionibus orbium coelestium”, das die Sonne zum Weltmittelpunkt machte. Die Erde samt den anderen Planeten läuft – grob gesagt – auf Kreisbahnen um diesen Mittelpunkt. Kepler war von dieser großartigen Idee, die allerdings noch zu einfach

war, um die Beobachtungsdaten genau zu beschreiben, begeistert. Ihm ging es nun darum, die Zahl der damals bekannten Planeten – Saturn, Jupiter, Mars, Erde, Venus, Merkur – und die mittleren Abstände ihrer Bahnen zu erklären. Warum gerade – außer der Erde – fünf Planeten? Und warum diese Verhältnisse ihrer Bahndurchmesser? Kepler erinnert den Leser an den letzten Satz aus Buch XIII der Elemente des Euklid: Es gibt nur fünf reguläre Körper. Und dies ist die Erleuchtung, die ihm zuteil wird, in seinen Worten:

Die Erdbahn ist das Maß aller anderen Bahnen. Ihr umschreibe ein Dodekaeder: Der dieses umfassende Kreis wird der Mars. Dem Mars umschreibe ein Tetraeder: Der dieses umfassende Kreis wird der Jupiter. Dem Jupiter umschreibe einen Würfel: Der dieses umfassende Kreis wird der Saturn. Nun beschreibe der Erde ein Ikosaeder ein: Der darin einbeschriebene Kreis wird die Venus. Der Venus beschreibe ein Oktaeder ein: Der diesem einbeschriebene Kreis wird der Merkur. Damit hast Du den Grund für die Zahl der Planeten. [211, p. 13, Hervorhebung im Original]

Ich habe möglichst wörtlich übersetzt. Besser als der Text verdeutlicht die beigegefügte Reproduktion von Keplers Tabella III seine Idee (Abb 1.42): Sie zeigt eine Folge von 6 konzentrischen Sphären, und zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sphären jeweils einen regulären Körper, welcher der größeren Sphäre einbeschrieben und der kleineren Sphäre umbeschrieben ist. Die Planetenbahnen verlaufen auf diesen Sphären, für die wegen der wechselnden Abstände der Planetenbahnen eine gewisse Dicke zugelassen ist. Ferner rechnet Kepler später bei der Bahn des Merkur nicht mit dem Radius der dem Oktaeder einbeschriebenen Sphäre, sondern mit dem Radius des Inkreises seiner quadratischen Basis. Die durch diese geometrische Konstruktion bestimmten Bahndaten stimmen mit den von Kopernikus beobachteten und berechneten und mit seinen eigenen Berechnungen sowie denen seines Lehrers Mästlin – die allerdings mehrere Fehler enthielten – annähernd überein. Aber sie stimmen nicht genau überein, wie Kepler selbst bemerkte. Er vermutete einen Grund in den nicht genau bekannten Exzentrizitäten der Planetenbahnen. Er konnte den Widerspruch zwischen seiner schönen Theorie und der Erfahrung nicht auf sich beruhen lassen: “Es dürfen diese Spekula-

tionen a priori nicht gegen die offenkundige Erfahrung verstoßen, sie müssen vielmehr mit ihr in Übereinstimmung gebracht werden.”¹¹

Kepler sandte seine Schrift an Tycho Brahe, der kritisch darauf einging und Kepler einlud, ihn in Prag zu besuchen und mit ihm zusammenzuarbeiten. Kepler nahm die Einladung an. Nach Tycho Brahes Tod 1601 wurde er kaiserlicher Mathematiker und mit der Fortführung von Tychos Arbeit betraut. Insbesondere stand ihm das umfangreiche Material von Tychos Beobachtungen zur Verfügung. Anhand dieses Materials fand er, nachdem er die früheren Hypothesen über die Planetenbewegung von Ptolemäus, Kopernikus und Tycho Brahe überprüft und verworfen hatte, endlich nach langen Mühen die Gesetze, die wir heute die Keplerschen Gesetze nennen.

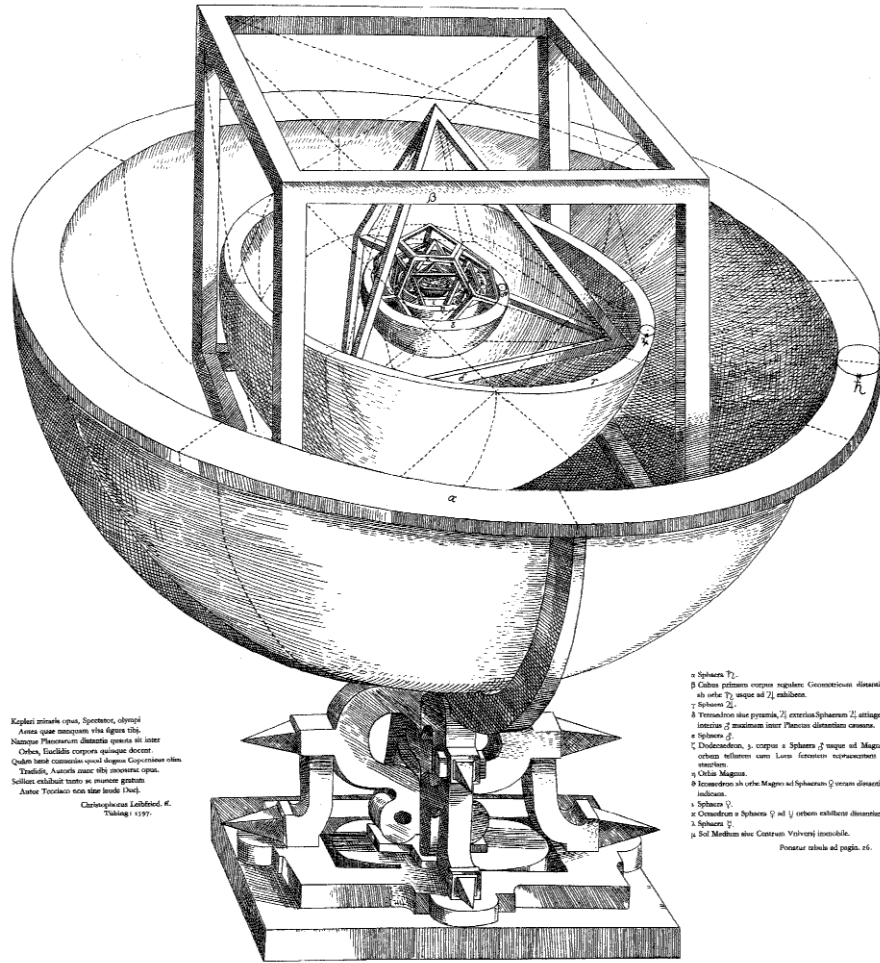
1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der von der Sonne nach dem Planeten gezogene Leitstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

Die ersten beiden Gesetze veröffentlichte Kepler 1609 in der “*Astronomia Nova seu de Motibus Stellae Martis*”, das dritte 1619 in “*Harmonice Mundi*”.

Mit diesen Gesetzen wurde Kepler zum Wegbereiter der Mechanik Isaacs Newtons. Man muss sich aber vor der sehr oberflächlichen Vorstellung hüten, Kepler wäre nunmehr ein “moderner Naturwissenschaftler” geworden, der zwar nach den Gesetzen der Planetenbewegung und ihren “Ursachen” fragt, aber nicht mehr nach dem letzten Grund. Ganz im Gegenteil! 1621 gab Kepler sein Jugendwerk, das *Mysterium cosmographicum*, neu heraus. Und obwohl er sich aller Fortschritte der Astronomie seit der ersten Veröffentlichung bewusst war, obwohl er sich über manche voreilige Spekulation in seinem Jugendwerk selber lustig machte – “*ecce manifestam hallucinationem*” – blieb er dabei, mit seinem ersten spekulativen Ansatz gewissermaßen für

¹¹Brief an Herwart von Hohenburg; zitiert nach [80, p. 145], Hrsg.

TABELLA III.
ORBIVM PLANETARVM DIMENSIONES, ET DISTANTIAS PER QVINQVE REGVLARIA CORPORA GEOMETRICA EXHIBENS.



Kepleri mirabile opus, Spectator, obsequi
Astra quae immota vix figura vident
Nuncupat Planetarum dimensa opera ut inter
Orbes, Euclidis corpora quingue docent
Qualem tantum committit opusculi haec Copernicus illis
Tradidit, Auctoris aucti tibi innotuit opus.
Sed non exhibuit tanto se inuicem gratum
Auctori Tivoli non sine laude tui.
Christophorus Lubbertus, R.
Tubingae 1597.

1. Sphaera Γ .
2. Cubus patet in corpore regulari. Geometricis distantias
ab orbis Γ usque ad Δ exhibens.
3. Sphaera Δ .
4. Tetraedron aut pyramidis Δ exteriori Sphaerae Δ inscriptae,
interior Δ praeteriorum inter Planetas distantias ostendit.
5. Sphaera ϵ .
6. Dodecaedron, ϵ , corpus e Sphaera Δ usque ad Magnam
orbem referentem cum Luna formatione representantem di-
stans.
7. Octaedron Magnae.
8. Tetraedron ab orbis Magnae ad Sphaeram Δ versus distantias
indicans.
9. Sphaera ζ .
10. Octaedron e Sphaera ζ ad η orbem exhibentis distantias.
11. Sphaera η .
12. Sol Medium sive Centrum Universi incommutabile.
Ponatur tabula ad pagin. 26.

Abbildung 1.42: Tafel III aus Keplers *Mysterium Cosmographicum*

die Grobstruktur des Planetensystems den eigentlichen Grund gefunden zu haben, und er sah darin den Ansatz, aus dem alle seine weiteren Arbeiten zur Planetenbewegung hervorgegangen seien. Für ihn war nicht nur die Erkenntnis selber wichtig, sondern auch der Weg dahin.

Auch war es so, dass er in all den Jahren der angestregten Arbeit an der *Astronomia Nova* immer wünschte, zu einer Arbeit zurückkehren zu können, die direkt aus dem *Mysterium Cosmographicum* hervorgegangen war, deren Entstehung auf das Jahr 1599 zurückgeht, die aber erst 1619, nach zwanzigjähriger Arbeit veröffentlicht wurde: Die “*Harmonice mundi*”, die Weltharmonik [213]. Dies ist ein groß angelegtes Werk, und bevor wir uns seinen mathematischen Teilen zuwenden, wollen wir wenigstens etwas über den Plan und Aufbau des Ganzen sagen.

Die Weltharmonik ist der Versuch, in harmonischen Verhältnissen den Grund des Seins zu erkennen. In diesem Versuch weiß Kepler sich einig mit den Pythagoreern und mit Platon, besonders auch mit dem Neuplatoniker Proclus Diadochus, den er ausführlich zitiert. So stellt er dem vierten Buch das folgende Zitat von Proclus voran:

Für die Betrachtung der Natur leistet die Mathematik den größten Beitrag, indem sie das wohlgeordnete Gefüge der Gedanken enthüllt, nach dem das All gebildet ist ... und die einfachen Urelemente in ihrem ganzen harmonischen und gleichmäßigen Aufbau darlegt, mit denen auch der ganze Himmel begründet wurde, indem er in seinen einzelnen Teilen die ihm zukommenden Formen annahm. [213, p. 206]

Den Plan zu diesem Werk hatte Kepler schon bald nach der Vollendung des *Mysterium Cosmographicum* entworfen. Seine grundlegende Idee teilt er in einem Brief vom 6. August 1599 an den bayerischen Kanzler Herwart von Hohenburg als “*jucundum δέωρεμα*” mit, als eine den inneren Sinn erfreuende Anschauung. Ich hoffe, dass ich seine Worte einigermaßen sinngemäß übersetzt habe.

Um die Theorie des Copernicus mit der Pythagoreischen Philosophie zu verbinden, habe ich mein Sinnen auf die Harmonie

im Kosmos gerichtet. Und ich habe gefunden: Sie ist so, dass, gäbe es im Himmel Luft, ganz sicher Musik erklingen würde. Denn es haben die Bewegungen der Planeten auf Grund ihrer Kraft das gleiche Verhältnis zueinander, das sowohl die Saiten eines Instrumentes als auch alle andern Wohlklang erzeugenden Dinge haben. Die Harmonie ergibt sich nämlich bei den Stimmen nicht aus der Natur der Luft, und auch nicht aus der Natur der Stimme, beziehungsweise bei der Bewegung aus deren Natur, sondern aus dem, was der Bewegung und vielen andern Dingen gemeinsam ist, nämlich eben aus den vollkommenen Zahlenverhältnissen, die in der mathematischen Gestaltbildung ($\sigma\omega\mu\alpha\tau\omicron\pi\omicron\iota\acute{\eta}\sigma\epsilon\iota$ mathematica) ihren Ursprung haben. Denn das Verhältnis zwischen ebenen Figuren, Winkeln und Strecken und dergleichen ist dann am schönsten und vollkommensten, wenn sie sich zu einem Körper zusammenfügen (in corpus aliquod congruentes). So hat Gott auch die Musik nicht ohne Geometrie in die Welt kommen lassen. Wenn also irgendein Ding auf irgendeine Weise an diesen vollkommenen Verhältnissen teilhat, bekommt es eben dadurch eine Schönheit und Vollkommenheit eigener Art, die sinnlich sein kann oder geistig. [216, p. 27]

Die harmonischen Verhältnisse – insbesondere die bei musikalischen Konsonanzen – sind ausgezeichnete Verhältnisse natürlicher Zahlen. Im Sinne seines *jucundum δέωρεμα* geht es Kepler nun darum, die Ursache für die Auszeichnung gerade dieser Verhältnisse vor allen anderen unendlich vielen denkbaren in der Geometrie zu finden. Hier hat Kepler sich sehr angestrengt: “vehementer laboravi”. Er hat eine ganze Reihe von möglichen Definitionen dessen, was in der Geometrie “*verhältnisbildend*” sei, daraufhin untersucht, ob sich daraus genau die harmonischen Proportionen gewinnen ließen. Dabei ist er schließlich auf zwei Begriffe gekommen, die ihm hierzu geeignet erschienen. Beide beziehen sich auf reguläre Figuren, vornehmlich reguläre ebene Vielecke. Es sind die Begriffe der “Erkennbarkeit” und der “Kongruenz”. Vom ersten Begriff soll im folgenden kurz, vom zweiten ausführlich die Rede sein.

Was die “Erkennbarkeit” von Gegenständen der Mathematik betrifft, so handelt es sich dabei um eine Frage von ganz grundlegender Bedeutung, um das Unendliche in der Mathematik. Letzten Endes ordnet sich diese Frage ein in die noch viel tiefer liegende Frage, inwieweit sichere und vollständige Erkenntnis eines scharf definierten Gegenstandes überhaupt möglich ist, und ob die Abgrenzung eines solchen von allem anderen Bedingung ihrer Möglichkeit ist oder ein Widerspruch in sich oder vielleicht beides zugleich. Wenn ich es nicht falsch verstehe – aber wahrscheinlich verstehe ich fast nichts - geht es unter anderem darum in Platons Dialog “Parmenides”, in der dialektischen Übung über das Sein des Eins, [288]. Eine Hilfe bei der Lektüre ist C.F. von Weizsäckers Aufsatz: “Parmenides und die Quantentheorie” [368]. Soviel jedenfalls scheint klar, dass für Platon Wahrnehmung einer Gestalt, Vorstellung und Erkenntnis mit dem Vorhandensein einer Begrenzung eng verbunden sind, und dass die Dialektik des Begrenzten und des Unbegrenzten – $\pi\acute{\epsilon}\rho\alpha\varsigma$ und $\acute{\alpha}\pi\epsilon\iota\rho\omicron\nu$ – ein Teil des Problems ist.

Kepler bezieht sich nun darauf, welche Rolle $\pi\acute{\epsilon}\rho\alpha\varsigma$ und $\acute{\alpha}\pi\epsilon\iota\rho\omicron\nu$ bei Proclus Diadochus spielen, und stellt anschließend seine eigene Position dar. Er schreibt:

Hier stellt er (Proclus) für jegliches mathematische Sein die gleichen Prinzipien auf, die auch bei allen anderen Wesen auftreten und alles aus sich vermögen, nämlich die Begrenzung und das Unbegrenzte, indem er die Begrenzung als die Form, das Unbegrenzte als die Materie der geometrischen Dinge anerkennt.

Für die Größen charakteristisch sind Figuration und Proportion, und zwar Figuration für die Größen im einzelnen betrachtet, Proportion in Hinsicht auf ihre gegenseitigen Beziehungen. Die Figuration wird durch Grenzen vollzogen. So wird eine gerade Linie durch Punkte, eine ebene Fläche durch Linien, ein Körper durch Flächen begrenzt, umschlossen und figuriert. Was nun begrenzt, umschlossen und figuriert ist, das kann durch den Verstand erfasst werden. Das Unbegrenzte und Unendliche dagegen lässt sich eben als solches nicht in die Schranken eines aus Defini-

tionen zu gewinnenden Wissens oder einer genauen Darstellung einschließen. [213, p. 15]

Was mit “Wissen” und mit “genauer Darstellung” gemeint ist, wäre durch das uns geläufige Wort “geometrische Konstruktion” nur unvollkommen erfasst. Kepler verwendet den Terminus “scire” also “wissen”. So lauten die Definitionen VII und VIII im Buch I:

Wissen heißt bei geometrischen Dingen messen durch ein bekanntes Maß. Dieses bekannte Maß ist hier bei der Aufgabe, Figuren einem Kreis einzubeschreiben, der Kreisdurchmesser.

Wissbar ist, was entweder selbst unmittelbar messbar ist durch den Durchmesser, falls es sich um eine Strecke, oder durch dessen Quadrat, wenn es sich um eine Fläche handelt, oder was wenigstens nach einem wohlbestimmten sicheren geometrischen Verfahren aus solchen Größen gebildet wird, die, wenn auch in noch so langer Kette, schließlich vom Durchmesser bzw. seinem Quadrat abhängen. Auf griechisch sagt man γνώριμον. [213, p. 21]

Kepler kommt es also auf das vollständige Erfassen des Gegenstandes in völliger Klarheit und Eindeutigkeit an, das für die griechische Geometrie das Entscheidende war. Dieses sieht Kepler im Gegensatz zum nur approximativen Rechnen, in dessen Bereich er Teile der zeitgenössischen Algebra verwies. Natürlich konnte Kepler auch in diesem Sinne rechnen – für seine astronomischen Arbeiten hat er das in außerordentlichem Umfang getan. Aber solchen nur approximativ bestimmbaren Gegenständen fehlt selbst dann, wenn sie “durch irgendein geometrisches Verfahren beschrieben” sind, eben die Eigenschaft der “Wissbarkeit”. Ein Beispiel ist die Seite des regelmäßigen 7-Ecks, die für Kepler grundsätzlich nicht wissbar ist. Und er sagt: “Man sage nicht, es sei möglich, dass ein Ding existiert, ohne dass ein Wissen von ihm da ist” [214, p. 214]

Die Wissbarkeit der regulären Figuren ist also das erste Prinzip zur Gewinnung der weltbildenden Verhältnisse, der λόγοι κοσμοποιητικοί. Das

zweite Prinzip ist die Kongruenz regulärer Figuren. Was damit gemeint ist, formuliert Kepler sehr klar in dem schon zitierten Brief:

Zum dritten habe ich den Begriff des “Verhältnisbildenden” nun so abgewandelt, dass diejenigen – regulären – Figuren verhältnisbildend (λογοποιητικαί) sind, die sich zusammenfügen (congruunt), um einen Raum auszufüllen, Bodenflächen zu pflastern, Fenster zusammenzufügen und so weiter. Denn ein Verhältnis ist dann besonders schön, wenn auf Grund der Zahl der Seiten die Figuren sich genau im Raum zusammenfügen, miteinander harmonieren (ἁρμόττωσιν), sich immer in gleicher Anzahl zusammenfügen und in jeder Hinsicht alles zusammenpasst. Diese haben dann wieder den Vorzug der vollkommenen Harmonie. [216, p. 32]

Ich möchte noch einige weitere Sätze von Kepler zitieren, denn in seinen Worten “structura et corporatio” sehe ich das Leitmotiv meines Buches aufscheinen. In der Vorrede zum zweiten Buch der Weltharmonik gibt er den Grund dafür, warum die Kongruenz regelmäßiger Figuren zur Erklärung der Harmonie des Kosmos dienen kann, wie folgt an:

Denn es ist die eigentümliche Besonderheit der Kongruenz, die irgendwie zu Strukturbildung und körperlicher Gestaltung drängt; da sie von sich aus den schauenden Geist einlädt, auch außerhalb seiner selbst etwas zu machen, zu schaffen, zu gestalten, und da sie, von Ewigkeit her im hochgebenedeiten göttlichen Geiste verborgen, der Ordnung der Ideen folgend so, wie das höchste Gut sich mitteilen muss – in ihrer Abstraktheit nicht bleiben konnte, sondern vielmehr im Werk der Schöpfung hervorbrechen und bewirken musste, dass Gott zum Schöpfer von Körpern wurde die von kongruenten Figuren begrenzt und umschlossen sind. [213, p. 67]

Dies also sind die beiden geometrischen Prinzipien, aus denen die harmonischen Verhältnisse gewonnen werden sollen: Die “Wissbarkeit” und die

“Kongruenz” der regulären Figuren. Bevor wir uns mit der Kongruenz ausführlich befassen, wollen wir einen Blick auf den Aufbau des ganzen Werkes werfen.

Die ersten beiden Bücher stellen die mathematischen Grundlagen bereit. Das erste Buch behandelt die Lehre von den “Irrationalitäten” aus dem Buch X der Elemente von Euklid sowie die Konstruierbarkeit und “Wissbarkeit” regulärer Vielecke und Sternvielecke. Kepler unternimmt einen unzulänglichen Versuch, zu beweisen, dass das Siebeneck nicht konstruierbar ist. Das Problem wurde bekanntlich erst fast 200 Jahre später gelöst, 1796, als der neunzehnjährige Gauß erkannte, welche regulären n -Ecke konstruierbar sind. Notwendig und hinreichend ist, dass die ungeraden Primfaktoren von n nur in der ersten Potenz in n aufgehen und von der Form $2^k + 1$ sind (Es muss dann $k = 2^m$ sein, z.B. $17 = 2^4 + 1$).

Das zweite Buch enthält Ergebnisse über Flächeneinteilungen und Raumeinteilungen und reguläre und halbrekuläre Polyeder, über die ich nachher ausführlicher berichte.

Das dritte Buch handelt von der Harmonie in der Musik als einem Werk der Menschen. Kepler setzt sich dabei, teils kritisch, teils zustimmend, mit den Lehren der Pythagoreer und Platons und der ‘*Ἀρμονικά*’ des Claudius Ptolemaios auseinander. Sein Ziel ist

...das herrliche Gebäude des harmonischen Systems oder der musikalischen Tonleiter aufzurichten, ein Gebäude, dessen Gliederung nicht willkürlich, wie einer denken möchte, nicht eine menschliche Erfindung ist, die man abändern könnte, sondern sich durch und durch vernunft- und naturgemäß darstellt, so dass Gott der Schöpfer selber sie beim Abstimmen der himmlischen Bewegungen ausgedrückt hat. [213, p. 114]

Es kommen dann Fragen der Harmonielehre zur Sprache, und es werden die Bestandteile einer kunstgerechten Melodie, Regeln für die Melodieführung, die verschiedenen Tonarten und ihre Affektwirkung sowie das Wesen der figurierten Musik untersucht.

Das vierte Buch handelt vom Wesen der Harmonien in der irdischen Na-

tur, von ihrer Wahrnehmung und Erkenntnis und ihrer Wirkung und von ihrer Beziehung zu Seele und Verstand. Das erste Kapitel zum Beispiel handelt vom Wesen der sinnlichen wie der intelligiblen harmonischen Proportionen. Die Begriffe der mathematischen Dinge betrachtet Kepler als Bezugsglieder der reinen und von den Sinnendingen losgelösten Harmonie. Er zitiert dazu ausführlich den Neuplatoniker Proclus:

Man muss also annehmen, dass die Seele selber Erzeugerin der mathematischen Begriffe ist. Wenn sie nun aber im Besitz der Urbilder diesen Sein und Wesen gibt, so dass das Erzeugen ... nichts anderes ist als ein Hervorbringen der Begriffe, die in der Seele schon vorhanden waren ..., dann werden wir mit Plato in Übereinstimmung sein und das wahre Wesen der mathematischen Dinge ist gefunden. ... Es bleibt also nur übrig, dass die Seele die mathematischen Formen sowohl aus sich als auch aus dem Geiste ableitet und dass sie selber die Fülle der Formen ist, die zwar in den intelligiblen Ideen ihren Ursprung haben, von sich aus aber den Zugang zum Sein erlangen. [213, p. 219, Hervorhebung (als Proclus-Zitat) im Original]

Kepler vergleicht und unterscheidet in dieser Tradition die sinnlichen und die urbildlichen Harmonien. Die Bezugsglieder der sinnlichen Harmonien sind sinnlich und außerhalb der Seele, werden mit Hilfe der Sinne wahrgenommen und mit den Urbildern verglichen.

Für die urbildliche Harmonie fällt beides weg, da die Bezugsglieder zuvor schon in der Seele gegenwärtig, ihr eingeboren, ja die Seele selber sind; sie sind nicht ein Abbild ihres wahren Urbildes, sondern dieses Urbild geradezu selber. So vollendet die einfache Vergleichung, die die Seele gleichsam zwischen ihren eigenen Teilen anstellt, das ganze Wesen der urbildlichen Harmonie. Die Seele selber steht, indem sie diese Tätigkeit vollbringt, als Harmonie vor uns, wie abgesehen von dieser Tätigkeit der Kreis und sein Teil, d.h. die Bezugsglieder der Harmonie. So wird schließlich die Harmonie völlig zum Geist, ja zu Gott. [213, p. 225]

Das fünfte und letzte Buch schließlich handelt von der Harmonie in den Werken Gottes, im Kosmos und das heißt für Kepler vor allem: in den Bahnen der Planeten. Nach zwei einleitenden Kapiteln über die regulären Polyeder und ihre Beziehung zu den harmonischen Proportionen formuliert Kepler im 3. Kapitel in 13 Thesen die von ihm gefundenen Gesetze der Planetenbewegung, darunter als Krönung in der 8. These das 3. Keplersche Gesetz, gefunden am 15. März 1618, wenige Tage vor der Vollendung der *Harmonice Mundi*.

Ich fühle mich hingerissen und besessen von einem unsäglichen Entzücken über die göttliche Schau der himmlischen Harmonien.
[213, p. p. 480 (Nachbericht Caspar)]

Kepler findet dann die harmonischen Verhältnisse in den Extrema der Winkelgeschwindigkeiten der Planetenbahnen in den Apsiden, und in diesen die Stufen der Tonleitern, der Tongeschlechter und der Tonarten – Saturn ist die mixolydische Tonart zugeordnet, Jupiter die dorische, Mars die lydische und der Erde die phrygische – bis hin zu im unendlichen Ablauf der Zeiten dann und wann auftretenden Harmonien aller sechs Planeten.

Es sind also die Himmelsbewegungen nichts anderes als eine fortwährende mehrstimmige Musik (durch den Verstand, nicht das Ohr fassbar), eine Musik, die durch dissonierende Spannungen, gleichsam durch Synkopen und Kadenzten hindurch auf bestimmte, vorgezeichnete, sechsgliedrige Klauseln zustrebt und dadurch in den unermesslichen Ablauf der Zeit unterscheidende Merkmale setzt. [213, p. 328]

Kepler fragt dann nach dem “Warum” gerade dieser Harmonien, und erklärt sie deduktiv aus einem System von Axiomen. So erklärt er sich, nachdem er in seinem Jugendwerk die grobe Struktur des Kosmos, die Zahl und die mittleren Durchmesser der Bahnen der Planeten aus den fünf platonischen Körpern abgeleitet hatte, nun als Krönung seines Schaffens die feinere Struktur des Planetensystems und vor allem die mittels seiner Gesetze und der Beobachtungen berechneten Exzentrizitäten der Bahnen aus

dem übergeordneten Prinzip der das ganze System durchformenden harmonischen Verhältnisse und damit letztendlich durch Geometrie.

Das also ist der Aufbau der *Harmonice Mundi*, und nun will ich einiges über die Mathematik im 2. Buch dieses Werkes berichten. Das Ziel dieses 2. Buches im Rahmen des Gesamtwerkes ist es, zusätzlich zu den Kriterien der Konstruierbarkeit im Sinne von "Wissbarkeit" für reguläre oder halbrekuläre Vielecke ein Kriterium zu gewinnen, das unter den immer noch unendlich vielen konstruierbaren Vielecken endlich viele aussondert. (Zwölf werden zum Schluss übrigbleiben: Die regulären Vielecke mit 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 und 20 Ecken und Sternvielecke mit 5, 8, 10 und 12 Ecken.)

Das Kriterium, welches dieses leisten soll, ist die "Kongruenz". Kepler gibt dafür Definitionen, die jedoch nicht so genau gefasst sind, dass sie sich eindeutig den heutigen strukturbezogenen Ansätzen zuordnen lassen. Keplers Intention scheint mir jedoch klar: "Kongruenz" im Keplerschen Sinne ist der Zusammenschluss ebener Vielecke mit besonderen Regularitätseigenschaften zu regelmäßigen ebenen oder räumlichen Strukturen höherer Ordnung. Ich sehe hier im Grunde den gleichen Denkansatz wie im *Timaios*, wo Platon die Schemata der regulären Polyeder aus den "schönsten" Dreiecken der Pythagorer aufbaut. Nur sind bei Kepler die zulässigen Bausteine andere und mehr, und auch die in Betracht gezogenen höheren Strukturen zeigen größere Vielfalt.

Diese Strukturen sind von kombinatorisch-geometrischer Art. Sie entstehen durch Aneinanderfügen von ebenen Figuren wie z.B. Dreiecken, Vierecken und Sechsecken längs deren Kanten, und zwar so, dass die Ecken zusammenfallen. Für das so insgesamt entstehende Gebilde werden verschiedene Möglichkeiten in Betracht gezogen. Die erste und einfachste Möglichkeit ist die, dass eine Ebene entsteht, welche die aneinandergesetzten Figuren lückenlos und einfach ganz überdecken. Kepler nennt dies eine unendlich fortsetzbare "Kongruenz in der Ebene". Seine Definition einer Kongruenz ist kurz. Sie lautet:

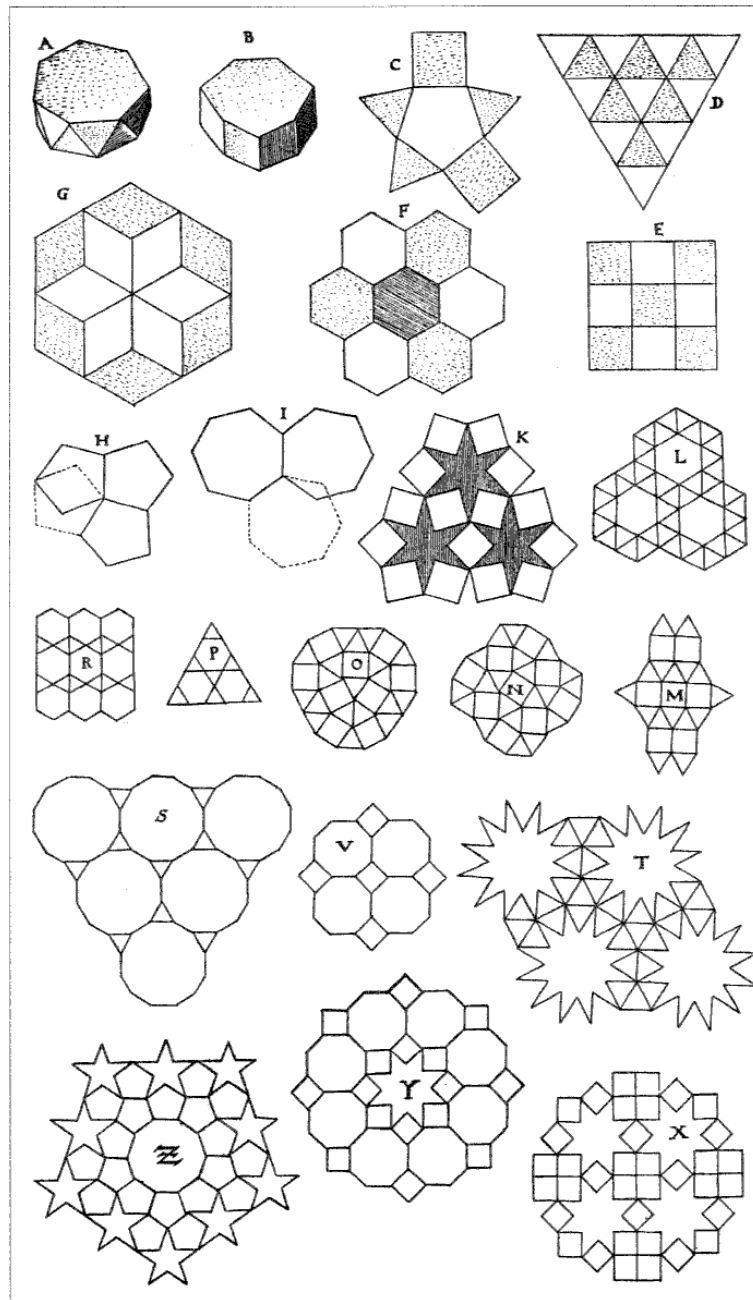


Abbildung 1.43: Tafel aus Keplers *Harmonices Mundi Libri V*,
Figuren zu Buch II, Proposition 14 bis 19

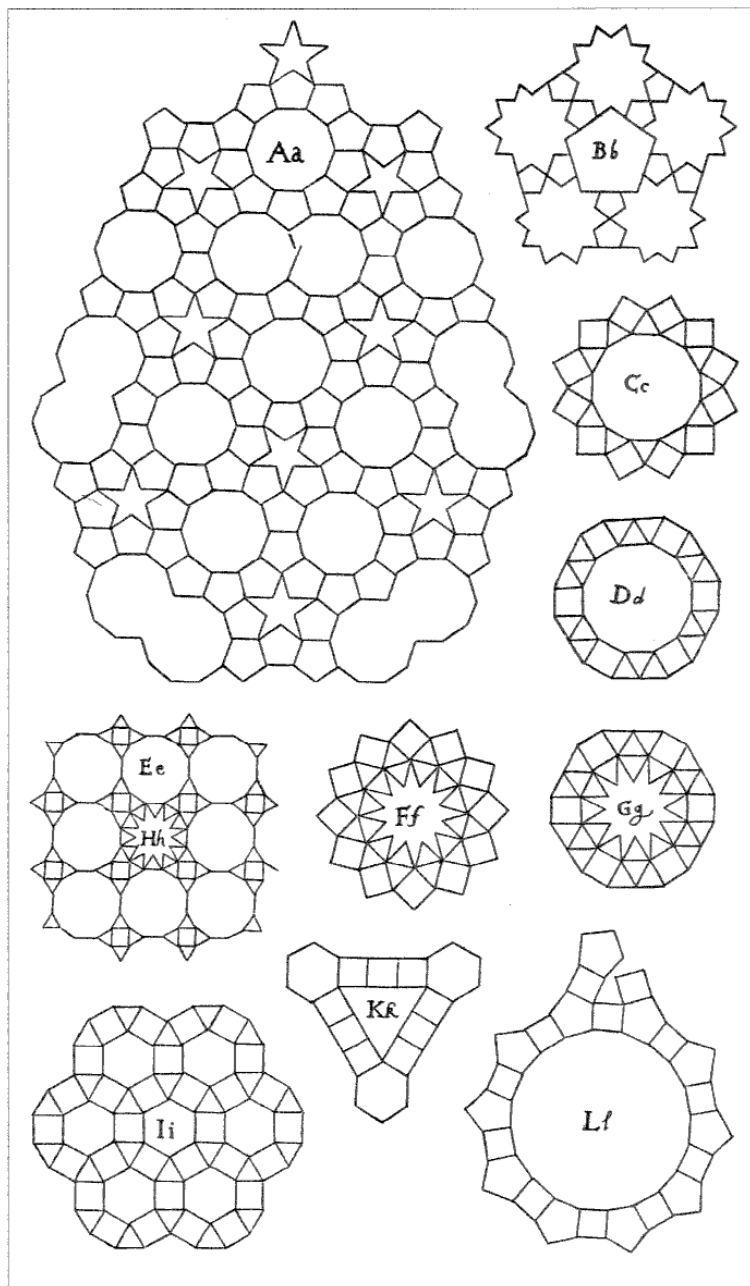


Abbildung 1.44: Tafel aus Keplers *Harmonices Mundi Libri V*,
Figuren zu Buch II, Proposition 19 und 20

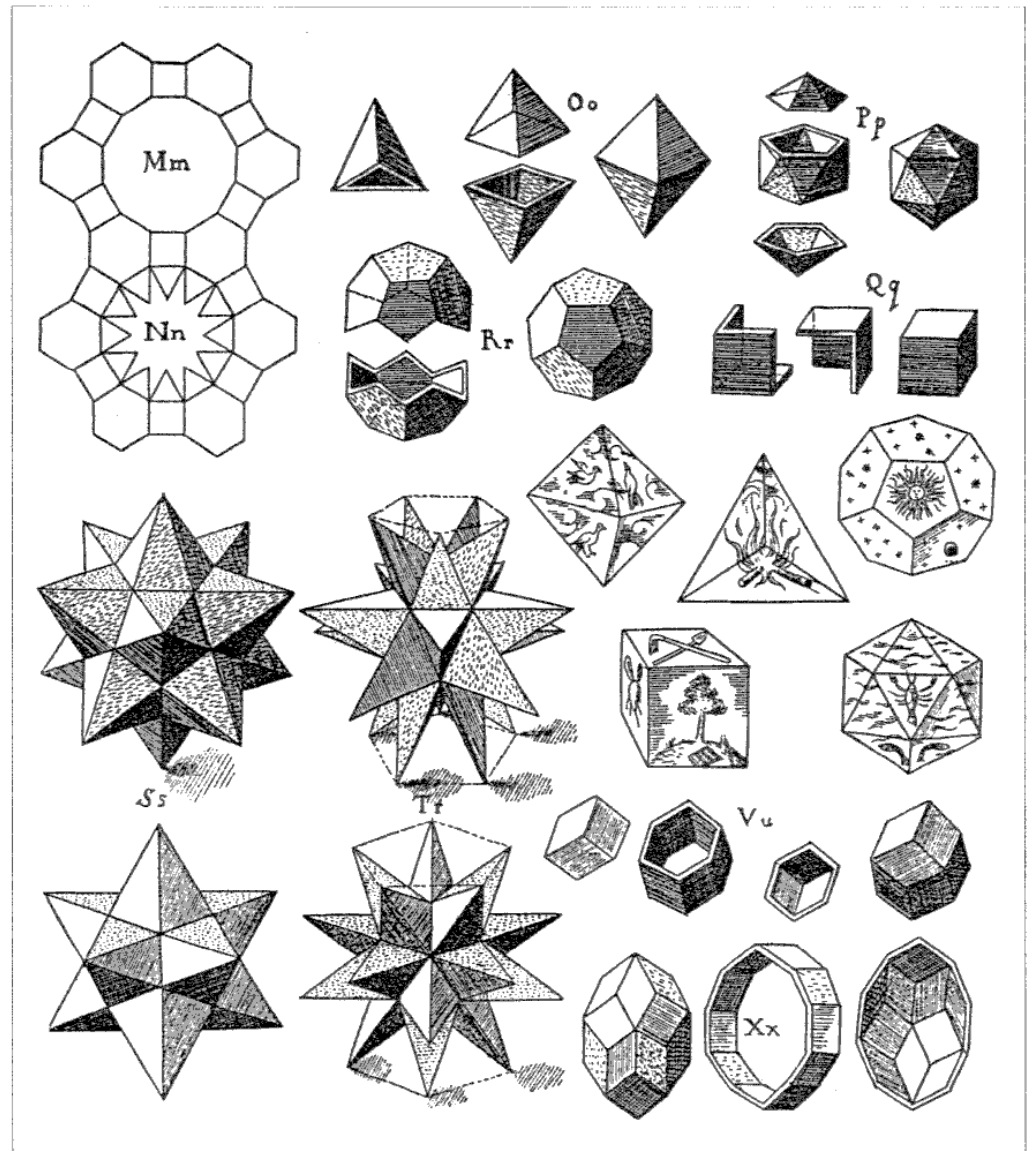


Abbildung 1.45: Tafel aus Keplers *Harmonices Mundi Libri V*,
Figuren zu Buch II, Proposition 20 und 25

In Plano Congruentia est, cum anguli figurarum plurium singuli sic ad unum concurrunt, ut nullus relinquatur hiatus. [213, p. 68]

Übersetzung:

In der Ebene liegt eine Kongruenz vor, wenn die einzelnen Ecken mehrerer Figuren so in einem Punkt zusammenstoßen, dass keine Lücke bleibt.

An dieser Stelle sollte der Leser die beigegeführten Reproduktionen von Keplers Abbildungen betrachten, um sich eine erste anschauliche Vorstellung von ebenen Kongruenzen zu machen (Abb. 1.43, 1.44, 1.45).

Um die Tragweite der Ansätze Keplers zu begreifen, wollen wir versuchen, die Bedeutung seiner Definition einer Kongruenz zu verstehen. Wir wollen das in der Weise tun, dass wir Keplers Definitionen, Beispiele und Sätze mit verschiedenen möglichen Interpretationen in der Sprache der modernen Strukturmathematik vergleichen, wobei wir zu Veranschaulichung auf die beigegeführten Reproduktionen von Keplers Abbildungen verweisen.

Die erste Schlüsselfrage ist die: Was ist in Keplers Definition einer ebenen Kongruenz mit einer "Figur" gemeint. Natürlich ist diese Art der Fragestellung schon selbst problematisch. Ich habe ja vorher versucht, deutlich zu machen, dass die Philosophen und Mathematiker der Antike einen philosophisch bestimmten Begriff von Figur oder Gestalt hatten, den sie in konkreten Situationen in genauen mathematischen Definitionen in vielfältiger Weise konkretisieren konnten. Das gleiche gilt auch noch für einen Mathematiker wie Kepler. Heute scheuen sich viele Mathematiker, einen solchen umfassenden Begriff zu verwenden, der sich in dieser Weite und mit dieser Bedeutung in der Sprache der modernen Strukturmathematik selbstverständlich gar nicht formal fassen lässt. Der Preis für solche Selbstbeschränkung ist hoch. Umfassende Forschungsprogramme können dann gar nicht mehr ausgesprochen werden. Ein Satz wie etwa der folgende zentrale Satz aus dem Erlanger Programm von Felix Klein ist dann nicht mehr möglich:

Als Verallgemeinerung der Geometrie entsteht so das folgende umfassende Problem:

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörenden Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden. [222, p. 463 (GA 1), Hervorhebung im Original]

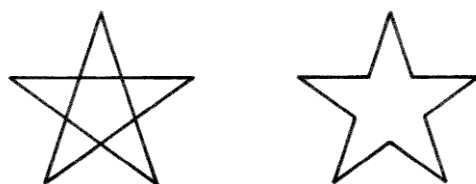
Von den drei Schlüsselbegriffen in diesem Satz sind zwei, nämlich “Mannigfaltigkeit” und “Gruppe” im 19. Jahrhundert entstanden und in diesem in vielfältiger Weise differenziert worden. Es sind Begriffe von großer vereinheitlichender Kraft, die zum Kernbereich der modernen Strukturmathematik gehören. Der dritte Schlüsselbegriff “Gebilde” ist nicht formal gefasst worden und wird es nie werden, denn das Wort “Gebilde” meint wohl nichts anderes als “Gestalt” oder “Figur” und zielt auf das eigentlich Schöpferische in der Mathematik. Und es ist damit mehr gemeint – wenn auch vielleicht nicht letzten Endes – als etwa mit “Ding” oder “geometrisches Objekt”.

Wenn wir nun aber doch versuchen, Keplers Idee der “Congruentia In Plano” im Sinne moderner mathematischer Definitionen formal zu fassen, können wir versuchen, den folgenden Weg zu gehen. Wir beginnen mit einer weit gefassten Definition dessen, was wir unter einer “Flächeneinteilung” verstehen wollen. Dazu verwenden wir diejenigen Begriffe der modernen Strukturmathematik, die zur qualitativen Beschreibung geometrischer Situationen geschaffen worden sind, also topologische Begriffe und den Begriff der Mannigfaltigkeit. Dieser Begriff von Flächeneinteilung ist allerdings so allgemein, dass die Stücke, in welche die Flächen eingeteilt werden, von einem Mathematiker wie Kepler wohl kaum als “Figuren” erkannt worden wären. Um zu schönen Figuren zu kommen, ist es daher nötig, diesen allgemeinen Begriff zu differenzieren und zu konkretisieren, indem man für die Art der Elemente der Flächeneinteilung zusätzliche Bedingungen formuliert, wie Kepler selbst das auch schon tut.

Dabei verfügen wir heute über eine außerordentliche Vielfalt von Möglichkeiten der Differenzierung. Man bekommt einen guten Eindruck von dieser Vielfalt schöner kombinatorischer Geometrie, wenn man das überaus reichhaltige Buch “Tilings and Patterns” von B. Grünbaum und G.C. Shephard studiert [166]. Im folgenden stütze ich mich darauf und vor allem auf

die Arbeiten von Andreas Dress, in denen ich eine glückliche Verbindung der “Freude an der Gestalt” mit modernem Denken in Strukturen sehe.

Die erste Frage also an Keplers Definition war die nach der Bedeutung von “Figur”. Eine zweite nicht unwichtige Frage ist die nach der Bedeutung des Wortes “Ecke” in seiner Definition. Solange die zusammengefügte ebenen Figuren konvexe Polygone sind, gibt es kein Problem: Ihre Ecken sind eindeutig bestimmt. Bei nicht konvexen Polygonen aber gibt es wirklich ein Problem. Was sind – beispielsweise – die Ecken des Pentagramms der Pythagoreer? Die folgende Zeichnung deutet zwei Möglichkeiten an, ihre Ecken zu definieren:

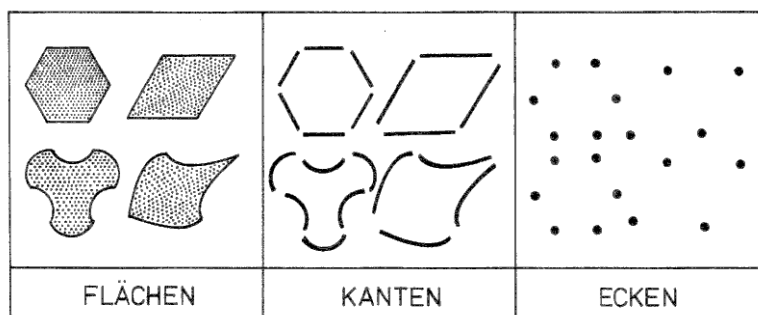


In Keplers Flächenteilungen der Ebene kommen Figuren wie die rechte vor. Aber bei seiner Behandlung der Polyeder stoßen wir auch auf die andere Figur, die linke.

Andererseits verlangt Kepler aber bei ebenen Kongruenzen, dass in einer Ecke mindestens drei Flächen zusammenstoßen sollen. In diesem Sinne wären also die einspringenden Ecken des Sternfünfecks in seinen Figuren nicht als Ecken der Teilung anzusehen. Wir ziehen daraus den Schluss, dass im allgemeinen die Definition der Ecken der Flächenteilung nicht aus derjenigen der Ecken der Flächenstücke abzuleiten ist, sondern umgekehrt zum Begriff der Flächenteilung gehört.

Wir beginnen damit, die Elemente zu beschreiben, in die wir die Fläche zerlegen wollen. Unter einer Fläche verstehen wir dabei eine zweidimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit M ohne Rand, z.B. die euklidische Ebene oder die 2-Sphäre. Die Elemente der Teilung werden abgeschlossene zusammenhängende Teilmengen von M sein. Wir benötigen Elemente von drei verschiedenen Arten, die wir “Ecken”, “Kanten” und “Flächen” der Teilung nennen. Als Ecken einer Teilung kommen alle Punkte von M

in Betracht. Als Kanten einer Teilung kommen alle solchen Teilmengen von M in Betracht, die homöomorph zu einem abgeschlossenen Intervall sind. Als Flächen einer Teilung kommen alle solchen Teilmengen in Betracht, die homöomorph zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe sind.



Wir können diese Elemente t einer Teilung T als null-, ein- oder zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand auffassen. Der Rand ∂t ist bei Punkten leer, besteht bei Kanten aus zwei Punkten und ist bei den Flächen homöomorph zu einer Kreislinie. Als Inneres t° eines Elementes t bezeichnen wir das Komplement des Randes, also $t^\circ = t - \partial t$. Jetzt sind wir bereit für eine moderne Definition von Flächenteilungen.

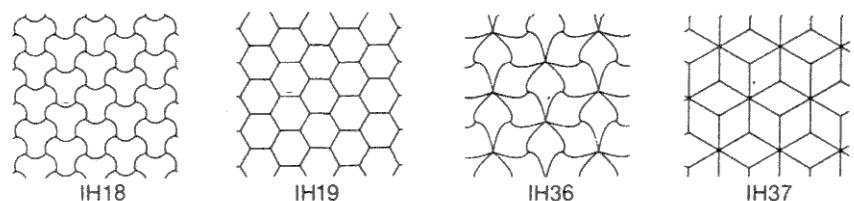
Definition:

Eine Flächenteilung einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine Menge \mathcal{T} von Teilmengen von M mit folgenden Eigenschaften:

- (0) \mathcal{T} ist eine Menge von Ecken, Kanten und Flächen im obigen Sinne.
- (1) Diese Elemente bilden bei Übergang zu ihrem Inneren eine disjunkte lokal endliche Zerlegung $M = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} t^\circ$.
- (2) Der Durchschnitt von je zwei Elementen von \mathcal{T} ist eine Vereinigung von endlich vielen Elementen von \mathcal{T} .
- (3) Der Rand jedes Elementes von \mathcal{T} ist eine Vereinigung von endlich vielen Elementen von \mathcal{T} .
- (4) Jede Ecke von \mathcal{T} liegt in mindestens drei Flächen von \mathcal{T} . Jede Fläche von \mathcal{T} enthält mindestens drei Ecken von \mathcal{T} .

Die folgende Figur zeigt vier Beispiele von Flächenteilungen der euklidischen Ebene:

- (a) Die klassische reguläre Teilung in Sechsecke,
- (b) die Teilung in Rhomben, welche durch Aneinanderlegen von zwei gleichseitigen Dreiecken entstehen. Diese Teilung findet man schon bei Kepler (Figur C).
- (c) die Teilung 1H18 und
- (d) die Teilung 1H36 in dem Buch von Grünbaum und Shephard.



Man sieht sofort, dass die Art und Weise, wie die Punkte, Kanten und Flächen dieser Teilungen aneinandergrenzen, für jeweils zwei dieser Figuren gleich ist. Diese kombinatorische Struktur kann man sehr einfach und schön fassen, indem man auf der Menge \mathcal{T} der Elemente der Teilung wie folgt eine Partialordnung einführt:

$$t' \leq t \Leftrightarrow t' \subseteq t$$

Die Menge \mathcal{T} ist die disjunkte Vereinigung $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ der Mengen \mathcal{T}_0 bzw. \mathcal{T}_1 bzw. \mathcal{T}_2 der Ecken bzw. Kanten bzw. Flächen. Diese Zerlegung gewinnt man sofort aus der Partialordnung zurück: Die Flächen sind die maximalen Elemente, die Ecken die minimalen und die Kanten die übrigen Elemente. Die Ecken bzw. Kanten einer Fläche $t \in \mathcal{T}_2$ (bezüglich der Teilung \mathcal{T}) sind per definitionem die $t' \in \mathcal{T}_0$ bzw. $t' \in \mathcal{T}_1$ mit $t' \leq t$.

Bei den obigen Beispielen von Flächenteilungen haben also wie gesagt je zwei die gleiche kombinatorische Struktur. Sie unterscheiden sich aber in anderer Hinsicht, insbesondere hinsichtlich ihrer Symmetrie. So besitzt die Rhombeneinteilung Eckpunkte, so dass eine Drehung um diesen Punkt um

$\pi/3$ die Teilung mit sich selbst zur Deckung bringt. Für die Teilung IH36 gilt das hingegen nicht. Natürlich erhebt sich hier gleich die Frage, was man denn unter Symmetrie zu verstehen hat. Die natürlichste Definition bei Teilungen einer euklidischen Ebene wäre wohl, dass man als Symmetrien alle Isometrien der Ebene zulässt, welche die Teilung in sich überführen, d.h. jedes Element von \mathcal{T} auf ein Element von \mathcal{T} abbilden. Sie induzieren dann natürlich eine ordnungserhaltende bijektive Abbildung von \mathcal{T} auf sich. Diese Symmetrien bilden natürlich eine Gruppe, die **Symmetriegruppe der Teilung** $Sym(\mathcal{T})$. Man könnte aber auch weniger oder mehr Abbildungen als Symmetrien zulassen, zum Beispiel nur orientierungserhaltende Isometrien oder affine Abbildungen oder sogar Homomorphismen. Schließlich könnte man die Geometrie beinahe ganz vergessen und nur die Gruppe der ordnungserhaltenden bijektiven Abbildungen der abstrakten partialgeordneten Menge \mathcal{T} auf sich selbst betrachten. Es ergibt sich so ein ganzes Spektrum von Möglichkeiten, die kombinatorische Geometrie mit dem Symmetriegriff zu verbinden. Wir wollen aber hier bei den klassischen Isometrien bleiben und die Diskussion der anderen Möglichkeiten auf später verschieben, wenn wir genügend viel Theorie entwickelt haben.

Die Rhombenteilung und die Teilung IH36 haben also die gleiche kombinatorische Struktur, aber verschiedene Symmetriegruppen. Man kann beweisen, dass es keine Teilung durch lauter kongruente konvexe Polygone gibt, so dass die Ecken und Kanten dieser Polygone im üblichen Sinn gerade die Ecken und Kanten der Teilung sind und dass die Teilung den kombinatorischen Typ und die Symmetriegruppe von IH36 hat (Grünbaum und Shephard [166, 9.1]). Wenn man also alle Möglichkeiten der Kombination von kombinatorischer Struktur und Symmetrietyp realisieren will, muss man auch Teilungen durch Figuren zulassen, die durch gekrümmte Linien begrenzt sind – und solche Figuren können ja auch schön sein. Oder man kann natürlich nicht konvexe Polygone nehmen, wenn man zulässt, dass einige ihrer (geometrisch definierten) Eckpunkte keine Ecken der Teilung sind.

Trotzdem ist es naheliegend, zunächst einmal Teilungen zu betrachten, so dass alle Flächen der Teilung konvexe Polygone sind, und dass die Kanten und Ecken der Teilung genau die Kanten und Ecken dieser konvexen

Polygone im üblichen Sinn sind. Wir wollen eine solche Flächenteilung der euklidischen Ebene eine “**konvexe Polygonteilung**” nennen. Damit haben wir Keplers erste Definition für unsere Zwecke ausreichend diskutiert. Seine Definitionen 2 und 3 beziehen sich ebenso wie einige weitere auf die Homogenität und Regelmäßigkeit der Teilungen und ihrer Elemente. Sie lauten – in meiner hoffentlich nicht zu freien Übersetzung:

Die Kongruenz heißt vollkommen, wenn in jedem Punkt die Ecken aller dort zusammenstoßenden Figuren auf die gleiche Art zusammenstoßen, so dass die Anordnung dieser auf die gleiche Art zusammenstoßenden Figuren ins Unendliche fortgesetzt werden kann.

Die Kongruenz heißt vollkommenst, wenn auch die in der Ebene zusammenstoßenden Figuren von gleicher Art sind. [213, p. 68]

Um diese Definitionen Keplers als Definitionen im heutigen Sinne zu interpretieren, klären wir zunächst, was wir unter der Anordnung der in einer Ecke zusammenstoßenden Figuren (“anguli figurarum plurium singuli ... ad punctum unum concurrentes”) verstehen. Wir interpretieren diesen “concurus” durch den Begriff der Eckenfigur. Die “**Eckenfigur**” zu einer Ecke t der Teilung \mathcal{T} ist die Menge $\{t_1, \dots, t_k\}$ aller Kanten $t_i \in \mathcal{T}_1$, so dass t eine Ecke von t_i ist, d.h. $t \subset t_i$. Diese Eckenfiguren sind Teilmengen der euklidischen Ebene, und daher ist für sie die Kongruenzrelation im üblichen Sinn definiert: Die Eckenfiguren von zwei Ecken t und t' sind kongruent, wenn es eine Isometrie der Ebene gibt, welche t in t' überführt und die Kanten t_1, \dots, t_k der Eckenfigur von t in die Kanten t'_1, \dots, t'_k der Eckenfigur t' . Dual zum Begriff der Eckenfigur ist der Begriff der “**Flächenfigur**”. Die Flächenfigur einer Fläche $t \in \mathcal{T}_2$ ist die Menge (t_1, \dots, t_k) der Kanten $t_i \subset t$ von t . Die Flächenfiguren zu t und t' heißen kongruent, wenn es eine Isometrie der Ebene gibt, welche t in t' überführt und die Kanten von t in die Kanten von t' .

Damit erhalten wir eine erste Interpretation von Keplers Definitionen 2 und 3.

Definition: (i) Eine Flächenteilung der euklidischen Ebene heißt **monogonal**, wenn ihre Eckenfiguren alle zueinander kongruent sind.

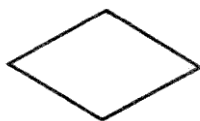
(ii) Eine Flächeneinteilung der euklidischen Ebene heißt **monoedrisch**, wenn ihre Flächenfiguren alle zueinander kongruent sind.

In der Definition der monogonalen und der monoedrischen Flächeneinteilungen haben wir nicht verlangt, dass die Isometrien, welche die Eckenfiguren bzw. Flächenfiguren ineinander überführen, gleichzeitig die gesamte Teilung in sich überführen, d.h. zur Symmetriegruppe der Teilung gehören. Wenn wir das doch verlangen, erhalten wir eine zweite, weniger großzügige Interpretation von Keplers Definitionen.

Definition: (i) Eine Flächeneinteilung \mathcal{T} heißt **isogonal**, wenn die Symmetriegruppe von \mathcal{T} transitiv auf der Eckenmenge \mathcal{T}_0 operiert.

(ii) Eine Flächeneinteilung \mathcal{T} heißt **isoedrisch**, wenn die Symmetriegruppe von \mathcal{T} transitiv auf der Flächenmenge \mathcal{T}_2 operiert.

Es ist klar, dass eine isogonale Flächenteilung monogonal ist und eine isoedrische monoedrisch. Die Umkehrungen gelten aber nicht, und zwar auch dann, wenn wir uns auf konvexe polygonale Unterteilungen beschränken. Da dieser Punkt für die Klärung des Verhältnisses von kombinatorischen und gruppentheoretischen Ansätzen wichtig ist, wollen wir ihn an Hand einiger einfacher Beispiele etwas genauer diskutieren. Wir beginnen mit der Betrachtung monoedrischer Flächenteilungen, wobei wir als Flächenfigur einen besonders einfachen Rhombus zugrunde legen, nämlich den der durch Aneinanderlegen von zwei gleichseitigen Dreiecken entsteht.



Diese Flächenfigur verwendet ja schon Kepler als Element einer ebenen Flächenteilung (Figur G, Abb. 1.43). Es ist nicht schwer, folgendes zu zeigen: Bis auf isometrische Kongruenz gibt es genau vier isoedrische

Flächenteilungen mit einem gegebenen Rhombus dieser Art. Die beigegebene Bildtafel 1.46 zeigt diese 4 isoedriscen Flächenteilungen. Sie zeigt aber außerdem zwei Beispiele von monoedriscen, aber nicht isoedriscen Flächenteilungen mit diesem Rhombus. Genauer gesagt zeigt sie Ausschnitte aus solchen Teilungen, denn es sind mindestens bei dem einen Beispiel viele Fortsetzungen denkbar. Dieses Beispiel macht sofort klar, dass es überabzählbar viele monoedrische, aber nicht isoedrische Flächenteilungen der Ebene durch diesen Rhombus gibt. Man teile zunächst die Ebene in parallele Streifen, deren Breite gleich dem Abstand gegenüberliegender Kanten des Rhombus ist. Jeden dieser Streifen fülle man mit Rhomben aus, und zwar so, dass auf den Seitenlinien der Streifen durch die Kanten des Rhombus die gleiche Teilung in Intervalle induziert wird. Numeriert man die Streifen fortlaufend durch ganze Zahlen, dann liefern die Kantenrichtungen der Rhomben in den Streifen eine zweifach unendliche $0, 1$ -Folge. Die Menge dieser $0, 1$ -Folgen hat bekanntlich die Kardinalität des Kontinuums, und deswegen gibt es überabzählbar viele isometrische Kongruenzklassen von monoedriscen, aber nicht isoedriscen Flächenteilungen durch diesen einen Rhombus. Allerdings haben die eben konstruierten Teilungen trotzdem alle die gleiche kombinatorische Struktur, wenn man von ihrer Symmetriegruppe absieht, und zwar die kombinatorische Struktur der drei isoedriscen Teilungen, wo an jeder Ecke vier Rhomben zusammenstoßen. Aber es gibt auch monoedrische Teilungen, die schon rein kombinatorisch verschieden von den vier isoedriscen Teilungen sind. Das letzte Bild auf der Tafel ist ein Beispiel dafür. Es entsteht aus der ersten Teilung (Keplers Figur G), indem jeder Rhombus von Keplers Teilung durch seine beiden Mittellinien in vier kleinere Rhomben zerlegt wird.

Man kann dies Beispiel auch so interpretieren, dass es aus der regulären 6-Eckteilung durch eine Unterteilung des regulären 6-Ecks in 12 Rhomben entsteht. Damit haben wir aber mehrere wesentlich verschiedene Unterteilungen des regelmäßigen Sechsecks in 12 Rhomben zur Auswahl, welche auf den 6-Eckkanten die gleiche Teilung induzieren, nämlich die gerade benutzten Teilungen und Keplers Figur G.

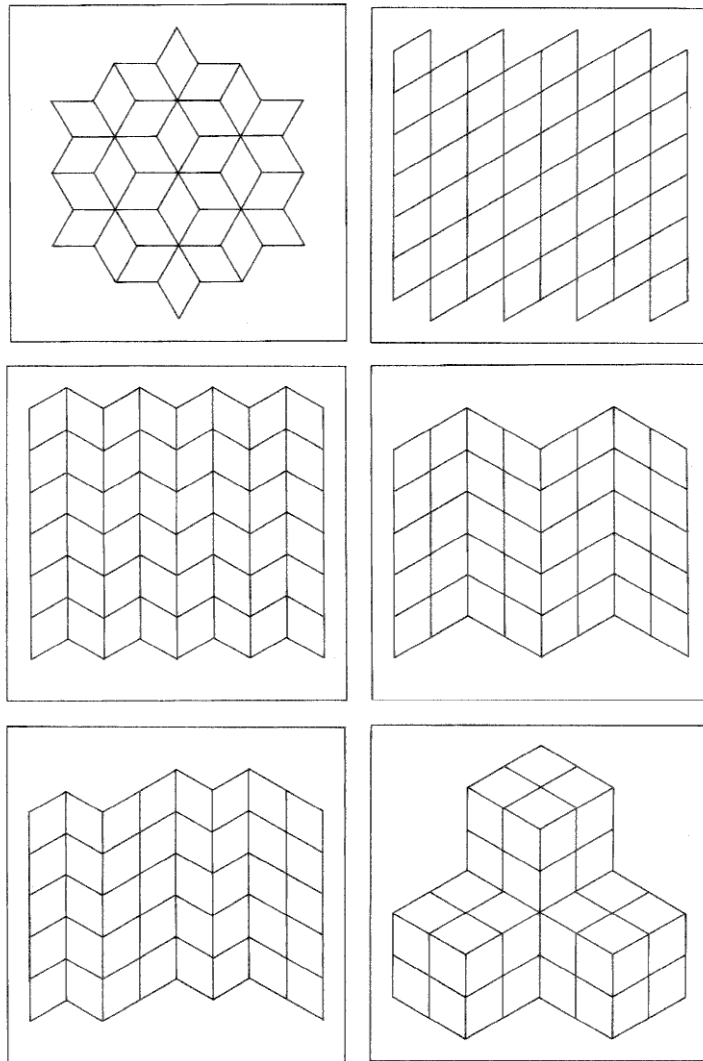
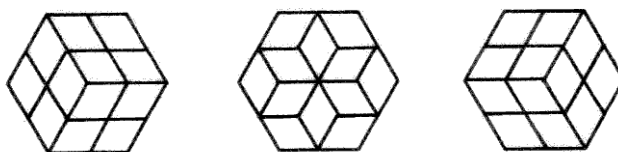
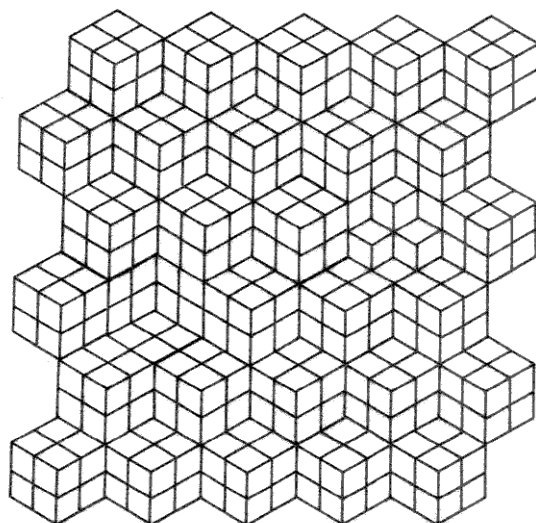


Abbildung 1.46: Monoedrische Flächenteilungen der Ebene durch Rhomben
Oben und Mitte: Die vier isoedrischen Teilungen
Unten: Ausschnitte aus zwei nichtisoedrischen Teilungen

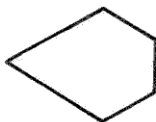


Gehen wir von einer gegebenen regulären Sechseckteilung aus und unterteilen wir jedes der unendlich vielen Sechsecke wahlweise durch eine dieser Unterteilungen! Jede Wahl ergibt eine monoedrische durch Rhomben. Auf diese Weise erhalten wir überabzählbar viele kombinatorisch verschiedene monoedrische Ebenenteilungen durch Rhomben. Die beigegebene Figur zeigt ein Beispiel, bei dem alle Sechsecke bis auf zwei auf die gleiche Weise, das heißt translationsinvariant unterteilt sind, während für die beiden Ausnahmesechsecke die beiden anderen Unterteilungen verwandt wurden. Natürlich kann man auf ähnliche Weise auch schon mit den beiden Unterteilungen eines Sechsecks in drei Rhomben überabzählbar viele kombinatorisch verschiedene monoedrische Unterteilungen der Ebene durch Rhomben konstruieren.

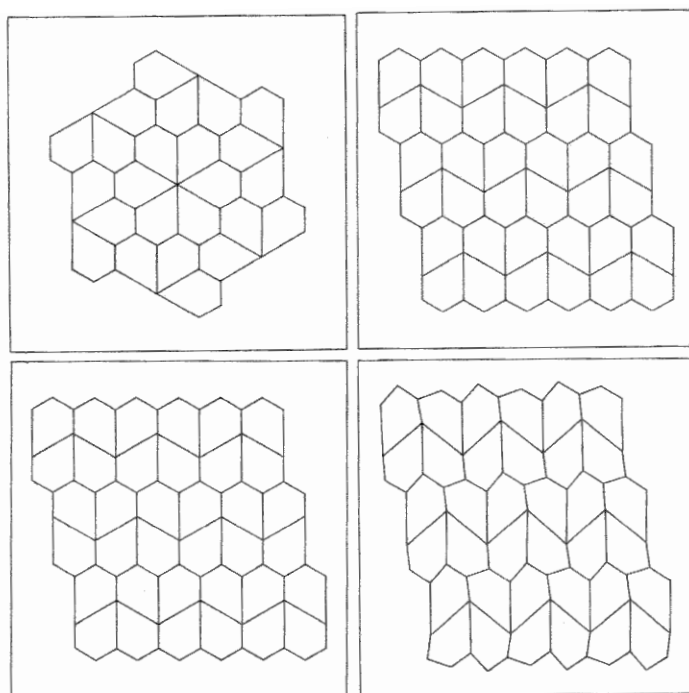


Betrachten wir nunmehr monoedrische Zerlegungen der Ebene durch 5-Ecke. Wir beginnen mit einer Flächenfigur, die man aus dem eben betrachteten Rhombus durch Abschneiden eines gleichseitigen Dreiecks mit der halben Kantenlänge des Rhombus erhalten kann, oder auch durch geeignetes

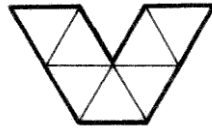
Aneinanderlegen von 7 gleichseitigen Dreiecken.



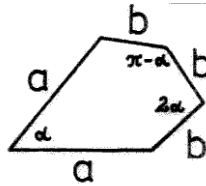
Mit dieser Figur kann man wieder mehrere isoedrische und überabzählbar viele monoedrische, aber nicht isoedrische Flächenteilungen herstellen. Die ersten drei Figuren der nächsten Figurengruppe zeigen drei Beispiele.



Diese Beispiele regen zu vielen Fragen an. Zum Beispiel kann man fragen: Mit welchen anderen Flächenfiguren, die durch Aneinanderlegen von gleichseitigen Dreiecken entstehen, kann man die Ebene monoedrisch teilen? Eine allgemeine Antwort ist nicht bekannt. Man weiß, dass mit Figuren aus weniger als 7 Dreiecken stets eine monoedrische Teilung möglich ist. Aus 7 Dreiecken kann man 24 verschiedene Figuren herstellen, 2 konvexe und 22 nicht konvexe. Von diesen gestattet nur eine keine monoedrische Teilung:



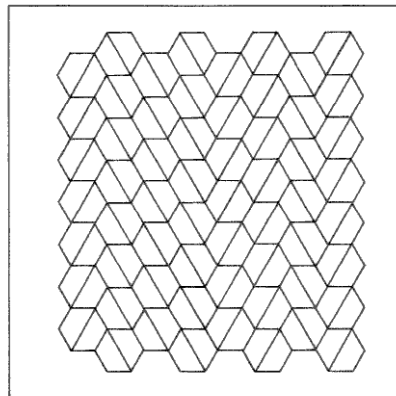
Mehr darüber findet man im Buch von Grünbaum und Shephard, Abschnitt 9.4. Eine andere, vielleicht noch faszinierendere Frage ist die folgende: Welche konvexen 5-Ecke gestatten eine monoedrische Teilung der Ebene? Eine vollständige Antwort auf diese Frage ist nicht bekannt.¹² Wir haben eben ein Beispiel für ein 5-Eck gesehen, das sowohl isoedrische als auch nicht-isoedrische Teilungen gestattet. Es gibt aber auch 5-Ecke, welche zwar monoedrische, aber keine isoedrischen Teilungen der Ebene gestatten. Es gibt mehrere Typen solcher 5-Ecke, die jeweils durch spezielle Bedingungen für die Winkel und Kanten charakterisiert sind. Die folgende Figur zeigt ein Beispiel für ein solches Fünfeck aus Grünbaums Buch, wo man in 9.3.1 mehr darüber findet.



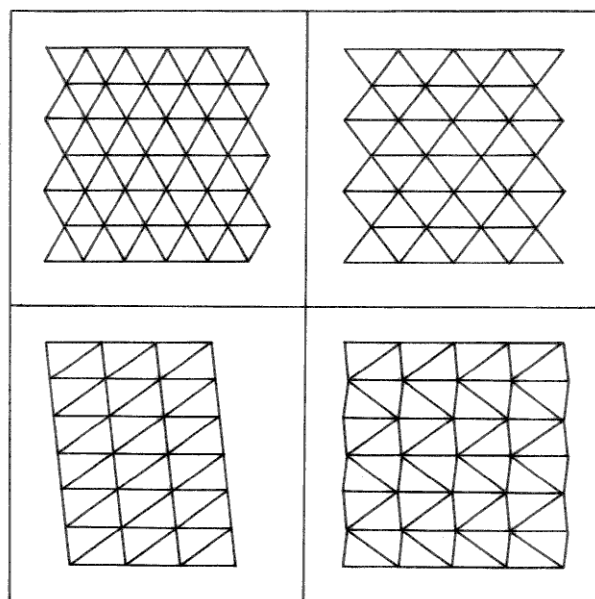
Die vierte Figur der obigen Figurengruppe zeigt eine monoedrische, aber nicht isoedrische Teilung der Ebene durch dieses 5-Eck. Diese einfachen Beispiele machen bereits deutlich, dass die Untersuchung der monoedrischen Flächenteilungen eine unübersehbare Fülle von reizvollen kombinatorisch-geometrischen Problemen aufwirft, da für deren Lösung jedoch im allgemeinen keine Theorie und erst recht kein Algorithmus existiert, so dass

¹²*Anm. Hrsg.:* Grünbaum/Shepard geben 13 5-Ecke an [166, Abschn. 9.3.1]. Bis 2015 stieg die Anzahl der bekannten 5-Ecke, die eine monoedrische Flächenteilung gestatten, auf 15. Das Ergebnis einer Studie von Michaël Rao mit einem “extensive search” Algorithmus spricht dafür, dass die Liste nun vollständig ist [298]. Eine endgültige Bestätigung, die den Kriterien computer-gestützten Beweisens genügt, steht zwar noch aus, wird aber von den daran beteiligten Experten erwartet [379]. Dank an Rolf Bardeli für den Hinweis auf diese Ergebnisse.

man für jeden Typ von Problem neue Ideen entwickeln muss. Um zu einigermaßen übersichtlichen Klassifikationsergebnissen zu kommen, muss man zusätzliche Bedingungen stellen. Eine Möglichkeit ist es, statt der monoedrischen Flächeneinteilungen nur isoedrische zu betrachten, also den gruppentheoretischen Symmetriebegriff ins Spiel zu bringen. Eine andere, zu Keplers Zeiten näher liegende Möglichkeit ist die, für gewisse Elemente der Teilung zusätzliche Regularitätseigenschaften zu fordern. Eine dritte Möglichkeit besteht darin, Homogenitätseigenschaften der Teilung für verschiedene Typen von Elementen zu kombinieren. Mir scheint, dass Kepler eine Kombination der beiden letztgenannten Möglichkeiten im Sinn gehabt hat. Jedenfalls könnte man seine Definition 3 zunächst so interpretieren, dass Teilungen “vollkommenst” genannt werden, wenn sie gleichzeitig monogonal und monoedrisch sind. Diese Forderung ist bereits sehr einschränkend. Es gilt nämlich: Jede monogonale und monoedrische Flächenteilung der Ebene ist kombinatorisch äquivalent zu einer der drei regulären Flächenteilungen durch reguläre Dreiecke, Vierecke oder Sechsecke, und sie ist durch einen Homomorphismus der Ebene in eine reguläre Teilung überführbar. Tatsächlich folgt diese Aussage sogar aus noch schwächeren Homogenitätsvoraussetzungen (Grünbaum und Shephard, loc. cit. 4.3.1). Wohlgemerkt: Nur der kombinatorische Typ ist durch die Bedingung “monogonal und monoedrisch” bis auf diese 3 Möglichkeiten bestimmt. Bis auf Ähnlichkeit in der euklidischen Ebene gibt es selbst für sehr einfache Flächenfiguren überabzählbar viele verschiedene monogonale und monoedrische Flächenteilungen. Die beigefügte Figur zeigt dies für die Flächenfigur, die durch Aneinanderlegen von drei gleichseitigen Dreiecken entsteht. Durch diagonale Teilung der Sechsecke der regulären Sechseckteilung erzeugt man überabzählbar viele monogonale und monoedrische Ebenenteilungen, die alle den kombinatorischen Typ der regulären Vierecksteilung haben.



Aber auch dann, wenn man Keplers Definition von vollkommensten Teilungen in dem stärker einschränkenden Sinne auslegt, dass solche Teilungen isogonal und isoedrisch sein sollen, gibt es bei gegebenem kombinatorischen Typ noch mehrere Möglichkeiten für die Symmetrie der Teilung. Beispielsweise gibt es 4 Symmetrietypen für konvexe polygonale Teilungen durch Dreiecke, die isogonal und isoedrisch sind. Die beigegebene Figur zeigt sie.



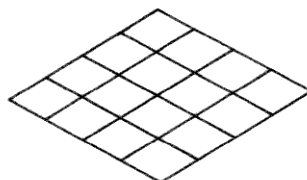
Von diesen vier Dreiecksteilungen hat eine offenbar den höchsten Grad

von Regelmäßigkeit. Entsprechendes gilt für die Teilungen durch Vierecke bzw. durch Sechsecke: Es gibt jeweils eine Teilung von höchster Regelmäßigkeit. Dies ist offensichtlich. Nicht offensichtlich ist hingegen, wie man diese Regelmäßigkeit am besten durch eine einheitliche und verallgemeinerungsfähige Definition erfassen soll.

Für Kepler war angesichts der Tradition der euklidischen Geometrie und seines Ansatzes zur Begründung der Harmonielehre klar, dass die Flächenfiguren der vollkommensten Teilung reguläre n -Ecke sein mussten. In diesem Sinne verstehe ich seinen Satz:

Der ebene Raum lässt sich aufs vollkommenste nur auf dreierlei Weise mit ein und derselben ebenen Figur ausfüllen: mit jeweils 6 Dreiecken, 4 Vierecken oder 3 Sechsecken.

Wenn die Flächenfiguren von vornherein als regulär vorausgesetzt werden, führen viele verschiedene mögliche Definitionen einer “vollkommenen” Teilung zum gleichen Ergebnis. Das ist jedoch nicht so, wenn man zunächst einmal auch andere Figuren zulässt. Kepler selbst erwähnt in diesem Zusammenhang die Teilung durch Rhomben (seine Figur G) und nennt auch diese “vollkommenst”. Betrachten wir nun das Beispiel der einfachsten Rhombenteilung, die aus einem Rhombus durch Parallelverschiebung in den beiden Kantenrichtungen entsteht:



Diese Teilung \mathcal{T} ist isogonal und isoedrisch, und die Symmetriegruppe der Teilung überführt außerdem auch jede Kante in jede andere. Die Symmetriegruppe von \mathcal{T} operiert also transitiv auf den Mengen \mathcal{T}_0 , \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 der Ecken, der Kanten und der Flächen. Trotzdem hat diese Teilung offenbar nicht den höchstmöglichen Grad von Regelmäßigkeit, der bei dieser kombinatorischen Struktur möglich ist. Diesen hat nur die Teilung durch

Quadrate. Wie kann man nun diesen unterschiedlichen Grad von Symmetrie erfassen, ohne die Regelmäßigkeit der Flächenfigur explizit vorauszusetzen? Das grundlegende Datum einer Teilung \mathcal{T} ist die Menge $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ mit der durch die Inklusion definierten Partialordnung. Die Symmetriegruppe operiert auf \mathcal{T} . Wir haben gesehen, dass die Transitivität auf \mathcal{T}_0 , auf \mathcal{T}_1 und auf \mathcal{T}_2 noch nicht genug ist. Es genügt nicht, die Ecken, Kanten und Flächen einzeln zu betrachten. Wir müssen die zwischen diesen Elementen bestehenden Inklusionsrelationen berücksichtigen. Wir definieren:

Eine **maximale Fahne** einer Teilung \mathcal{T} ist ein Tripel (t_0, t_1, t_2) mit $t_0 < t_1 < t_2$, also eine maximale total geordnete Teilmenge von Teilungselementen.

Und nun ist es eine wichtige Einsicht, dass wir die drei regulären Ebenenteilungen durch die folgende Definition charakterisieren können:

Definition:

Eine Flächenteilung \mathcal{T} der euklidischen Ebene heißt **regulär**, wenn ihre Symmetriegruppe transitiv auf der Menge der maximalen Fahnen von \mathcal{T} operiert.

Dieser Ansatz, die Regelmäßigkeit einer Flächenteilung \mathcal{T} durch die Operation der Symmetriegruppe auf der Menge der maximalen Fahnen von \mathcal{T} zu beschreiben, wird sich für unsere ganze weitere Arbeit als grundlegend erweisen, nicht nur für die Flächenteilungen der Ebene, sondern auch für die Flächenteilungen der Sphäre. Er ist ganz allgemein für die Untersuchung der Raumeinteilungen \mathcal{T} von Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension brauchbar. Er hängt eng mit der Idee der baryzentrischen Unterteilung zusammen, auf deren Wichtigkeit wir schon im Bericht über Platons Behandlung der regulären Polyeder hingewiesen haben. Wir wollen aber im Moment diesen Ansatz nicht weiter verfolgen, sondern zu Keplers Untersuchung der Teilungen der Ebene zurückkehren.

Keplers Verallgemeinerung der vollkommensten Flächenteilungen, also der regulären, zu Flächenteilungen, die "vollkommen niederen Grades" sind, ist ganz analog zu dem von Pappos überlieferten Übergang von den regulären zu den Archimedischen Polyedern. Beibehalten wird die Bedingung, dass die Ecken "von einer Art" sein sollen, und beibehalten wird ferner die Bedin-

gung, dass die Flächenfiguren reguläre Polygone sein sollen. Aufgegeben wird die Forderung, dass auch die Flächen alle “von einer Art” sein sollen. Je nach Interpretation der Bedingung “von einer Art” ergeben sich damit die beiden folgenden Definitionen.

Definition:

\mathcal{T} sei eine konvexe polygonale Flächeneinteilung der euklidischen Ebene.

- (i) \mathcal{T} ist eine **Archimedische Flächeneinteilung**, wenn \mathcal{T} monogonal ist und alle Flächenfiguren reguläre Polygone sind.
- (ii) \mathcal{T} ist eine **uniforme Flächeneinteilung**, wenn \mathcal{T} isogonal ist und alle Flächenfiguren reguläre Polygone sind.

Es ist klar, dass die uniformen Flächenteilungen Archimedisch sind. Die Umkehrung gilt auch, aber dies folgt erst aus Keplers Klassifikation der Archimedischen Flächenteilungen. Wir wollen den Gedankengang Keplers, der ihn zu dieser Klassifikation geführt hat, nachvollziehen, denn es handelt sich hier um das erste wichtige neue kombinatorisch-geometrische Resultat seit der Antike, und der Beweis ist eine schöne Kette von elementaren kombinatorisch-geometrischen Schlüssen.

Da eine Archimedische Teilung monogonal ist, liegt es nahe, mit einer Bestimmung der bei solchen Teilungen möglichen Eckenfiguren zu beginnen. Die Zahl der Kanten einer Eckenfigur sei k . Da die Flächenfiguren sämtlich reguläre Polygone sind, sind alle k Kanten gleich lang, und die Eckenfigur ist also eindeutig bestimmt durch die zyklische Folge der Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Kanten. Wenn zwei aufeinanderfolgende Kanten zu einem regulären n -Eck gehören, ist der Winkel zwischen ihnen natürlich $\pi(n-2)/n$. Insbesondere ist die Eckenfigur eindeutig bestimmt durch die Folge (n_1, \dots, n_k) der Eckenzahlen der an einer Ecke zusammenstoßenden k regulären n -Ecke, und umgekehrt ist das k -Tupel (n_1, \dots, n_k) durch die Eckenfigur bis auf zyklische Permutation und Umkehrung der Reihenfolge bestimmt. Wir nennen (n_1, \dots, n_k) das Ecken-Symbol der Archimedischen Teilung.

Was sind nun die möglichen Ecken-Symbole? Nach Definition gilt $k \geq 3$ und $n_i \geq 3$. Zu diesen durch die Definitionen verlangten vorgeschriebenen

Bedingungen tritt noch die folgende geometrische Bedingung: Die Summe der Winkel an einer Ecke muss gleich 2π sein. Das ist äquivalent zu der folgenden Bedingung für das Eckensymbol:

$$\boxed{\frac{n_1-2}{n_1} + \dots + \frac{n_k-2}{n_k} = 2 .}$$

Gesucht sind alle Lösungen dieser Gleichung durch natürliche Zahlen $n_i \geq 3$, wobei $i = 1, \dots, k$ und $k \geq 3$. Wir werden sehen, dass es bis auf zyklische Permutation und Umkehrung der Reihenfolge genau 21 Lösungen (n_1, \dots, n_k) gibt.

Die Bestimmung dieser Lösungen geht in 4 Stufen vor sich. In der ersten Stufe werden die möglichen Kardinalzahlen \varkappa der Menge $\{n_1, \dots, n_k\}$ bestimmt. In der zweiten Stufe werden für jedes \varkappa die möglichen Zahlen k bestimmt. In der dritten Stufe werden für jedes Paar (\varkappa, k) die möglichen Minima m in $\{n_1, \dots, n_k\}$ bestimmt. Für $\varkappa = 1, 2$ ergeben sich hieraus bereits alle zugehörigen Lösungen. Für $\varkappa = 3$ werden in der vierten Stufe für jedes Tripel (\varkappa, k, m) alle möglichen Minima n von $\{n_1, \dots, n_k\} - \{m\}$ bestimmt. Daraus ergeben sich dann leicht alle zugehörigen Lösungen.

Auf jeder Stufe beruht die Bestimmung der jeweils möglichen Zahlen \varkappa bzw. k bzw. m bzw. n auf folgendem Prinzip. Die Menge der Tupel (n_1, \dots, n_k) ist wie folgt partial geordnet: $(m_1, \dots, m_l) \leq (n_1, \dots, n_k)$, wenn es eine injektive Abbildung $\varphi : \{1, \dots, l\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ gibt mit $m_i \leq n_{\varphi(i)}$. Es sei $F(n_1, \dots, n_k) = (n_1 - 2)/n_1 + \dots + (n_k - 2)/n_k$. Dann folgt aus $(m_1, \dots, m_l) \leq (n_1, \dots, n_k)$ offensichtlich $F(m_1, \dots, m_l) \leq F(n_1, \dots, n_k)$. Hat man daher ein k -Tupel mit $F(n_1, \dots, n_k) < 2$ gefunden, dann ist jedes kleinere Tupel als Lösung ausgeschlossen. Ebenso ist für $F(n_1, \dots, n_k) > 2$ jedes größere Tupel ausgeschlossen. Auf diese Weise werden auf jeder Stufe durch geeignete Wahl von Vergleichstupeln alle diejenigen Zahlen ausgeschlossen, die nicht zu Lösungen führen. Die folgenden zwei Tabellen zeigen die Beweisstruktur mit den Lösungen sowie die dabei benutzte Liste von Vergleichs-Tupeln.

(0)	$2 < F(3, 4, 5, 5)$	(12)	$2 < F(5, 7, 7)$
(1)	$2 < F(3, 3, 3, 3, 3, 3)$	(13)	$2 < F(3, 3, 6, 7)$
(2)	$2 < F(3, 3, 3, 3, 3, 4)$	(14)	$2 > F(3, 3, 5, 7)$
(3)	$2 < F(3, 3, 3, 4, 5)$	(15)	$2 < F(3, 3, 5, 8)$
(4)	$2 < F(4, 4, 4, 5)$	(16)	$2 > F(3, 6, n)$
(5)	$2 < F(6, 6, 7)$	(17)	$2 < F(3, 12, 13)$
(6)	$2 > F(5, 6, 7)$	(18)	$2 > F(3, 11, 13)$
(7)	$2 < F(5, 6, 8)$	(19)	$2 < F(3, 11, 14)$
(8)	$2 < F(3, 3, 4, 4, 4)$	(20)	$2 < F(4, 8, 9)$
(9)	$2 > F(3, 3, 3, n)$	(21)	$2 > F(4, 7, 9)$
(10)	$2 > F(3, 4, 4, 4)$	(22)	$2 < F(4, 7, 10)$
(11)	$2 > F(4, 4, n)$		

Tabelle 1.1: Tabelle von Ungleichungen

$\varkappa = 1$	(1)	$k = 6$				(3, 3, 3, 3, 3, 3)	D		
		$k = 4$				(4, 4, 4, 4)	E		
		$k = 3$				(6, 6, 6)	F		
$\varkappa = 2$	(2)	$k = 5$	(4)	$m=3$	(8)	(3, 3, 3, 3, 6)	L		
						(3, 3, 3, 4, 4)	M		
						(3, 3, 4, 3, 4)	N		
		$k = 4$	(4)	$m = 3$	(9)(10)(0)	(3, 6, 3, 6)	P		
						(3, 3, 6, 6)*	R		
						(3, 12, 12)	S		
$k = 3$	(5)	$m = 3$	(11)	(4, 8, 8)	V				
		$m = 4$	(11)	(5, 5, 10)*	Z, Aa				
		$m = 5$	(12)(6)						
$\varkappa = 3$	(3)	$k = 4$	(4)	$m=3$	(0)(13)(14)(15)	$n = 4$	(3,4,3,12)*	Cc	
							(3,3,4,12)*	Dd	
							(3,4,6,4)	Ii	
							(3.4.4,6)*	Kk	
		$k = 3$	(6)(7)	$m=3$	(16)(17)(18)(19)	$n = 7$	(3,7,42)*		
							$n = 8$	(3,8,24)*	
							$n = 9$	(3,9,18)*	
							$n = 10$	(3,10,15)*	
$m=4$	(20)(21)(22)	$n = 5$	(4,5,20)*	Ll					
			$n = 6$	(4,6,12)	Mm				

Tabelle 1.2: Tabelle zur Bestimmung möglicher Eckenfiguren Archimedischer Teilungen.

In der 1., 3., 5. und 7. Spalte sind mögliche Werte von \varkappa, k, m und n angegeben. Die dazwischen liegenden Spalten geben die Nummern der Ungleichungen, durch deren Betrachtung die möglichen Werte der nächsten Spalte ermittelt werden. Die erste Spalte $\varkappa = 1, 2, 3$ folgt aus Ungleichung (0). Die vorletzte Spalte gibt die Lösungen der Gleichung $F(n_1, \dots, n_k) = 2$. Die mit einem Stern gekennzeichneten Lösungen sind nicht Eckensymbole einer Archimedischen Teilung. Die letzte Spalte gibt die Bezeichnung einiger zugehöriger Figuren von Kepler (Abb. 1.43 bis 1.45). Die in der Tabelle mit einem Stern gekennzeichneten Lösungen schließt man leicht mit den folgenden Argumenten aus. In allen Fällen enthält das k -Tupel einer solchen Lösung eine ungerade Zahl a als Komponente, nämlich $a = 3$ oder $a = 5$. Für $k = 3$ sind die anderen beiden Komponenten b, c des 3-Tupels voneinander verschieden. Dies führt sofort zu einem Widerspruch, da an die Seiten eines a -Ecks abwechselnd b -Ecke und c -Ecke angrenzen müssten, was bei ungeradem a unmöglich ist. Analog argumentiert man für die beiden 4-Tupel $(3, 4, 3, 12)$ und $(3, 4, 4, 6)$, da an die Dreiecksseiten hier abwechselnd b -Ecke und c -Ecke angrenzen müssten. Dabei ist im ersten Fall $(b, c) = (4, 12)$, und dies führt sofort zum Widerspruch. Im zweiten Fall ist $(b, c) = (4, 6)$. Es würden dann an einer Ecke des Dreiecks zwei 4-Ecke ohne gemeinsame Seite aneinanderstoßen, im Widerspruch zur Reihenfolge $(3, 4, 4, 6)$. Es bleiben noch zwei 4-Tupel der Form $(3, 3, b, c)$ mit $b, c \neq 3$. Hier müssten bei jedem Dreieck an zwei Seiten weitere Dreiecke aneinandergrenzen, also an einer Ecke 3 Dreiecke zusammenstoßen, im Widerspruch zu $b, c \neq 3$.

Für die übrig bleibenden 11 Lösungen existiert tatsächlich eine uniforme Flächenteilung der euklidischen Ebene. Dies sieht man in allen Fällen leicht mit elementargeometrischen Argumenten ein. Kepler sagt in der Vorrede zum II. Buch:

Über diese Kongruenz der Figuren also möchte ich in Kürze reden, da diese Darlegungen keineswegs schwierig sind und fast keines anderen Aufwandes bedürfen, als diese Figuren selber zu zeichnen.

Die Konstruktion der Archimedischen Flächenteilungen der Ebene durch Aneinanderfügen ihrer 2-dimensionalen Elemente, der regulären 3-Ecke

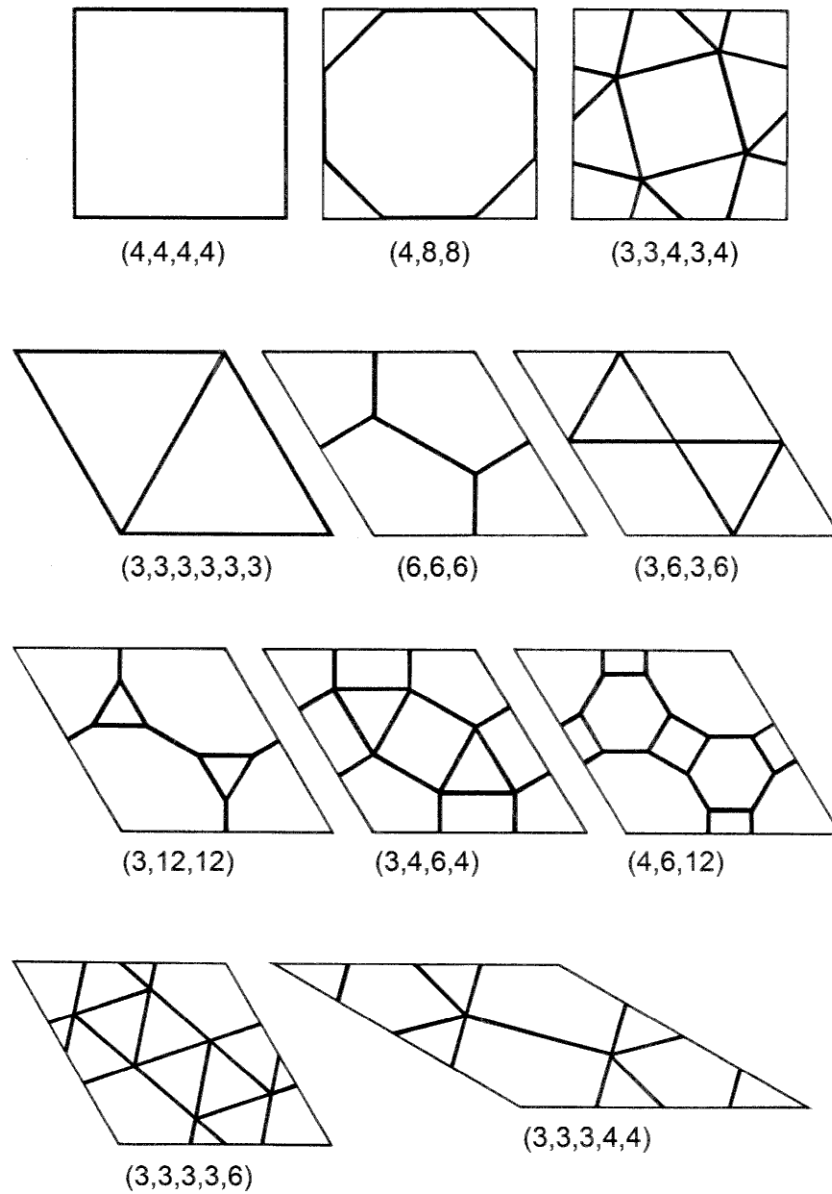


Abbildung 1.47: Die 11 Archimedischen Flächenteilungen der Ebene erzeugt durch Translation unterteilter Quadrate oder Rhomben

bzw. 4-Ecke, 6-Ecke, 8-Ecke oder 12-Ecke entsprechend dem Symbol ist sicher die natürlichste Konstruktion überhaupt. Diese Konstruktion ist kombinatorisch-geometrisch. Nachdem die Konstruktion gefunden worden ist, wird offenbar, dass die so konstruierten Flächenteilungen einen sehr hohen Grad von Symmetrie haben. In der Sprache der modernen Strukturmathematik kann man diese Beobachtung durch bestimmte Aussagen über die Symmetriegruppen dieser Flächenteilungen präzisieren. Obgleich von einer solchen Betrachtungsweise in Keplers Text – soweit ich sehe – noch fast nichts zu finden ist, wollen wir den Grundgedanken dieses Ansatzes doch schon hier andeuten. Für Einzelheiten sei auf die Ausführungen über kristallographische Gruppen im zweiten Teil des Buches verwiesen.¹³

Die Symmetriegruppe Γ einer Archimedischen Flächenteilung \mathcal{T} der euklidischen Ebene E ist eine Untergruppe der Isometriegruppe $I(E)$ von E , nämlich eben die Untergruppe derjenigen Isometrien, die \mathcal{T} in sich überführen. Die Untergruppe von $I(E)$, die aus allen Translationen von E besteht, bildet einen zweidimensionalen Vektorraum V . Wir betrachten die Gruppe $\Gamma_{\mathcal{T}} = \Gamma \cap V$ aller Translationen, die \mathcal{T} in sich überführen. $\Gamma_{\mathcal{T}}$ ist eine normale Untergruppe von Γ . Die Symmetriegruppen Γ der Archimedischen Flächenteilungen haben nun die folgende grundlegende Eigenschaft:

$\Gamma_{\mathcal{T}}$ ist ein **Gitter** in V , das heißt: Es gibt zwei linear unabhängige Vektoren v_1, v_2 in V , so dass gilt:

$$\Gamma_{\mathcal{T}} = \{n_1 v_1 + n_2 v_2 \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} .$$

Durch diese Bedingung allein sind die Vektoren v_1, v_2 natürlich nicht eindeutig bestimmt. Jeder Basiswechsel mit einer ganzzahligen invertierbaren 2×2 -Matrix liefert ein neues Paar v'_1, v'_2 , welches das gleiche Gitter erzeugt. Jedoch stellt sich für alle 11 Typen Archimedischer Teilungen \mathcal{T} heraus, dass es jeweils geometrisch besonders ausgezeichnete Wahlen von Basen (v_1, v_2) gibt, nämlich solche, für die das Parallelogramm

$$P = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid 0 \leq a_1, a_2 \leq 1\} \subset V$$

¹³Verweis auf den ursprünglich geplanten, aber nie geschriebenen Paragraphen 14 (Hrsg.).

entweder ein Quadrat oder ein Rhombus mit einem spitzen Winkel von 30° oder von 60° ist. Wählen wir nun in der Ebene E einen Punkt 0 , dann erhalten wir durch Anwendung der Translationen aus P auf 0 ein Parallelogramm $P_0 \subset E$. Wenden wir auf dieses die Translationen $\tau \in \Gamma_{\mathcal{T}}$ an, dann erhalten wir eine Flächenteilung der Ebene durch die Parallelogramme τP_0 , also

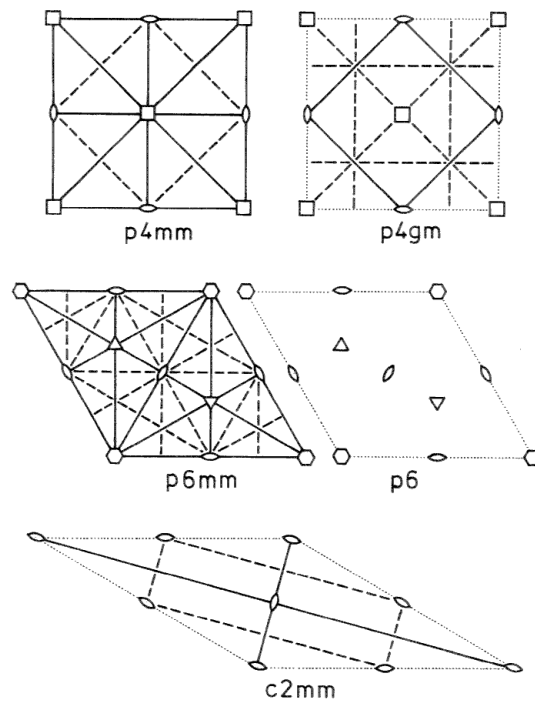
$$E = \bigcup_{\tau \in \Gamma_{\mathcal{T}}} \tau P_0.$$

Weil $\Gamma_{\mathcal{T}}$ eine Untergruppe der Symmetriegruppe Γ von \mathcal{T} ist, ist klar, dass die Elemente von \mathcal{T} zusammengenommen jedes der Parallelogramme τP_0 in der gleichen Weise schneiden. Die Zeichnungen in Abb. 1.47 zeigen diese Schnitte von \mathcal{T} mit einem geeigneten Parallelogramm P_0 .

Man kann sich also die Flächenteilung auch so entstanden denken, dass man ein derartiges Parallelogramm mit Muster in 2-fach periodischer Weise immer wieder aneinanderfügt. Diese den Symmetriegesichtspunkt stärker betonende Konstruktion ist zweifellos weniger natürlich als die historisch frühere kombinatorische Konstruktion, aber sie hat zum mindesten den Vorteil, dass ganz unmittelbar einsichtig ist, dass sich tatsächlich eine lückenlose Flächenteilung der ganzen Ebene ergibt.

Wir können noch einen Schritt weitergehen. Bis jetzt haben wir nur die Untergruppe $\Gamma_{\mathcal{T}}$ der Symmetriegruppe Γ ausgenutzt. Jetzt wollen wir die ganze Gruppe Γ betrachten. Wir wissen auf Grund unserer früher erarbeiteten Klassifikation der Isometrien nach Satz 13.122 der LA III [57], dass Γ außer den Translationen noch Drehungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen enthalten kann. Die Gesamtheit der Drehungen aus Γ mit einem festen Fixpunkt bildet eine zyklische Gruppe der Ordnung 2, 3, 4 oder 6 – dies ist in unserem Fall leicht direkt einzusehen, und wir werden es später allgemein daraus ableiten, dass $\Gamma_{\mathcal{T}}$ ein Gitter ist. Diese zyklische Gruppe ist durch die Angabe des Fixpunktes in E und der Ordnung 2, 3, 4 bzw. 6 eindeutig bestimmt. Eine Spiegelung ist durch Angabe der Spiegelungsgeraden eindeutig bestimmt. Die Gleitspiegelungen zu einer festen Geraden bilden eine unendlich zyklische Gruppe. Sie ist bestimmt, wenn man die Gerade und den Translationsanteil \mathcal{T} eines erzeugenden Elementes angibt.

Natürlich gilt $2\tau \in \Gamma_k$. Bei den Symmetriegruppen Γ der Archimedischen Teilungen sieht man leicht, dass 2τ ein primitives Element in dem Gitter $\Gamma_{\mathcal{T}}$ ist, d.h. nicht ganzzahliges Vielfaches eines anderen Elementes ist. Daher sind die Gleitspiegelungen aus Γ zu einer festen Geraden durch diese Gerade und $\Gamma_{\mathcal{T}}$ eindeutig bestimmt. $\Gamma_{\mathcal{T}}$ schließlich kann durch Angabe eines Parallelogramms P_0 in E gegeben werden: Die Vektoren, die eine Ecke in zwei andere überführen, erzeugen $\Gamma_{\mathcal{T}}$. Schließlich genügt zur Angabe der Drehpunkte, Spiegelungsgeraden und Gleitspiegelungsgeraden die Angabe der entsprechenden Elemente in P_0 . Man erhält auf diese Weise ein **Symmetriediagramm**, durch welches Γ vollständig bestimmt ist. Die nächste Abbildung zeigt diese Symmetriediagramme für die 5 Gruppen Γ , welche als Symmetriegruppen von einer der 11 Archimedischen Flächenteilungen der Ebene auftreten können.



Drehpunkte der Ordnung 2, 3, 4 bzw. 6 sind durch kleine 2-Ecke bzw. 3-, 4-, 6-Ecke markiert, Spiegelungsgeraden durch ausgezogene Linien, Gleitspiegelungsgeraden durch gestrichelte Linien. Der Rand des Parallelogramms ist, wenn er nicht Teil einer Spiegelungsgeraden ist, durch eine punktierte Linie angegeben. Bei jedem Symmetriediagramm ist die kristallographische Bezeichnung für die zugehörige Gruppe angegeben. Diese Bezeichnungen werden später erläutert. Jetzt sei nur so viel gesagt, dass die Zahlen 2, 4, 6 auf die Ordnung der Drehungen verweisen, und die Symbole m bzw. g auf Spiegelungen bzw. Gleitspiegelungen. Wir werden später sehen, dass es außer den hier gezeigten 5 Gruppen noch weitere gibt, die der obigen grundlegenden Bedingung für das Translationsgitter genügen. Es gibt insgesamt 17 derartige **ebene "kristallographische Gruppen"**. Man nennt diese 17 Gruppen auch die **Ornamentgruppen**.

Man überzeugt sich leicht, dass die angegebenen 5 Gruppen wie folgt den 11 Archimedischen Flächenteilungen als Symmetriegruppen zugeordnet sind:

p4mm	p4gm	p6mm	p6	c2mm
(4,4,4,4)	(3,3,4,3,4)	(3,3,3,3,3,3)	(3,3,3,3,6)	(3,3,3,4,4)
(4,8,8)		(6,6,6)		
		(3,6,3,6)		
		(3,12,12)		
		(3,4,6,4)		
		(4,6,12)		

Durch Vergleich der 5 Symmetriediagramme der Gruppen mit den vorher angegebenen 11 Unterteilungen der Parallelegramme sieht man sofort, dass in allen 11 Fällen die Eckpunkte der Teilung, die in einem Parallelogramm liegen, durch Symmetrieeoperationen von Γ ineinander überführt werden. Γ operiert also transitiv auf den Eckpunkten der Archimedischen Flächenteilungen der Ebene, und diese sind also tatsächlich, wie schon früher behauptet, uniform.

Ich möchte ausdrücklich darauf hinweisen, dass mit der Angabe der Symmetriegruppe Γ allein und auch mit der Angabe des Orbits Γ_0 der Eckpunkte

noch nicht alles für die Konstruktion einer Flächenteilung erforderliche geleistet ist, sondern dass für ihre Konstruktion und die Untersuchung ihrer Eigenschaften zusätzliche kombinatorisch-geometrische Argumente erforderlich sind, etwa wie oben durch Einteilung eines fundamentalen Parallelogramms.

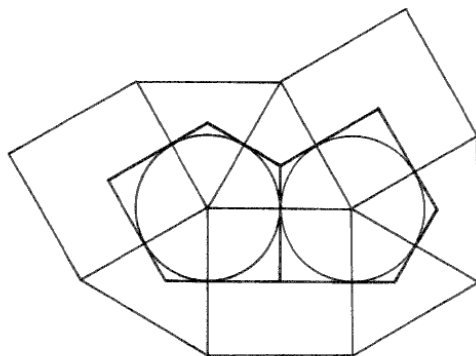
Wir haben die Existenz Archimedischer Teilungen mit kombinatorischen und mit gruppentheoretischen Argumenten bewiesen. Die Eindeutigkeit sieht man in jedem der 11 Fälle leicht mit geometrisch-kombinatorischen Argumenten ein. Eindeutigkeit bedeutet dabei, dass je zwei Teilungen der Ebene E mit gleichem Eckensymbol durch eine Ähnlichkeitstransformation der Ebene ineinander überführt werden können. Mit Ausnahme von $(3, 3, 3, 3, 6)$ ist das in allen anderen Fällen sogar durch eine orientierungserhaltende Ähnlichkeitstransformation möglich, weil die Symmetriegruppen Γ Spiegelungen oder Gleitspiegelungen enthalten. Im Fall $(3, 3, 3, 3, 6)$ jedoch enthält die Symmetriegruppe $p6$ nur orientierungserhaltende Isometrien, und in diesem Fall gibt es bis auf orientierungserhaltende Ähnlichkeit zwei verschiedene Arten von Flächenteilungen vom Typ $(3, 3, 3, 3, 6)$. Man nennt solche Paare von spiegelbildlich gleichen geometrischen Gebilden, die nicht orientierungserhaltend ähnlich sind, **enantiomorphe Formen**.

Als Ergebnis unserer bisherigen Überlegungen zur Interpretation von Keplers Entdeckungen halten wir fest:

Bis auf Ähnlichkeit gibt es genau 11 Archimedische Flächenteilungen der euklidischen Ebene, und dies sind auch genau ihre uniformen Teilungen.

Ein Blick auf die Ableitungen aus der Weltharmonik zeigt, dass Kepler außer den Archimedischen Teilungen der Ebene auch viele andere in Betracht gezogen hat. Betrachten wir insbesondere seine Figur G . Sie zeigt eine isoedrische Flächenteilung der Ebene durch Rhomben mit einem spitzen Winkel von 60° , also einem stumpfen Winkel von 120° . Von den spitzen Winkeln stoßen jeweils 6 zusammen, von den stumpfen immer 3. Durchläuft man nacheinander die 4 Ecken eines Rhombus und zählt die Valenzen der Ecken, so erhält man die Folge $(3, 6, 3, 6)$. Das ist aber auch das Eckensymbol von einer Archimedischen Teilung, nämlich von Keplers Figur P . In einem gewissen Sinne sind die Teilungen G und P zueinander dual.

Tatsächlich können wir zu jeder isogonalen Archimedischen Flächenteilung \mathcal{T} eine ganz bestimmte dazu duale isoedrische Flächenteilung \mathcal{T}^* der Ebene konstruieren, und zwar wie folgt. Jeder Fläche $t \in \mathcal{T}_2$ entspricht ein Eckpunkt $t^* \in \mathcal{T}_0^*$, nämlich der Mittelpunkt von t – weil t regulär ist, liefert jede Definition des Mittelpunktes das gleiche t^* . Jeder Kante $t \in \mathcal{T}_1$ entspricht eine duale Kante $t \in \mathcal{T}_1^*$, nämlich die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der beiden Flächen von \mathcal{T} mit der Kante t . Offensichtlich sind die Kanten t und t^* zueinander orthogonal und schneiden sich im Mittelpunkt von t . Schließlich entspricht jeder Ecke $t \in \mathcal{T}_0$ eine Fläche $t^* \in \mathcal{T}_2^*$, nämlich das konvexe Polygon, dessen Kanten diejenigen Kanten in \mathcal{T}_1^* sind, welche dual zu den Kanten von \mathcal{T} mit Eckpunkt t sind. Die folgende Zeichnung illustriert die Konstruktion am Beispiel der Archimedischen Teilung $(3, 3, 4, 3, 4)$. In diesem Fall sind die Flächen der dualen Teilung Pentagone.



Man macht sich leicht klar, dass die zu einer Archimedischen Teilung duale Ebenenteilung \mathcal{T}^* die folgenden Eigenschaften hat

- (i) \mathcal{T}^* ist eine monoedrische – und sogar isoedrische – konvexe Polygonteilung der Ebene.
- (ii) Alle Eckenfiguren von \mathcal{T}^* sind “regulär”, d.h. die Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Kanten einer Eckenfigur sind gleich.
- (iii) Die Flächen von \mathcal{T}^* sind Polygone, die einem Kreise umbeschrieben sind.

Ferner sieht man leicht, dass diese drei Eigenschaften auch umgekehrt für die dualen Teilungen der Archimedischen Teilungen charakteristisch sind. Denn zu einer Flächenteilung S mit den Eigenschaften (i)-(iii) kann man völlig analog eine duale Flächenteilung S^* konstruieren, wobei als Mittelpunkt einer Fläche $s \in S_2$ der Inkreismittelpunkt von s anzusehen ist. S^* ist offensichtlich archimedisch, und es gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{**} &= \mathcal{T} \\ S^{**} &= S\end{aligned}$$

Die gerade konstruierten Flächenteilungen oder allgemeiner konvexe Polygonteilungen der Ebene vom gleichen kombinatorischen Typ und mit der gleichen Symmetriegruppe nennt man auch **Laves-Teilungen** nach dem Kristallographen Fritz Laves, der sich Anfang der dreißiger Jahre mit Flächenteilungen der Ebene befasst hat.

Die Dualität zwischen Archimedischen Teilungen und Laves-Teilungen ist wegen der Orthogonalität dualer Kanten eine geometrisch besonders ausgezeichnete Art von Dualität. Wir werden später in anderen Situationen noch andere Dualitätsbegriffe kennenlernen. Von der jetzigen Dualität halten wir als wichtigste Eigenschaft die folgende fest: Die Zuordnung $t \mapsto t^*$ definiert eine bijektive Abbildung $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*$, und diese Abbildung ist ordnungsumkehrend, d.h. es gilt:

$$t_1 < t_2 \Leftrightarrow t_1^* > t_2^* .$$

Zum Abschluss unserer Diskussion der Archimedischen Flächenteilungen zeigen wir in einer Tabelle diese 11 archimedischen Teilungen der Ebene und rechts daneben die 11 dualen Laves-Teilungen (Abb. 1.48, 1.49). Außerdem ist in der Spalte ganz links das Eckensymbol der Archimedischen Teilung sowie die Symmetriegruppe angegeben und in der Spalte ganz rechts das von A. Dress eingeführte Delaneysymbol (für die Lavesteilung). Dieses Symbol wird später ausführlich behandelt. Es codiert sowohl den kombinatorischen Typ als auch die Symmetriegruppe. Die Reihenfolge der Teilungen ist die gleiche wie bei Kepler. Aus ihr wird deutlich, dass Kepler die Teilungen ihrem kombinatorischen Typ und nicht ihrer Symmetrie entsprechend angeordnet hat.

$(3,3,3,3,3,3)$ $p6mm$			\circ $(6,3)$
$(4,4,4,4)$ $p4mm$			\circ $(4,4)$
$(6,6,6)$ $p6mm$			\circ $(3,6)$
$(3,3,3,3,6)$ $p6$			
$(3,3,3,4,4)$ $c2mm$			
$(3,3,4,3,4)$ $p4gm$			

Abbildung 1.48: Archimedische Flächenteilungen mit Eckensymbolen und duale Laves-Teilungen mit Delaney-Symbolen

(3.6.3.6) p6mm			
(3.12.12) p6mm			
(4.8.8) p4mm			
(3.4.6.4) p6mm			
(4.6.12) p6mm			

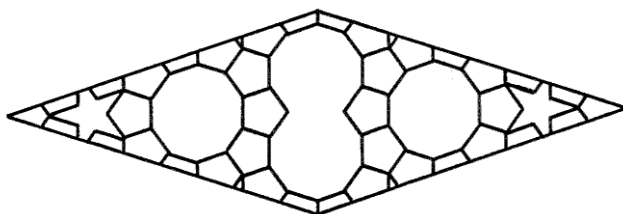
Abbildung 1.49: Archimedische Flächenteilungen und duale Laves-Teilungen (Fortstz.)

Die Archimedischen Flächenteilungen der Ebene und natürlich ebenso die Laves-Teilungen haben eine kristallographische Symmetriegruppe, d.h. sie haben eine 2-fach periodische Symmetrie. Kepler hat sich aber durchaus nicht nur für Flächenteilungen mit einem so hohen Grad von Symmetrie interessiert. In diesem Zusammenhang ist es interessant, seine Figur *Aa* zu betrachten (Abb 1.44), die sich in fast gleicher Form bereits in dem schon zitierten Brief an Johann Georg Herwart von Hohenburg findet, der ebenso wie Kepler ein Schüler von Mästlin in Tübingen gewesen war. Es ist interessant, zu sehen, wie Kepler selbst in der Weltharmonik seine Figur beschreibt.

Läßt man nun beim Zusammenfügen dreier Ecken das Dreieck und Viereck beiseite und geht zum Fünfeck über, so ist zu sagen, dass von diesem zwei genommen werden können, da die Winkel zusammen zwei Rechte überschreiten. In den übrigen Raum paßt ein Zehneckswinkel hinein. So wird das Zehneck durch 10 Fünfecke gekrönt. Allein diese Form lässt sich nicht rein fortsetzen. Siehe den Innenteil von Figur *Z*. Hier ist der fünfeckige Stern dort einzufügen, wo 3 Fünfecke und eine Sternzacke sind. Denn in den Winkel zwischen zwei Sternzacken paßt gerade eine Ecke des Fünfecks hinein und die Lücke, die 3 Fünfeckswinkel übriglassen, fasst gerade eine Sternzacke. Man vergleiche den äußeren Teil der Figur *Z*. Jedoch gelingt auf diese Weise eine Fortsetzung ins Unendliche nicht. Das Reich dieser Sekte ist ungesellig; sie zieht eine kleine Anzahl der Ihrigen zusammen und verschanzt sich dann sofort. Eine andere Verbindung dieser beiden Formen zeigt die Figur *Aa*. Will man diese überallhin fortsetzen, so muss man gewisse Ungetüme (monstra) heranziehen, nämlich die Verbindung zweier Zehnecke, von denen je zwei Seiten weggenommen sind. Bei der unendlichen Fortsetzung behält das Gefüge seine fünfeckige Gliederung. Auf dem ersten, innersten Fünfeckskranz sitzen fünf Zehnecke, ohne Ungetüm dazwischen. Auf dem zweiten weiteren Kranz sitzt auf jeder Fünfeckseite allemal zwischen zwei Zehneckern ein Paar miteinander vereinigter Zehnecke. Auf

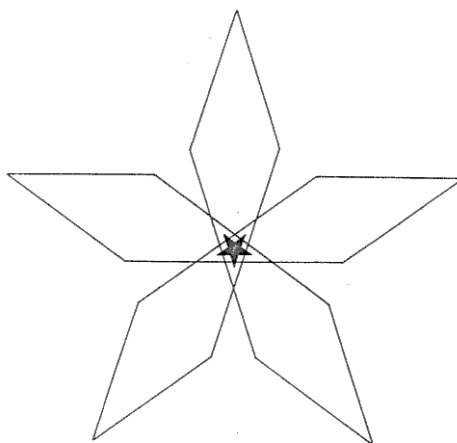
dem dritten Kranz sitzen in den Ecken Paare vereinigter Zehnecke, und zwischen zwei solchen Paaren liegt je ein einfaches Zehneck. Auf dem vierten Kranz sitzen in den Ecken wieder einfache Zehnecke, und zwischen je zwei dieser Zehnecke sitzen auf den Seiten je zwei Zehnecke in gleichen Abständen voneinander. Auf dem fünften Kranz sitzen in den Ecken Sterne mit ihren äußersten Zacken; auf den Seiten sitzen je zwei einfache Zehnecke und dazwischen zwei Zehnecksverbindungen. Und so bringt in folgerechter Weise jede Fünfecksform etwas Neues. Die Struktur ist – wie aus Figur Aa zu ersehen – mit viel Arbeit verbunden und höchst kunstvoll. [214, p. 69f.]

Keplers Konstruktion ist wirklich kunstvoll. Die folgende nachträgliche Analyse trägt vielleicht dazu bei, sie besser zu verstehen. Sie wurde von Dessecker gefunden, so Grünbaum und Shephard, die sich auf eine Arbeit von E. Bindel berufen [25]. Keplers Figur lässt sich durch An- und Übereinanderlegen eines mit einem Muster versehenen Rhombus erzeugen, der spitze Winkel von $\pi/5$ und stumpfe Winkel von $4\pi/5$ hat. Die folgende Figur zeigt das Muster des Rhombus.



Dies Muster hat bemerkenswerte Symmetrieeigenschaften. So paßt das Muster eines solchen Rhombus mit dem eines durch Translation erhaltenen zusammen, wobei Richtung und Betrag der Translation durch die Kanten gegeben sind. Analoges gilt für eine Gleitspiegelung, wobei die Spiegelungsgerade durch die Kante geht und der Betrag des Translationsanteils gleich der halben Kantenlänge ist. Schließlich passen die Muster des Rhombus und des transformierten Rhombus auch bei einer Drehung um $2\pi/5$ um den Mittelpunkt eines der beiden 5-zackigen Sterne zusammen.

Aus diesen Gründen ist es möglich, Keplers Figur *Aa* wie folgt zu erzeugen: Man beginnt mit 5 Exemplaren des Rhombus, die aus einem derselben durch Drehung um $k \cdot 2\pi/5$ um den Sternmittelpunkt hervorgehen. Diese 5 Rhomben überdecken sich teilweise, und durch ihre Vereinigung entsteht ein Muster, das einen vollständigen 5-zackigen Stern *S* mit dem Drehpunkt als Mittelpunkt enthält. Die Geraden durch die "inneren" Kanten dieser 5 Rhomben zerlegen die Ebene in 10 Sektoren. Jeder dieser Sektoren wird einzeln durch Rhomben ausgefüllt, die durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Das ist nur auf eine Weise möglich. Wegen der genannten Symmetrieeigenschaften passen die Muster der einzelnen Rhomben zusammen und erzeugen Keplers Figur. Die folgende Zeichnung zeigt die ersten 5 Rhomben.



Die Symmetriegruppe dieser von Kepler konstruierten Flächenteilung der Ebene lässt den 5-zackigen Stern *S* invariant und identifiziert sich mit dessen Symmetriegruppe, also der Diedergruppe der Ordnung 10, die aus 5 Drehungen um die Winkel $k \cdot 2\pi/5$ und aus 5 Spiegelungen besteht. Insbesondere ist die Symmetriegruppe von Keplers Figur *Aa* endlich und enthält überhaupt keine Translationen. Figur *Aa* ist also von wesentlich anderer Art als die Archimedischen Teilungen und die Laves-Teilungen.

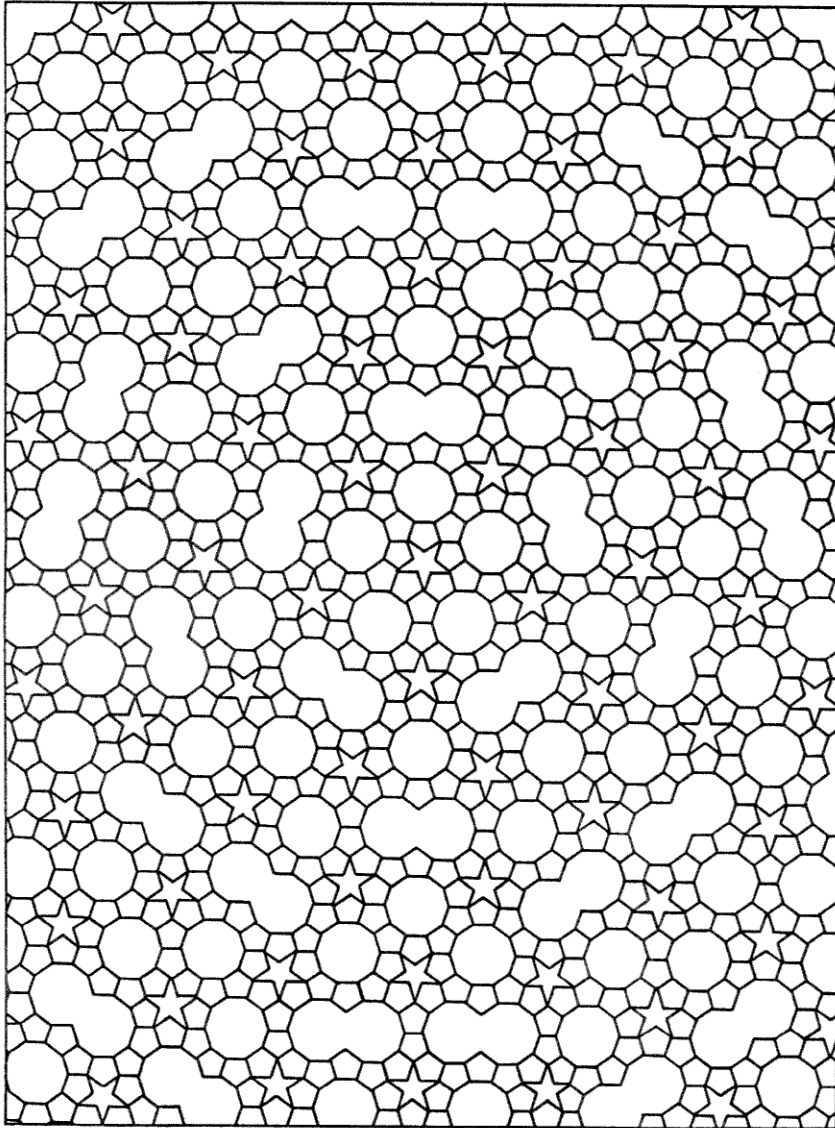


Abbildung 1.50: Keplers Figur Aa fortgesetzt

Immerhin kann man mit den gleichen Flächenelementen – Fünfeck, Stern, Zehneck und Ungetüm – die Euklidische Ebene auch zweifach periodisch pflastern, etwa, indem man sie mit parallel verschobenen Exemplaren des oben abgebildeten Rhombus überdeckt. Man kann sich nun fragen, ob es einen endlichen Satz von Pflastersteinen gibt, mit denen man zwar die Ebene im Sinne einer Flächenteilung pflastern kann, jedoch auf keine Weise so, dass die Flächenteilung zweifach periodisch ist. Einen solchen Satz von Pflastersteinen wollen wir kurz **“aperiodisch”** nennen.

Es stellt sich die Frage, ob es aperiodische Sätze von Pflastersteinen gibt. Und es stellt sich weiter die Frage, ob und gegebenenfalls wie man für einen vorgelegten Satz von Pflastersteinen entscheiden kann, ob er aperiodisch ist oder nicht. Es stellt sich heraus, dass man sich mit der zweiten Frage ins Gebiet der unentscheidbaren Probleme begibt. Die erste Frage dieses Typs wurde 1961 von Hao Wang gestellt. Gegeben sei eine endliche Menge von Einheitsquadraten mit gefärbten Kanten, die außerdem horizontal und vertikal ausgerichtet sind. Frage: Kann man die Ebene so mit parallel verschobenen Exemplaren dieser Quadrate pflastern, dass aneinanderstoßende Kanten stets gleiche Farbe haben? 1966 bewies R. Berger, dass dies “Domino-Problem” unentscheidbar ist. Hieraus folgt – darauf hatte schon Wang hingewiesen – dass es einen Satz von derartigen Quadraten geben muss, der aperiodisch ist. Berger konstruierte in seinem Beweis einen solchen Satz von aperiodischen Quadraten, der aber aus mehr als 20 000 Quadraten bestand. Schon ein Jahr später fand R.M. Robinson einen aperiodischen Satz von nur 52 Quadraten, die aus nur 7 Grundformen durch Drehungen und Spiegelungen hervorgehen. Hierzu sei auf den Artikel “Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane” von Robinson [304] verwiesen.

1973 entdeckte der theoretische Physiker R. Penrose drei sehr schöne aperiodische Sätze von Pflastersteinen. Der erste Satz, auf den wir ein wenig ausführlicher eingehen wollen, erinnert stark an die von Kepler in seiner Figur *Aa* verwendeten Elemente. Er besteht aus einem regulären 5-zackigen Stern, einem Rhombus mit spitzem Winkel $\pi/5$, ferner einer “Schiffchen” genannten Figur, die durch Zerschneiden des Sterns entsteht, und schließlich aus drei regulären Pentagonen, die sich durch eine Markierung der Kanten

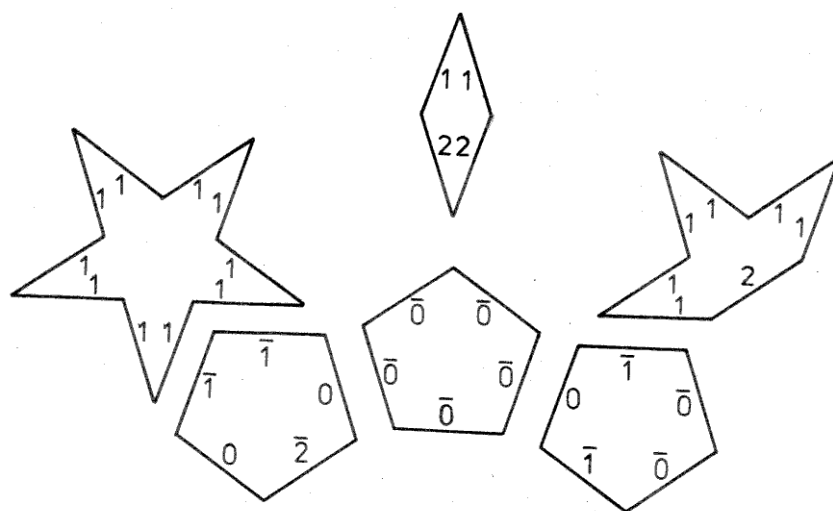
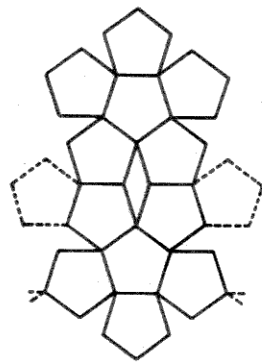


Abbildung 1.51: Die 6 Flächenelemente von Penrose

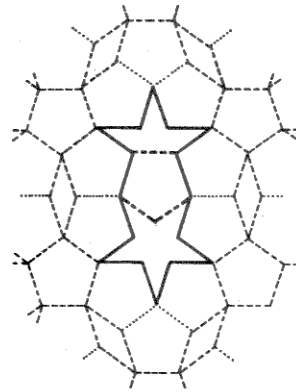
unterscheiden. Abbildung 1.51 zeigt diesen Satz von 6 Flächenelementen.

Diese Flächenelemente dürfen nur so aneinandergelegt werden, dass jeweils Kanten mit der gleichen Ziffer zusammenstoßen, wobei genau eine der beiden Ziffern gequert ist. Penrose selbst hat sehr anschaulich beschrieben, wie er auf diese Flächenelemente gekommen ist, und zwar in einer Arbeit mit dem schönen Titel “Pentaplexity – A Class of Non-periodic Tilings of the Plane” [283]. Ich kann die Sache unmöglich besser darstellen als Penrose selbst, und darum gebe ich einfach eine Übersetzung des größten Teils seines Artikels:

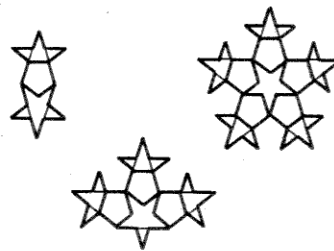
Vielleicht kennen einige Leser einen Artikel von Martin Gardner in der Ausgabe des Scientific American vom Januar 1977. Darin beschreibt er ein Paar von ebenen Figuren – “Drachen” und “Pfeile” genannt – die nach gewissen einfachen Regeln aneinandergefügt die ganze Ebene pflastern können, aber nur auf nichtperiodische Weise. Die Pflasterungen haben eine Reihe von bemerkenswerten Eigenschaften, von denen einige in Gardners



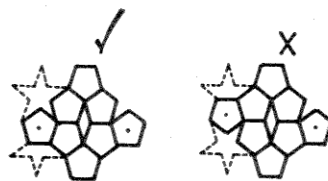
Figur 2



Figur 3



Figur 4

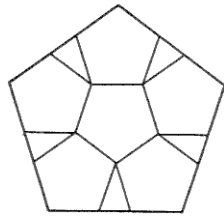


Figur 5

Abbildung 1.52: Die 5 Figuren von Penrose

Artikel beschrieben sind. Ich will hier in diesem kurzen Bericht erklären, wie diese Fliesen zustande kamen, und einige ihrer Eigenschaften andeuten.

Der Ausgangspunkt war die Beobachtung, dass ein reguläres Fünfeck in sechs kleinere unterteilt werden kann, wobei nur fünf schmale dreieckige Lücken bleiben. (Siehe Figur 1; diese ist wohl bekannt – sie ist ein Teil des üblichen “Netzes”, das sich zu einem regulären Dodekaeder falten lässt.) Man stelle sich nun vor, dass dieser Prozess sehr oft wiederholt wird, wobei jedesmal die 5-Ecke in der bis dahin konstruierten Figur entsprechend dem Schema von Figur 1 unterteilt werden.

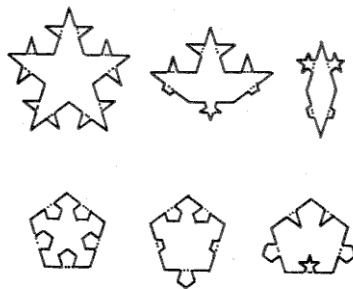


Es werden dann Lücken von verschiedenen Formen auftreten, und wir wollen sehen, wie man diese am besten ausfüllen kann. In der zweiten Stufe der Unterteilung erscheinen rhombenförmige Lücken zwischen den Fünfecken (Figur 2). In der dritten bekommen diese Rhomben “Stacheln”, aber in jedem dieser “stacheligen Rhomben” ist noch Platz für ein weiteres Fünfeck, so dass diese Lücke dadurch in einen Stern (ein Pentagramm) zerlegt wird und in ein “Papier-Schiffchen” (oder eine Narrenkappe?) (Figur 3). In der nächsten Stufe bekommen der Stern und das Schiff auch “Stacheln”, und auch hier gibt es darin Platz für neue Fünfecke, so dass der Rest der Lücken wie vorher aus neuen Sternen und Booten besteht. Diese Unterteilungen zeigt Figur 4.

Da in den nachfolgenden Stufen keine neuen Formen auftreten, können wir uns vorstellen, dass dieser Unterteilungsprozess unbegrenzt weitergeht. Nach jedem Teilungsschritt kann die Figur

maßstäblich vergrößert werden, so dass die neu entstandenen Fünfecke die Größe bekommen, welche vorher die in der vorigen Stufe erzeugten hatten. Dies Verfahren hat bis jetzt allerdings noch eine gewisse Unbestimmtheit, die wir gerne beseitigen möchten. Die Unterteilung eines “stacheligen Rhombus” kann nämlich auf zwei Arten durchgeführt werden, da es zwei alternative Positionen für das Fünfeck gibt. Wir wollen uns auf eine von beiden festlegen, und zwar soll die Regel die sein, die in Figur 5 angegeben ist. (Wenn wir das Muster der umgebenden 5-Ecke untersuchen, finden wir, dass sie notwendigerweise in einer Konfiguration wie in Figur 5 angeordnet sind.) Es sei noch erwähnt, dass die entgegengesetzte Regel für die Unterteilung eines “stacheligen Rhombus” beim nächsten Teilungsschritt zu einem Widerspruch führen würde, während dies bei der Regel von Figur 5 nie passieren kann.

Dieser Prozess führt im Limes zu einer Pflasterung der ganzen Ebene mit Fünfecken, Rhomben, Booten und Sternen. Nun gibt es aber viele “falsche” Pflasterungen der Ebene mit diesen Figuren, die nicht nach der obigen Vorschrift konstruiert sind. Tatsächlich kann man die “Korrektheit” erzwingen, indem man geeignete Regeln für das Aneinanderfügen der Figuren einführt. Die einfachste Art, diese Regeln bildlich darzustellen, ist eine Modifikation der Figuren, so dass man eine Art unendliches Mosaikspiel erhält. Figur 6 gibt einen Vorschlag für eine solche Modifikation.



Figur 6

Es ist nicht allzu schwierig, zu zeigen, dass jede Pflasterung mit diesen Formen eine hierarchische Struktur von der gerade beschriebenen Art hat.

Des weiteren impliziert die erzwungene hierarchische Struktur dieses Musters, dass die Pflasterung eine Reihe von sehr bemerkenswerten Eigenschaften hat. Zum ersten ist sie notwendigerweise nicht-periodisch (d.h. sie besitzt kein Periodenparallelogramm). Mehr darüber später. Zum zweiten: Obgleich das vollständige Muster nicht eindeutig bestimmt ist – denn es gibt 2^{\aleph_0} verschiedene Anordnungen – sind diese verschiedenen Anordnungen doch, in einem gewissen “finiten” Sinn, alle nicht voneinander zu unterscheiden! Wenn man nämlich in einem derartigen Muster einen beliebigen großen endlichen Teil auswählt, kommt dieser endliche Teil in jedem anderen vollständigen Muster auch irgendwo vor – und sogar unendlich oft. Zum dritten zeigen diese Muster viele unerwartete und ästhetisch befriedigende Eigenschaften. Zum Beispiel tauchen viele reguläre Zehnecke auf, die an manchen Stellen eine Tendenz haben, sich zu überdecken. Jedes Zehneck ist von einem Ring von zehn Fünfecken umgeben, und es gibt auch größere Ringe verschiedener Art. Man beachte auch, dass jedes Geradensegment des Musters sich ins Unendliche fortsetzt, so dass die zugehörige Gerade unendlich viele andere Geradensegmente der Figur enthält.

An dieser Stelle unterbreche ich meine Übersetzung und bitte den Leser, die beigefügte große Zeichnung eines solchen Penrose-Musters zu betrachten (Abb. 1.53). Sie ist in zweitägiger Arbeit nur mit Hilfe eines Lineals aus einem großen Fünfeck konstruiert, wobei der Unterteilungsprozess viermal angewandt wurde. Dabei hat man immer wieder in die schon konstruierten Fünfecke das Pentagramm mit den gleichen Ecken einzuzeichnen, daraus die Unterteilung nach Figur 1 abzuleiten und im übrigen die Regeln von Penrose zu beachten. Es wäre schön, wenn der Leser sich einige Augenblicke in die Betrachtung dieser Figur vertiefen und sie auch mit Keplers Figur *Aa* vergleichen könnte.

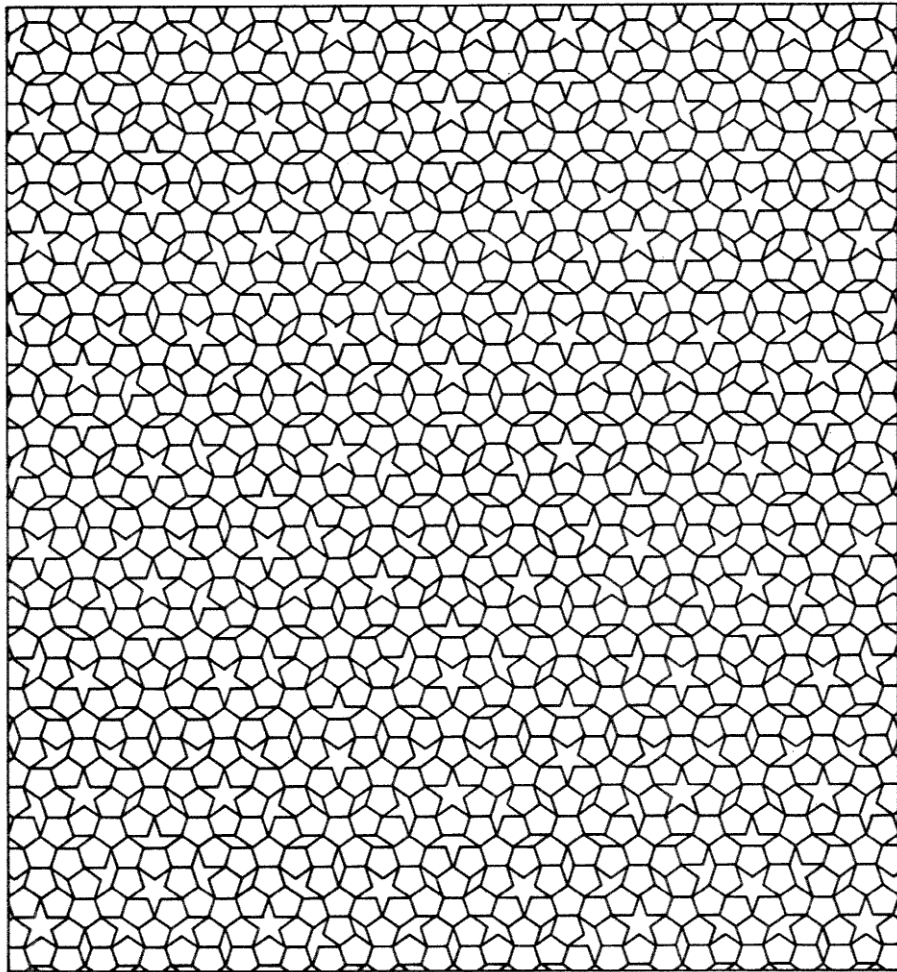
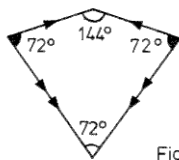


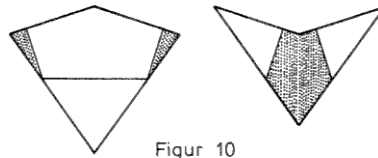
Abbildung 1.53: Penrose Muster

Ich kehre zum Artikel von Penrose zurück. Er berichtet, dass er von seinen sechs Figuren durch Zerschneiden und Wiederausammenfügen schließlich zwei Figuren abgeleitet hat, die ebenfalls einen aperiodischen Satz bilden. Über diese schreibt er:

Die zwei so erhaltenen Fliesen sind die anfangs erwähnten “Drachen” und “Pfeile”. Ihre genaue Form illustriert Figur 9. Die genauen Regeln für das Aneinanderfügen sind auch angedeutet, wobei aneinanderstoßende Ecken gleiche Farbe haben müssen. Es gibt viele andere Möglichkeiten, diese Fliesen zu färben oder schattieren, um die richtigen Anordnungen zu erzwingen. Eine Art, welche die Beziehung zu den Fünfeck-Rhombus-Boot-Stern-Pflasterungen hervorhebt, zeigt die Figur 10.



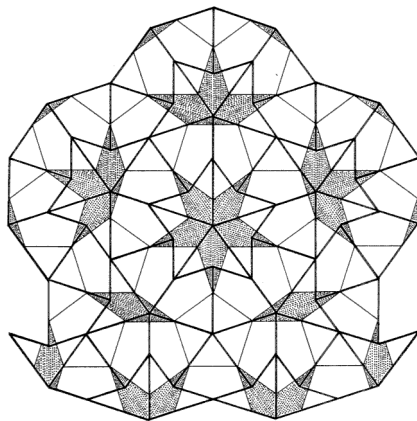
Figur 9



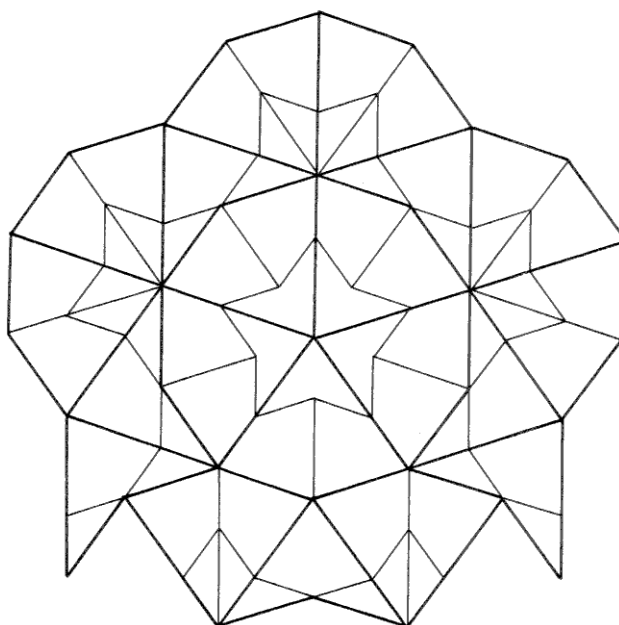
Figur 10

Ein Stück mit zusammengefügtten Fliesen, die auf diese Weise schattiert sind, zeigt Figur 11.

(Hier füge ich statt der Figur 11 von Penrose eine Zeichnung von mir ein, die mir besser gefällt, E.B.:)



Die hierarchische Struktur der Pflasterungen mit Drachen und Pfeilen sieht man unmittelbar, und Figur 12 illustriert sie. Man nehme irgendeine derartige Pflasterung und zerschneide alle Pfeile symmetrisch durch ein Geradensegment. Die so entstehenden Halb Pfeile und die Drachen kann man so zusammenfügen, dass etwas größere Pfeile und Drachen entstehen: Zwei Halb Pfeile und ein Drachen bilden einen großen Pfeil; zwei Halb Pfeile und zwei Drachen bilden einen großen Drachen. Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, dass jede richtig zusammengefügte Drachen-Pfeil-Pflasterung in dieser Weise aufgebaut ist.

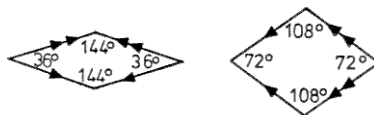


Diese Eigenschaft der “Inflation” ist auch nützlich beim Beweis der Nicht-Periodizität. Nehmen wir nämlich an, es gäbe ein Periodenparallelogramm. Die zugehörigen inflationär vergrößerten Drachen und Pfeile müssten das gleiche Periodenparallelogramm haben. Nun wiederhole man den Inflationsprozesse viele Male, bis die Größe der inflationierten Drachen und Pfeile diejenige des

angenommenen Periodenparallelogramms übertrifft. Dies führt zu einem Widerspruch.

Der Widerspruch zur Periodizität zeigt sich noch auf andere, eindrucksvolle Weise. Man betrachte ein sehr großes Gebiet, das p Pfeile und d Drachen enthält, und das dadurch entsteht, dass man den Inflationsprozess viele Male anwendet. Je größer das Gebiet ist, desto besser wird das Verhältnis $x = d/p$ der Rekursionsrelation $x = (1 + 2x)/(1 + x)$ genügen, da bei der Inflation ein Pfeil und zwei Drachen einen größeren Drachen erzeugen, während ein Pfeil und ein Drachen zusammen einen größeren Pfeil ergeben. Dies gibt beim Grenzübergang für ein unendlich großes Muster $x = (1 + \sqrt{5})/2$, das Verhältnis des goldenen Schnitts! Wir erhalten also eine irrationale relative Dichte im Verhältnis von Drachen zu Pfeilen – etwas, was für periodische Pflasterungen unmöglich ist.

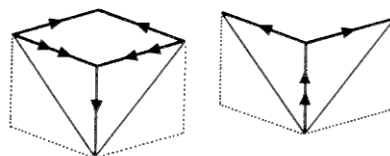
Es gibt noch ein anderes Paar von Vierecken, mit denen man bei geeigneten Regeln für das Zusammenfügen die Ebene nur nicht-periodisch pflastern kann. Es ist dies ein Paar von Rhomben wie sie Figur 13 zeigt.



Figur 13

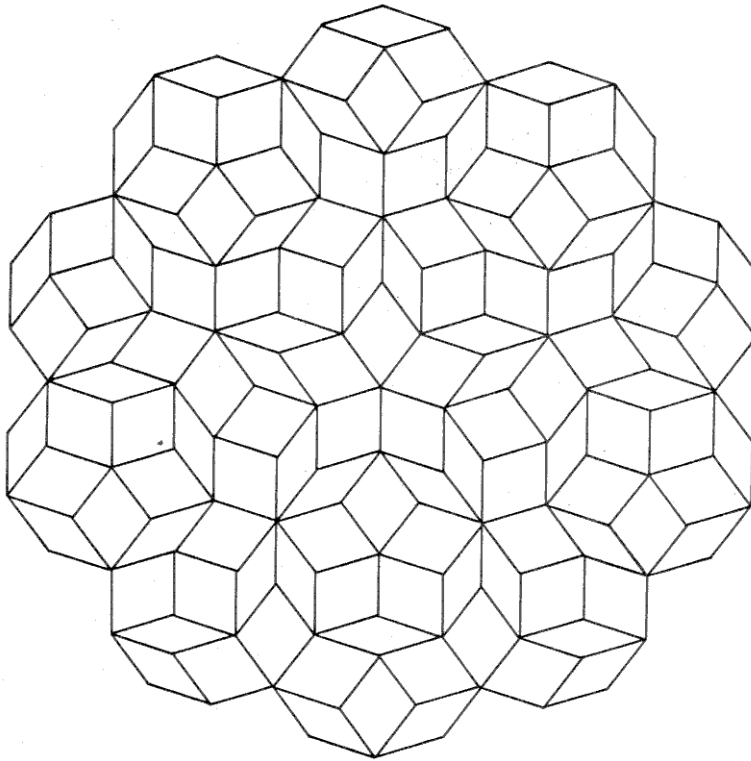
Soweit der Text von Penrose. Die von Penrose gefundenen Rhomben sind für mein Empfinden die eleganteste Lösung des Problems, einen aperiodischen Satz von Flächenelementen für Pflasterungen der Ebene anzugeben. Darüber hinaus hat sich gezeigt, dass die Pflasterungen durch Rhomben sich besonders gut für eine systematische algebraische Behandlung eignen. Dies zeigte sich um 1980 in einer Arbeit von N.G. de Bruijn: “Algebraic theory of Penrose’s non-periodic tilings of the plane” [94]. Wir wollen nachher

ganz kurz über diese Arbeit berichten, vorher aber noch den Zusammenhang zwischen den Rhombenpflasterungen und denen durch Drachen und Pfeile klären. Dies steht schon bei Penrose. Aus einer Drachen- und Pfeil-Pflasterung erhält man eine Rhombenpflasterung, indem man Drachen und Pfeile wie in der folgenden Figur markiert:

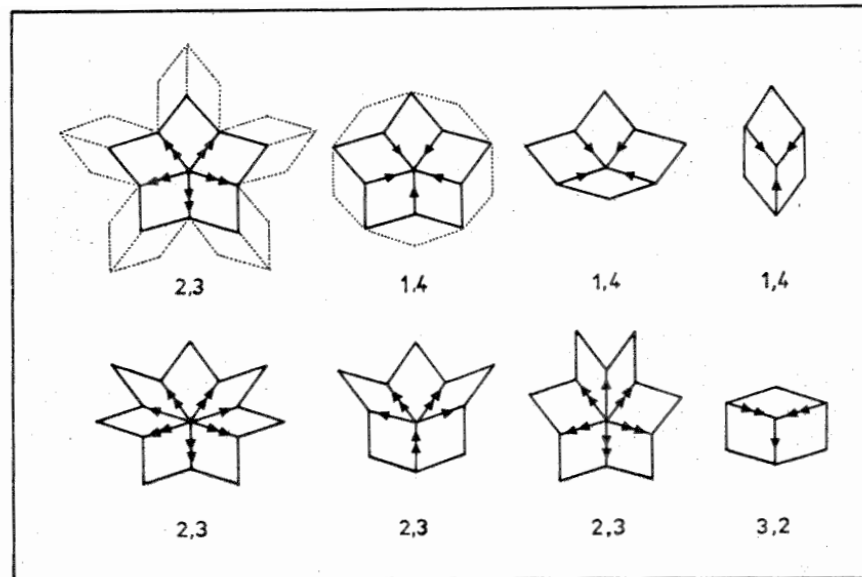


Umgekehrt erhält man aus einer so konstruierten Rhombenpflasterung die Drachen- und Pfeil-Pflasterung zurück, indem man als Kanten der Drachen-Pfeil-Pflasterung die langen Diagonalen der großen Rhomben nimmt und die mit einem einfachen Pfeil markierten Kanten der kleinen Rhomben. (Bemerkung: Dadurch werden gewisse Kanten der großen Rhomben zu Drachen-Pfeil-Kanten. Dadurch gibt es drei Typen von großen Rhomben, je nachdem, ob die Eltern beide Drachen waren oder beide Pfeile oder aber ein gemischtes Paar von Drachen und Pfeilen.)

Als Ergebnis halten wir fest: Die drei Arten von Penrose Pflasterungen, die mit den zwei Rhomben, die mit Drachen und Pfeilen, und die mit Sternen, Booten, Rhomben und Fünfecken, sind alle zueinander äquivalent. Die folgende Zeichnung zeigt ein Stück einer Penrose-Pflasterung mit Rhomben. Es wurde durch den gerade beschriebenen Rekombinationsprozess aus dem vorher gezeigten Stück einer Drachen- und Pfeil-Pflasterung konstruiert.



In dieser Figur sind die Markierungen der Kanten durch Pfeile oder Doppelpfeile nicht eingezeichnet. Man kann diese Markierungen aber bei einer korrekt nach den Zusammenfügungsregeln konstruierten Pflasterung aus der Rhombenteilung ohne Kantenmarkierung rekonstruieren. Man überlegt sich nämlich leicht, dass es in jeder solchen Pflasterung der Ebene genau 8 Typen von Ecken gibt, wenn man von der Lage in der Ebene absieht. Berücksichtigt man die Lage, dann gibt es 64 Typen. Die folgende Zeichnung zeigt für die 8 Eckentypen die von der Ecke ausgehenden Kanten mit der zugehörigen Markierung durch Pfeile und Doppelpfeile.



Die bei jeder Eckenfigur angegebenen Ziffern haben die folgende Bedeutung. Die orientierten Kanten einer Penrose-Pflasterung der Ebene mit Rhomben haben insgesamt genau 10 mögliche Richtungen, nämlich die Richtungen der 10 Strahlen, die vom Mittelpunkt eines regelmäßigen Zehnecks aus durch dessen Ecken gehen. Wir zerlegen diese Menge von 10 Richtungen in zwei Hälften von je 5 Richtungen, die wir als "positiv" bzw. "negativ" bezeichnen, und zwar so, dass beim Durchlaufen der Richtungen im Uhrzeigersinn positive und negative Richtungen abwechseln. Natürlich beinhaltet die Auszeichnung einer der beiden Hälften als "positiv" eine Wahl. Nachdem wir diese Wahl getroffen haben, können wir nun jeder Ecke der Flächenteilung als "Index" eine der Zahlen 1,2,3,4 zuordnen, und zwar so, dass folgendes gilt: Läuft man auf der Kante eines Rhombus von einer Ecke zur nächsten in positiver Richtung, dann erhöht sich der Index um 1. Läuft man in negativer Richtung, erniedrigt er sich um 1. Man sieht leicht, dass die Indizierung durch diese Bedingung eindeutig bestimmt ist. In der obigen Figur sind für jede Ecke die möglichen Indices angegeben. Der zuerst angegebene Index gilt, wenn die 12-Uhr-Richtung negativ ist, der zweite, wenn sie positiv ist.

Oft zeige ich die Zeichnungen, die ich für dieses Buch anfertige, meiner lieben Frau, und ich freue mich, wenn sie ohne Erklärung intuitiv versteht, was gemeint ist, obwohl sie doch keine Mathematik macht, sondern Musik – etwas viel Schöneres. Als ich ihr nun die obige Zeichnung einer Pflasterung der Ebene durch Rhomben zeigte, sagte sie etwas, was mir selber gar nicht so aufgefallen war: Von dieser Figur geht eine starke räumliche Wirkung aus. Dieser sinnlichen Wahrnehmung entspricht eine mathematische Aussage, die von R.M.A. Wieringa gefunden wurde: Man kann die Rhombenteilung der Ebene als Projektion einer über der Ebene ausgebreiteten kombinatorischen Struktur betrachten. Diese räumliche Struktur, das “Wieringa-Dach”, entsteht durch Aneinanderfügen unendlich vieler Exemplare eines einzigen Rhombus. Dieser Rhombus ist dadurch charakterisiert, dass das Verhältnis zwischen seiner kurzen und seiner langen Diagonale gerade die Verhältniszahl τ des goldenen Schnitts ist. Für jedes Exemplar des Rhombus ist entweder die kurze oder die lange Diagonale parallel zur Ebene der Pflasterung. Im ersten Fall projiziert sich der Rhombus auf einen großen Rhombus der Pflasterung, und seine kurze Diagonale auf die kurze Diagonale des Bildes. Im zweiten Fall projiziert sich der Rhombus auf einen kleinen Rhombus der Pflasterung und seine lange Diagonale auf die lange Diagonale des Bildes. Das Wieringa-Dach lässt sich leicht aus der ebenen Rhombenpflasterung konstruieren. Die Ecken des Daches liegen über den Ecken der ebenen Rhomben, und die Höhe der Dachecke über der Ebene ist $j\rho/2$, wobei j der Index der entsprechenden Ecke in der Ebene ist und ρ die Kantenlänge der ebenen Rhomben.

Fasst man das Dach als Graph einer stückweise linearen Höhenfunktion auf, dann entsprechen die ersten 6 der 8 Eckentypen kritischen Punkten dieser Höhenfunktion. Die Eckenfiguren der oberen Reihe entsprechen Maxima oder Minima – bei der ersten handelt es sich um ein relatives, bei den anderen drei um ein absolutes Maximum oder Minimum. Die ersten zwei Eckenfiguren der zweiten Reihe entsprechen Sattelpunkten. Figur 1.54 zeigt eine Schraffur der ebenen Rhombenteilung durch Höhenlinien dieser Funktion.

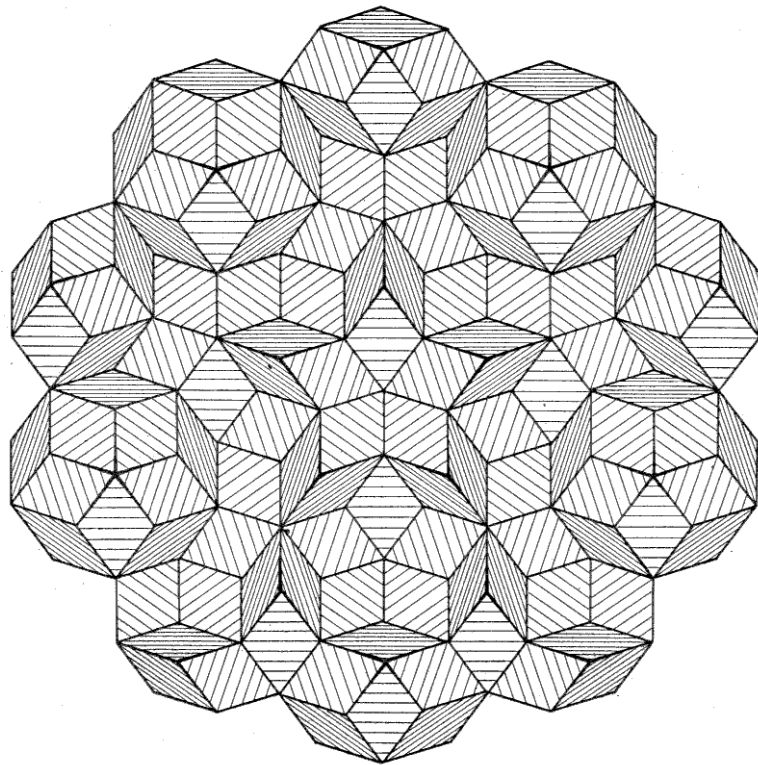


Abbildung 1.54: Rhombenteilung der Ebene

Die Betrachtung der Figur von Wieringa führt uns dazu, eine Erklärung für die verwirrende Komplexität der ebenen Penrose-Muster durch eine einfache Konstruktion in einer höher-dimensionalen Geometrie zu suchen. Eine solche Konstruktion wurde um 1980 von de Bruijn gefunden. Sie zeigt, dass diese geometrische Komplexität von der gleichen Art ist wie diejenige in der Zahlentheorie bei der Approximation einer irrationalen Zahl durch rationale.

Die Betrachtung der 8 möglichen Eckenfiguren einer Penrose-Pflasterung durch Rhomben zeigt, dass die Pflasterung durch die Eckpunkte der Flächenteilung bereits eindeutig bestimmt ist. Denn die von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten sind einfach die Strecken, die ihn mit denjenigen Eckpunkten verbinden, deren Abstand von ihm gleich der Kantenlänge ρ der Rhomben ist. Die Markierung der Kanten durch Pfeile wird dann wie in der obigen Figur bestimmt. Es kommt also nur darauf an, die Menge der Eckpunkte einer solchen Pflasterung zu beschreiben.

Es sei also eine Penrose-Pflasterung der euklidischen Ebene E durch Rhomben gegeben. O.B.d.A. nehmen wir an, dass für die Kantenlänge der Rhomben $\rho = 1$ gilt. Unsere obigen Bemerkungen über die Richtungen der Kanten der Rhomben zeigen folgendes. Wir können den reell 2-dimensionalen Vektorraum der Translationen von E so mit der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} identifizieren, dass die fünf Kantenvektoren positiver Richtung gerade die fünf 5-ten Einheitswurzeln $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ sind, $\zeta = e^{2\pi i/5}$. Die fünf Kantenvektoren negativer Richtung sind dann $-1, -\zeta, -\zeta^2, -\zeta^3, -\zeta^4$. Jeder Vektor, der irgendeinen Eckpunkt der Pflasterung in einen anderen Eckpunkt überführt, ist dann jedenfalls von der folgenden Form:

$$n_0 + n_1\zeta + n_2\zeta^2 + n_3\zeta^3 + n_4\zeta^4 \quad (*)$$

wobei n_0, \dots, n_4 ganze Zahlen sind. Die Frage ist nur, welche von diesen Vektoren tatsächlich vorkommen. Bevor wir darauf eingehen, betrachten wir zunächst ganz allgemein die Menge aller dieser komplexen Zahlen

$$\mathbb{Z}[\zeta] := \{n_0 + n_1\zeta + n_2\zeta^2 + n_3\zeta^3 + n_4\zeta^4 \mid (n_0, \dots, n_4) \in \mathbb{Z}^5\} .$$

In der Zahlentheorie lernt man, dass dies der Ring der ganzen alge-

braischen Zahlen im Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}[\zeta]$ ist. Als \mathbb{Z} -Modul ist $\mathbb{Z}[\zeta]$ frei vom Rang 4. Die Elemente $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3$ bilden eine \mathbb{Z} -Basis, denn es gilt die Relation $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$, und das Kreisteilungspolynom $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ ist nach Gauß, “Disquisitiones arithmeticae” [146, art. 341], irreduzibel. Wir könnten also jedes Element von $\mathbb{Z}[\zeta]$ eindeutig in der Form $n_0 + n_1\zeta + n_2\zeta^2 + n_3\zeta^3$ darstellen. Diese Darstellung wäre jedoch der 5-zähligen Symmetrie, der “Pentaplexity” in den Mustern von Penrose nicht angemessen. Angemessen ist die Darstellung in der Form (*), aber diese ist eben wegen der Kreisteilungsgleichung nicht eindeutig. Anders gesagt: Die Zuordnung

$$(n_0, \dots, n_4) \mapsto n_0 + n_1\zeta + n_2\zeta^2 + n_3\zeta^3 + n_4\zeta^4$$

definiert einen surjektiven Homomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}[\zeta]$$

eines freien \mathbb{Z} -Moduls vom Rang 5 auf einen freien \mathbb{Z} -Modul vom Rang 4. Sein Kern ist ein freier \mathbb{Z} -Modul vom Rang 1, nämlich

$$K = \mathbb{Z} \cdot (1, 1, 1, 1, 1) .$$

Wir fassen jetzt $\mathbb{Z}^5 \subset \mathbb{R}^5$ als das Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten im 5-dimensionalen euklidischen Standardraum \mathbb{R}^5 auf. (Warnung: $\mathbb{Z}[\zeta]$ ist **kein** Gitter in \mathbb{C} ; die Punkte von $\mathbb{Z}[\zeta]$ liegen dicht in \mathbb{C} .) Zu dem 1-dimensionalen Untergitter $K \subset \mathbb{Z}^5$ gehört als orthogonales Komplement ein 4-dimensionales Untergitter $K^\perp = L$ in \mathbb{Z}^5 , nämlich

$$L = \{(n_0, \dots, n_4) \in \mathbb{Z}^5 \mid n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 0\} .$$

Aber die direkte Summe $K \oplus L \subset \mathbb{Z}^5$ ist nicht das ganze Gitter, sondern nur ein Untergitter vom Index 5. Entsprechend ist die Beschränkung von φ auf L ein Isomorphismus von L mit einer Untergruppe $\varphi(L) \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ vom Index 5. Um alle Elemente von $\mathbb{Z}[\zeta]$ eindeutig als Bilder von Elementen

von \mathbb{Z}^5 darzustellen, muss man daher zu L noch 4 geeignete Nebenklassen von L hinzunehmen. Die Menge aller Nebenklassen \mathbb{Z}^5/L wird durch die Zuordnung $(n_0, \dots, n_4) \mapsto n_0 + \dots + n_4$ isomorph auf \mathbb{Z} abgebildet. Es ist naheliegend, für die 4 benötigten Nebenklassen diejenigen mit $1 \leq n_0 + \dots + n_4 \leq 4$ zu wählen. Wir betrachten also die folgenden Teilmengen W und W^+ des Gitters \mathbb{Z}^5 :

$$\begin{aligned} W &= \{(n_0, \dots, n_4) \in \mathbb{Z}^5 \mid 0 \leq n_0 + \dots + n_4 \leq 4\} \\ W^+ &= \{(n_0, \dots, n_4) \in \mathbb{Z}^5 \mid 1 \leq n_0 + \dots + n_4 \leq 4\} . \end{aligned}$$

Nunmehr ist klar: Der surjektive, aber nicht injektive Homomorphismus von freien \mathbb{Z} -Moduln $\varphi : \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}[\zeta]$ induziert eine bijektive Abbildung von Mengen

$$\varphi : W \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[\zeta]$$

Wir haben damit jede komplexe Zahl aus $\mathbb{Z}[\zeta]$ eindeutig durch einen Gitterpunkt aus $W \subset \mathbb{Z}^5$ dargestellt.

Nun sei $T_0 \subset E$ die Eckenmenge der gegebenen Rhombenteilung, und es sei

$$j : T_0 \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

die oben auf geometrische Weise definierte natürliche Indizierung. Sind nun $p, q \in T_0$ irgendwelche Eckpunkte und ist $v = n_0 + n_1\zeta + n_2\zeta^2 + n_3\zeta^3 + n_4\zeta^4 \in \mathbb{Z}[\zeta]$ der Vektor mit $q = p + v$ und $(n_0, \dots, n_4) \in W$, dann folgt aus der Definition der Indizierung:

$$j(q) = j(p) + (n_0 + \dots + n_4) .$$

Nun nimmt j aber nur die Werte 1, 2, 3, 4 an. Daraus folgt $0 \leq n_0 + \dots + n_4 \leq 3$. Der Vektor (n_0, \dots, n_4) gehört also nicht zu der L -Nebenklasse mit $n_0 + \dots + n_4 = 4$. Der Ausschluss dieser Nebenklasse bei der gesuchten Beschreibung von T_0 würde nicht zur Pentaplexität passen – adäquater wäre der Ausschluss von L selbst, also von $n_0 + \dots + n_4 = 0$. Um dies zu erreichen, wählen wir einen Basispunkt $p_0 \in E - T_0$ wie folgt. Wir wählen zunächst

ein $p \in T_0$ und setzen dann $p_0 = p - j(p)\zeta$. Dann gilt:

$$T_0 \subset p_0 + \varphi(W^+).$$

Dadurch entspricht nun jedem Eckpunkt $q \in T_0$ eindeutig ein Gitterpunkt $n \in W^+$, so dass $q = p_0 + \varphi(n)$. Der Menge T_0 entspricht auf diese Weise bijektiv eine Menge T_0^+ von Gitterpunkten, nämlich

$$T_0^+ = \{n \in W^+ \mid p_0 + \varphi(n) \in T_0\}.$$

Die Frage ist nun: Wie sieht diese Menge T_0^+ aus?

Bevor wir die Antwort geben, machen wir noch eine triviale Vorbemerkung zur Geometrie des Gitters $\mathbb{Z}^5 \subset \mathbb{R}^5$ und des Untergitters L . Wir bezeichnen mit $L_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^5$ die reelle Hyperebene mit der Gleichung $x_0 + \dots + x_4 = 0$. Jedem Gitterpunkt $n = (n_0, \dots, n_4) \in \mathbb{Z}^5$ ordnen wir einen offenen Würfel $W_n \subset \mathbb{R}^5$ zu:

$$W_n = \{(x_0, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^5 \mid (n_i - 1) < x_i < n_i\}.$$

Man sieht ganz leicht, dass man mit Hilfe dieser Würfel die Menge W^+ wie folgt charakterisieren kann:

$$W^+ = \{n \in \mathbb{Z}^5 \mid W_n \cap L_{\mathbb{R}} \neq \emptyset\}.$$

Eines der Hauptergebnisse von de Bruijn ist nun die Beschreibung von $T_0^+ \subset W^+$ als die Teilmenge derjenigen n , für welche ihr Würfel W_n nicht nur die 4-dimensionale Hyperebene $L_{\mathbb{R}}$ schneidet, sondern sogar eine gewisse in $L_{\mathbb{R}}$ enthaltene 2-dimensionale Ebene. Diese Ebene wird mit Hilfe einer komplexen Zahl beschrieben. Es sei also $\zeta \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Wir ordnen ξ die folgenden reellen affinen Unterräume F_{ξ} und E_{ξ} in \mathbb{R}^5 von der Dimension 3 bzw. 2 zu:

$$\begin{aligned} F_{\xi} &= \{(x_0, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^5 \mid \sum_{i=0}^4 \zeta^{2i} x_i = \zeta\} \\ E_{\xi} &= F_{\xi} \cap L_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Nun formulieren wir den Satz von De Bruijn.

Wenn die Penrose-Pflasterung durch Rhomben einer gewissen Regularitätsvoraussetzung genügt, lässt sich die der Eckenmenge T_0 entsprechende Gitterpunktmenge $T_0^+ \subset W^+ \subset \mathbb{Z}^5$ wie folgt beschreiben. Zu der Pflasterung gibt es eine komplexe Zahl $\xi \in \mathbb{C}$, so dass gilt:

$$T_0^+ = \{n \in \mathbb{Z}^5 \mid W_n \cap E_\xi \neq \emptyset\}$$

Projiziert man T_0^+ orthogonal auf E , so erhält man die Eckpunkte einer Flächenteilung von E_ξ durch Rhomben, die der gegebenen Rhombenteilung von E ähnlich ist. Die komplexe Zahl ξ genügt der folgenden Regularitätsbedingung: ξ ist nicht von der Form $i\zeta^k u + a$ mit $u \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{Z}[\zeta](1 - \zeta)$. Umgekehrt führt für jedes in diesem Sinne reguläre $\xi \in \mathbb{C}$ die Projektion der zugehörigen Gitterpunktmenge in E_ξ zu einer Penrose-Pflasterung mit Rhomben, die Bilder entsprechender Quadrate im Gitter sind.

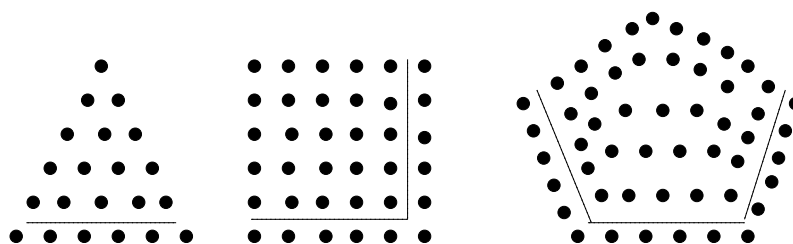
Das Wieringa-Dach erhält man übrigens durch orthogonale Projektion von T_0^+ in den 3-dimensionalen Unterraum F_ξ und eine anschließende affine Transformation in F_ξ , welche die Abstände aller Punkte in F_ξ von E_ξ mit dem Faktor $\sqrt{2}/2$ reduziert.

Für singuläre ξ entsprechen einem ξ mehrere, endlich viele singuläre Penrose Pflasterungen, und man erhält so alle. Ihre Konstruktion ist etwas komplizierter, aber grundsätzlich von der gleichen Art.

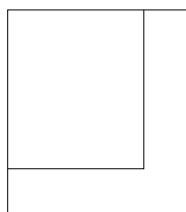
Dieser Satz von de Bruijn reduziert alles, was wir über die bemerkenswerten geometrischen Eigenschaften einer bestimmten Penrose-Pflasterung sagen können, auf Aussagen über eine einzige komplexe Zahl ξ . Vielleicht sollten wir doch ab und zu nachdenklicher sein, wenn wir sagen: "Es sei ξ eine komplexe Zahl". Vielleicht sind die reellen und die komplexen Zahlen doch ein wenig geheimnisvoller, als wir gewöhnlich meinen. Vielleicht hilft uns ein solcher Satz, nachträglich die Scheu der Griechen vor dem Irrationalen zu verstehen oder die Unterscheidung Keplers zwischen dem, was auf endliche Weise wissbar ist, und dem anderen, das so nicht wissbar ist, ernst zu nehmen.

1.3 Exkurs: Kettenbrüche, diophantische Approximation

In den Lehren der Pythagoreer über Zahlen und Figuren und auch in ihren Ansätzen zum Erfassen des Irrationalen spielte der Begriff des “Gnomon” eine wichtige Rolle. Was damit gemeint war, werden wir gleich an Beispielen sehen. Eine allgemeine Definition gibt – viel später – Heron von Alexandria: Ein Gnomon ist eine Figur, die beim Hinzufügen zu einer anderen Figur eine zu dieser ähnliche Figur erzeugt. Die Lieblingsbeispiele der Pythagoreer waren die Dreieckszahlen, Viereckszahlen, Fünfeckszahlen usw.

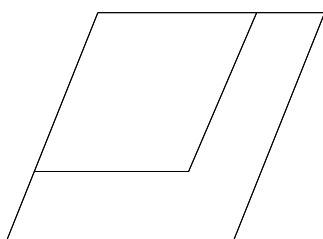


Bei diesen Figurenfolgen bilden die Folgen der Gnomonen arithmetische Folgen $1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$ bzw. $1, 3, 5, 7, 9, 11 \dots$ bzw. $1, 4, 7, 10, 13, 16 \dots$ usw., und die Dreieckszahlen, Quadratzahlen, 5-Eckszahlen usw. sind die Folgen der Partialsummen, also $1, 3, 6, 10, 15, 21 \dots$ bzw. $1, 4, 9, 16, 25, 36 \dots$ bzw. $1, 5, 12, 22, 35, 51 \dots$. Das Beispiel der Quadratzahlen legt ein geometrisches Beispiel für einen Gnomon nahe: Als Gnomon für ein Quadrat kann man eine Figur nehmen, die aus einem anderen Quadrat und zwei Rechtecken mit den beiden Quadratseiten winkelförmig zusammengesetzt ist.

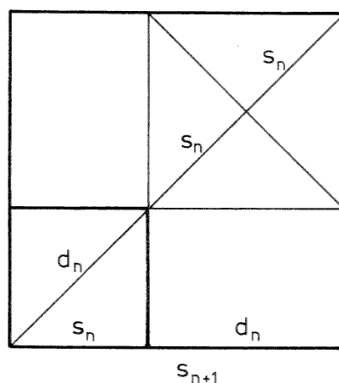


An dieser Stelle kann man die Geschichte des Wortes “Gnomon” erklären (Heath, “A History of Greek Mathematics”, Volume I [181, p. 78]). Die griechischen Worte $\gamma\nu\acute{\omega}\mu\epsilon$ bzw. $\gamma\nu\tilde{\omega}\mu\alpha$ bedeuten Erkenntnisvermögen bzw. Kennzeichen oder Kenntnis. $\gamma\nu\acute{\omega}\mu\omicron\nu$ bezeichnete ursprünglich ein einfaches

astronomisches Instrument, durch das man die Zeit wissen konnte: einen auf einer waagerechten Ebene senkrecht stehenden Stab. Dann bezeichnete es ein winkelförmiges Instrument zum Zeichnen rechter Winkel. Danach bekam es die gerade eben eingeführte Bedeutung eines Gnomons zum Quadrat. Der Pythagoreer Philolaus sah dieses Gnomon als ein Symbol für Vereinigung und Vereinbarkeit. Euklid erweitert in Definition 2 von Buch II der Elemente die Definition des Gnomons vom Quadrat auf beliebige Parallelelogramme.



Am Ende steht dann die schon zitierte allgemeine Definition des Gnomons von Heron. In diesem Begriff des Gnomons mit seinen beiden wesentlichen Elementen, dem des Aneinanderfügens zweier Figuren und dem der Ähnlichkeit der so erzeugten Figur zu einer vorher vorhandenen, ist die Möglichkeit und bei folgerichtigem Weiterdenken die Notwendigkeit gegeben, diese Operation des Aneinanderfügens zu wiederholen. Der Begriff des Gnomons enthält daher im Keim nicht nur ein operatives Element, das man in moderner Sprache als eine gruppentheoretische Operation beschreiben kann, nämlich eine Ähnlichkeitstransformation, welche die neue Figur aus der ursprünglichen erzeugt, sondern er enthält darüber hinaus die Idee eines unendlichen Prozesses, der durch unendliche Wiederholung einer Operation aus einer einfachen Figur ein komplexes Muster erzeugt. Die griechischen Mathematiker der Antike haben genau dies bei ihren Untersuchungen über quadratische Irrationalitäten getan. So liegt zum Beispiel der pythagoreischen Approximation von $\sqrt{2}$ die Folge von Gnomonen zugrunde, die durch die folgende Figur beschrieben wird.



Zwischen den **Seitenzahlen** s_n und den Diagonalzahlen d_n bestehen die folgenden rekursiven Beziehungen:

$$s_{n+1} = s_n + d_n \quad d_{n+1} = 2s_n + d_n .$$

Durch diese Rekursionsgleichungen sind nun aber umgekehrt für beliebige Anfangswerte (s_0, d_0) zwei Folgen s_n und d_n definiert:

$$\begin{bmatrix} s_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} s_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

Falls $\sqrt{2}s_0 + d_0 \neq 0$, konvergiert der Quotient d_n/s_n :

$$\lim d_n/s_n = \sqrt{2}$$

Insbesondere erhält man für $s_0 = 1, d_0 = 1$ die Folge der rationalen Approximationen von $\sqrt{2}$, welche schon die Pythagoreer gefunden hatten:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \dots$$

Für genauere historische Angaben verweise ich auf Th. Heath, “A History of Greek Mathematics” [181] [vol. 1, p. 91–93], und den bereits zitierten Aufsatz von S. Heller “Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer” [186]. Besonders fruchtbar ist die Verbindung zwischen den Ide-

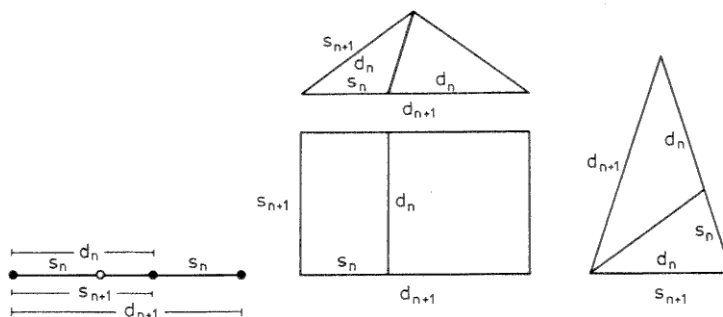
en des Gnomons und des goldenen Schnittes, wozu dieser geradezu herausfordert. Die entscheidende Eigenschaft des goldenen Schnittes wird von Euklid in der Proposition 5 von Buch 13 ausgesprochen:

Wenn man eine Strecke nach äußerem und mittlerem Verhältnis teilt und ihr eine dem größeren Abschnitt gleiche Strecke anfügt, dann ist die ganze Strecke nach äußerem und mittlerem Verhältnis geteilt, und die ursprüngliche Strecke ist der größere Abschnitt.

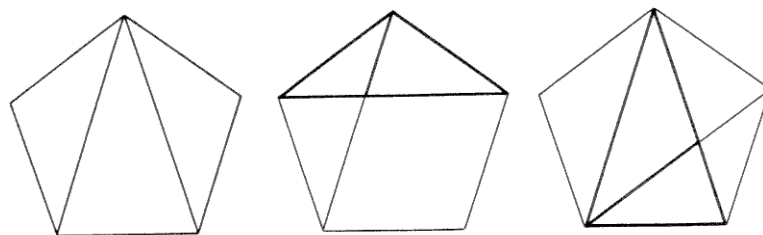
Kepler hat zu Recht in diesem Satz das Entscheidende gesehen. Im Kapitel 15 der Weltharmonik, das von den Tonarten handelt, schreibt er:

Zunächst erinnere man sich, dass die Durtertz ihren Ursprung im Fünfeck hat und dass das Fünfeck durch die Teilung nach dem äußeren und mittleren Verhältnis bestimmt ist, die den göttlichen Schnitt bildet. In diesem schönen Verhältnis liegt nun aber die Idee der Zeugung verborgen. Denn wie der Vater den Sohn erzeugt, der Sohn einen anderen, jeder einen ihm ähnlichen, so wird auch bei jeder Teilung die Proportion fortgesetzt, wenn man den größeren Abschnitt zum Ganzen hinzufügt. Die Summe erhält dann die Stelle des Ganzen, und was vorher Ganzes war, ist jetzt größerer Abschnitt. [214, p. 165]

Man kann den Satz von Euklid sowohl als Gleichheit von Proportionen von Strecken wie als Aussage über Gnomone verschiedener ebener Figuren interpretieren. Die folgende Figur zeigt vier mögliche Interpretationen.



Für ein Rechteck, dessen Seiten im Verhältnis des goldenen Schnitts stehen, ist das Quadrat über der größeren Seite ein Gnomon. Unter den gleichschenkligen Dreiecken gibt es bis auf Ähnlichkeit zwei, deren lange und kurze Seiten zueinander im Verhältnis τ des goldenen Schnitts stehen, ein spitzwinkliges mit Basiswinkel $2\pi/5$ und ein stumpfwinkliges mit Basiswinkel $\pi/5$. Das spitzwinklige ist Gnomon eines stumpfwinkligen, wenn beide die gleiche kurze Seite haben, und das stumpfwinklige ist Gnomon eines spitzwinkligen, wenn die kurze Seite des Gnomons gleich der langen des Ausgangsdreiecks ist. Die folgende Zeichnung zeigt, wie beide Figuren durch Einzeichnen der Diagonalen in einem regelmäßigen Fünfeck entstehen, so dass man also die Zahlen s_n und d_n als Seiten- und Diagonalzahlen des regelmäßigen Fünfecks deuten kann.



Für die Seiten- und Diagonalzahlen liest man aus jeder der obigen Gnomon-Figuren die gleiche Rekursionsrelation ab:

$$s_{n+1} = d_n \quad d_{n+1} = s_n + d_n .$$

Umgekehrt kann man nun wieder durch diese Relation für jedes beliebige Paar von Zahlen (s_0, d_0) eine Folge (s_n, d_n) definieren:

$$\begin{bmatrix} s_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} s_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

Die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

hat die Eigenwerte $(1 \pm \sqrt{5})/2$, also τ und $-\tau^{-1}$. Der positive Eigenwert ist absolut größer und der negative absolut kleiner als 1. Wenn (s_0, d_0) nicht in dem Eigenraum zu dem negativen Eigenwert $-\tau^{-1}$ liegt, also wenn nicht $s + \tau d = 0$ gilt, dann nähert sich (s_n, d_n) asymptotisch dem Eigenraum $-\tau s + d = 0$ zum positiven Eigenwert, und es gilt:

$$\boxed{\lim d_n/s_n = \tau}$$

Dies gilt insbesondere für den besonders einfachen Anfangswert $(s_0, d_0) = (1, 1)$. Die Folge der s_n ist dann die Folge der **Fibonacci-Zahlen** f_0, f_1, f_2, \dots

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

Diese Zahlenfolge tauchte tatsächlich zuerst bei einem Problem der Zeugung auf, nämlich 1202 im “Liber abaci” des Leonardo von Pisa, auch Fibonacci genannt. Das Problem der “paria conicorum” lautet, in seinen Worten:

Wieviele Kaninchenpaare können in einem Jahr von einem Paar erzeugt werden?

Ein Mann hat auf einem rundum eingezäunten Platz ein Paar Kaninchen. Wir möchten wissen, wieviel Paare davon in einem Jahr erzeugt werden können, wenn diese Kaninchen von Natur aus jeden Monat ein weiteres Paar erzeugen und damit im zweiten Monat nach ihrer Geburt beginnen. [138, p. 283]

Fibonacci's Antwort ist 377, und er gibt alle dazwischenliegenden Zahlen auch an und berechnet sie durch die – natürlich nicht als Gleichung hingeschriebene – Rekursionsrelation

$$\boxed{f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \mid f_0 = f_1 = 1}.$$

Die Fibonacci-Zahlen hängen eng mit der Kettenbruchentwicklung der Zahl τ zusammen, also der Verhältniszahl der göttlichen Proportion. Darum wollen wir hier wenigstens das Allernotwendigste über Kettenbrüche berichten. Viel mehr und alle Einzelheiten findet man in den Büchern “Die Lehre von

den Kettenbrüchen” von O. Perron [285] und “Continued Fractions” von A.Ya. Khinchin [218]. Wir beginnen unseren Bericht mit einer Rückkehr zu den Elementen des Euklid. In Buch VII, Proposition 1 und 2 beschreibt Euklid einen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (m, n) von zwei natürlichen Zahlen m und n . Diesen grundlegenden Algorithmus nennen wir heute den **euklidischen Algorithmus**. Er besteht in der wiederholten **Division mit Rest**. Man dividiert also m durch n mit einer ganzen Zahl $a \geq 0$ als – approximativen – Quotienten und einem Rest $r \geq 0$, der kleiner als der Divisor n ist:

$$m = an + r .$$

Dies ist der Anfang des Algorithmus. Wir bezeichnen die Anfangsglieder m, n, r durch m_0, m_1, m_2 und a durch a_0 . Wenn $m_2 = 0$ ist, bricht der Prozess nach der ersten Division von m_0 durch m_1 ab. Wenn $m_2 \neq 0$ gilt, führen wir die Division mit Rest für m_1 geteilt durch m_2 durch, mit Quotient a_1 und Rest m_3 . Die Iteration des Divisionsprozesses ergibt die folgende Kette von Gleichungen:

$$\begin{array}{l} m_0 = a_0 m_1 + m_2 \\ m_1 = a_1 m_2 + m_3 \\ m_2 = a_2 m_3 + m_4 \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Wegen $m_l > m_2 > m_3 > \dots$ bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab, d.h. für ein bestimmtes k gilt zum ersten Mal $m_k = a_k m_{k+1}$ und $m_{k+2} = 0$. Die Zahl m_{k+1} ist dann der gesuchte größte gemeinsame Teiler (m, n) .

Diesen Algorithmus findet man wohl in allen elementaren Lehrbüchern der Algebra und der Zahlentheorie. Was man hingegen in den “modernen” Lehrbüchern oft nicht mehr findet – im Gegensatz zu den guten alten Büchern wie z.B. Webers “Lehrbuch der Algebra” [362] – das ist der Zusammenhang des euklidischen Algorithmus mit den Kettenbrüchen. Dieser ergibt sich sehr einfach wie folgt.

Wir gehen aus von der Gleichung

$$m_i = a_i m_{i+1} + m_{i+2} .$$

Wir teilen durch m_{i+1} und erhalten die Gleichung

$$\frac{m_i}{m_{i+1}} = a_i + \frac{m_{i+2}}{m_{i+1}} .$$

Wir setzen $x_i = m_i/m_{i+1}$, insbesondere $x_0 = m/n$ und $x_{k+1} = 0$. Dann lauten unsere Gleichungen:

$$x_i = a_i + x_{i+1}^{-1}$$

Daraus ergeben sich successive die folgenden Darstellungen für die Zahl $m/n = x_0$:

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 + \frac{1}{x_1} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} \\ &\dots \end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich, da der Prozess wegen $x_{k+1} = 0$ abbricht, die folgende Darstellung für die Zahl x_0 :

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_k}}}}$$

Einen solchen Ausdruck, bei dem a_0 eine ganze Zahl ist und bei dem die a_1, \dots, a_k positive ganze Zahlen sind, nennt man einen endlichen **Kettenbruch**, genauer, einen regelmäßigen Kettenbruch – bei “unregelmäßigen” Kettenbrüchen sind statt der Teilzähler 1 andere natürliche Zahlen zugelassen. Statt der obigen Schreibweise mit Bruchstrichen verwendet man auch

die folgende Schreibweise:

$$x_0 = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_k] .$$

Man nennt eine solche Darstellung von x_0 eine **Kettenbruchentwicklung**. Die Zahl a_0 heißt das **Anfangsglied**, die Zahlen a_1, \dots, a_k sind die **Teilnenner**, und die Zahlen x_i sind die **Schlusszahlen**.

Diese Zahlen berechnen sich wie folgt rekursiv aus x_0 . Wir bezeichnen für jede reelle Zahl ξ mit $[\xi]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich ξ . Dann gilt:

x_0	=	x
x_{i+1}	=	$(x_i - [x_i])^{-1}$
a_i	=	$[x_i]$

Diese Rekursionsformeln können wir nun aber nicht nur auf eine rationale Zahl x anwenden, sondern auf jede positive reelle Zahl x . Für rationale x bricht die Rekursion ab und wir erhalten die obige endliche Kettenbruchentwicklung. Für irrationale x bricht die Rekursion nicht ab, und wir erhalten die Entwicklung von x in einen **unendlichen Kettenbruch**:

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] .$$

Als Beispiele betrachten wir die Kettenbruchentwicklungen von $\sqrt{2}$ und von τ . Für $\sqrt{2}$ ergibt sich aus der Rekursionsformel sofort induktiv $x_0 = \sqrt{2}$ und $x_i = \sqrt{2} + 1$ für $i \geq 1$, und für $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2$ ergibt sich aus der Rekursionsformel sofort $x_i = \tau$ für alle $i \geq 0$. Damit erhält man unmittelbar die folgenden Kettenbruchentwicklungen:

$\sqrt{2}$	=	$[1; 2, 2, 2, \dots]$
τ	=	$[1; 1, 1, 1, \dots]$

Die Zahl τ der göttlichen Proportion hat also von allen irrationalen Zahlen die einfachste Kettenbruchentwicklung überhaupt. Nach Angaben von Coxeter wurde diese Entwicklung schon von dem engli-

schen Mathematiker Robert Simson gefunden, der von 1687 bis 1768 lebte.

Eine wichtige Eigenschaft der regelmäßigen unendlichen Kettenbruchentwicklung einer Irrationalzahl x besteht darin, dass die Folge der endlichen Kettenbrüche $[a_0; a_1, \dots, a_k]$, die durch Abbrechen der Entwicklung nach endlich vielen Schritten entstehen, eine Folge von rationalen Zahlen bildet, welche in einem präzisen Sinn die Irrationalzahl x auf die bestmögliche Weise approximiert. Dies sei kurz erklärt.

Die Zähler und Nenner p_k und q_k dieser **Näherungsbrüche** werden nach Wallis rekursiv wie folgt berechnet:

$p_k = a_k p_{k-1},$	$p_0 = a_0,$	$p_{-1} = 1$
$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2},$	$q_0 = 1$	$q_{-1} = 0$

Dann sind p_k, q_k relativ prim, und es gilt:

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k].$$

(Warnung: Einige Autoren numerieren die Näherungsbrüche so, dass $[a_0; a_1, \dots, a_k]$ nicht der k -te, sondern der $(k+1)$ -te Kettenbruch wird.)

Als Beispiele betrachten wir wieder die Kettenbruchentwicklungen von $\sqrt{2}$ und τ . In beiden Fällen ergibt sich leicht aus den jeweiligen Rekursionsformeln für die p_k, q_k einerseits und die Seiten- und Diagonalzahlen s_k, d_k andererseits mit den Anfangswerten $(s_0, d_0) = (1, 1)$:

$$\begin{aligned} p_k &= d_k \\ q_k &= s_k. \end{aligned}$$

Für $\sqrt{2}$ ergibt sich also gerade die schon von den Pythagoreern durch die gnomonische Methode abgeleitete Folge von Näherungsbrüchen:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \dots$$

Für die Kettenbruchentwicklung von τ gilt:

$$\begin{array}{l} p_k = f_{k+1} \\ q_k = f_k \end{array}$$

und die Folge der Näherungsbrüche für τ ist die Folge der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \dots$$

Wie gut ist die Approximation einer Irrationalzahl durch die Folge ihrer Näherungsbrüche? Dies ist ein hochinteressantes Thema der Zahlentheorie. Wir erwähnen hierzu nur einige der elementarsten Tatsachen.

Definition:

p und q seien teilerfremde natürliche Zahlen. Die rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ist eine “beste Näherung” von x , wenn für jeden anderen Bruch $\frac{p'}{q'}$ gilt:

$$q' \leq q \Rightarrow \left| x - \frac{p'}{q'} \right| > \left| x - \frac{p}{q} \right| .$$

Es ist eine grundlegende, schon von den frühesten Bearbeitern der Kettenbrüche mehr oder weniger deutlich erkannte Tatsache, dass die Näherungsbrüche p_k/q_k einer Irrationalzahl x für $k \geq 1$ beste Näherungen sind. Allerdings sind sie im allgemeinen nicht die einzigen besten Näherungen. Gewisse aus der Kettenbruchentwicklung $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ abgeleitete Nebennäherungsbrüche haben nämlich auch noch diese Eigenschaft. Die **Nebennäherungsbrüche** sind die Zahlen

$$\frac{p}{q} = \frac{ap_{k-1} + p_{k-2}}{aq_{k-1} + q_{k-2}} \quad \text{mit } 1 \leq a < a_k ,$$

wobei $k \geq 1$ verlangt wird. Zum Unterschied von diesen Nebennäherungsbrüchen nennen wir die zuerst eingeführten Näherungsbrüche jetzt **Hauptnäherungsbrüche**. Wenn $a_k = 1$ für alle $k \geq 1$ gilt, also für $x = \tau + n$, gibt es nur Hauptnäherungsbrüche und keine Nebennäherungsbrüche. Aber für alle anderen Irrationalzahlen gibt es auch Nebennäherungsbrüche, und darunter können auch beste Näherungen sein. Schon Wallis hat das z.B. für π untersucht. Die folgende kleine Tabelle zeigt

die besten Näherungen bis zum vierten Hauptnäherungsbruch von π , wobei die 4 Hauptnäherungsbrüche unterstrichen sind:

$$\frac{3}{\underline{1}}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{\underline{7}}, \frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}, \frac{333}{\underline{106}}, \frac{355}{\underline{113}}.$$

Die Hauptnäherungsbrüche sind vor den besten Näherungen durch Nebennäherungsbrüche durch eine stärkere Approximationseigenschaft ausgezeichnet. Um auf diese zu kommen, betrachten wir noch einmal die Definition der besten Näherungen einer Irrationalzahl x . Weil x irrational ist, ist qx für jede natürliche Zahl q auch irrational und liegt insbesondere niemals genau in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen. Es gibt daher eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $\langle qx \rangle$, die am dichtesten an qx liegt. Offensichtlich können wir nun die Definition der besten Näherungen wie folgt formulieren: p/q ist eine beste Näherung von x , genau wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $p = \langle qx \rangle$
- (ii) $q' < q \Rightarrow |x - \frac{\langle q'x \rangle}{q'}| > |x - \frac{\langle qx \rangle}{q}|.$

Als Maß der Güte der Annäherung von $\langle qx \rangle/q$ an x wird also in dieser Definition ganz einfach $|x - \langle qx \rangle/q|$ verwendet, also $|qx - \langle qx \rangle|/q$. Man könnte aber auch und ebenso einfach $|qx - \langle qx \rangle|$ als ein neues Maß für die Approximation verwenden, und dieses ist ein schärferes Maß, denn offenbar gilt:

$$\left. \begin{array}{l} q' < q \\ |q'x - \langle q'x \rangle| > |qx - \langle qx \rangle| \end{array} \right\} \Rightarrow |x - \frac{\langle q'x \rangle}{q'}| > |x - \frac{\langle qx \rangle}{q}|.$$

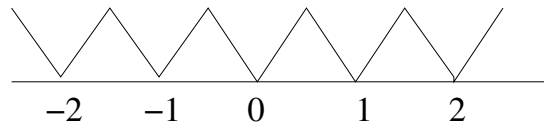
Damit werden wir zu der folgenden Definition geführt:

Definition:

p und q seien teilerfremde natürliche Zahlen. p/q ist eine **beste Approximation** der positiven Irrationalzahl x , wenn gilt:

- (i) $p = \langle qx \rangle$
- (ii) $q' < q = |q'x - \langle q'x \rangle| > |qx - \langle qx \rangle|.$

Es gilt dann der grundlegende Satz: **Die besten Approximationen einer positiven Irrationalzahl x sind genau die Hauptnäherungsbrüche $\mathbf{p}_k/\mathbf{q}_k = [a_0; a_1, \dots, a_k]$ der Kettenbruchentwicklung $\mathbf{x} = [\mathbf{a}_0; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots]$** (siehe z.B. Khinchin, “Continued fractions” [218, thm. 16, 17]). Die Funktion $\|\xi\| := |\xi - \langle \xi \rangle|$ misst den Abstand einer reellen Zahl von “der” nächsten ganzen Zahl $\langle \xi \rangle$. Sie ist periodisch mit der Periode 1.



Sie definiert also eine entsprechende Funktion auf dem Quotienten \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Diesen Quotienten identifizieren wir nun durch die Zuordnung $\xi \mapsto e^{2\pi i \xi}$ mit der Kreislinie S^1 . Dann ist $2\pi\|\xi\|$ die Bogenlänge des kürzesten Kreisbogens mit den Eckpunkten 1 und $e^{2\pi i \xi}$. Also ist $\|\xi\|$ bis auf den Faktor 2π der in S^1 gemessene Abstand zwischen den Punkten, die 0 und ξ entsprechen.

Wir betrachten nun das Problem der besten Approximation einer Irrationalzahl x durch rationale Zahlen $\langle qx \rangle/q$ als ein Problem der Approximation des Punktes $1 \in S^1$ durch die qx entsprechenden Punkte auf S^1 . Dies Problem nennt man auch das “*homogene Approximationsproblem*”, da es sich dabei darum handelt, die in p und q lineare Gleichung $qx - p = 0$ durch ganze p, q approximativ zu lösen. (Hier sind p, q variabel, x konstant!) Beim “*inhomogenen Approximationsproblem*” hingegen handelt es sich um die approximativen ganzzahligen Lösungen der inhomogenen linearen Gleichung $qx - p = y$ für festes x und beliebige reelle y . Dem entspricht die Approximation eines beliebigen Punktes $e^{2\pi i y} \in S^1$ durch die Punkte $e^{2\pi i qx}$. Der Punkt $e^{2\pi i x}$ auf S^1 entspricht einem Winkel α mit der Bogenlänge $x \cdot 2\pi$. Zu diesem Winkel α gehört die **Rotation**

$$\begin{aligned} \rho_\alpha : S^1 &\rightarrow S^1 \\ \rho_\alpha(e^{2\pi i \xi}) &= e^{2\pi i(\xi+x)} . \end{aligned}$$

ρ_α ist die Drehung um den Winkel $\alpha = 2\pi x$. Die Zahl x heißt auch die **Rotationszahl** der Drehung. Dazu gehört nun eine Operation der unendlich

zyklischen Gruppe \mathbb{Z} auf S^1 : der Zahl q entspricht die Drehung ρ_α^q um den Winkel $q\alpha$. Diese Operation ist ein besonders einfaches, aber trotzdem schon sehr interessantes diskretes dynamisches System. Andere Operationen von \mathbb{Z} auf S^1 sind in den siebziger Jahren intensiv untersucht worden (siehe z.B. M.R. Herman: “Résultats récents sur la conjugaison différentiable” [188]). Doch bleiben wir bei dem so “einfachen” System ρ_α^q . Die Punkte $e^{2\pi i q x}$, wobei q alle ganzen Zahlen durchläuft, sind gerade der \mathbb{Z} -Orbit von $1 \in S^1$. Es sind zwei grundsätzlich verschiedene Fälle zu unterscheiden. **1. Fall:** x ist rational, etwa $x = m/n$ mit $(m, n) = 1$. In diesem Fall ist ρ_α von endlicher Ordnung, nämlich von der Ordnung n , und der \mathbb{Z} -Orbit von 1 ist endlich: er besteht aus den n -ten Einheitswurzeln. Dieser Fall interessiert uns hier nicht. **2. Fall:** x ist irrational. Dann ist ρ_α von unendlicher Ordnung, und der Orbit von 1 ist überall dicht in S^1 . Darüber hinaus kann man noch viel mehr beweisen: Der Orbit ist **gleichverteilt** in S^1 . Das bedeutet folgendes. $A \subset S^1$ sei irgend ein Teilkreisbogen, und seine Länge sei $\mu(A) \cdot 2\pi$, mit $0 \leq \mu(A) \leq 1$. Ferner sei χ_A die charakteristische Funktion von A , also $\chi_A(z) = 1$ wenn $z \in A$ und $\chi_A(z) = 0$ sonst. Gleichverteilung der Folge $\rho^q(1)$ bedeutet:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \chi_A(\rho^q(1)) = \mu(A) .$$

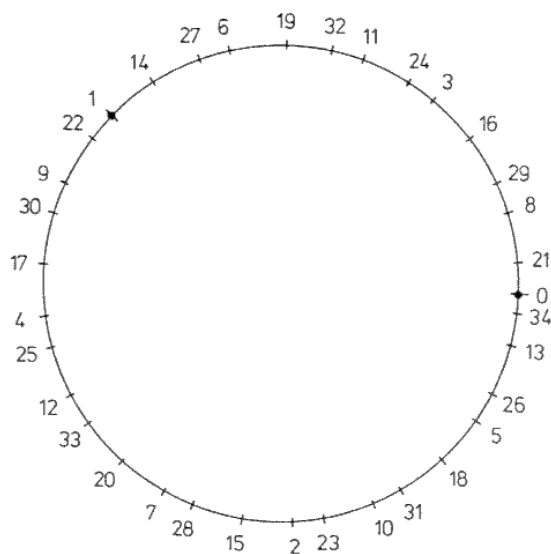
“Moderner” kann man diesen klassischen Satz von Bohl, Sierpinski und Weyl auch wie folgt ausdrücken: Das dynamische System $\{\rho_\alpha^q\}$ auf S^1 ist für jede irrationale Drehzahl **ergodisch** (vgl. z.B. V.I. Arnold, A. Avez: “Ergodic problems of classical mechanics” [4, 6.6 und Appendix 9]).

In Hinsicht auf die Gleichverteilung, also in “statistischer Hinsicht”, verhalten sich also alle Drehungen mit irrationaler Drehzahl x gleichartig. Hingegen verhalten sie sich durchaus unterschiedlich – in Abhängigkeit von x – wenn es um das homogene oder das inhomogene Approximationsproblem geht. Wir konzentrieren uns auf das homogene Problem, betrachten also die Frage, wie in S^1 die qx entsprechenden Punkte den Punkt 1 approximieren. Die obige Charakterisierung der Hauptnäherungsbrüche p_k/q_k als beste

Approximationen von x lässt sich nun wie folgt formulieren:

$$q_k = \min\{q > q_{k-1} \mid \|qx\| < \|q_{k-1}x\|\} .$$

Das heißt also: q_k ist die nächste Zahl nach q_{k-1} , für welche der entsprechende Punkt auf S_1 näher an 1 liegt als der q_{k-1} entsprechende Punkt. Das folgende Bild illustriert dies für $x = \tau$. Diese Drehzahl entspricht einem Winkel $2\pi\tau$, das sind modulo 360 etwa $222,49^\circ$. Der Rechtsdrehung um diesen Winkel entspricht die Linksdrehung um den Winkel $2\pi(1-\tau)$, also etwa $137,51^\circ$. Die Zeichnung zeigt die $q\tau$ entsprechenden Punkte für $0 \leq q \leq 34$, numeriert durch q . Man erkennt sofort die successiven besten Approximationen von 1 in S_1 , also den Punkt mit der Nummer 0, durch die Punkte mit den Nummern 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, die den Anfang der Fibonacci-Folge bilden.



Es geht uns nun um eine Abschätzung für die Güte oder Geschwindigkeit der Approximation. Genauer: Es geht um Abschätzungen von $\|qx\|$ durch einfache Funktionen von q , und zwar insbesondere dann, wenn $q = q_k$ der Nenner eines Hauptnäherungsbruches ist, also eine beste Approximation von x liefert. Der folgende Satz zeigt, wie die Zahl τ in dieser Hinsicht vor allen

anderen irrationalen Zahlen ausgezeichnet ist. Einen Beweis findet man in dem Buch von J.W.S. Cassels: “*An Introduction to Diophantine Approximation*” [81, Chapter 1.4, Theorem V].

Satz 1.3.1 (1) Für jedes irrationale x gibt es unendlich viele natürliche Zahlen q für welche die folgende Ungleichung gilt:

$$\|qx\| < \frac{\sqrt{1/5}}{q}$$

Und zwar findet man unter je drei aufeinanderfolgenden q_k, q_{k-1}, q_{k-2} mindestens ein solches q .

(2) Für $x = \tau$ ist diese Konstante $\sqrt{1/5}$ bestmöglich. Das heißt: Für jede Konstante $C < \sqrt{1/5}$ gibt es höchstens endlich viele q mit

$$\|qx\| < \frac{C}{q}.$$

Das gleiche gilt nicht nur für τ , sondern für alle Zahlen x die zu τ äquivalent sind, d.h. reelle Zahlen x der Form

$$x = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad ad - bc = \pm 1,$$

wo a, b, c, d ganze Zahlen sind. Diese zu τ äquivalenten Zahlen x sind genau diejenigen Irrationalzahlen, in deren Kettenbruchentwicklung $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ von einem gewissen k_0 ab $a_k = 1$ für $k \geq k_0$ gilt.

(3) Für alle nicht zu τ äquivalenten Irrationalzahlen x lässt sich die Approximation mit einer Konstanten $C < \sqrt{1/5}$ abschätzen. Es gibt nämlich dann unendlich viele q , so dass die Ungleichung

$$\|qx\| < \frac{\sqrt{1/8}}{q}$$

gilt. Und zwar findet man solch ein q unter je drei aufeinanderfolgenden q_k, q_{k-1}, q_{k-2} immer dann, wenn $a_k > 1$.

Die Verhältniszahl τ der göttlichen Proportion ist also dadurch ausgezeichnet, dass hier beim homogenen Approximationsproblem die Approximation langsamer ist als bei allen anderen nicht zu τ äquivalenten Irrationalzahlen. Umgekehrt bedeutet dies aber eine positive Auszeichnung von τ hinsichtlich des inhomogenen Approximationsproblems. Denn schlechte Approximation beim homogenen Problem impliziert gute Approximation beim inhomogenen Problem und umgekehrt (siehe Cassels, loc. cit., Chapter V.4. “Transference between homogeneous and inhomogeneous problems”).

Zum anderen kann man die langsame Approximation von τ auch so umschreiben: “ τ ist die am wenigsten irrationale Irrationalzahl”.

Mit dieser leicht paradoxen Formulierung soll angedeutet werden, dass es hinsichtlich der rationalen Approximation von Irrationalzahlen sehr verschiedene Arten von Irrationalzahlen gibt. Beispielsweise werden algebraische Irrationalzahlen schlechter approximiert als transzendente. Grob gesprochen gilt: Je schneller die Partialnenner der Kettenbruchentwicklung wachsen, desto besser ist die Approximation. In diesen Zusammenhang gehören die ersten Transzendenzbeweise von **Liouville** aus dem Jahre 1844 und die später bewiesenen viel schärferen Sätze von **Thue**, **Siegel**, **Roth**. All dies geht an Tiefe und Bedeutung aber weit über den Rahmen unseres Berichtes hinaus. Es sei dazu auf das schon zitierte Buch von Cassels verwiesen und auf das Buch von Alan Baker: “Transcendental Number Theory” [14].

Ich füge hier ein paar kärgliche Bemerkungen zur Geschichte der Kettenbrüche ein. In gewissem Sinne beginnt ihre Geschichte mit dem euklidischen Algorithmus. Aber es war natürlich erst nach der Entwicklung der Bruchrechnung möglich, systematisch mit Kettenbrüchen zu operieren. Die Übernahme der indischen und arabischen Bruchrechnung begann in Europa etwa mit Leonardo von Pisa und zog sich fast über drei Jahrhunderte hin. Die (nicht-regelmäßigen) Kettenbrüche wurden erst um die Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert entdeckt, von **Bombelli** in seiner Algebra von 1572, von **Cataldi** 1613 in einer Abhandlung über das Ziehen von Quadratwurzeln und von **Schwenter** 1618 in seiner “geometria practica” und den “deliciae physico-mathematicae”, schließlich wohl unabhängig von diesen von Lord Brouncker. **Huyghens** benutzte bei der Lösung eines prak-

tischen Problems, der Berechnung von Zahnrädern für den Bau eines Planetariums, die Approximation rationaler Zahlen mit großen Zählern und Nennern durch ihre Haupt- und Nebennäherungsbrüche. Der erste, der eine systematische Theorie der Kettenbrüche entwickelte, war Leonhard **Euler**, der ihnen mehrere Abhandlungen widmete. Hieran schloss sich J.L. Lagrange an, z.B. mit “*Additions aux éléments d’Algèbre d’Euler*”, Paragraphe II, [123, p. 538–573] und mit den “*Recherches d’arithmétique*” [234]. Darin stellte Lagrange einen engen Zusammenhang zwischen den Kettenbrüchen und der von ihm entwickelten Reduktionstheorie der binären quadratischen Formen her. Auf diesen Zusammenhang werden wir in 14.1 zurückkommen.¹⁴ Im Anschluss an diese Arbeiten von Lagrange wurden die Kettenbrüche im 19. Jahrhundert zu einem wichtigen Hilfsmittel und Forschungsgegenstand der Zahlentheorie, und viele bedeutende Mathematiker trugen dazu bei, so u.a. **C.F. Gauß**, **A. Cayley**, **J. Liouville**, **G.L. Dirichlet**, **A. Hurwitz**, **F. Klein** und **H. Minkowski**. Über die Entwicklung in unserem Jahrhundert berichten die zitierten Bücher von Perron und Khinchin. Brüche spielen nicht nur in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle, sondern auch in manchen anderen Gebieten der Mathematik, z.B. bei der Auflösung der Singularitäten komplexer Flächen (siehe z.B. **F. Hirzebruch**: “Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen” [193]).

Wir beschließen unseren Bericht über Kettenbrüche mit einer schönen geometrischen Interpretation der Hauptnäherungsbrüche, die von Felix Klein gefunden wurde [226].

Klein betrachtet das homogene Approximationsproblem. Gegeben sei eine positive reelle Irrationalzahl x . Gesucht sind approximative ganzzahlige Lösungen (p, q) der Gleichung $qx - p = 0$. Diese Gleichung definiert in der (p, q) -Ebene eine Gerade durch den Nullpunkt mit der irrationalen Steigung $1/x$. Da wir nur an nichtnegativen p, q interessiert sind, betrachten wir in der (p, q) -Ebene nur den positiven Quadranten und die darin liegende Halbgerade mit Steigung $1/x$. Diese Gerade zerlegt den Quadranten in zwei Zusammenhangskomponenten, eine “obere” und eine “untere”. Wir betrach-

¹⁴Siehe Anmerkung S. 139.

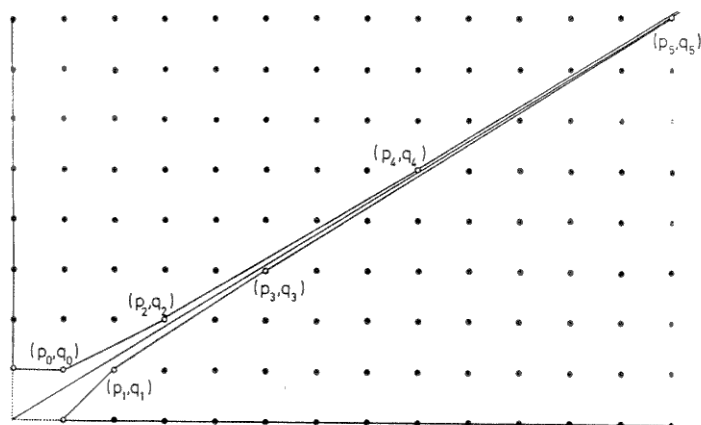


Abbildung 1.55: Kleins geometrische Darstellung der Kettenbruchentwicklung

ten jetzt das Gitter der Punkte (p, q) mit ganzzahligen Koordinaten p, q . Den Punkt $(0, 0)$ lassen wir weg. Alle übrigen Punkte (p, q) liegen nicht auf der Geraden, da diese ja irrationale Steigung hat. Sie liegen also in einer der beiden Komponenten des Quadranten. L^+ sei die Menge der Gitterpunkte in der oberen Komponente, L^- die derjenigen in der unteren. Felix Kleins Idee ist nun folgende: Wir betrachten die konvexen Hüllen $C(L^+)$ bzw. $C(L^-)$, d.h. die kleinsten konvexen Mengen, die L^+ bzw. L^- enthalten. Ihr Rand $\partial C(L^+)$ bzw. $\partial C(L^-)$ besteht jeweils aus zwei Teilen: einem Stück der p -Achse bzw. q -Achse, nämlich den Halbgeraden mit den Eckpunkten $(0, 1)$ bzw. $(1, 0)$, und einem von eben diesen Punkten ausgehenden Streckenzug, der die Gerade für wachsendes (p, q) immer besser approximiert. Felix Kleins Entdeckung ist nun, dass die Ecken dieses Streckenzuges gerade die Paare (p_k, q_k) sind, wo p_k/q_k die Hauptnäherungsbrüche von x sind. Damit das auch für den Punkt $(0, 1)$ stimmt, müssen wir $(0, 1) = (p_{-2}, q_{-2})$ setzen. Dann lautet Kleins Ergebnis wie folgt.

Satz 1.3.2

x sei eine positive reelle Irrationalzahl, und p_k, q_k wie früher die Zähler und Nenner der Hauptnäherungsbrüche $p_k/q_k = [a_0; a_1, \dots, a_k]$ zu der

regelmäßigen Kettenbruchentwicklung $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Ferner seien $\partial C(L^+)$ und $\partial C(L^-)$ wie oben die Ränder der konvexen Hüllen der Mengen und L^- der Gitterpunkte in den beiden Komponenten des positiven Quadranten, in die dieser durch die Gerade $qx - p = 0$ zerlegt wird. Dann gilt:

- (i) Die Punkte (p_k, q_k) mit geradem k sind die Eckpunkte von $\partial C(L^+)$, und die (p_k, q_k) mit ungeradem k sind die Eckpunkte von $\partial C(L^-)$. Dabei entspricht die Numerierung der (p_k, q_k) der Reihenfolge bei der Durchlaufung von $\partial C(L^\pm)$.
- (ii) Die ganzzahligen Gitterpunkte $(p, q) \in \partial C(L^\pm)$, die keine Ecken sind, entsprechen genau den Nebennäherungsbrüchen p/q von x . Auf der Strecke mit den Eckpunkten (p_{k-2}, q_{k-2}) und (p_k, q_k) liegen außer den Eckpunkten genau $a_k - 1$ weitere Gitterpunkte. Sie entsprechen den Nebennäherungsbrüchen

$$\frac{p}{q} = \frac{ap_{k-1} + p_{k-2}}{aq_{k-1} + q_{k-2}}, \quad 1 \leq a < a_k.$$

Der Beweis dieser Aussagen gehört zu dem von **Minkowski** so genannten Gebiet der **Geometrie der Zahlen**. Minkowski selbst hat ähnliche, aber etwas allgemeinere Ansätze zur geometrischen Interpretation der Kettenbrüche entwickelt (H. Minkowski: "Geometrie der Zahlen" [254, Kap. IV.45]) Wir werden hierauf und auf den Beweis des Satzes von Klein im Abschnitt 14.1 bei der Besprechung der Reduktionstheorie ebener Gitter zurückkommen.¹⁵ Die beigegebene Zeichnung illustriert den Satz von Felix Klein für den Fall $x = \tau$.

1.4 Kepler über Fibonacci-Zahlen, Phyllotaxis

Es könnte wohl sein, dass der Leser der langen Geschichte, die wir hier erzählen, bisweilen den Faden verliert. Darum sei daran erinnert, dass wir immer noch dabei sind, über die Weltharmonik von Kepler zu berichten.

¹⁵Siehe Anmerkung S. 139.

Wir waren dabei auf eine merkwürdige Figur gestoßen, eine Pflasterung der Ebene mit 5-Ecken, Zehneckern, Sternfünfecken und Ungetümen. Von da aus waren wir ins 20. Jahrhundert gewandert, zu den Penrosepflasterungen. Die mathematisch fruchtbarste Behandlung der Penrosepflasterungen war die von de Bruijn. Dieser Mathematiker war, wie wir noch sehen werden, von der Idee des Gnomons ausgegangen, ebenso wie der englische Kristallograph A.L. Mackay, der unabhängig von Penrose und etwa gleichzeitig auch auf dessen Pflasterungen gestoßen war. Über die Ideen von Mackay, der sich explizit auf Kepler berief, werden wir später noch berichten. All dies gab Anlass, zu Euklid zurückzukehren, über die Idee des Gnomons zu berichten, die mit dem Euklidischen Algorithmus verflochten ist und mit den Kettenbrüchen, deren Entwicklung durch die Jahrhunderte wir dann verfolgten. Dabei haben wir unsere Aufmerksamkeit besonders auf die Kettenbruchentwicklung für die Zahl τ der göttlichen Proportion gerichtet, und zwar deswegen, weil diese Zahl in Zukunft in dieser Geschichte noch eine große Rolle spielen wird. Nun kehren wir – nicht zum letzten Mal – zurück zu Keplers Weltharmonik.

Kepler hat sich für die göttliche Proportion immer wieder begeistert. Ein Grund dafür war sicher, dass diese ja eng mit der Konstruktion des 5-Ecks zusammenhängt, und da er im Rahmen seiner geometrischen Harmonielehre die Zahl 5 unbedingt brauchte, wenn er die harmonischen Teilungen $3/5$ und $4/5$ für die große Sext und die große Terz sowie $5/8$ und $5/6$ für die kleine Sext und kleine Terz auch theoretisch rechtfertigen wollte, nachdem er sich vorher durch sinnliche Wahrnehmung von ihrem Wohlklang überzeugt hatte. – Es sei daran erinnert, dass die Terzen erst seit dem späten 15. Jahrhundert als selbständige Konsonanzen und als konstitutiv für das Tonsystem begriffen wurden. Für Kepler also musste die Zahl τ eine wichtige Rolle spielen.

Natürlich kannte Kepler auch die Folge der Fibonacci-Zahlen. Er behandelt sie im Kapitel 15 der Weltharmonik, und daran schließt er Spekulationen über den Charakter der Dur- und Molltonarten an, über das Männliche und das Weibliche und über die Stimmungen beim Zeugungsakt. Die Spekulationen über “Männchen” und “Weibchen” knüpfen sich an die folgende

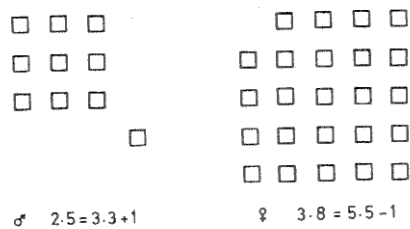
Identität für die Glieder f_k der Fibonaccifolge:

$$f_{k-1}f_{k+1} = f_k^2 + (-1)^{k+1} .$$

Aus heutiger Sicht ist diese Gleichung ein Spezialfall der folgenden Identität, die allgemein für die Paare (p_k, q_k) der Zähler und Nenner der Näherungsbrüche eines Kettenbruches besteht:

$$p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1} = (-1)^k .$$

Diese Gleichung ist wichtig für die Reduktionstheorie binärer Formen, denn sie besagt, dass zwei aufeinanderfolgende Paare (p_{k-1}, q_{k-1}) und (p_k, q_k) eine Basis des Gitters \mathbb{Z}^2 bilden. Davon war bei Kepler natürlich keine Rede, aber er sah wohl, dass die Gleichung wichtig war. Angesichts der rechten Seite der obigen Gleichung für die Fibonacci-Zahlen, bei der dem Quadrat f_k^2 abwechselnd etwas fehlt oder hinzugefügt wird, sah Kepler “Weibchen”, wenn etwas fehlt, und “Männchen” im anderen Fall. Seine Zeichnungen zeigen, woran er wohl gedacht hat:



Die obige Gleichung gilt für die Fibonacci-Folge. Das ist die recursiv durch $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$ definierte Folge mit den Anfangswerten $s_0 = 1, s_1 = 1$. Wählt man hingegen die “richtigen” Anfangswerte, nämlich $s_0 = 1, s_1 = \tau$, dann gilt natürlich $s_n = \tau^n$, also die “vollkommene” Beziehung ohne Defekt oder Überschuß

$$s_{n-1}s_{n+1} = s_n^2 .$$

Daran schließt sich bei Kepler die folgende Spekulation an: Die Quotienten der Fibonacci-Folge, die einem irgendwie geschlechtlichen Erzeugungsprozess entspricht, sind der Zahl τ der göttlichen Proportion nicht gleich und

bilden unvollkommene Proportionen. Also müsste umgekehrt die vollkommene Proportion τ selbst einem ungeschlechtlichen, vegetativen Erzeugungsprozess entsprechen.

Das also ist die Natur jener Teilung, die zur Konstruktion des Fünfecks führt. Nun hat aber Gott der Schöpfer die Gesetze der Zeugung jener Teilung entsprechend gestaltet. Dabei entsprechen der in sich selbst vollkommenen eigentlichen Proportion der unaussprechlichen Folgliedern die Fortpflanzungsverhältnisse bei den Pflanzen (*rationes plantarum seminarias*), die ja nach dem Gebot des Schöpfers als Einzelne ihren Samen in sich selber tragen ... ". [213, p. 175]

Man muss, wenn man diese Sätze richtig lesen will, bedenken, dass die Bedeutung der Sexualität bei Pflanzen erst rund hundert Jahre später erkannt wurde, während nach den Vorstellungen der damaligen Zeit, so Andreas Caesalpinus, die Samen zwar Fortpflanzungsorgane, aber Emanationen einer Pflanzenseele waren. Da Kepler klar das Ungeschlechtliche betonen will, wäre es also aus heutiger Sicht richtiger, "semen" freier mit "Spross" zu übersetzen, "*rationes plantarum seminarias*" also mit "Verhältnisse bei der Sprossbildung der Pflanzen". Und wenn man Keplers Sätze in dieser freien Weise interpretiert, erhalten sie eine wahre Bedeutung, die Kepler, hätte er sie geahnt, sicher begeistert hätte. Die Zahl τ hängt nämlich aufs engste mit einer Erscheinung von grundlegender Bedeutung für die Morphologie der Pflanzen zusammen, mit dem Phänomen der Phyllotaxis. "Phyllotaxis" heißt zunächst einmal einfach "Blattstellung", von griechisch φύλλον = Blatt und τάξις = Anordnung, Stellung. In einem mehr spezifischen Sinne ist damit aber eine ganz bestimmte Gesetzmäßigkeit in der Anordnung der Blätter gemeint, die wir nachher beschreiben werden. Diese Gesetzmäßigkeit, eine bestimmte Anordnung in Spiralen, erstreckt sich aber nicht nur auf die Blätter im üblichen Sinn, sondern auf viele blattähnliche Organe, auf Seitensprossen, auf Blüten und Samen, auf Schuppen usw. Am augenscheinlichsten ist die Erscheinung bei der Anordnung der Einzelblütchen (oder später der Samen) in den Blütenständen von Blumen aus der Familie der Körbchenblütler, also



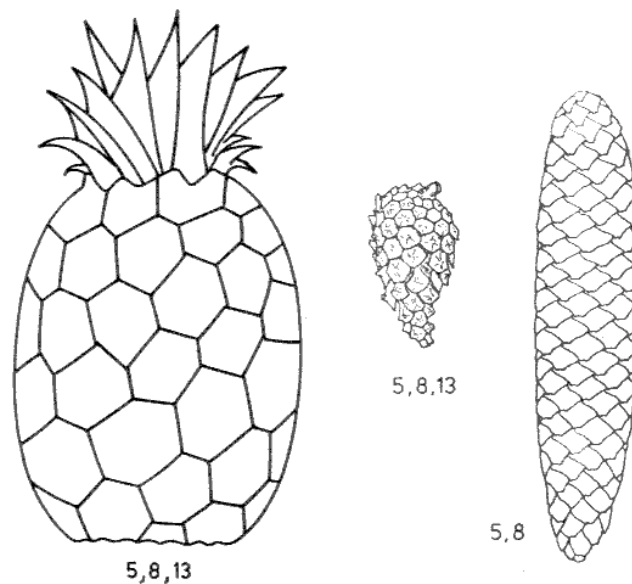
Abbildung 1.56: Chrysanthemum leucanthemum

der Compositae, insbesondere bei den Gattungen Bellis, Chrysanthemum und Helianthus, beim Maßliebchen, der Margerite und der Sonnenblume.¹⁶

Auf den ersten Blick sieht man nämlich, dass die Einzelblütchen in Spiralen angeordnet sind, genauer in zwei Systemen von Spiralen mit entgegengesetztem Drehsinn, und das Interessante ist nun die Zahl dieser Spiralen. Beim Gänseblümchen zähle ich 8 und 13, bei der Margerite (*Chrysanthemum leucanteum*) 13 und 21, beim Rainfarn (*Chrysanthemum vulgare*) mit etwas Phantastie 21 und 34 und bei der Sonnenblume 34 und 51. Das sind also immer zwei Paare von aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen. Auch noch größere Paare treten auf, bei Sonnenblumen sogar vereinzelt 144 und 233. Das sind also f_{11} und f_{12} , und der Quotient f_{12}/f_{11} approximiert τ mit einem Fehler weniger als 0,02%. Es ist klar, dass es sich hier nicht um Zufälle handelt, sondern um eine Gesetzmäßigkeit. Ein anderes schönes Beispiel für Phyllotaxis bieten die "Früchte" der Ananas. Die Oberfläche ihres Fruchtstandes hat eine Flächenteilung mit hexagonalen Elementen, und dadurch sieht man nicht nur zwei, sondern sogar drei Familien von Spiralen, wenn

¹⁶Vgl. dazu auch die schöne Darstellung in [?] (Hrsg.).

man mit dem Auge in den drei möglichen Richtungen von einem Hexagon zum nächsten wandert. Die Anzahl dieser Spiralen ist 5, 8, 13 bei der hier abgebildeten Ananas. (Das Bild entstand durch Umzeichnen einer Abbildung in dem schönen Buch "Unvergängliche Geometrie" von H.S.M. Coxeter [90]. Einiges vom folgenden ist durch den Abschnitt über Phyllotaxis in Coxeters Buch inspiriert.) Bei der Ananas kommen aber auch die Zahlen 13, 21 und 34 vor. Aber nicht nur die exotischen Ananas, auch unsere einheimischen Pflanzen zeigen uns die gleiche Erscheinung. Die Zapfen unserer einheimischen Kiefer (*pinus silvestris*) haben 6-eckige Schuppen, und wir sehen 3 Familien von jeweils 5, 8 und 13 Spiralen. Die Zapfen der gemeinen Fichte (*picea abies*) zeigen deutlich zwei Familien von 5 bzw. 8 Spiralen, und wenn man will, sieht man auch hier eine 3. Familie von 13 steileren Spiralen.



Entdeckt und zuerst beschrieben wurde das Phänomen der Phyllotaxis bei der Blattstellung der Landpflanzen. Die meisten Landpflanzen leben in zwei Medien, der Erde und der Luft. Sie sind deswegen Kormophyten ($\chi\omicron\rho\rho\mu\acute{o}\varsigma$ = Baumstamm, $\phi\upsilon\tau\acute{o}\nu$ = Pflanze), das heißt: ihr Vegetationskörper gliedert sich in eine in der Erde nach unten wachsende Wurzel und einen über

der Erde in der Luft nach oben wachsenden Spross. Der Spross gliedert sich in ein System von Sprossachsen mit einem Hauptproß und möglicherweise vielen Seitensprossen und in die Blätter. Die Sprossachse wird je nach Ausbildungsform als Stengel, Halm, Schaft oder Stamm bezeichnet. Sie ist durch Knoten gegliedert. An den Knoten stehen in bestimmter Anordnung die Blätter sowie, in deren Achseln, gegebenenfalls die Seitensprossen. Bei der Blattstellung unterscheidet man zunächst danach, ob an den Knoten nur ein Blatt sitzt (**Dispersion = zerstreute Blattstellung**), oder ob mehrere Blätter an einem Knoten sitzen. Sind es mehr als zwei, so nennt man die Blattstellung wirtelig. Sind es zwei, dann können die aufeinanderfolgenden Blattpaare rechtwinklig gekreuzt sein (dekussierte Blattstellung), oder aber gleich angeordnet sein (zweizeilige oder distiche Blattstellung).

Uns interessiert hier die disperse Blattstellung. Die Blätter sind bei dieser Blattstellung meist auf einer um die Sprossachse herumlaufenden aufsteigenden Spirale angeordnet. Wenn das so ist, gibt es zwei Spiralen mit der Eigenschaft, dass die Insertionspunkte **aller** Blätter nacheinander durchlaufen werden. Die eine aufsteigende Spirale entspricht einer Links- und die andere einer Rechtsschraubung. Man wählt unter beiden diejenige, bei welcher der Abstand zweier aufeinanderfolgender Insertionspunkte der kleinste ist. Sie heißt die **Grundspirale** oder auch **genetische Spirale**.

Die grundlegende Beobachtung über die Anordnung der Blätter ist nun die folgende. Durchläuft man mit einem bestimmten Blatt mit der Nummer 0 beginnend längs der genetischen Spirale die aufeinanderfolgenden Blätter und numeriert sie in der Reihenfolge der Durchlaufung, dann ist die Nummer des ersten Blattes, das fast genau über Blatt 0 steht, eine **Fibonacci-Zahl**, zum Beispiel 5. Wird diese Position z.B. nach zwei Umläufen um die Achse erreicht, dann ordnet man der Pflanze den **phyllotaktischen Bruch** $\frac{2}{5}$ zu. Der Drehwinkel von einem Insertionspunkt bis zum nächsten ist dann näherungsweise $\frac{2}{5}$ mal 2π . Ich habe ein Habichtskraut aus meinem Garten abgezeichnet, bei dem man den phyllotaktischen Bruch $\frac{2}{5}$ sehr gut sehen kann. Die genetische Spirale ist eine Linksschraube.

Den Drehwinkel von einem Insertionspunkt bis zum nächsten nennt man

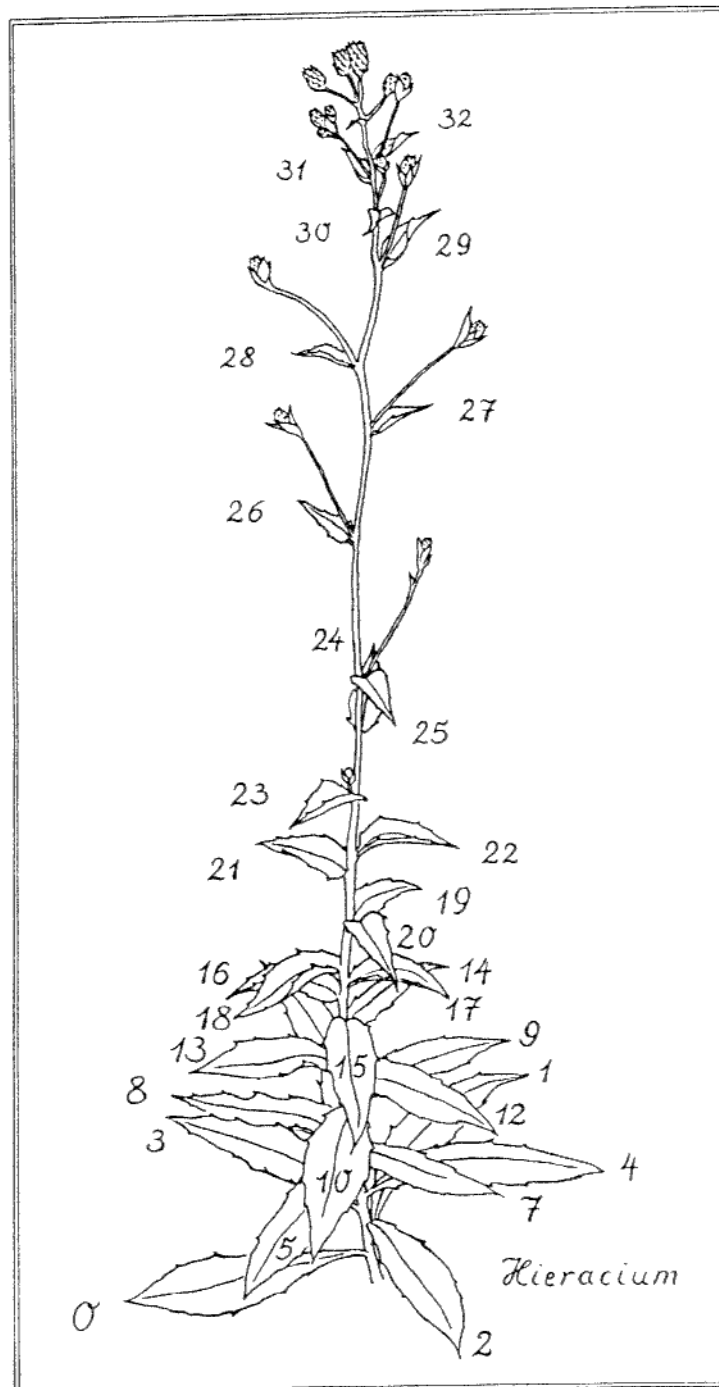


Abbildung 1.57: Phyllotaxis *Hieracium sabaudum* – Savoyer Habichtskraut

die Divergenz der Pflanze. Die näherungsweise Bestimmung der Divergenz durch den phyllotaktischen Bruch $\frac{2}{5}$ im obigen Beispiel ist nur eine grobe Approximation. Geht man beispielsweise weiter bis zum Blatt mit der Nummer 21, das genauer als Blatt 5 über Blatt 0 steht, so erhält man 8 Umläufe, also den phyllotaktischen Bruch $\frac{8}{21}$. Dies ist wieder ein Quotient von zwei Fibonacci-Zahlen von der Form f_n/f_{n+2} . Für den Limes gilt offensichtlich:

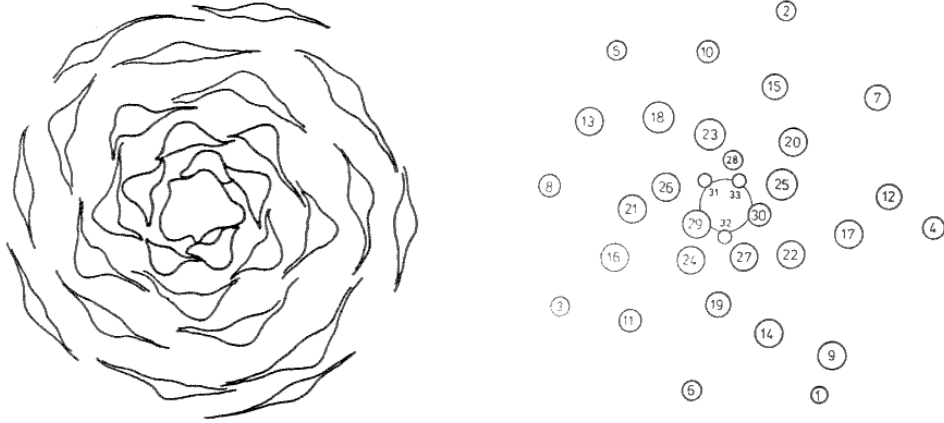
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n/f_{n+2} = \tau^{-2} \approx 0,382 .$$

Diesem Grenzwert entspricht ein in Grad gemessener Divergenzwinkel:

$$\tau^{-2} \cdot 360 = 137,51^\circ$$

Die erstaunliche Tatsache ist nun, dass dieser Divergenzwinkel von vielen Pflanzen mit großer Genauigkeit verwirklicht wird. Dies ist das eigentlich grundlegende Phänomen der Phyllotaxis. Das Auftreten der Fibonacci-Zahlen ist – wie wir noch sehen werden – eine daraus ableitbare Erscheinung.

Wir wollen ein Beispiel betrachten, auf das ich zufällig gestoßen bin, als ich beim Kochen half und den Kopf eines Rotkohls durchschnitt. Die linke der beiden folgenden Zeichnungen zeigt diesen Schnitt durch die Äquatorebene in vereinfachter Form: das schöne Muster der vielfach gefalteten Blätter ist nicht dargestellt, sondern nur die Spur ihres Hauptnerven und des Ansatzes der Blattspreite. Die rechte Zeichnung zeigt, in noch stärkerer Vereinfachung, nur noch die Durchstoßpunkte der Hauptnerven. Bei der Betrachtung dieser Zeichnungen fällt wohl als erstes auf, dass man die Durchstoßpunkte in einem System von 5 Spiralen anordnen kann, mit einer Drehung im Uhrzeigersinn beim Durchlaufen von außen nach innen, d.h. von den älteren Blättern zu den jüngeren. Beim genaueren Hinsehen entdeckt man noch ein zweites System von 8 Spiralen mit dem entgegengesetzten Drehsinn. Derartige Spiralen bzw. die entsprechenden Spiralen, die sich um die Sprossachse winden, nennen die Botaniker *“parastische Spiralen”* oder *“Parastichen”*. Das Wort kommt vom griechischen $\pi\alpha\rho\alpha$ = neben und $\sigma\tau\iota\chi\omicron\varsigma$. Der Gegenbegriff ist *“Orthostichen”*, das sind Reihen von senkrecht übereinander angeordneten Blättern. (In unserem Schnitt würde ihnen ein radialer Strahl entsprechen.)



Die Parastichen sind, wie schon gesagt, ein sekundäres Phänomen. Das grundlegende Phänomen wird sichtbar, wenn wir die Durchstoßpunkte nicht auf parastischen Spiralen anordnen, sondern auf der primären, d.h. der genetischen Spirale. Dazu numerieren wir, von außen beginnend, die Durchstoßpunkte entsprechend der Anordnung, die durch den Abstand vom Mittelpunkt, also von der Sprossachse, gegeben ist. Diese Numerierung entspricht dem Alter der Blätter: je älter ein Blatt ist, desto kleiner ist seine Nummer. Sie entspricht auch der Höhe der Insertionspunkte an der Sprossachse: je niedriger der Insertionspunkt eines Blattes ist, desto kleiner ist seine Nummer. Wir messen dann die Winkel von einem Durchstoßpunkt zum nächsten mit Scheitel im Mittelpunkt. In unserem Beispiel ergeben sich dabei Winkel zwischen 128° und 151° . Sehr viel geringer wird die Schwankung, wenn wir den Drehwinkel von Punkt 0 bis Punkt n messen und durch n teilen. Dann schwankt der Winkel zwischen 136° und 139° . Als Mittelwert, berechnet mit der Methode der kleinsten Quadrate, ergibt sich $138,8^\circ$ mit einem Bestimmtheitsmaß von 0,99998. Unter Berücksichtigung der Ungenauigkeiten der Zeichnung und Messung ist das m.E. eine erstaunlich gute Annäherung an den wahren Wert von $137,51^\circ$.

Man kann sich des weiteren fragen, von welcher Art im einzelnen die parastischen Spiralen und die genetische Spirale sind. Der Augenschein und

theoretische Überlegungen führen zu der Vermutung, dass man die beim ebenen Schnitt entstehenden Spiralen in erster Näherung als **logarithmische Spiralen** beschreiben kann (siehe dazu *Lineare Algebra* Band II [55, Bd. 2, p.221]), also als Kurven mit einer Gleichung der Form

$$r = a e^{-b\varphi} .$$

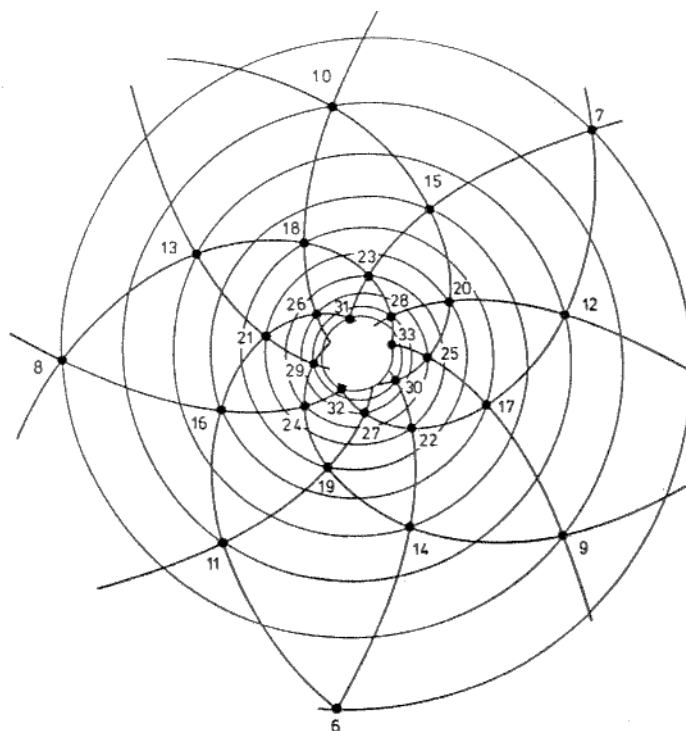
Der Abstand r_n des Punktes n vom Mittelpunkt ist dann durch eine Gleichung von der folgenden Form gegeben:

$$r_n = a e^{-cn} .$$

Für das obige Beispiel habe ich a und c mit dem Taschenrechner durch exponentielle Kurvenanpassung bestimmt. Dabei ergeben sich verschiedene Werte, je nachdem, welche Punkte man berücksichtigt. Ein gutes Bestimmtheitsmaß ergibt sich, wenn man nicht alle Punkte berücksichtigt, sondern nur etwa die Hälfte, also die ab Nummer 17, oder noch etwas mehr, z.B. ab Nummer 13. Das liegt daran, dass das Wachstum der älteren Blätter mit dem sehr schnellen Wachstum der jungen Blätter nicht Schritt hält, so dass sich bei Berücksichtigung der älteren Hälfte eine andere Spirale ergibt als bei der Berücksichtigung der jüngeren Hälfte. Bei Berücksichtigung der Blätter ab Nummer 13 erhält man:

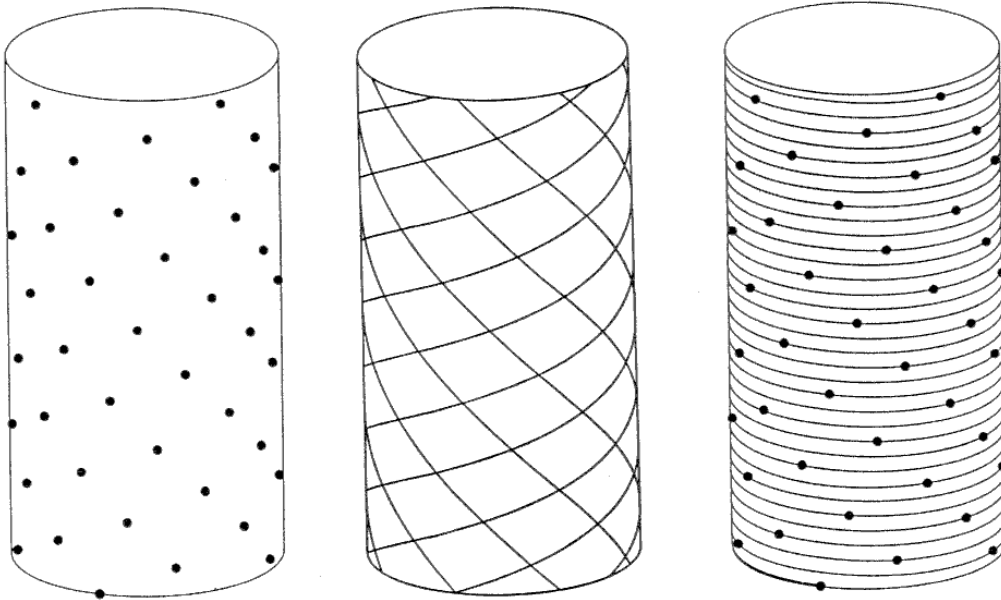
$$r_n = 16.34 e^{-0.087n} .$$

Berücksichtigt man nur die Blätter ab 17, so erhält man -0.095 statt -0.087 , und berücksichtigt man alle, so erhält man -0.065 . Als Kompromiss habe ich den Wert 0.087 gewählt und dafür das idealisierte System von logarithmischen Spiralen gezeichnet, die der genetischen Spirale und den Systemen von 5 bzw. 8 Parastichen entsprechen. Der Divergenzwinkel in dieser Zeichnung hat den idealen Wert von $137,51^\circ$.



Ebene Spiralen von der gerade gezeigten Art beschreiben in idealisierter Weise die Verhältnisse bei einem ebenen Schnitt oder bei einem im wesentlichen flach ausgebildeten Blüten- oder Fruchtstand. Bei eher zylindrischen Fruchtständen oder bei der Beschreibung der Blattstellung an der Sprossachse ist eine idealisierte Darstellung durch ein System von Schraubenlinien auf einem Zylinder zweckmäßiger. Natürlich kann man die eine Beschreibung in die andere transformieren. Sind (r, φ) Polarkoordinaten in der punktierten Ebene und (h, φ) zylindrische Koordinaten auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times S^1$, dann ist die "richtige" Transformation $h = -\ln r$, denn diese Abbildung ist winkeltreu, so dass sich die verschiedenen Spiralen in der Ebene und die entsprechenden Schraubenlinien auf dem Zylinder unter den gleichen Winkeln schneiden. Eine ebene logarithmische Spirale $r = ae^{-b\varphi}$ geht dabei in eine Schraubenlinie $h = +b\varphi + h_0$ mit konstanter Ganghöhe über. Das folgende Bild zeigt einen Zylinder mit einem System von Insertionspunkten, mit zwei Systemen von 5 bzw. 8 Parastichen und

mit der genetischen Spirale. Der Divergenzwinkel ist wieder $137,51^\circ$. Die Ganghöhe der Schraubenlinien entspricht allerdings nicht dem vorigen Beispiel.



Der nächste wichtige Schritt, der die mathematische Beschreibung der Phyllotaxis noch weiter vereinfacht, besteht nun darin, den Zylinder auf der Ebene abzurollen. Dadurch geht das System der auf dem Zylinder liegenden Insertionspunkte in ein **ebenes Punktgitter** über. Ein ebenes Punktgitter ist ein System von Punkten in der euklidischen Ebene, das sich, wenn man einen dieser Punkte als Nullpunkt wählt, als die Menge aller ganzzahligen Linearkombinationen $mu + nv$ von zwei festen; linear unabhängigen Vektoren u und v darstellen lässt. Solche Punktgitter werden wir in 14.1 ausführlich behandeln.¹⁷ Das Wort "Punktgitter" gehört zur Terminologie des vorigen Jahrhunderts – heute sagt man einfach "Gitter". Die beiden Systeme von sich kreuzenden Spiralen gehen in zwei sich kreuzende Scharen von äquidistanten parallelen Geraden über. So etwas nannte man im 19. Jahrhundert ein Parallelgitter. Die Abbildungen auf der gegenüberliegenden Bild-

¹⁷Siehe Anmerkung S. 139.

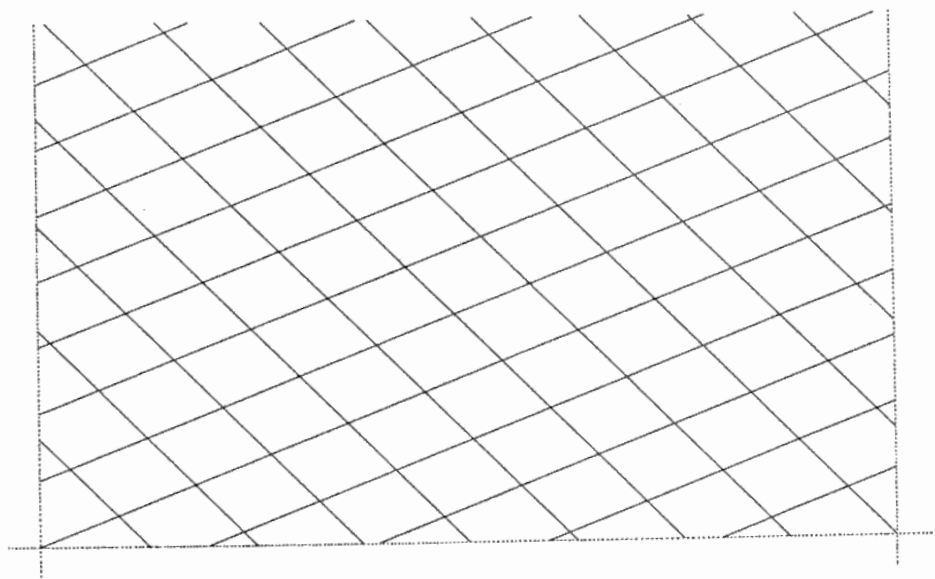
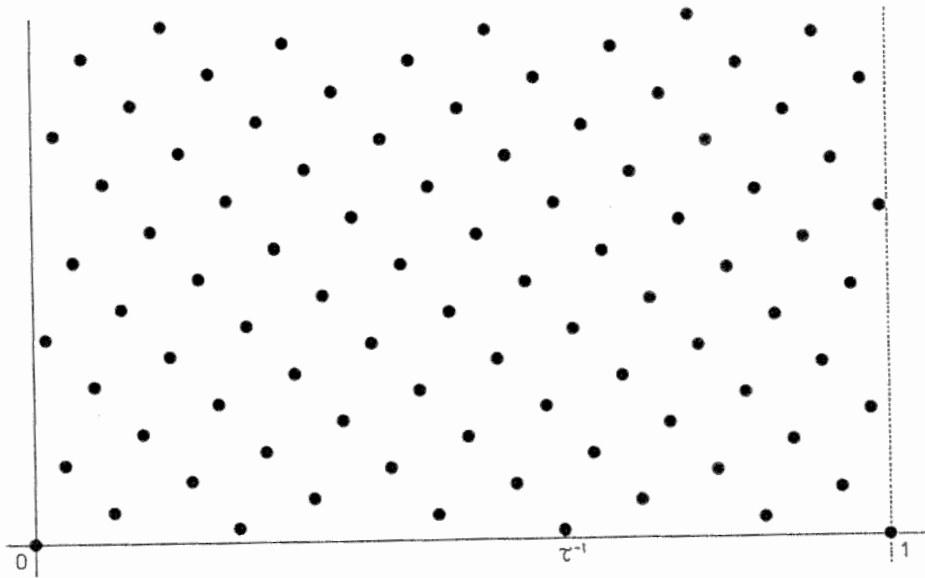


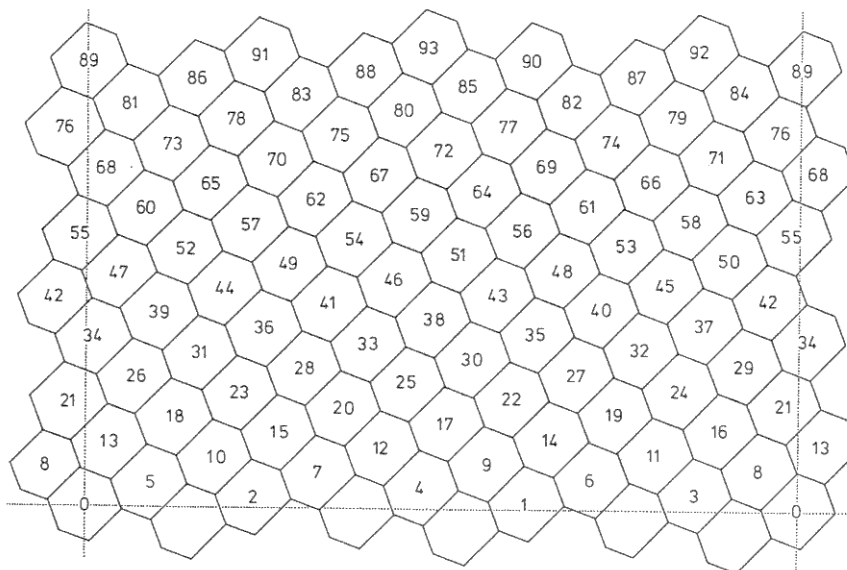
Abbildung 1.58: Punkt- und Parallelgitter der Phyllotaxis

seite zeigen das Punktgitter und das Parallelgitter. Die Punkte des Punktgitters sind genau die Kreuzungspunkte des Parallelgitters. Nun kann man aber zu einem Punktgitter viele Parallelgitter mit dieser Eigenschaft angeben, weil man statt der Vektoren u und v auch jedes andere Paar u' und v' von Gittervektoren wählen könnte, das aus u und v durch eine Transformation mit einer ganzzahligen unimodularen Matrix entsteht. Es fragt sich also, wodurch die Parallelgitter ausgezeichnet sind, die den von uns bei der Phyllotaxis wahrgenommenen Parastichen entsprechen. Die naheliegendste Vermutung ist die, dass wir in unserer Wahrnehmung besonders leicht solche Punktreihen durch gedachte Linien verbinden, bei denen die aufeinanderfolgenden Punkte minimalen Abstand voneinander haben. Dadurch werden für ein gegebenes Punktgitter L diejenigen Parallelgitter ausgezeichnet, die zu solchen Basen (u, v) gehören, für welche u und v die minimale mögliche Länge haben. Solche Basen von L nennt man **reduzierte Basen**, und die von ihnen handelnde Theorie **Reduktionstheorie**. In arithmetischer Form, als Reduktionstheorie der binären quadratischen Formen, wurde diese Theorie schon um 1770 von *J.L. Lagrange* entwickelt. Aber erst C.F. Gauß interpretierte um 1830 binäre quadratische Formen als ebene Gitter und erst 1850 griff G.L. Dirichlet die Anregungen von Gauß auf und gab der Reduktionstheorie der binären und ternären Gitter eine geometrische Form. Wir werden uns mit dieser Reduktionstheorie in Abschnitt 14.1 noch ausführlich beschäftigen. Ein sehr wichtiger von Dirichlet eingeführter Begriff ist der Begriff der Dirichletzelle.

Definition:

Die **Dirichletzelle** D zu einem Punkt p des Gitters L in der Ebene E ist die Menge aller Punkte x in E , die von keinem Gitterpunkt geringeren Abstand haben als von p .

Man sieht leicht, dass die Dirichletzellen eines ebenen Gitters L je nach der Symmetrieart von L Rechtecke oder zentralsymmetrische Hexagone sind, wobei die Hexagone den Allgemeinfall darstellen. Die nächste Zeichnung zeigt die Flächenteilung der Ebene durch hexagonale Dirichletzellen zu dem weiter oben dargestellten Punktgitter.



Wir wollen den Prozess des Abrollens des Zylinders auf der Ebene und den umgekehrten Prozess des Aufwickelns der Ebene auf dem Zylinder jetzt analytisch genau beschreiben, und wir wollen beschreiben, was dabei mit den Punktgittern und den Parallelgittern geschieht. Wir beschreiben die Ebene als den euklidischen Standardvektorraum \mathbb{R}^2 , und wir beschreiben den Zylinder als das Produkt $S^1 \times \mathbb{R}$ der Kreislinie S^1 mit der reellen Geraden \mathbb{R} . Die Kreislinie identifizieren wir mit dem Quotienten \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Das Aufwickeln der Ebene auf den Zylinder entspricht der Restklassenabbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$$

Dabei wird eine Teilmenge $L \subset \mathbb{R}^2$, zum Beispiel ein Gitter, auf ihr Bild $\Phi(L)$ abgebildet, und umgekehrt wird einer Punktmenge $M \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ ihr Urbild $\widetilde{M} = \Phi^{-1}(M)$ zugeordnet. Dies entspricht dem Abrollen des durch M dargestellten zylindrischen Musters auf der Ebene. In der Ebene ist der Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^2$ ausgezeichnet. Ihm entspricht ein ausgezeichneter Punkt $o = \Phi(0)$ auf dem Zylinder – in der Anwendung der Insertionspunkt des

nullten Blattes. Das Urbild von o ist die unendlich zyklische Gruppe

$$L_o = \Phi^{-1}(0) = \mathbb{Z}(1, 0).$$

Dies 1-dimensionale Gitter L_o ist der Kern des Homomorphismus Φ , und wir fassen Φ als die zugehörige Restklassenabbildung auf:

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/L_o.$$

Wir betrachten ebene Punktgitter $L \subset \mathbb{R}^2$ von der Form $L = \widetilde{M}$. Diese Bedingung ist äquivalent zu der Bedingung $L_o \subset L$, und es gilt dann $M = L/L_o$. Wir verlangen weiter, dass die Teilmenge M des Zylinders keine zwei Punkte von der gleichen Höhe enthält – diese Bedingung ist für die Menge der Insertionspunkte der Blätter bei disperser Blattstellung erfüllt. Die Bedingung ist äquivalent dazu, dass die abelsche Gruppe L/L_o torsionsfrei ist. Man sagt dann auch: L_o ist **primitiv** in L . Die Bedingung ist auch äquivalent dazu, dass zwischen $(0, 0)$ und $(1, 0)$ kein weiterer Punkt von L liegt. Weil L/L_o torsionsfrei ist, ist dies eine unendlich zyklische Gruppe. Diese hat zwei Erzeugende. Von diesen beiden Punkten auf dem Zylinder wählen wir denjenigen mit positiver Höhe y . Im Urbild des Punktes in L wählen wir den Vektor (x, y) mit minimaler Länge aus. Diese Bedingung bestimmt (x, y) eindeutig, außer dann, wenn $x = \pm 1/2$, was wir ausschließen. Offenbar bilden die Vektoren $(1, 0)$ und (x, y) eine ganzzahlige Basis von L . Das bedeutet, dass jeder Gitterpunkt eindeutig in der Form $m(1, 0) + n(x, y)$ darstellbar ist. Einem solchen Gitterpunkt ordnen wir die Nummer n zu. In der oben abgebildeten Zerlegung der Ebene in die Dirichletzellen eines Gitters ist in jede Zelle die Nummer des entsprechenden Gitterpunktes eingetragen. Die Numerierung der Punkte von L ordnet Punkten in der gleichen Nebenklasse von L_o die gleiche Nummer zu. Sie induziert die kanonische Numerierung der unendlich zyklischen Gruppe $M = L/L_o$ mit dem erzeugenden Element $\Phi(x, y)$. Dies ist gerade die Numerierung von M , die wir früher mit Hilfe der genetischen Spirale beschrieben haben. Damit kommen wir zum Zusammenhang zwischen den Geraden oder Geradenscharen in der Ebene \mathbb{R}^2 und den Spiralen oder besser Schraubenlinien auf dem Zylinder.

Jede Gerade in der Ebene, die nicht parallel zu einer der beiden Koordinatenachsen von \mathbb{R}^2 ist, hat als Bild im Zylinder eine Schraubenlinie. Ihre Ganghöhe ist die Steigung der Geraden. Verbindet die Gerade zwei Punkte von L , dann enthält sie eine unendliche Reihe von Gitterpunkten aus L , und die entsprechende Schraubenlinie aus L verbindet eine unendliche Reihe von Punkten aus $L/L_o = M$. Insbesondere hat die Gerade $\mathbb{R}(x, y)$ als Bild $\Phi(\mathbb{R}(x, y))$ gerade die genetische Spirale, die alle Punkte von M miteinander verbindet. Ferner kann man zu jeder derartigen Geraden das System aller dazu parallelen Geraden betrachten, die durch irgendwelche Punkte von L gehen. Sie bilden ein System von äquidistanten parallelen Geraden. Ihre Vereinigung ist von der Form $\mathbb{R}v + L$, wo v ein von 0 verschiedener primitiver Gittervektor ist. Hat der Punkt v die Nummer n , dann besteht das Bild $\Phi(\mathbb{R}v + L)$ offenbar aus genau n parallelen Schraubenlinien auf dem Zylinder, nämlich den Bildern der Geraden $\mathbb{R}v + k(x, y)$ mit $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Bis jetzt haben wir alle diese Systeme von äquidistanten parallelen Geraden in der Ebene bzw. von n parallelen Schraubenlinien auf dem Zylinder als gleichberechtigt behandelt. Man sollte aber nicht vergessen, dass in der Anwendung auf die Phyllotaxis diese Linien erst durch unseren Wahrnehmungsprozess entstehen, indem wir in der Menge M der Insertionspunkte gewisse Punktreihen auswählen und durch gedachte Linien interpolierend verbinden. Es ist, wie schon gesagt, eine naheliegende Hypothese, dass dabei solche Punktreihen ausgewählt werden, bei denen der Abstand benachbarter Punkte möglichst klein wird. Das bedeutet also, dass diejenigen Systeme von Schraubenlinien $\Phi(\mathbb{R}v + L)$ wahrgenommen werden, bei denen v der Länge nach möglichst klein ist.

Damit kommen wir auf die Reduktionstheorie ebener Gitter zurück. In ihrer geometrischen, von Dirichlet herrührenden Form sagt sie unter anderem folgendes. Wir wollen annehmen, dass das Gitter L hexagonale Dirichletzellen hat, was ja der Normalfall ist. Die hexagonale Dirichletzelle des Nullpunktes hat mit 6 anderen Dirichletzellen eine gemeinsame Seite. Diese bilden 3 Paare von je zwei Zellen, die symmetrisch zum Nullpunkt liegen. Ihre Mittelpunkte seien $\pm u, \pm v, \pm w$. Die Vorzeichen wählen wir o.B.d.A. so, dass u, v, w positive Nummern l, m, n haben. In der Reduktionstheorie

beweist man, dass für einen der drei Vektoren, etwa u , gilt:

$$\|u\| = \min\{\|x\| \mid x \in L - \{O\}\}.$$

Ferner gilt für einen weiteren der drei Vektoren, etwa v :

$$\|v\| = \min\{\|y\| \mid y \in L - \mathbb{Z}u\}.$$

Für den dritten Vektor w gilt dann schließlich:

$$\|w\| = \min\{\|z\| \mid z \in L - \mathbb{Z}u - \mathbb{Z}v\}.$$

Damit ist klar: *Das Tripel von Zahlen (l, m, n) beschreibt die Anzahlen der Schraubenlinien in den drei am besten sichtbaren Familien von Schraubenlinien.* Am besten sichtbar ist eine Familie von l Schraubenlinien, danach kommt eine Familie von m Schraubenlinien und schließlich eine Familie von n Schraubenlinien.

Damit stellt sich für uns die Aufgabe, für das Gitter $L \subset \mathbb{R}^2$ mit der Basis $(1, 0)$ und (x, y) das Zahlentripel (l, m, n) zu berechnen. Hier kommt der Zusammenhang zwischen der Reduktionstheorie und den Kettenbruchentwicklungen ins Spiel, der schon von *Lagrange* herausgearbeitet wurde. Wir bedienen uns der geometrischen Interpretation der Kettenbruchentwicklung von *Felix Klein*, die wir weiter oben dargestellt haben. Um sie auf die jetzt zu untersuchende Situation zu übertragen, bilden wir den Vektorraum \mathbb{R}^2 so linear auf sich selber ab, dass das von Klein betrachtete Gitter $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ in unser Gitter $L \subset \mathbb{R}^2$ übergeht. Wir betrachten also die lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned}\varphi(1, 0) &= (1, 0) \\ \varphi(0, 1) &= (x, y)\end{aligned}$$

Der von Klein betrachtete positive Quadrant in der (p, q) -Ebene geht dabei in einen Ebenensektor S über, der von den Halbgeraden $\mathbb{R}^+(1, 0)$ und $\mathbb{R}^+(x, y)$ begrenzt wird. Wenn, was wir annehmen, x negativ ist und y positiv, enthält dieser Sektor die Halbgerade $\mathbb{R}^+(0, 1)$. Das Urbild dieser Halbgeraden bezüglich φ in der (p, q) -Ebene ist die Halbgerade $\mathbb{R}^+\varphi^{-1}(0, 1) =$

$\mathbb{R}^+(-x/y, 1/y)$ mit der Gleichung

$$p + qx = 0.$$

Im Falle einer Phyllotaxis mit dem Divergenzwinkel $137,51^\circ$ gilt:

$$x = -\tau^{-2}$$

Die Irrationalzahl τ^{-2} hat die folgende Kettenbruchentwicklung:

$$\tau^{-2} = [0; 2, 1, 1, 1, \dots].$$

Die Zähler und die Nenner q_k der Hauptnäherungsbrüche sind für $k \geq 0$ die folgenden Fibonacci-Zahlen, wobei wir $f_{-1} = 0$ setzen, und, für später, $f_{-2} = 1$:

$$p_k = f_{k-1} \quad q_k = f_{k+1}.$$

Die Bilder der Punkte (p_k, q_k) bezüglich φ sind die Punkte $\varphi(p_k, q_k) = p_k(1, 0) + q_k(x, y)$. Dieser Gitterpunkt hat die Nummer $q_k = f_{k+1}$. Um die Nummer f_k zu erhalten, verschieben wir den Index um 1. Wir setzen für $k \geq -1$

$$v_k = (-(-\tau)^{-k-1}, f_k y).$$

Dann hat v_k die Nummer f_k , und es gilt:

$$\begin{aligned} v_k &= \Phi(p_{k-1}, q_{k-1}) \quad \text{für } k \geq 1 \\ -v_{-1} &= \Phi(p_{-1}, q_{-1}) = (1, 0). \end{aligned}$$

Nach Felix Klein bilden nun die Punkte (p_k, q_k) für $k \geq -1$ die Eckpunkte zweier Streckenzüge in der (p, q) -Ebene, welche die Halbgerade im positiven Quadranten mit der Gleichung $q = \tau^2 p$ approximieren. Die lineare Abbildung φ überführt diese beiden Streckenzüge in zwei Streckenzüge in dem Ebenensektor S über, welche die positive Ordinaten-Halbachse $\mathbb{R}^+(0, 1)$ approximieren und die Punkte $(1, 0)$ und v_k , $k \geq 1$ als Eckpunkte haben. Da die lineare Abbildung φ die Konvexität erhält, übertragen sich die Aussagen von Klein, welche die Streckenzüge als Randmengen der konvexen Hüllen ge-

wisser Mengen von Gitterpunkten beschreiben, vom Gitter \mathbb{Z}^2 auf das Gitter L .

Wir bemerken: Die beiden Streckenzüge enthalten keine weiteren Gitterpunkte außer den Eckpunkten und dem Punkt v_0 , dem Mittelpunkt der Strecke zwischen den Eckpunkten $(1, 0)$ und v_2 . Der Grund: Für die Partialnenner von τ^{-2} gilt $a_k \leq 1$ für $k \neq 1$.

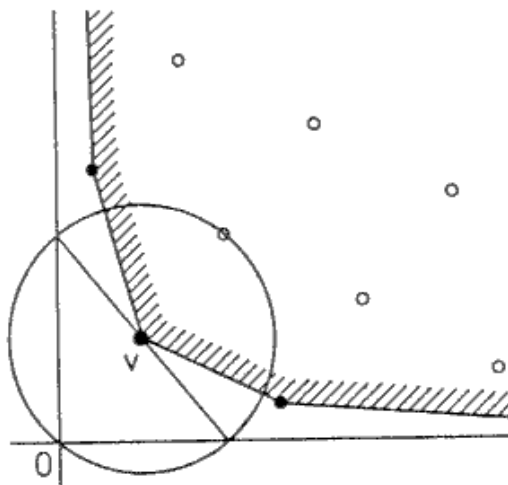
Unsere erste Aufgabe ist nun, in dem Gitter L einen kürzesten von Null verschiedenen Vektor v zu finden. Außerdem soll v der Nebenbedingung genügen, dass seine Nummer nicht negativ ist. Anders gesagt: Die zweite Koordinate von $v \in \mathbb{R}^2$ soll nicht negativ sein. Ist sie Null, dann sind $(\pm 1, 0)$ kürzeste Vektoren, also $\pm v_{-1}$. Das ist genau dann der Fall, wenn gilt: $1 = \|v_{-1}\|^2 \leq \|v_1\|^2 = y^2 + \tau^4$. Wir definieren daher eine Konstante c_0 durch

$$c_0 = \sqrt{1 - \tau^4}$$

Dann ist $\|v_{-1}\|$ minimal genau wenn $y \geq c_0$. Wir nehmen jetzt an $y < c_0$. Dann behaupte ich:

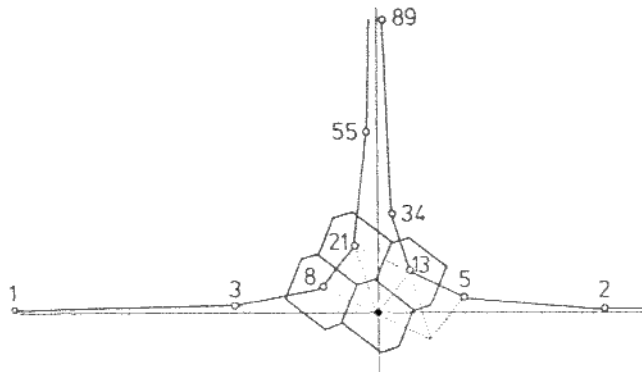
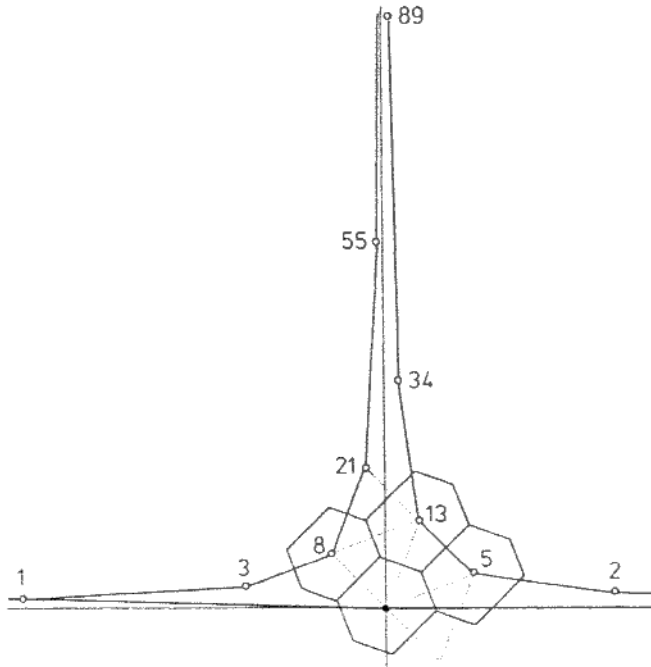
Der gesuchte kürzeste Vektor v ist einer der Eckpunkte v_k , $k \geq 1$.

Beweis: Es ist klar, dass v in dem Sektor S liegt. Er ist also ein Gitterpunkt auf einem der beiden Streckenzüge oder ein Gitterpunkt im Inneren der beiden Gebiete, die von diesen Streckenzügen und den Halbgeraden $[1, \infty)(1, 0)$ bzw. $[1, \infty]v_1$ berandet werden. Aber v kann kein Punkt im Inneren dieser Gebiete sein. Das sieht man leicht wie folgt. Der Punkt v liege o.B.d.A. im positiven Quadranten Q . Das Gebiet G ist die konvexe Hülle von $Q \cap L$. Es sei K die Kreislinie mit Mittelpunkt v , die durch den Punkt 0 geht, und es sei R die Gerade durch die beiden anderen Schnittpunkte von K mit den beiden Koordinatenachsen. Schließlich sei H diejenige abgeschlossene Halbebene mit Rand $\partial G = R$, welche 0 nicht enthält.



Weil v ein kürzester Vektor von $L - \{0\}$ ist, liegen im Inneren von K keine Gitterpunkte außer v . Daraus folgt offensichtlich $Q \cap L \subset Q \cap H$. Aber $Q \cap H$ ist konvex, während G nach Definition die kleinste konvexe Menge ist, die $Q \cap L$ enthält. Also folgt $G \subset Q \cap H$. Aber wenn $G \subset H$ und $v \in \partial H$, dann ist v kein innerer Punkt von G . Also ist v ein Randpunkt, also einer der Punkte v_k , $k \geq 0$. Aber v_1 ist kürzer als v_0 . Ergebnis: v ist einer der Punkte v_k , $k \geq 1$.

Welche von den Vektoren v_k minimale Länge haben, hängt von dem Parameter y ab, der zweiten Koordinate des Punktes $v_1 = (x, y)$. Die nächsten beiden Zeichnungen zeigen dies für zwei Werte von y , nämlich $y_1 = \tau^{-6}/f_5 \approx 0.006966$ und $y_2 = 0.5 y_1$. Der Parameterwert ist derjenige, für den die obigen Bilder von Punkt- und Parallelgittern und Dirichlet-Zellenzerlegungen gezeichnet wurden (Abb. 1.58). Für y_1 ergibt sich als Vektor minimaler Länge v_5 , mit der Nummer 8, und für y_2 ergibt sich v_6 , mit der Nummer 13. Offenbar werden, wenn y von großen Werten stetig abnehmend gegen 0 geht, nacheinander v_{-1}, v_1, v_2, \dots u.s.w. Vektoren minimaler Länge.



Für welchen y -Bereich genau v_k minimale Länge hat, lässt sich leicht bestimmen. Denn offenbar gilt

$$\|v_k\|^2 = \tau^{-2(k+1)} + f_k^2 y^2 .$$

Daraus folgt leicht für $k \geq 0$

$$\|v_k\|^2 - \|v_{k-1}\|^2 = -\tau^{-(2k+1)} + f_{k+1}f_{k-2}y^2.$$

Wir definieren daher eine Folge von Zahlen $b_0, b_2, b_3, b_4, \dots$ wie folgt:

$\begin{aligned} b_k &= [\tau^{-(2k+1)}/f_{k-2}f_{k+1}]^{1/2} && \text{für } k \geq 2 \\ b_0 &= \tau^{-1/2}. \end{aligned}$

Diese Folge ist offenbar monoton fallend, und es gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \|v_{k-1}\| \leq \|v_k\| &\Leftrightarrow y \geq b_k && \text{für } k \geq 2, \\ \|v_{-1}\| \leq \|v_1\| &\Leftrightarrow y \geq c_0. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort:

$$\begin{aligned} \|v_{-1}\| \quad \text{minimal} &\Leftrightarrow y \in [c_0, \infty) \\ \|v_1\| \quad \text{minimal} &\Leftrightarrow y \in [b_2, c_0] \\ \|v_k\| \quad \text{minimal} &\Leftrightarrow y \in [b_{k+1}, b_k] \text{ für } k \geq 2. \end{aligned}$$

Damit ist ein Drittel unseres Problems gelöst. Die erste der drei Zahlen in dem Tripel (l, m, n) ist berechnet: Sie ist die Fibonaccizahl f_k zu einem Vektor $u = v_k$ minimaler Länge. Um die zweite Zahl m zu berechnen, müssen wir einen zweiten Gittervektor v bestimmen, dessen Länge $\|v\|$ den minimal möglichen Wert unter allen Gittervektoren hat, die kein Vielfaches von $u = v_k$ sind. Die Vektoren u und v bilden dann zusammen eine Basis von L . Eine solche Basis nennt man eine **reduzierte Basis** des Gitters. Die notwendige und hinreichende Reduktionsbedingung wurde schon von *J.L. Lagrange* angegeben. *P.G.L. Dirichlet* formulierte diese Reduktionsbedingung geometrisch als **“Diagonalenbedingung”**: Eine ganzzahlige Gitterbasis ist genau dann reduziert, wenn die Diagonalen des von u und v aufgespannten Parallelogramms nicht kürzer sind als eine Seite. In analytischer Formulierung lautet diese Bedingung unter der Voraussetzung $\|u\| \leq \|v\|$

$$\begin{aligned} \|u + v\| &\geq \|v\| \\ \|u - v\| &\geq \|v\|. \end{aligned}$$

Wir benutzen diese Bedingung, um für unsere Gitter L einen Vektor minimaler Länge $u = v_k$ zu einer reduzierten Basis (u, v) zu ergänzen. Die Betrachtung der obigen Beispiele für die Parameterwerte y_1, y_2 zeigt: Beim ersten Beispiel ist (v_k, v_{k+1}) eine reduzierte Basis und beim zweiten Beispiel (v_k, v_{k-1}) . Das führt uns zu der Vermutung, dass allgemein für ein v_k minimaler Länge (v_k, v_{k-1}) oder (v_k, v_{k+1}) eine reduzierte Basis ist. Dass diese Paare eine Basis von L bilden, hatten wir schon im Zusammenhang mit Keplers Spekulationen über Männchen und Weibchen bemerkt. Wir brauchen nur noch die Reduktionsbedingung nachzuprüfen. Dabei wird aber nun die Berechnung der Diagonalenvektoren $u+v$ und $u-v$ besonders einfach, denn aus der gnomonischen Rekursionsgleichung $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ folgt

$$\boxed{v_{k+1} = v_k + v_{k-1}}$$

Die Bedingungen dafür, dass (v_k, v_{k-1}) eine reduzierte Basis mit v_k als minimalem Vektor ist, lauten also für $k \geq 1$

- (i) $\|v_k\| \leq \|v_{k-1}\|$
- (ii) $\|v_{k+1}\| \geq \|v_{k-1}\|$
- (iii) $\|v_{k-2}\| \geq \|v_{k-1}\|$.

Die erste Bedingung ist, wie wir schon wissen, äquivalent zu der Bedingung $y \leq b_k$, falls $k > 1$, und automatisch erfüllt für $k = 1$. Die dritte Bedingung ist äquivalent zu $y \leq b_{k-1}$, falls $k \geq 3$, stets erfüllt für $k = 2$ und äquivalent zu $y \leq b_0$ für $k = 1$. Die zweite Bedingung kann man ebenfalls leicht durch eine Ungleichung von der Form $y \geq c_k$ ausdrücken, und zwar mit der folgenden Konstanten c_k :

$$\boxed{c_k = [\tau^{-2k}(1 - \tau^{-4})/f_{2k+1}]^{1/2} .}$$

Ergebnis: Für $k \geq 2$ ist (v_k, v_{k-1}) eine reduzierte Basis genau wenn $y \in [c_k, b_k]$. Für $k = 1$ ist (v_k, v_{k-1}) eine reduzierte Basis genau wenn $y \in [c_1, b_0]$.

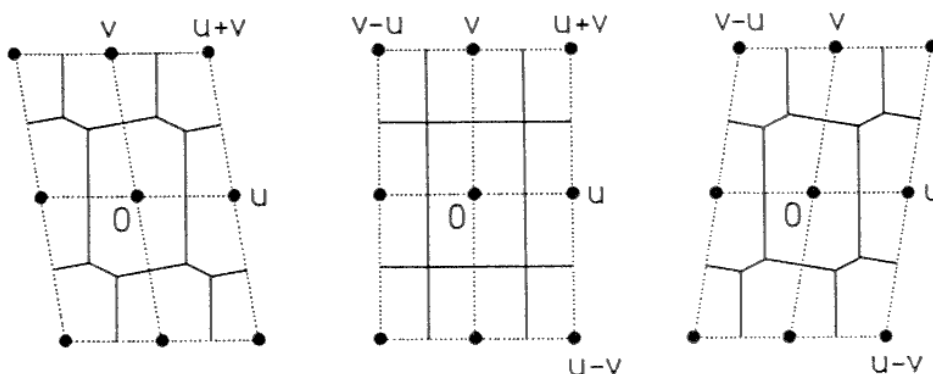
Völlig analog erhält man die Bedingungen dafür, dass (v_{k-1}, v_k) eine reduzierte Basis mit v_{k-1} als minimalem Vektor ist. **Ergebnis:** (v_{k-1}, v_k) ist genau dann eine reduzierte Basis, wenn $k \geq 2$ und $y \in [b_k, c_{k-1}]$.

Damit sind insgesamt reduzierte Basen für alle $y \leq b_0$ bestimmt, und sie sind von der Form (v_{k-1}, v_k) oder (v_k, v_{k-1}) . Für $y \geq b_0$ hingegen erhält man das folgende Resultat:

Ergebnis: Für $y \in [b_0, c_0]$ ist (v_1, v_{-1}) eine reduzierte Basis, und für $y \in [c_0, \infty)$ ist (v_{-1}, v_1) eine reduzierte Basis.

Damit ist unsere Aufgabe der Berechnung des Tripels (l, m, n) zu zwei Dritteln gelöst: Die Nummern l und m der Vektoren der reduzierten Basis (u, v) sind zwei von y abhängige Fibonacci-Zahlen. Das letzte Drittel des Problems besteht nun in der Bestimmung der Nummer n des Vektors w zu der dritten an D^0 angrenzenden Dirichletzelle mit nichtnegativer Nummer. Das ist nun ein leichtes Problem. Denn für den gesuchten dritten Vektor w gilt

$$\begin{aligned} w &= u + v & \text{wenn } \langle u, v \rangle < 0, \\ \pm w &= u - v & \text{wenn } \langle u, v \rangle > 0. \end{aligned}$$



Im Falle $\langle u, v \rangle > 0$ ist $w = u - v$, wenn u die größere Nummer hat, und $w = v - u$, wenn v die größere Nummer hat. Der Fall $\langle u, v \rangle = 0$ ist der Grenzfall, in dem die Dirichletzelle ein Rechteck wird. In diesem Fall haben die an den 4 Seiten des Rechtecks angrenzenden Zellen die Nummern von u und v , und die 4 an den Ecken anstoßenden Zellen die Nummern von $\pm u \pm v$.

Wir müssen also diejenigen Werte des Parameters y bestimmen, für welche die oben gefundenen reduzierten Basen (u, v) Orthogonalbasen sind. Für $y > b_0$ ist das offensichtlich unmöglich. Für $y \leq b_0$ sind diese Basen von der

Form (v_{k-1}, v_k) oder (v_k, v_{k-1}) . Der Parameterwert a_k , für den v_{k-1} und v_k zueinander orthogonal sind, ist leicht berechnet:

$$a_k = \left[\tau^{-(2k+1)} / f_k f_{k-1} \right]^{1/2} \quad k \geq 0 .$$

Damit haben wir drei Folgen von Konstanten bestimmt, die für den Parameter y , von dem das Gitter L abhängt, kritisch sind – kritisch in dem Sinne, dass sich beim Durchlaufen dieser kritischen Werte die numerierte Flächenteilung der Ebene durch die Dirichletzellen des Gitters kombinatorisch oder metrisch in wesentlicher Weise ändert. Ordnet man diese Konstanten nach abnehmender Größe, dann ergibt sich die folgende Reihenfolge:

$$\infty = a_0, c_0, b_0, a_1, c_1, a_2, b_2, c_2, b_3, a_3, c_3, a_4, b_4, c_4, b_5, a_5, c_5, a_6, b_6, c_6, b_7, a_7, \dots .$$

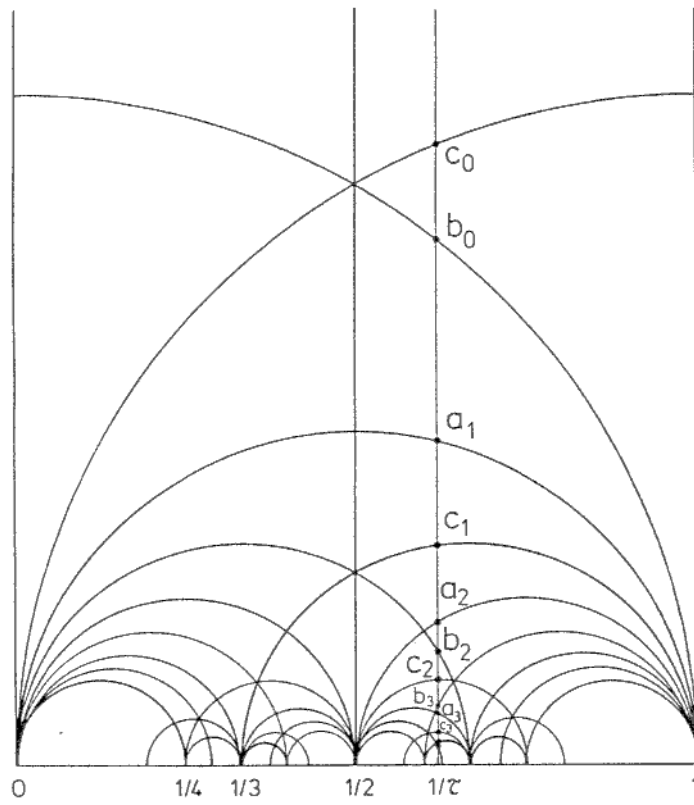
Für Eingeweihte zeigt das nächste Bild den Zusammenhang dieser drei Folgen von Zahlen mit einer berühmten, zuerst von *Gauß* gefundenen Figur, nämlich der **Modulfigur**. Diese Figur spielt in vielen funktionen- und zahlentheoretischen Zusammenhängen eine große Rolle. Wir werden auf sie im Zusammenhang mit der Reduktionstheorie der ebenen Gitter in Abschnitt 14.1 noch ausführlich eingehen.¹⁸ Die Zahlen a_k, b_k, c_k sind die Schnittpunkte der Halbkreise der Modulfigur mit der Geraden $x = 1/\tau$.

Die vorstehenden Bemerkungen genügen, um nun auch noch das letzte Drittel unseres Problems zu lösen. Denn für $y \leq b_0$ gilt $(u, v) = (v_{k-1}, v_k)$ oder $(u, v) = (v_k, v_{k-1})$, und dann berechnet man w wegen der gnomonischen Relation $v_{k+1} = v_k + v_{k-1}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} y < a_k &\Rightarrow \langle v_{k-1}, v_k \rangle < 0 & \text{und} & \quad w = v_{k-1} + v_k = v_{k+1} , \\ y > a_k &\Rightarrow \langle v_{k-1}, v_k \rangle > 0 & \text{und} & \quad w = v_k - v_{k-1} = v_{k-2} \end{aligned}$$

Damit ist auch die dritte Zahl n in dem Zahlentripel (l, m, n) berechnet. Auch sie ist eine Fibonacci-Zahl. Wir fassen unsere Ergebnisse in einem Satz zusammen.

¹⁸Siehe Anmerkung S. 139.



Satz 1.3.3

$L \subset \mathbb{R}^2$ sei das von dem positiven reellen Parameter y abhängige ebene Gitter mit Basis $(1, 0)$ und $(1/\tau, y)$. Der Gitterpunkt $\mu(1, 0) + \nu(1/\tau, y)$ erhält die Nummer ν . D sei die Dirichletzelle von L zum Nullpunkt. Wenn D hexagonal ist, seien l, m, n die Nummern derjenigen drei Gitterpunkte mit nichtnegativer Nummer, deren Dirichletzelle zu D benachbart ist. Wenn die Abstände dieser drei Punkte von 0 paarweise verschieden sind, sei (l, m, n) das Tripel, das der Ordnung nach zunehmendem Abstand entspricht. Dann gilt:

- (i) D ist hexagonal genau wenn $y \neq a_k$
- (ii) Für $y \in (a_k, a_{k+1})$ gilt $l, m, n = \{f_{k-1}, f_k, f_{k+1}\}$.
- (iii) Die folgende Tabelle gibt an, in welchem Teilintervall von (a_k, a_{k+1}) das Tripel (l, m, n) auftritt.

$k \geq 1$ ungerade		$k \geq$ gerade	
(c_k, a_k)	(f_k, f_{k-1}, f_{k+1})	(b_k, a_k)	(f_{k-1}, f_k, f_{k+1})
(a_{k+1}, c_k)	(f_k, f_{k+1}, f_{k-1})	(c_k, b_k)	(f_k, f_{k-1}, f_{k+1})
		(b_{k+1}, c_k)	(f_k, f_{k+1}, f_{k-1})
		(a_{k+1}, b_{k+1})	(f_{k+1}, f_k, f_{k-1})

(c_0, a_0)	(f_{-1}, f_1, f_0)
(b_0, c_0)	(f_1, f_{-1}, f_0)
(a_1, b_0)	(f_1, f_0, f_{-1})

Bemerkung: Für die in den Definitionen der Zahlen a_k und b_k auftretenden Produkte von Fibonaccizahlen gilt folgende Identität:

$$f_{k-2}f_{k+1} - f_k f_{k-1} = (-1)^k .$$

Das bedeutet, dass die Zahlen a_k, b_k bzw. a_{k+l}, b_{k+1} im Vergleich zur Länge der Intervalle (a_k, a_{k+1}) sehr dicht beieinander liegen. Dadurch erscheinen

die rechteckigen Dirichletzellen fast quadratisch, und fast im ganzen Intervall (a_k, a_{k+1}) ist die erste Zahl des Tripels (l, m, n) die Fibonacci-Zahl f_k .

Wir illustrieren den Satz mit einer Bildseite, welche die zu D benachbarten Dirichletzellen mit positiver Nummer für 8 verschiedene Parameterwerte zeigt (Abb. 1.59). Die folgende Tabelle gibt diese Parameterwerte und ggfs. das Intervall, in dem sie liegen, sowie das Tripel (l, m, n) .

<i>A</i>	0.030 ...	a_4	
<i>B</i>	0.023	(c_4, b_4)	(5, 3, 8)
<i>C</i>	0.014	(b_5, c_4)	(5, 8, 3)
<i>D</i>	0.011 ...	a_5	
<i>E</i>	0.009	(c_5, a_5)	(8, 5, 13)
<i>F</i>	0.005	(a_6, c_5)	(8, 13, 5)
<i>G</i>	0.004 ...	a_6	
<i>H</i>	0.003	(c_6, b_6)	(13, 8, 21)

Wir fassen zusammen:

Wir haben die Phyllotaxis mathematisch durch ein ebenes Punktgitter L mit einer ausgezeichneten Basis $(1, 0)$ und $(-\tau^{-2}, y)$ beschrieben. Modulo $(1, 0)$ gibt dies ein "Punktgitter" auf einem Zylinder, das zylindrische "Gitter" der Insertionspunkte. In diesem zylindrischen Gitter kann man die Punkte einerseits in einer "genetischen Spirale" anordnen, andererseits in Systemen von "Schrägzeilen", den sogenannten parastischen Spiralen. Die genetische Spirale ist ein Resultat kanonischer mathematischer Konstruktion die parastischen Spiralen werden spontan wahrgenommen. Der Vektor $(-\tau^{-2}, y)$ beschreibt die Reihe der Insertionspunkte auf der genetischen Spirale, genauer: die Schraubung in Richtung der Sprossachse, die einen Insertionspunkt in den nächsten überführt. Dabei ist $\tau^{-2} \cdot 2\pi$ der Divergenzwinkel von $137,51^\circ$, der Rotationsanteil der Schraubung, und y beschreibt den Translationsanteil, also das Wachstum in Richtung der Sprossachse. Hinsichtlich der Wahrnehmung parastischer Spiralen – oder auch ihrer Realisierung durch Teile der Pflanzengestalt – gingen wir von der einfachen Hypothese aus, dass diese umso wahrscheinlicher ist, je geringer der Abstand zweier

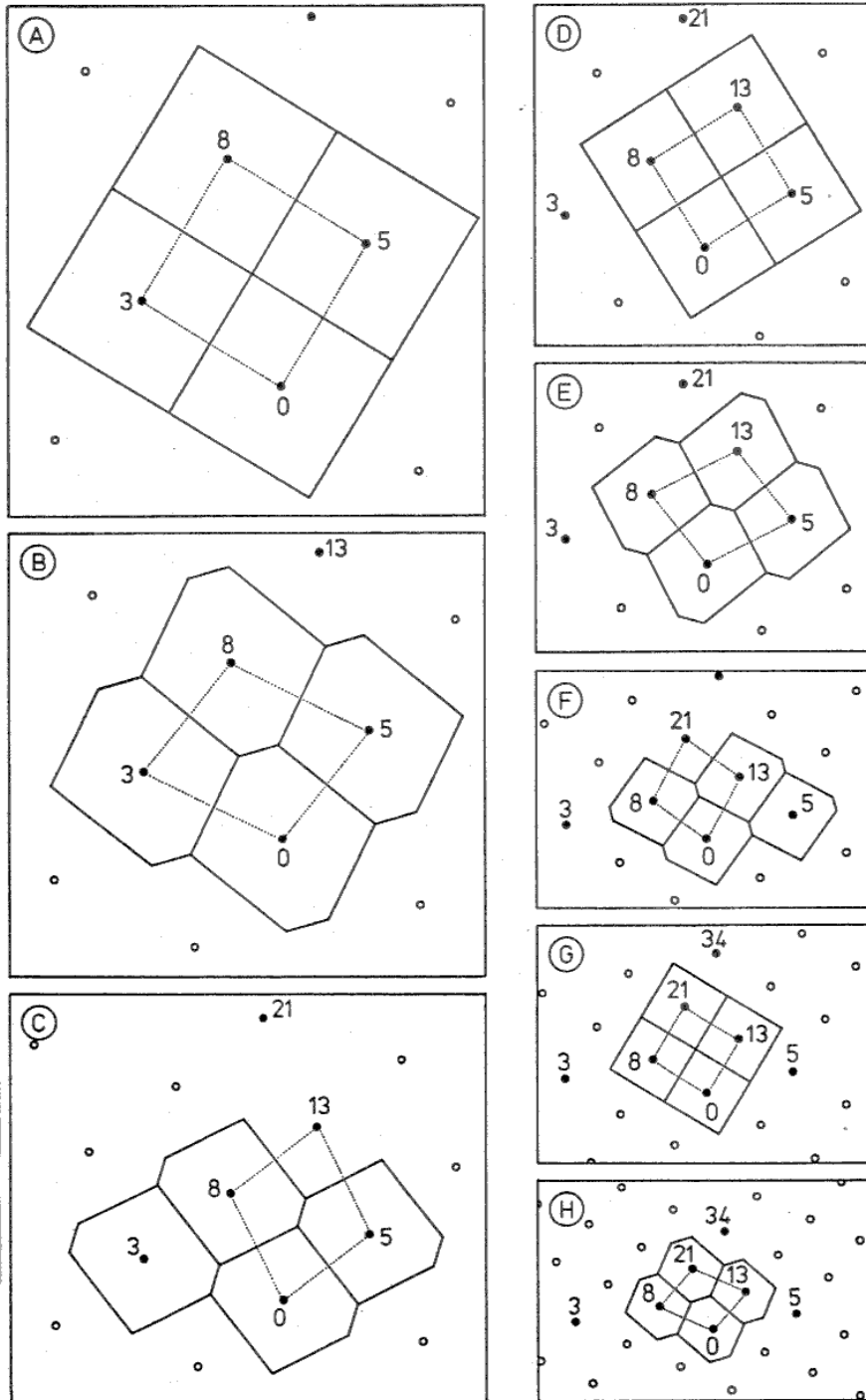


Abbildung 1.59: Zu D benachbarte Dirichletzellen des im Text beschriebenen ebenen Gitters der Phyllotaxis

Punkte in einer solchen Schrägreihe ist. Die daran anschließende mathematische Analyse führte über den Zusammenhang von Reduktionstheorie ebener Gitter und Kettenbruchentwicklungen zu dem obigen Satz. Er genügt, um genau zu beschreiben, wie die Fibonaccizahlen f_{k-1}, f_k, f_{k+1} der am deutlichsten wahrgenommenen Systeme von parastischen Spiralen von dem Parameter abhängen. Die Analyse lässt erwarten, dass diese Zahlentripel sich auch bei einer einzelnen Pflanze sprunghaft ändern können, wenn wir verschiedene Zonen betrachten, die mit unterschiedlicher Geschwindigkeit gewachsen sind. Dies Sprungphänomen kann man in der Tat leicht beobachten, wenn man Blütenstände von Blumen aus der Familie der Körbchenblütler betrachtet.

All dies macht deutlich, dass man die Erscheinung der parastischen Spiralen recht gut auf die Tatsache zurückführen kann, dass der Divergenzwinkel den Kreisumfang im Verhältnis des goldenen Schnitts teilt. Dabei ist diese Aussage selbstverständlich nicht so zu verstehen, dass der Drehwinkel α_n vom n -ten zum $(n + 1)$ -ten Blatt stets exakt gleich $137,519^\circ$ ist, sondern dass das arithmetische Mittel $(\alpha_1 + \dots + \alpha_N)/N$ für wachsendes N sich diesem Wert nähert. Es wäre also richtiger, diesen Winkel als **Limes-Divergenzwinkel** zu bezeichnen. Die Annahme der Konstanz der α_n ist eine mathematische Idealisierung, welche es nicht leichter macht, die Entstehung der Phyllotaxis zu verstehen. Außerdem ist festzustellen, dass auch andere Limes-Divergenzwinkel vorkommen. Die zugehörigen Divergenzzahlen sind jedoch bezüglich ihrer Kettenbruchentwicklung im oben definierten Sinne zu der Zahl τ äquivalent, und an die Stelle der Fibonacci-Zahlen treten dann einfach Zahlenfolgen s_n , die durch die gnomonische Gleichung

$$s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$$

mit anderen Anfangswerten definiert sind. Als Anfangswerte kommen außer $(1, 1)$ auch $(1, 3)$, $(1, 5)$ vor, aber auch, obzwar selten, $(2, 5)$.

Dies und Erwägungen, die sich auf die Erfahrungen mit dem Zusammenhang zwischen Beschreibung und Erklärung natürlicher Erscheinungen beziehen, führt zu der folgenden vorsichtigeren Formulierung:

Grundtatsache der Phyllotaxis ist das Vorhandensein von Wachstumsprozessen, in deren mathematischer Beschreibung in irgendeiner Weise iterative Prozesse vorkommen, die durch die Gleichung $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$ beschrieben werden, wobei gewisse Anfangswerte eine ausgezeichnete Rolle spielen.

Was wir oben dargestellt haben, das zylindrische Modell und sein Zusammenhang mit der Reduktionstheorie ebener Gitter, ist ein **beschreibendes mathematisches Modell**. Es erhebt in keiner Weise den Anspruch, eine Erklärung des grundlegenden Phänomens der Phyllotaxis zu sein. Es ist zudem ein besonders einfaches und daher im Sinne der Mathematiker auch besonders schönes Modell. Die Annahmen einer konstanten Divergenzzahl x und einer konstanten Wachstumsrate y , die überhaupt erst die Beschreibung durch ein Gitter L mit der Basis $(1, 0)$ und (x, y) ermöglichen, sind extreme Idealisierungen. Sie sind der Versuch, das Auftreten regelmäßiger Muster in einem natürlichen Phänomen in deterministischer Weise mit Hilfe eines globalen Prinzips durch eine mathematische Struktur von vollkommener Regelmäßigkeit, eben ein Gitter, zu beschreiben. Diese Struktur wird als von vornherein existierend gedacht, der Prozess der Entstehung, des Wachstums und der Veränderungen des Musters im Verlauf des Prozesses tritt ganz in den Hintergrund und ist nur in der Möglichkeit aufgehoben, den Parameter y , von dem das Gitter L_y abgehängt, zu variieren – und das haben wir ja auch getan. Diese Art der Beschreibung natürlicher Phänomene, die dem Bedürfnis des Mathematikers nach Einfachheit und Schönheit und Regelmäßigkeit sehr entgegenkommt, ist sehr typisch für die Mathematik und Naturwissenschaft des 19. Jahrhunderts.

Da wir in diesem Buch einige Sorgfalt auf die Darstellung des Zusammenhangs zwischen mathematischen und naturwissenschaftlichen Ideen einerseits und ihrem geistes- und kulturgeschichtlichen Hintergrund andererseits verwenden, sind an dieser Stelle einige Bemerkungen zur Geschichte der Entdeckung und theoretischen Behandlung der Phyllotaxis am Platze.

Das Phänomen der Phyllotaxis wurde 1830-1831 von den deutschen Botanikern Schimper und Braun entdeckt (K.F. Schimper: "Beschreibung des Symphytum Zeyheri und seiner zwei deutschen und verwandten, des S. bul-

bosum Schimp. und *S. tuberosum* Jacq. ...” (1830) [314], A. Braun: “Vergleichende Untersuchung über die Ordnung der Schuppen an den Tannenzapfen, als Einleitung zur Untersuchung der Blattstellung überhaupt” (1831) [43]).

Um zu verstehen, warum das Problem der Blattstellung damals als wichtiges Schlüsselproblem gesehen wurde, ist es notwendig, die Arbeiten von Schimper und Braun in einem größeren Zusammenhang zu sehen. Die Botanik des 18. Jahrhunderts verfügte durch die zahlreichen Reisen von Naturforschern und durch die Einrichtung von botanischen Gärten bereits über eine ausgedehnte Artenkenntnis. Morphologie, Systematik und Physiologie der Pflanzen entwickelten sich weiter. Linné schuf das letzte große künstliche System der Pflanzen und hoffte auf ein natürliches. Linné sah die Arten noch in der gleichen Weise als unveränderlich an, wie man seit der Antike die Ideen als ewig und unveränderlich sah:

“Species tot sunt quot formae ab initio creatae sunt”, das heißt: “Es sind so viele Arten, wie von Anfang an geschaffene Formen sind.”.

Der Satz impliziert die Vorstellung von der Form als etwas Unveränderlichem. Die Naturforscher nach Linné begannen aber, Formen und Arten als veränderlich zu begreifen. Sie fragten nach der Entstehung der Arten, nach dem Ursprung des Lebens, nach der Umwandlung der Formen bei der Entwicklung der Arten und bei der Entwicklung der einzelnen Pflanze und des einzelnen Tieres. Statt einer unveränderlichen Form versuchte die Anschauung den Wandel der Gestalten zu erfassen. Man erhält einen lebhaften Eindruck von dem Umbruch, den dies bedeutete, wenn man die Selbstzeugnisse Johann Wolfgang von Goethes in seinen “Morphologischen Heften” liest. In “Die Absicht wird eingeleitet” schreibt Goethe:

Der Deutsche hat für den Komplex des Daseins eines wirklichen Wesens das Wort Gestalt. Er abstrahiert bei diesem Ausdruck von dem Beweglichen, er nimmt an, dass ein Zusammengehöriges festgestellt, abgeschlossen und in seinem Charakter fixiert sei.

Betrachten wir aber alle Gestalten, besonders die organischen, so finden wir, dass nirgends ein Bestehendes, nirgends ein Ruhen-

des, ein Abgeschlossenes vorkommt, sondern dass vielmehr alles in einer steten Bewegung schwankt. Daher unsere Sprache die Wortbildung sowohl von dem Hervorgebrachten, als von dem Hervorgebrachtwerdenden gehörig genug zu brauchen pflegt.

Wollen wir also eine Morphologie einleiten, so dürfen wir nicht von Gestalt sprechen; sondern wenn wir das Wort brauchen, uns allenfalls dabei nur die Idee, den Begriff oder ein in der Erfahrung nur für den Augenblick Festgehaltenes denken.

Das Gebildete wird sogleich wieder umgebildet, und wir haben uns, wenn wir einigermaßen zum lebendigen Anschauen der Natur gelangen wollen, selbst so beweglich und bildsam zu erhalten, nach dem Beispiele mit dem sie uns vorgeht. [151, p.7]

Goethe beschreibt seine Auseinandersetzung mit dem großen Linné und die Andersartigkeit seiner eigenen Naturanschauung

Die Erscheinungen des Wandels und Umwandels organischer Geschöpfe hatten mich mächtig ergriffen,... [151, p.21]

Die Entwicklung dieser Anschauung führt Goethe zur Idee der Pflanzenmetamorphose. Seine erste dazu veröffentlichte Arbeit ist der 1790 erschienene Aufsatz "J.W. von Goethe Herzoglich Sachsen-Weimarischen Geheimraths Versuch die Metamorphose der Pflanzen zu erklären". Er blieb unbeachtet, und Goethe veröffentlichte ihn 1817 aufs neue im ersten Heft des ersten Bandes zur Morphologie unter dem Titel "Die Metamorphose der Pflanzen" [151, p. 23–61].

In diesem Aufsatz geht es ihm um "die innere Identität der verschiedenen Pflanzenteile, welche uns bisher in so mannigfaltigen Gestalten erschienen sind", und er begleitet "die äußere Gestalt der Pflanze in allen ihren Umwandlungen, von ihrer Entwicklung aus dem Samenkorn bis zur neuen Bildung desselben ...".

Ich zitiere einige von den Sätzen, in denen Goethe seine Anschauung zusammenfasst

Es mag nun die Pflanze sprossen, blühen oder Früchte bringen, so sind es doch nur immer dieselben Organe welche, in vielfältigen Bestimmungen und unter oft veränderten Gestalten, die Vorschrift der Natur erfüllen. Dasselbe Organ welches am Stengel als Blatt sich ausgedehnt und eine höchst mannigfaltige Gestalt angenommen hat, zieht sich nun im Kelche zusammen, dehnt sich im Blumenblatte wieder aus, zieht sich in den Geschlechtswerkzeugen zusammen, um sich als Frucht zum letztenmal auszudehnen.

Diese Wirkung der Natur ist zugleich mit einer anderen verbunden, mit der Versammlung verschiedener Organe um ein Zentrum nach gewissen Zahlen und Maßen, welche jedoch bei manchen Blumen oft unter gewissen Umständen weit überschritten und vielfach verändert werden. [151, p.59]

1827 traf Goethe mit Ritter von Martius zusammen, der ihm über neue Beobachtungen zur "Spiraltendenz" der Pflanzen berichtete – tatsächlich hatte der Franzose Bonnet schon um die Mitte des 18. Jahrhunderts Beobachtungen und Überlegungen zu spiralförmigem Wachstum angestellt. Goethe zitiert Martius in seinem Aufsatz "Über die Spiraltendenz" von 1831 [151, p. 339–342] wie folgt:

Dieser Fortschritt in Kenntnis des Pflanzenlebens ist das Resultat jener morphologischen Ansicht, welche man die Metamorphose der Pflanzen nennt.

Alle Organe der Blüte: Kelch, Krone, Staubfäden und Fruchtknoten sind umgestaltete Blätter.

Sie sind also im Wesen gleiche, nur durch die Potenz ihrer Metamorphose verschiedene Blätter.

Die Konstruktion einer Blüte beruht demgemäß auf einer, für jede Gattung eigentümlichen Stellung und Anordnung einer gewissen Anzahl metamorphisierter Blätter.

Die letzten Absätze von Goethes Aufsatz lauten:

Auf der näheren Untersuchung beruht nun die zugleich tiefere und bestimmtere Kenntnis, welche zu erlangen wir die beste Hoffnung haben, da Ritter v. Martius selbst diese wichtige Angelegenheit weiter fort zu führen nicht unterlassen kann und junge Männer, kräftig und ausführlich, die bemerkbaren und berechenbaren Bestimmungen der Umläufe durchzuarbeiten bemüht sind. Wie wir denn einen Aufsatz, welcher in dem ersten Teile des fünfzehnten Bandes der Akten der Leopoldinisch-Carolinischen Gesellschaft erscheint, vorläufig nur im allgemeinen mit Bewunderung anzuerkennen haben.

Die Abhandlung ist überschrieben: ‘Vergleichende Untersuchung über die Ordnung der Schuppen an den Tannenzapfen, als Einleitung zur Untersuchung der Blattstellung überhaupt, von Dr. Alexander Braun’. [151, p.342]

Soviel zur Einordnung der Entdeckungen von Schimper und Braun in einen größeren Zusammenhang. Schimper und Braun führten die Begriffe der Phyllotaxis, der genetischen Spirale und der Parastichen und Orthostichen ein. Die am deutlichsten hervortretenden Parastichen nannten sie diagnostische Spiralen. Anscheinend erkannten Schimper und Braun aber noch nicht als Grundtatsache, dass sehr viele Pflanzen den gleichen Limes-Divergenzwinkel von $137,51^\circ \dots$ mit der irrationalen Divergenzzahl τ^{-2} haben, sondern sie nahmen an, dass einzelne Pflanzen – wenigstens zonenweise – die rationalen Divergenzzahlen $2/5, 3/8, 5/13, \dots$ haben, die sich aus den diagnostischen Spiralen ergeben und von denen Braun wohl wusste, dass sie die Hauptnäherungsbrüche von τ^{-2} sind.

Zu einer klaren Erkenntnis der Grundtatsache der Phyllotaxis einerseits und der abgeleiteten Natur der diagnostischen Spiralen andererseits, deren wechselnde Zahlen bei konstanter Divergenz aus der mit dem Wachstum variierenden Steigung der genetischen Spirale zu erklären sind, gelangten erst die Franzosen L. und A. Bravais. *Auguste Bravais* (1811-1863) studierte an der *École Polytechnique*, wurde danach Marineoffizier, Teilnehmer an

verschiedenen geographischen Expeditionen, Astronomiedozent und ab 1845 schließlich Professor der Physik an der École Polytechnique. Die Brüder Bravais hatten zunächst unabhängig von den deutschen Botanikern gearbeitet und dann 1833 von den Arbeiten von Schimper und Braun erfahren. 1835 verfassten sie eine Abhandlung mit dem Titel “Essai sur la disposition des feuilles curvisériées”, die 1837 in den *Annales des sciences naturelles* erschien. Im gleichen Jahr folgten in der gleichen Zeitschrift ein Artikel über die symmetrische Anordnung des Blütenstandes und ein Bericht über die Arbeiten von Schimper und Braun. Diese Arbeiten der Brüder Bravais wurden in Deutschland sofort zur Kenntnis genommen und erschienen 1839 in deutscher Übersetzung als Buch mit dem Titel: “Über die geometrische Anordnung der Blätter und Blütenstände” von L. und A. Bravais [53]. Auf der Grundlage ihrer sehr genauen Beobachtungen und Messungen setzen sich die Autoren kritisch mit Schimper und Braun auseinander, arbeiten die Grundtatsache der Phyllotaxis heraus und entwickeln als erste mathematisch befriedigende Beschreibung das zylindrische Modell. Das successive Auftreten höherer Fibonacci-Zahlen mit abnehmender Steigung der genetischen Spirale wird klar herausgearbeitet, wenn auch nicht in der exakten quantitativen Darstellung, die wir oben gegeben haben. Die Figuren, die der Abhandlung beigegeben sind, zeigen den Zusammenhang zwischen Punktgittern und Parallelgittern und auch – als idealisierte Darstellung eines Zapfens – eine hexagonale Flächenteilung, die an die Dirichlet-Zellen-Zerlegung erinnert, aber keine ist. Im Text zu den Figuren wird natürlich noch nicht von “Gittern” gesprochen, sondern einfach vom “System” der Insertionspunkte, und die Rolle der Kettenbruchentwicklung wird dargestellt, ohne die Reduktionstheorie von Lagrange zu erwähnen. Es sei noch einmal daran erinnert, dass ja erst 1831 *C.F. Gauß* in einer Anzeige einer wichtigen Arbeit seines Schülers *Seeber*, in der dieser das Reduktionsproblem für ternäre quadratische Formen gelöst hatte, auf die Bedeutung der geometrischen Untersuchung solcher regelmäßigen Punktsysteme in der Ebene und im Raume hinwies [147]. Seebers Arbeit war mathematisch als Fortführung der zahlentheoretischen Untersuchungen von Lagrange zur Reduktionstheorie der binären Formen motiviert. Aber Gauß und Seeber waren sich der potenti-

ellen Bedeutung derartiger Untersuchungen in geometrischer Form für die geometrische Kristallographie durchaus bewusst. Die Anregungen von Gauß zu einer geometrischen Behandlung der Reduktionstheorie wurden dann – wie schon gesagt, erst 1850 von Dirichlet aufgegriffen. Es ist interessant, diese Entwicklung in Deutschland mit der in Frankreich zu vergleichen. Einer der beiden Brüder Bravais, Auguste, präsentierte der Académie des Sciences im Anschluss an seine gemeinsame Arbeit mit Louis von 1835, im Juli 1837 eine Abhandlung mit dem Titel “Mémoires sur les lignes formées sur un plan par les points dont les coordonnées sont des nombres entiers” [45]. Darin behandelt er einige ebene Gitter betreffende Fragen, welche in der für Botaniker geschriebenen Abhandlung über Phyllotaxis nur angedeutet waren, ausführlicher, u.a. den Zusammenhang zwischen den verschiedenen einem Punktgitter zugeordneten Parallelgittern – in moderner Sprache: zwischen den verschiedenen Basen eines Gitters – und die Zusammenhänge mit den Kettenbrüchen. Die grundlegende Bedeutung des geometrischen Ansatzes von Bravais wurde von den Berichterstatlern der Akademie, den Analytikern Sturm und Poisson, nicht erkannt. Sie sahen in der Arbeit des jungen Bravais nicht mehr als eine aner kennenswerte Talentprobe [294]. Bravais beschäftigte sich über zehn Jahre lang fast gar nicht mehr mit diesen Fragen, bis er bei der Untersuchung gewisser optischer Phänomene, der Halos und der Nebensonnen, auf die Frage nach der kristallinen Form des Eises stieß. (Ein Halo ist ein farbiger Ring um den Mond, der sich immer im gleichen Abstand von 22° und gelegentlich auch von 46° bildet, und bei dem der Innenrand rot, der Außenrand blau ist. Er wird durch die Lichtbrechung von Eiskristallen in der Atmosphäre erklärt. Die Nebensonnen bzw. Nebenmonde sind weiße Ringe um Sonne oder Mond, die durch die Reflexion an blättchenförmigen Eiskristallen erklärt werden. Bei der Erklärung beider Phänomene ist die Form der Eiskristalle wesentlich.) Bravais setzte sich daraufhin mit dem für die Beantwortung seiner Fragen ungenügenden damaligen Zustand der atomistischen Kristallstrukturtheorie von *René Just Haüy* auseinander und forderte, Hypothesen über die Form der Moleküle von einer rein geometrischen Untersuchung der Symmetrie des Systems der Mittelpunkte dieser Figuren zu trennen. Als ersten Schritt dazu präsentierte er der Akademie

im Jahre 1848 eine rein geometrische Abhandlung mit dem Titel “Sur les propriétés géométriques des assemblages de points régulièrement distribués dans l’espace” [46]. Ihr folgte eine weitere Abhandlung mit dem Titel “Sur les applications de la théorie des assemblages à la cristallographie” [49]. Jetzt, 1849, erkannten die Berichterstatter der Akademie sofort die große Bedeutung der Arbeit von Bravais. Cauchy trug den Bericht [26] vor und empfahl seine Aufnahme in “Recueil des Savants étrangers”. Die bahnbrechende Arbeit erschien dann unter dem Titel “Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l’espace” im Journal de l’Ecole Polytechnique (1850) [50]. Von den darin enthaltenen Ergebnissen von Bravais über die Klassifikation von Gittern nach ihrem Symmetrietyp wird später, in 14.1, noch ausführlich zu reden sein.¹⁹

So stand also an der Wiege dieses großen Fortschritts in der Strukturtheorie der Kristalle die Morphologie, die Frage nach der Gestalt der Eiskristalle und, früher noch, nach der Gestalt der Pflanzen und insbesondere nach der Phyllotaxis.

In den 150 Jahren seit der Entdeckung der Phyllotaxis hat es zahlreiche Versuche gegeben, das Phänomen nicht nur zu beschreiben, sondern auch zu erklären. Was unter einer Erklärung zu verstehen ist, ist selbst ein Problem. Eine “Erklärung” könnte z.B. eine durch Beobachtungen und Experimente gestützte Hypothese über den Wachstumsprozess und die ihn kontrollierenden Faktoren sein, welche das grundlegende Phänomen quantitativ richtig vorhersagt. Es gibt eine Reihe von “Erklärungen” dieser Art, jedoch keine, die allgemein akzeptiert wird. Die meisten dieser Erklärungsversuche sind mechanistisch. Sie machen einige einfache Annahmen über hypothetische Regelungsfaktoren chemischer, physikalischer oder kinematischer Art und leiten daraus mehr oder weniger erfolgreich Aussagen über die zu erwartenden Divergenzwinkel ab. Zum Beispiel geht eines der neuesten Modelle, das **chemische Kontaktdruckmodell**, von Annahmen folgender Art aus. Die Entstehung und Lokalisation der **Primordien** d.h. der Blattanlagen, in der Wachstumszone der Sprossspitze, wird durch ein **morphogenetisches Feld** gesteuert, dessen Wirkung auf hypothetischen Wachstumshemmstoffen

¹⁹Siehe Anmerkung S, 139.

oder auf dem Wettbewerb um Nährstoffe zwischen den bereits vorhandenen und den entstehenden Primordien beruht. Auf diese Weise üben die bereits vorhandenen Primordien auf die entstehenden einen “**Kontaktdruck**” aus, der sowohl bestimmt, an welcher Stelle ein Primordium neu entsteht, als auch, wie es beim Weiterwachsen seine Position verändert. Für Einzelheiten sei auf die Literatur verwiesen [303].

Über andere Modelle dieser Art gibt R.V. Jean einen kritischen Überblick in seinem Buch “Mathematical Approach to Pattern and Form in Plant Growth” [205]. Den **mechanistischen Modellen** stellt Jean seine eigene Konzeption eines **interpretativen Modells** gegenüber. Hierbei wird die wachsende Sprossspitze als ein System aufgefasst, dessen Subsysteme, die Primordien, in aggregationsbildender Weise aufeinander wirken und dabei nach einem Prinzip der **Maximierung der Energie**, das heißt der **Minimierung der Entropie**, in **Hierarchien** organisiert werden. Hier wird also das Phänomen der Phyllotaxis nicht mechanisch aus einer hypothetischen Ursache “erklärt”, sondern ausgehend von seinem hypothetischen Endergebnis, der Minimierung der Entropie, interpretiert.

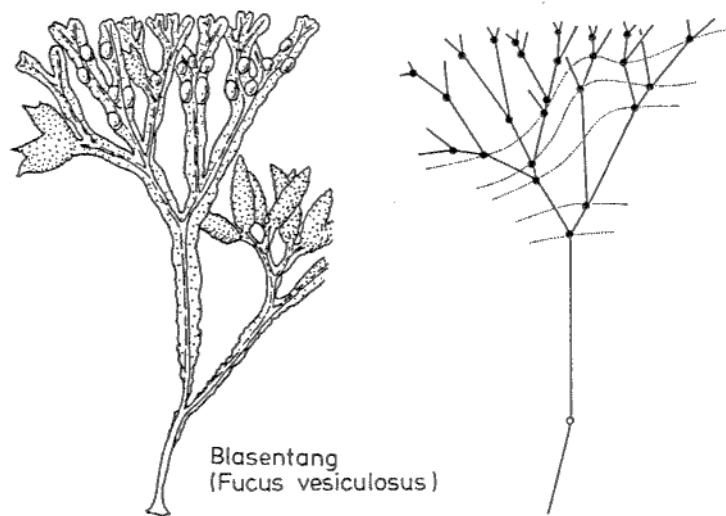
Ein solcher Erklärungsversuch setzt sich weniger als die mechanistischen Ansätze der Gefahr des Reduktionismus aus. Ich zitiere Jean:

Chemische und mechanische Faktoren spielen zweifellos bei der Verteilung der Primordien eine Rolle, aber die mechanistischen Erklärungen zeigen die Notwendigkeit, das Problem auf einer höheren, umfassenderen Ebene zu behandeln. Verschiedene Untersuchungen über Phyllotaxis, die gewöhnlich von den mathematischen Ansätzen ignoriert werden und die Ökologie, die Phylogenie und die Gefäßbildung betreffen, müssen berücksichtigt werden. Phyllotaxis ist ein epigenetisches, ganzheitliches, systemisches Phänomen, der Bereich der Wirklichkeit, zu dem es gehört, geht über die Chemie und Physik hinaus. [205]²⁰

So ist es in phylogenetischer Hinsicht wichtig, dass Phyllotaxis nicht auf die höheren Landpflanzen beschränkt ist. Phyllotaxis kommt schon bei den

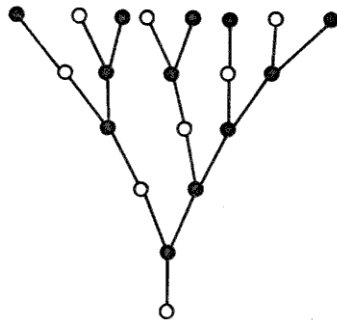
²⁰Deutsche Übersetzung, hier und im folgenden vom Autor E.B. (Hrsg.).

Meeresalgen in der Organisation der Thallusspitze vor, also bei Pflanzen ohne Gliederung in Wurzel und Spross. Die folgende Zeichnung – nach E.J.H. Corner: “The Life of Plants” [86] – zeigt links eine Braunalge der Gattung *Fucus*, also einen Blasentang. Der Thallus besteht aus gegabelten Bändern, die sich während des Wachstums an der Spitze in zwei Zipfel teilen (dichotome Verzweigung). Beide Hälften wachsen zu Zweigen aus, die im allgemeinen ungleich groß sind. Einer wächst schneller und übergipfelt den anderen vor der nächsten Gabelung.



Wir können die dichotome Verzweigung wie folgt schematisch darstellen. Wir betrachten zunächst die Menge der Verzweigungspunkte. Sie ist in offensichtlicher Weise durch die Nachfolgerrelation partial geordnet. Darüber hinaus können wir sie aber auch in eine Hierarchie von Generationen zerlegen: Beim Übergang von einem Verzweigungspunkt zum nächsten nimmt der Generationsindex bei einem kurzen Zweig um 1 zu, bei einem langen um zwei. Die schematische Zeichnung rechts zeigt diese hierarchische Struktur. Für die mathematische Modellierung ist es zweckmäßig, dies Bild dadurch anzureichern, dass man jeden langen Zweig auch noch durch einen Punkt repräsentiert. Man erhält so eine partial geordnete Menge mit zwei Arten von Punkten: Verzweigungspunkten und Nicht-Verzweigungspunkten. Der

zugehörige Graph ist ein Baum mit einem eindeutig bestimmten Minimum, und die hierarchische Struktur der Generationen ist durch die Abstände vom Minimum gegeben. Die Punkte dieses Graphen repräsentieren genau die partial geordnete Menge der Zweige der Pflanze. Verzweigungspunkte repräsentieren kurze Zweige, Nicht-Verzweigungspunkte repräsentieren lange Zweige. Die folgende Zeichnung zeigt den Anfang einer solchen hierarchischen Struktur.

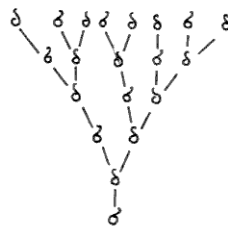


Aus jedem dichotomen Verzweigungspunkt entsteht beim Übergang zur nächsten Generation ein Verzweigungspunkt und ein Nicht-Verzweigungspunkt. Aus jedem Nicht-Verzweigungspunkt entsteht ein Verzweigungspunkt. Bezeichnen wir mit d_n die Zahl der Verzweigungspunkte und mit s_n die Zahl der Nicht-Verzweigungspunkte in der n -ten Generation, dann gilt also:

$$s_{n+1} = d_n \quad d_{n+1} = s_n + d_n .$$

Damit sind wir wieder bei den gnomonischen Rekursionsgleichungen angelangt, und es ist klar, dass wegen des eindeutigen Minimums, also wegen $(s_{-2}, d_{-2}) = (1, 0)$ und $(s_{-1}, d_{-1}) = (0, 1)$ sowie $(s_0, d_0) = (1, 1)$ die Zahl der Punkte in der n -ten Generation gleich der Fibonacci-Zahl f_{n+2} ist. Wir sind also wieder zur Idee des Gnomons zurückgekommen, aber wir sind nicht einfach im Kreis gegangen, auch mathematisch nicht. Wir stoßen nämlich auf eine neue mathematische Idee, wenn wir unser Modell des dichotomischen Wachstums noch einmal daraufhin ansehen, ob unser Schema die Pflanzen-gestalt einigermaßen treu wiedergibt. Die Antwort fällt unterschiedlich aus,

je nachdem, ob wir mit dem Schema die mathematische Struktur, d.h. die partial geordnete Menge bzw. den zugehörigen Graphen, meinen oder aber die gezeichnete Figur. Der Thallus des Blasentangs ist nämlich flächig in der Ebene ausgebreitet, und die gezeichnete Figur gibt das wieder, die abstrakte mathematische Struktur aber nicht. Für die Pflanzengestalt ist es aber wesentlich, ob bei einer Verzweigung der kurze Zweig links und der lange rechts ist oder umgekehrt. Also müssen wir ein feineres mathematisches Modell machen, das diese räumliche Information mit enthält. Stellt man sich die Verzweigungspunkte und Nicht-Verzweigungspunkte einer Generation auf einer Linie liegend vor, dann wird ihre räumliche Anordnung vor allem durch ihre Reihenfolge bestimmt. Repräsentieren wir jeden Verzweigungspunkt durch einen Buchstaben δ , jeden Nicht-Verzweigungspunkt durch einen Buchstaben σ , dann ist die Reihenfolge von Punkten einer Generation durch eine Folge solcher Buchstaben gegeben, oder, wie man in der kombinatorischen Gruppentheorie sagt, durch ein **Wort** in den **Buchstaben** σ und δ . Unsere hierarchische Struktur, angereichert durch die Information über die Reihenfolge, wird also jetzt durch eine Folge von Wörtern gegeben, wobei außerdem jedem Buchstaben eines Wortes ein oder zwei Buchstaben des folgenden Wortes als Nachfolger zugeordnet sind. Aus der obigen Figur wird so die folgende:



Hier ist die zugehörige Folge der Wörter:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \sigma \\
 & & & & & & \delta \\
 & & & & & & \sigma & \delta \\
 & & & & & \delta & \sigma & \delta \\
 & & & & \sigma & \delta & \delta & \sigma & \delta \\
 \delta & \sigma & \delta & \sigma & \delta & \delta & \sigma & \delta
 \end{array}$$

Natürlich ist die Art der Buchstaben belanglos, statt σ , δ hätten wir auch a , b nehmen können oder 0 , 1 . Auch ist es belanglos, ob wir die Wörter von links nach rechts schreiben oder umgekehrt. Schreibe ich umgekehrt und nehme 0 statt σ und 1 statt δ , dann erhalte ich die folgende Folge von $0, 1$ -Folgen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \\
 1 \\
 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
 \end{array}$$

Es erhebt sich die Frage, ob es für eine bestimmte Fucus-Art mit flächigem Thallus und dichotomer Verzweigung mit Übergipfelung ein bestimmtes Bildungsgesetz gibt, nach dem das $(n+1)$ -te Wort w_{n+1} aus dem n -ten Wort w_n hervorgeht. Corner gibt als – unvollständige – Regel, dass bei gewissen Arten, z.B. *fucus spiralis*, die kürzeren Zweige abwechselnd links und rechts entstehen. Bei der oben abgebildeten Pflanze von *fucus vesiculosus* scheint mir aber zumindest für die ersten Generationen ein anderes Bildungsgesetz vorzuliegen: Die kürzeren Zweige entstehen immer auf der gleichen Seite, etwa der Rechten. Dies ist vom mathematischen Standpunkt aus das einfachste Bildungsgesetz überhaupt. Es lautet:

0	\mapsto	1
1	\mapsto	10

Etwas abstrakter können wir das Gesetz gruppentheoretisch wie folgt formulieren. F sei das **freie Monoid**, das von zwei Elementen σ und δ

erzeugt wird. Wir definieren einen Homomorphismus $\varphi : F \rightarrow F$ durch seine Wirkung auf die Erzeugenden:

$$\begin{array}{l} \varphi(\sigma) = \delta \\ \varphi(\delta) = \delta\sigma \end{array}$$

Dann lautet das Bildungsgesetz für die Folge der Worte w_n :

$$w_{n+1} = \varphi(w_n) .$$

Das Modell von Jean, das wir oben erwähnten, verallgemeinert dies Bildungsgesetz zu einer ganzen Klasse von Bildungsgesetzen, unter denen dann diejenigen, die zu den häufigeren Formen von Phyllotaxis führen, durch Minimalitätseigenschaften einer kunstvoll definierten Entropie ausgezeichnet werden. Die Einzelheiten dieses Modells kann ich nicht nachvollziehen, und es kommt mir auch gar nicht darauf an, sondern vielmehr auf das einfache Bildungsgesetz für 0,1-Folgen, das wir nachher noch in ganz andere Zusammenhänge einordnen werden. Vorher aber will ich diesen Bericht über die Phyllotaxis mit einigen Zitaten schließen. Das erste Zitat ist aus dem zitierten Artikel von Corner, und ich denke, es gilt, obwohl 1964 geschrieben, trotz aller Fortschritte der mathematischen Biologie noch immer:

Der Spiralbau des Vegetationspunktes, die schraubige Anordnung der Blattanlagen rund um die Stammspitze, ist eines der großen Wunder in der Botanik. Es gibt keine Erklärung dafür. Er ist einfach da bei Moosen, Farnen und Blütenpflanzen, ohne jede sichtbare oder unsichtbare Ursache. Wenn auch die Braunalgen lediglich eine Parallelentwicklung zu den Grünalgen und keineswegs deren Vorfahren sind, so sind doch *Fucus* und seine Verwandten die einzigen Pflanzen, die vielleicht lehren können, wie jenes Wunder entstanden sein mag. [86]²¹

Das zweite Zitat ist ein Satz des Zen-Lehrers Suzuki:

Wer eine bescheidene Blume an der zerbröckelten Mauer in ihrem Wesen verstanden hat, der hat die ganze Welt und alle Dinge diesseits und jenseits der Welt verstanden.

²¹Siehe Anm. 20.

Das Wesen einer Blume – sind Zahlen und Figuren der Schlüssel? Im vorigen Jahrhundert mochte man das glauben. Im Vorwort zum Buch der Brüder Bravais schrieb der Naturhistoriker und Botaniker C.G. Nees von Esenbeck:

Da die Pflanze nichts weiter, als Blatt und Stengel, der Stengel aber die Verbindungslinie der Blätter, folglich die Pflanze ihrem Wesen nach eine Einheit gesetzlich verbundener Blätter ist, so musste die endliche Darlegung der Erkennbarkeit eines Gesetzes der Blattanordnung als die wichtigste aller botanischen Entdeckungen, – das Gesetz selbst aber, wenn es mathematisch dargelegt würde, als der wundersame Schlüssel erscheinen, der uns zu den Urtypen des Gewächsreichs einführen und das Getriebe seiner Entwicklung bis in's Besonderste vor uns blosslegen werde. [53]

Ein pflanzliches Wesen – weiß es wirklich etwas von Zahlen und Figuren? Zum Schluss zwei Zitate von einem Biologen unserer Zeit, Adolf Portmann (zitiert nach [312]):

Wir sind umgeben von unadressierten Erscheinungen, die sich weder an das Auge eines Artgenossen noch an das Sehen eines Geschlechtspartners wenden, die sich auch nicht vor einem feindlichen Auge tarnen. Sie stellen vor allem das besondere Wesen eines Tieres oder einer Pflanzenart dar. Die Blätterfülle der grünen Vegetation ist von dieser Art – optisch fast ausschließlich zur bescheidenen Rolle eines "Hintergrundes" gebraucht, erfüllt sie in tausend Formen die gleiche lebenserhaltende Rolle als chemische Arbeiterin im Dienste des Lebens. Und wenn auch manches in der Blattstruktur dieser Leistung dient – wie vieles andere in der Blattgliederung, in der Gestaltung der Umrissse, ist nicht Anpassung, sondern Glied der Selbstdarstellung eines pflanzlichen Wesens.

Sind wir einmal so weit, dass wir diese unadressierten Erscheinungen zu beachten anfangen, dann zeigen sie sich auch da, wo

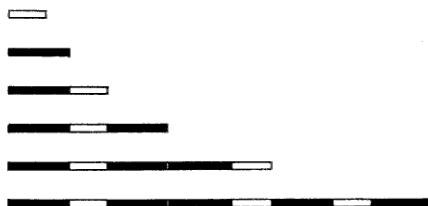
wir noch vor kurzem überzeugt waren, es mit eng umgrenzten Zweckgestalten zu tun zu haben. [295, p.149]

Wir sind uns alle darüber einig, und die Forschung hat es über jeden Zweifel nachgewiesen, dass die Blütenpracht vor allem zur Wirkung auf das Auge von bestäubenden Insekten und Vögeln bestimmt ist. Wenn wir aber durch Versuche mit künstlichen Blütenmodellen die Blütenbesucher prüfen, so stellen wir fest, dass wohl manche der Blütenmerkmale notwendig sind zur Anlockung der Bestäuber und für den Ablauf des Bestäubungsaktes, dass aber gar vieles an der Blüte in funktioneller Hinsicht belanglos ist ...

Wenn einmal die Aufmerksamkeit auf diese Selbstdarstellung gerichtet ist, so zeigt das vertiefte Studium der lebendigen Formen einen unabsehbaren Reichtum solcher Gestaltelemente und führt schließlich zu einer eigentlichen Umwertung der Werte. Was bisher als funktionslos oder als bloß systematisch (=verwandtschaftsbezogen) ganz am Rande der Beachtung stand, wird mit einem Male ein zentrales Phänomen. [296, p.35]

Wir sind bei der Modellierung eines dichotomen Verzweigungsprozesses mit Übergipfelung auf einen mathematischen Prozess gestoßen, der ausgehend von zwei Buchstaben σ, δ oder von 0, 1 eine Folge von Worten in σ, δ oder 0, 1 erzeugt. Dieser Prozess lässt sich auf verschiedene Weise interpretieren und in andere Zusammenhänge einordnen. Das soll jetzt auseinandergesetzt werden.

Zunächst einmal können wir unsere Wortfolgen geometrisch interpretieren. Dem Buchstaben σ bzw. 0 entspricht eine kurze Strecke, dem Buchstaben δ bzw. 1 eine lange. Einem Wort entspricht eine in kurze und lange Strecken eingeteilte Strecke, die durch Aneinandersetzen der σ und δ entsprechenden Strecken entsteht, und zwar entsprechend der Reihenfolge der Buchstaben σ und δ . Die folgende Abbildung zeigt den Anfang dieser Folge von Streckenteilungen.



Wir haben in dieser Abbildung das Verhältnis der Längen von δ und σ als $\tau : 1$ gewählt. Auf diese Weise knüpfen wir erneut an die antike Idee des Gnomons an. Denn wir sehen, dass die jeweils neueste Streckenteilung durch Ansetzen der vorvorigen an die vorige Streckenteilung entsteht. Wählt man also als Grundfigur eine im Verhältnis $\tau : 1$ geteilte Strecke, dann ist dieser Prozess des Aneinandersetzens einfach der alte gnomonische Prozess, der auf Euklids Proposition 5 in Buch 13 der Elemente zurückgeht. Wir haben aber jetzt eine neue Idee eingeführt. Wir haben den Prozess dadurch verfeinert, dass wir alle Teilungen aller bereits vorher konstruierten Intervalle in der Teilung des jeweils neu konstruierten Intervalls mit aufbewahren. Den Übergang von dem jetzigen verfeinerten Prozess zu dem ursprünglichen gnomonischen Prozess können wir wie folgt als einen Prozess der Abelianisierung darstellen. Wir bezeichnen die von σ bzw. δ erzeugten unendlich-zyklischen Gruppen mit $\langle \sigma \rangle$ bzw. $\langle \delta \rangle$. Ihr **freies Produkt** $\langle \sigma \rangle * \langle \delta \rangle$ ist die freie Gruppe, die von σ und δ erzeugt wird. Ferner seien $\langle s \rangle$ und $\langle d \rangle$ von s bzw. d erzeugte unendlich-zyklische Gruppen. Die **direkte Summe** $\langle s \rangle \oplus \langle d \rangle$ ist die freie abelsche Gruppe, die von s und d erzeugt wird. Wir definieren wie folgt einen Abelianisierungshomomorphismus α :

$$\begin{aligned} \alpha : \langle \sigma \rangle * \langle \delta \rangle &\rightarrow \langle s \rangle \oplus \langle d \rangle \\ \alpha(\sigma) &= s \\ \alpha(\delta) &= d \end{aligned}$$

Wir haben durch unsere Modellierung des dichotomen Verzweigungsprozesses einen mathematischen Prozess zur Erzeugung einer Wortfolge w_0, w_1, w_2, \dots gefunden. Ausgehend von dem Anfangsglied w_0 erzeugt er die w_n durch die Rekursionsformel

$$w_{n+1} = \varphi(w_n) .$$

Dabei ist φ der folgende Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : \langle \sigma \rangle * \langle \delta \rangle &\rightarrow \langle \sigma \rangle * \langle \delta \rangle \\ \varphi(\sigma) &= \sigma \\ \varphi(\delta) &= \delta \sigma . \end{aligned}$$

Anschließend haben wir bei der Betrachtung der geometrischen Interpretation des Prozesses einen zweiten Prozess gefunden, der bei geeigneten Anfangswerten das gleiche Ergebnis liefert und der in offensichtlicher Weise an die antike Idee des Gnomons anknüpft. Bei diesem zweiten Prozess wird eine Wortfolge w_0, w_1, w_2, \dots ausgehend von den Anfangsgliedern w_0, w_1 durch die folgende Rekursionsformel erzeugt:

$$w_{n+1} = w_n w_{n-1}$$

Die beiden Prozesse sind durchaus verschieden. Durch Induktion sieht man leicht, dass sie genau dann die gleichen Folgen liefern, wenn für die Anfangsglieder $\varphi(w_0) = w_1$ und $\varphi(w_1) = w_2$ gilt. Setzt man die erste Bedingung als erfüllt voraus, dann ist die zweite äquivalent zu der Bedingung $\varphi^2(w_0) = \varphi(w_0) \cdot w_0$. Es zeigt sich, dass die einzigen positiven Worte w welche der Bedingung $\varphi^2(w) = \varphi(w) \cdot w$ genügen, genau die Worte w_k sind, die aus $w_0 = \sigma$ durch den ersten Prozess erzeugt werden. Die beiden Prozesse stimmen also nur für Anfangsglieder überein, welche zu dieser einzigen Folge gehören, und sie liefern dann beide den entsprechenden Abschnitt dieser Folge.

Wir bemerken, dass diese Folge von Wörtern in σ und δ bzw. 0, 1 gegen eine unendliche 0, 1-Folge konvergiert:

10110101101101011010110101101011011010110110...

Derartige Folgen, ihre Eigenschaften und die Gesetze der Bildung sind jetzt das, was uns interessiert.

Beide Prozesse für die Bildung von Wortfolgen induzieren durch die Abelianisierung entsprechende Prozesse für Zahlenpaare aus der freien abelschen

Gruppe $\langle s \rangle \oplus \langle d \rangle$. Der Homomorphismus φ induziert einen Homomorphismus

$$\begin{aligned}\psi: \langle s \rangle \oplus \langle d \rangle &\rightarrow \langle s \rangle \oplus \langle s \rangle \\ \psi(s) &= d \\ \psi(d) &= s + d.\end{aligned}$$

Dies ist genau der Endomorphismus, den wir früher zur rekursiven Definition der Seiten- und Diagonalzahlen (s_n, d_n) benutzt haben. Der erste Prozess $w_{n+1} = \varphi(w_n)$ induziert also den alten Prozess, nämlich

$$(s_{n+1}, d_{n+1}) = \psi(s_n, d_n).$$

Der zweite Prozess hingegen induziert den folgenden rekursiven Prozess:

$$(s_{n+1}, d_{n+1}) = (s_n, d_n) + (s_{n-1}, d_{n-1}).$$

Darin erkennen wir die früheren Rekursionsformeln zur Berechnung von Zähler und Nenner der Hauptnäherungsbrüche des Kettenbruchs $[1; 1, 1, \dots] = \tau$ wieder. Beide Prozesse liefern für die Anfangsglieder $(1, 0)$, $(0, 1)$ die gleichen Folgen, aber natürlich nicht für beliebige Anfangsglieder.

Wir wollen jetzt solche Prozesse zur Erzeugung von 0, 1-Folgen nicht nur für τ , sondern allgemeiner für beliebige Irrationalzahlen studieren. Der Anfang dieser Geschichte ist ein Problem eines Astronomen aus der berühmten Familie der *Bernoullis*. Gemeint ist *Johann III*, Sohn von *Johann II* und Enkel von *Johann I*. Dieser *Johann III* war Direktor der königlichen Sternwarte zu Berlin. 1774 erschien von ihm eine französische Übersetzung der vollständigen Anleitung zur Algebra von *Leonhard Euler*. Dieses war die berühmte Ausgabe, die auch die schon erwähnten Zusätze von *J.L. Lagrange* enthielt. 1772 erschien in *Johann Bernoullis* "Recueil pour les astronomes" eine Abhandlung mit dem Titel: "Sur une nouvelle espace de calcul". *Bernoulli* behandelt dort das folgende Problem. Ist x irgendeine reelle Zahl, dann bezeichne $\langle x \rangle$ die am nächsten liegende ganze Zahl, genauer, die ganze Zahl $\langle x \rangle$, so dass

$$-\frac{1}{2} \leq x - \langle x \rangle < \frac{1}{2}.$$

Bernoullis Problem: *Man berechne für beliebig gegebene reelle Zahlen x und y die Folge $\langle nx + y \rangle, n = 0, 1, 2, \dots$.*

Bernoulli löste seine eigene Aufgabe für rationales x . In diesem und nur in diesem Fall ist die Folge der ersten Differenzen

$$\langle (n+1)x + y \rangle - \langle nx + y \rangle$$

periodisch. Bernoulli berechnete die Periode mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung von x .

Mehr als hundert Jahre später wurde Bernoullis Problem wieder aufgenommen, und zwar in einer Arbeit von A. Markoff: "Sur une question de Jean Bernoulli" [243]. Markoff gab Beweise für Bernoullis Regeln und löste das Problem auch für irrationales x . Bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x , dann gilt:

$$\langle x \rangle = [x + \frac{1}{2}].$$

Das inhomogene Problem der Berechnung der Zahlenfolgen $\langle nx + y \rangle$ ist also äquivalent zum inhomogenen Problem der Berechnung der Zahlenfolgen $[nx + y]$. Wir betrachten zunächst das homogene Problem: Berechnung der Zahlenfolgen $[nx]$. Es sei $\{x\} = x - [x]$. Dann gilt offensichtlich:

$$[(n+1)x] - [nx] = [(n+1)\{x\}] - [n\{x\}] + [x].$$

Es genügt daher, wenn wir uns auf reelle Zahlen x mit $0 < x < 1$ beschränken. Außerdem setzen wir x als irrational voraus, um die Ergebnisse einfach formulieren zu können. Wir ordnen x wie folgt eine unendliche 0, 1-Folge $f_x(n)$ zu, $n = 1, 2, \dots$

$$f_x(n) = [(n+1)x] - [nx].$$

Die Funktion f_x wurde von Christoffel die **Charakteristik** von x genannt. Es ist klar, dass f_x die Folge $[nx]$ und damit auch x bestimmt, denn es gilt ja $\lim [nx]/n = x$. Um das Bildungsgesetz der 0, 1-Folge f_x einfach hinschreiben

zu können, verwenden wir wieder statt 0 den Buchstaben σ und statt 1 den Buchstaben δ , so dass also z.B. σ^a bzw. δ^b eine Folge von a Nullen bzw. a Einsen bedeutet.

B.A. Venkov beweist in seinem Buch “Elementary number theory” [357, p.65–68] die folgende, auf *A. Markoff* zurückgehende Methode zur Berechnung von f_x mittels der Teilnenner a_i der Kettenbruchentwicklung $x = [0; a_1, a_2, \dots]$.

Wir definieren wie folgt rekursiv zwei Folgen u_n und v_n von Wörtern in σ und δ :

$u_n = u_{n-1}^{a_{n-1}} v_{n-1}$	$v_n = u_{n-1}^{a_n} v_{n-1}$
$u_0 = \sigma$	$v_0 = \delta$

Dann gilt: f_x ist die Folge $u_1 u_2 u_3 u_4 \dots$.

Beispiel: Es sei $x = \tau^{-1} = [0; 1, 1, 1, \dots]$. Dann gilt für $n \geq 2$

$$u_n = u_{n-2} u_{n-1} \quad \text{und} \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 1.$$

Also ist f_x die Folge

$$1 \ 01 \ 101 \ 01101 \ 10101101 \ 0110110101101 \dots$$

Das ist genau die Folge, die wir oben durch Betrachtung eines dichotomen Verzweigungsprozesses gefunden hatten. Sie ist also jetzt als Charakteristik der Zahl τ^{-1} erkannt und auf diese Weise in den Zusammenhang des Problems von Johann Bernoulli eingeordnet.

Wir bezeichnen die **Länge** eines Wortes u , das heißt die Zahl seiner Buchstaben, mit $|u|$. Die Länge der oben rekursiv definierten Wörter u_n und v_n lässt sich leicht induktiv berechnen. Wie üblich seien p_n und q_n die Zähler und Nenner der Hauptnäherungsbrüche von x . Dann gilt:

$$\begin{aligned} |u_n| &= q_n \\ |v_n| &= q_n + q_{n+1}. \end{aligned}$$

Venkovs Version des Markoffschen Prozesses zur Berechnung der Charakteristik f_x erzeugt also beim n -ten Schritt, d.h. beim Anfügen von u_n , genau q_n **neue** Stellen.

Fast 100 Jahre nach Markoff beschäftigte man sich wieder mit diesen charakteristischen Folgen. Im Anschluss an eine Arbeit von *K.B. Stolarski* [344] gaben *A.S. Fraenkel*, *M. Mushkin* und *U. Tassa* ein neues Verfahren zur Berechnung der Charakteristik f_x an: "Determination of $[n\theta]$ by its sequence of differences" [142].

Es beruht auf der folgenden einfachen Tatsache: Die endliche Folge $f_x(q)$ mit $q = 1, \dots, q_n + q_{n-1} - 1$ ist periodisch mit der Periode q_{n-1} , d.h. $f_x(q - q_{n-1}) = f_x(q)$. Daraus ergibt sich sofort ein Verfahren zur Berechnung von f_x . Wir definieren wie folgt rekursiv eine Folge von Worten w_n der Länge q_n :

$$\begin{array}{l} w_n = w_{n-1}^{a_n} w_{n-2} \\ w_0 = \sigma \\ w_1 = \sigma^{a_1-1} \delta . \end{array}$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = f_x .$$

Genauer: Bricht man die unendliche Buchstabenfolge f_x nach den ersten q_n Buchstaben ab, so erhält man das Wort w_n . Die Beziehung zwischen dem Prozess von Markoff-Venkov einerseits und dem neueren Prozess andererseits wird einfach durch die folgenden Beziehungen zwischen den u_n und w_n beschrieben, die man leicht durch Induktion beweist:

$$u_1 u_2 \dots u_n = w_n w_{n-1} \dots w_2 w_1 .$$

Im Falle $x = \tau^{-1} = [0; 1, 1, 1, \dots]$ sind die Rekursionsformeln für die w_n die gleichen, die wir früher durch Verfeinerung des gnomonischen Prozesses gefunden haben. In diesem Sinne sind die Rekursionsformeln also die Verallgemeinerung des gnomonischen Prozesses für beliebige Irrationalzahlen x . Natürlich stellt sich jetzt die Frage, ob man die Folge der w_n auch mittels eines Prozesses von der Art erzeugen kann, wie wir ihn zuerst bei der Mo-

dellierung der dichotomen Verzweigung gefunden haben. Die Frage ist also: Gibt es einen Homomorphismus φ der freien Gruppe $\langle \sigma \rangle * \langle \tau \rangle$ auf sich selbst, so dass gilt:

$$w_n = \varphi(w_m) \text{ für ein } m < n?$$

Dies ist jedenfalls dann der Fall, wenn die Folge der Partialnenner a_n periodisch ist. Ist N die Länge der Periode und definiert man φ durch $\varphi(w_0) = w_N$ und $\varphi(w_1) = w_{N+1}$, dann folgt durch die Induktion aus den Rekursionsformeln:

$$w_{n+N} = \varphi(w_n).$$

Umgekehrt folgt für einen Isomorphismus φ aus dem Bestehen der Relationen $w_{n+N} = \varphi(w_n)$ und den Rekursionsformeln für die w_n sofort, dass die Folge a_n der Partialnenner periodisch mit der Periode N sein muss. Nun gilt aber: Eine Irrationalzahl $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ hat genau dann eine von einer bestimmten Stelle ab periodische Kettenbruchentwicklung, d.h. $a_{n+N} = a_n$, wenn x eine **quadratische Irrationalität** ist, d.h. einer Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit ganzen Zahlen a, b, c genügt. Dass eine von einer bestimmten Stelle ab periodische Kettenbruchentwicklung zu einer quadratischen Irrationalität führt, ist offensichtlich. Denn wenn wir o.B.d.A. annehmen, dass die Entwicklung rein periodisch mit der Periode N ist, dann gilt:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{N-1} + \frac{1}{x}}}}}$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{p_{N-1}x + p_{N-2}}{q_{N-1}x + q_{N-2}}$$

und durch Multiplikation mit dem Nenner erhält man eine quadratische Gleichung für x . Dass umgekehrt jede quadratische Irrationalität x eine von einer gewissen Stelle ab periodische Kettenbruchentwicklung hat, wurde im

Falle $x^2 = c$ schon 1765 von *Euler* bemerkt. Die allgemeine Aussage wurde 1768 von *J.L. Lagrange* bewiesen [233]. Verschiedene Beweise von Lagranges Satz findet man im Buch von Perron [285, §20 und §21].

Als Ergebnis halten wir fest, dass die Möglichkeit der Verallgemeinerung des Erzeugungsprozesses $w_n = \varphi(w_{n-1})$, auf den wir zuerst bei der Modellierung der dichotomen Verzweigung gestoßen waren, an die spezielle Voraussetzung einer quadratischen Irrationalität gebunden ist. Das macht den Prozess nicht weniger interessant, aber eben sehr speziell.

Gerade derartige Prozesse, wo φ zum Beispiel durch $0 \mapsto 1$ und $1 \mapsto 10$ oder $0 \mapsto 10$ und $1 \mapsto 100$ definiert ist, waren der Ausgangspunkt eines interessanten Artikels von *N.G. de Bruijn*: "Sequences of zeros and ones generated by special production rules" [95]. Diese Arbeit erschien unmittelbar vor de Bruijns Arbeit über Penrose-Pflasterungen, über die ich schon weiter oben berichtet habe, und sie steht mit dieser in einem engen Zusammenhang, der durch die Analogie zwischen den obigen Erzeugungsprozessen einerseits und den von Penrose und Conway betrachteten Prozessen der Inflation und Deflation andererseits gestiftet wird.

De Bruijn betrachtet einfach-unendliche oder doppelt unendliche 0,1-Folgen, also Abbildungen

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \text{ bzw. } f : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\} .$$

Statt 0 und 1 schreiben wir auch wieder σ bzw. δ . Es sei φ ein Homomorphismus von $\langle \sigma \rangle * \langle \delta \rangle$ auf sich, der σ und δ in endliche σ, δ -Folgen $\varphi(\sigma)$ bzw. $\varphi(\delta)$ abbildet. Dann ist jeder 0,1-Folge f eine neue 0,1-Folge $\varphi(f)$ zugeordnet. Sie entsteht dadurch, dass jede 0 in der Folge f durch $\varphi(0)$ ersetzt wird und jede 1 durch $\varphi(1)$. Im Fall der einfach-unendlichen Folgen ist $\varphi(f)$ dadurch bereits eindeutig definiert, im Fall der doppelt-unendlichen Folgen jedoch nur bis auf eine Verschiebung der Indizes. Jede der so entstehenden Folgen heiße ein **Nachfolger** von f . Der **Hauptnachfolger** $\varphi(f)$ ist dadurch ausgezeichnet, dass $\varphi(f)(0)$ die erste Ziffer von $\varphi(f(0))$ ist. Umgekehrt heißt f ein **Vorganger** seiner Nachfolger. De Bruijn nennt den Prozess $f \mapsto \varphi(f)$ **Deflation**, den inversen Prozess **Inflation**.

Unsere obigen Bemerkungen zur Berechnung der Charakteristik f_x einer quadratischen Irrationalität x machen klar, dass für den oben x zugeordneten Homomorphismus φ_x das Folgende gilt:

$$\boxed{\varphi_x(f_x) = f_x}$$

Die Charakteristik f_x einer quadratischen Irrationalität ist also ihr eigener Vorgänger bezüglich φ_x und hat deswegen Vorgänger beliebiger Ordnung. De Bruijns Arbeit hat nun das Ziel, für bestimmte einfache Prozesse φ wie z.B. $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 10$ oder $0 \mapsto 100, 1 \mapsto 100$ alle Folgen f zu finden, welche Vorgänger beliebiger Ordnung f_0, f_1, f_2, \dots haben, so dass also $f_0 = f$ und f_{-k} Nachfolger von $f_{-(k+1)}$ ist. Das Ergebnis ist, grob gesagt, eine Beschreibung dieser Folgen f in der Form

$$f(n) = [(n+1)x + y] - [nx + y].$$

Dabei ist x eine zu φ gehörige feste quadratische Irrationalität und y ein Parameter. Damit sind wir also wieder bei der inhomogenen Form des Problems von Johann Bernoulli angekommen. Bei der genauen Beschreibung der gesuchten Folgen erweist es sich als zweckmäßig, außer der Gaußschen Funktion $[x]$ noch eine ganz ähnlich definierte Funktion $\lceil x \rceil$ einzuführen. Aus Symmetriegründen schreibt de Bruijn dann $\lfloor x \rfloor$ statt $\lceil x \rceil$, und wir werden ihm ab jetzt darin folgen. Also:

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

$$\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}.$$

Für den Prozess φ mit $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 10$ sei $x = [0; \overline{1, 1, 1, 1, \dots}] = \tau^{-1}$, und für den Prozess φ mit $0 \mapsto 100, 1 \mapsto 100$ sei $x = [0; \overline{2, 2, 2, \dots}] = \sqrt{2} - 1$. Dann lautet de Bruijns Ergebnis für diese beiden Deflationsprozesse bzw. die zugehörigen quadratischen Irrationalitäten:

Die zweifach unendlichen Folgen mit Vorgängern beliebiger Ordnung sind genau die zwei durch $y \in \mathbb{R}$ parametrisierten Scharen

von Folgen p_y und q_y mit

$$\begin{aligned} p_y(n) &: = \lceil (n+1)x + y \rceil - \lceil nx + y \rceil , \\ q_y(n) &: = \lfloor (n+1)x + y \rfloor - \lfloor nx + y \rfloor . \end{aligned}$$

Diese 0,1-Folgen, auf welche das Problem von Johann Bernoulli unmittelbar hinführt, haben eine einfache und doch sehr interessante geometrische Interpretation, die mit der geometrischen Interpretation der Kettenbruchentwicklung durch Felix Klein eng zusammenhängt. Es sei x eine positive Irrationalzahl $0 < x < 1$ und y eine beliebige reelle Zahl. Dazu gehört in der Ebene \mathbb{R}^2 mit den Koordinaten eine affine Gerade mit der Gleichung

$$\eta = \xi x + y .$$

Nun sei $L = \mathbb{Z}^2$ das Gitter der Punkte in \mathbb{R}^2 mit ganzzahligen Koordinaten. Die Gerade zerlegt die Menge der Gitterpunkte in zwei Teilmengen, die Menge L_+ der Punkte oberhalb der Geraden und die Menge L_- der Punkte unterhalb:

$$\begin{aligned} L_+ &: = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}^2 \mid \eta \geq \xi x + y\} , \\ L_- &: = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}^2 \mid \eta \leq \xi x + y\} . \end{aligned}$$

Wenn auf der Geraden selbst kein Gitterpunkt liegt, bilden L_+ und L_- eine disjunkte Zerlegung von L . Dies ist der Allgemeinform. In dem Spezialfall, dass die Gerade einen Gitterpunkt enthält, enthält sie wegen der Irrationalität von x nur einen, und L_+, L_- haben diesen Punkt gemeinsam.

Der Graph der Funktionen $\lceil nx+y \rceil$ bzw. $\lfloor nx+y \rfloor$ bildet, grob gesprochen, die Ecken einer Treppenkurve mit Eckpunkten aus L_+ bzw. L_- , welche sich der Geraden von oben oder unten so weit wie möglich nähert. Genauer gesagt können wir diese beiden Treppenkurven wie folgt definieren. Wir definieren zwei Quadranten Q_+ und Q_- wie folgt:

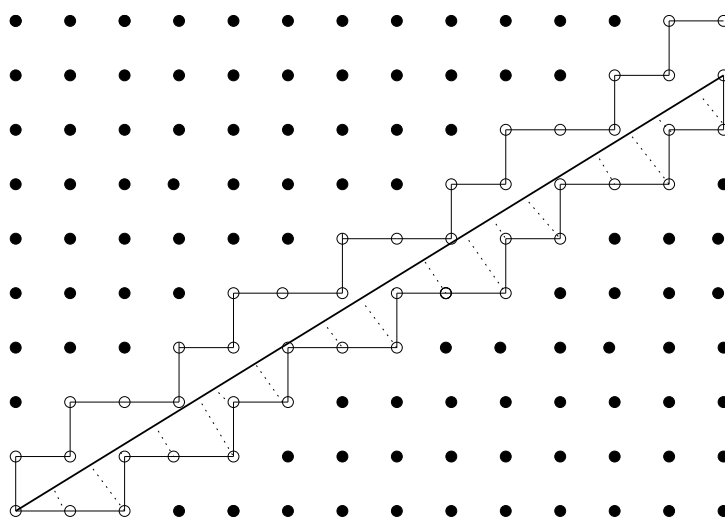
$$\begin{aligned} Q_+ &: = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi \leq 0, \eta \geq 0\} , \\ Q_- &: = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi \geq 0, \eta \leq 0\} . \end{aligned}$$

Ihr Eckpunkt ist der Nullpunkt. Durch Parallelverschiebung erhalten wir zu

jedem Gitterpunkt $v \in L^+$ bzw. $v \in L^-$ einen verschobenen Quadranten $v + Q_+$ bzw. $v + Q_-$ mit Eckpunkt v . Die Vereinigung dieser verschobenen Quadranten gibt zwei Teilmengen

$$L_+ + Q_+ : = \bigcup_{v \in L_+} v + Q_+$$

$$L_- + Q_- : = \bigcup_{v \in L_-} v + Q_-$$



in den Halbebenen oberhalb und unterhalb der Geraden. Ihre Ränder T_+ bzw. T_- sind die gesuchten Treppenfunktionen:

$$T_+ : = \partial(L_+ + Q_+)$$

$$T_- : = \partial(L_- + Q_-).$$

Im folgenden beschränken wir uns auf die Betrachtung von T_- . Die analogen Aussagen über T_+ sind leicht zu finden. Auf T_- liegen Gitterpunkte von zwei Arten: Es sind zum einen die Punkte $(n, \lfloor nx + y \rfloor)$, zum anderen die nach unten einspringenden Eckpunkte der Treppenkurve. Die Treppenkurve besteht aus horizontalen und vertikalen Einheitsstrecken. Die Differenz $\lfloor (n+1)x + y \rfloor - \lfloor nx + y \rfloor$ ist gleich 0 oder gleich 1. Im ersten Fall besteht der zwischen $(n, \lfloor nx + y \rfloor)$ und $(n+1, \lfloor (n+1)x + y \rfloor)$ liegende Teil der Treppenkurve aus einer horizontalen Einheitsstrecke, im zweiten Fall aus einer

horizontalen und einer vertikalen.

Wir hatten schon früher die Idee eingeführt, dass man einer unendlichen 0, 1-Folge eine Teilung einer Halbgeraden in kurze und lange Strecken zuordnen kann, und entsprechend kann man einer zweifach-unendlichen 0, 1-Folge eine Teilung einer Geraden in kurze und lange Strecken zuordnen. Die jetzt entwickelte geometrische Interpretation legt es nahe, eine solche Geradenteilung durch orthogonale Projektion der Treppenkurve auf die Gerade zu gewinnen. Wenn wir wie früher jeder 0 eine kurze und jeder 1 eine lange Strecke zuordnen wollen, müssen wir als Teilungspunkte auf der Treppenkurve nur die Punkte $(n, \lfloor nx+y \rfloor)$ nehmen. Das Längenverhältnis von kurzen und langen Strecken ist dann $1 : (1+x)$. Es gibt aber eine noch einfachere Konstruktion:

Wir projizieren einfach **alle** Gitterpunkte von T_- auf die Gerade. Bezeichnet also π die orthogonale Projektion der Ebene auf die Gerade $\eta = \xi x + y$, dann erhalten wir zwei Geradenteilungen dieser Geraden in lange und kurze Intervalle, und die beiden Mengen der Teilungspunkte sind

$$\begin{aligned} \pi(T_+ \cap L_+), \\ \pi(T_- \cap L_-). \end{aligned}$$

Die Steigung der Geraden ist $x = \tan \alpha$. Die Teilstrecken entstehen durch die Projektion horizontaler bzw. vertikaler Einheitsstrecken. Sie haben daher die Längen $\cos \alpha$ bzw. $\sin \alpha$, und das Verhältnis ihrer Längen ist $\sin \alpha : \cos \alpha = \tan \alpha = x$. Die oben beschriebene Konstruktion der Treppenkurve war bewusst so gewählt, dass die Analogie mit der Konstruktion von Felix Klein hervortritt. In der zur Illustration beigegebenen Zeichnung ist deswegen auch $x = \tau^{-1}$ und $y = 0$ gewählt, damit man beide Konstruktionen vergleichen kann. Die elegante Idee von Felix Klein – nämlich der Übergang zur konvexen Hülle – vereinfacht die Situation: Statt durch eine Treppenkurve mit vielen kleinen Stufen wird die Gerade durch einen Streckenzug mit den Eckpunkten (p_n, q_n) mit Strecken von wachsender Länge approximiert. Dadurch wird die Natur der Hauptnäherungsbrüche geometrisch schön interpretiert, aber die interessante kombinatorische Geometrie, die in Johann Bernoullis Folgen und den zugehörigen 0, 1-Folgen steckt, wird so

zugedeckt. Es hat sich aber gerade in den letzten Jahren gezeigt, dass gerade die höherdimensionalen Analoga dieser Geometrie sehr interessant sind, und deswegen lohnt es sich, zuerst den einfachen 1-dimensionalen Fall der Geradenteilungen anzuschauen. Die obige Konstruktion der Treppenkurven geht davon aus, dass die Gerade die Ebene in zwei Halbebenen zerlegt. Analog zerlegt eine Hyperebene einen höherdimensionalen Raum in zwei Halbräume. Aber affine Teilräume höherer Codimension zerlegen den Raum nicht. Wenn wir an höherdimensionalen Verallgemeinerungen mit dem Ziel der Konstruktion von Flächenteilungen und Raumteilungen interessiert sind, ist es deswegen zweckmäßig, für die Gitterpunkt mengen $T_+ \cap L_+$ und $T_- \cap L_-$ andere Beschreibungen zu suchen.

Es sei $S_- \subset \mathbb{R}^2$ der wie folgt definierte zu der Geraden $\eta = \xi x + y$ parallele Streifen unterhalb der Geraden:

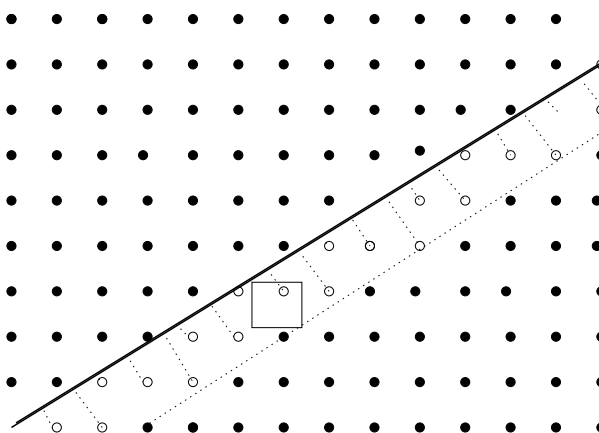
$$S_- = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x - 1 < \eta - \xi x \leq y\} .$$

Diesen Streifen kann man durch Parallelverschiebung längs der Geraden aus einem Einheitsquadrat erzeugen, dessen linke obere Ecke auf der Geraden liegt, und dessen rechte untere Ecke entfernt ist. Analog definiert man einen Streifen S_+ durch Verschiebung eines Einheitsquadrats, dessen rechte untere Ecke auf der Geraden liegt, während die linke obere Ecke entfernt ist. Mittels dieser Streifen kann man die gesuchten Gitterpunkt mengen offensichtlich wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} T_+ \cap L_+ &= L \cap S_+ \\ T_- \cap L_- &= L \cap S_- . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich für die beiden Mengen von Teilungspunkten auf der Geraden Beschreibungen in der folgenden Form:

$$\boxed{\begin{aligned} \pi(L \cap S_+) \\ \pi(L \cap S_-) . \end{aligned}}$$



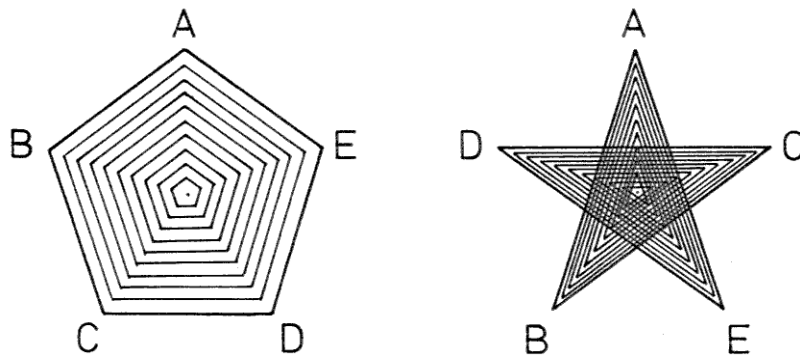
Damit ist eine Methode zur Konstruktion von Geradenteilungen gefunden, die sich zu einer Konstruktionsmethode für Flächen- und Raumteilungen und ihre höherdimensionalen Analoga verallgemeinern lässt: Man **schneidet** ein hochdimensionales Gitter L mit einem geeigneten Streifen S und **projiziert** auf einen geeigneten niederdimensionalen Raum. Die Punktmenge $\pi(L \cap S)$ ist die Menge der Eckpunkte der gesuchten Raumteilung. Wir wollen die hier nur angedeutete Methode in Zukunft **Schnitt-Projektions-Methode** nennen.

1.5 Halbreguläre und rhombisch monoedrische Polyeder

Wir haben einen großen Bogen von Keplers Ideen über den goldenen Schnitt, über die antike Idee des Gnomons, über die Kettenbrüche, über Phyllotaxis und dichotome Verzweigung zu Johann Bernoullis Problem gespannt, um schließlich zur Schnitt-Projektions-Methode zu kommen. Diese Methode erzeugt bei der Anwendung auf ganz besondere Spezialfälle wunderschöne Figuren und Raumteilungen. Diese ganz besonderen Fälle hängen wieder eng mit dem goldenen Schnitt und mit den Platonischen Körpern zusammen. Insbesondere spielt dabei aber ein von Kepler entdecktes Polyeder eine wichtige Rolle. Wir kehren deshalb wieder zurück zu Keplers Weltharmonik.

Kepler behandelt die Polyeder im dreidimensionalen Raum als “räumliche Kongruenzen”. Die Polyeder entstehen also bei ihm durch

lückenloses Aneinanderfügen ihrer Seitenflächen. Im Falle konvexer Polygone können wir dies in einer modernen Sprache, die wir in 13.7.1 entwickeln werden, so interpretieren, dass die Polyeder durch ihre Randkomplexe beschrieben werden. Diese bestehen aus konvexen ebenen Polygonen und bilden eine Flächenteilung der Oberfläche des Polyeders, also eine Flächenteilung einer stückweise linearen 2-dimensionalen Sphäre. Diese Interpretation wird Keplers Ansatz jedoch insofern nicht gerecht, als Kepler auch nicht-konvexe Polygone, nämlich Sternvielecke wie z.B. das Pentagramm, in Betracht zieht und aus ihnen nicht-konvexe Polyeder zusammenfügt. Wenn man die so entstehenden Polyeder durch Flächenteilungen interpretieren will, muss man nicht nur Flächenteilungen von Sphären, sondern von Flächen mit höherem Geschlecht in Betracht ziehen. Darüber hinaus sind die so durch Aneinanderfügen von Sternpolygonen im 3-dimensionalen Raum konstruierten Polyeder nicht identisch mit den Flächenteilungen, sondern sie sind singuläre "Immersionen" derselben in den 3-dimensionalen Raum, wobei sich die einzelnen Flächenstücke durchdringen und zudem die Sternvielecke singuläre Immersionen der gewöhnlichen Vielecke darstellen, welche von diesen verzweigt überlagert werden.



Man sieht, dass der Ansatz mit Hilfe der Flächenteilungen die betrachtete Situation nur indirekt erfasst, und dass es einfacher ist, direkt in kombinatorisch-geometrischer Weise Vielecke im Raum aneinanderzufügen, um diese sich selbst durchdringenden nicht-konvexen Polyeder zu konstruieren. Da aber unser später entwickelter strukturtheoretischer Ansatz gerade

von der Idee der Flächenteilung ausgeht, werden wir über diese Art von Polyedern nur hier in dieser historischen Einleitung und nur kurz berichten.

Kepler wäre nicht der Platonist, der er ist, ginge es ihm – wie nur wenige Jahre später René Descartes – um beliebige Polyeder. Ihm geht es um das Vollkommene, und das ist dann allemal auch das Einfache und das Regelmäßige. Darauf zielen seine Definitionen, die wir jetzt zitieren.

VI. Definition

Vollkommenst ist die räumliche Kongruenz und räumliche Figur, wenn auch die Seitenflächen, welche die Kongruenz bilden, lauter gleiche Figuren sind.

VII. Definition

Diese ist dann *ganz regulär*, wenn ihre Seitenflächen regulär sind und wenn ihre Ecken alle auf einer Kugelfläche liegen und untereinander gleichartig sind.

VIII. Definition

Sie ist *halbregulär*, wenn die Seitenflächen halbregulär sind (siehe I. Buch, 3. Definition), und wenn sie räumliche Ecken besitzt, die sich durch die Zahl der Kanten unterscheiden und ungleichartig sind, wobei jedoch nicht mehr als zwei Arten von Ecken auftreten dürfen und diese auf höchstens zwei konzentrischen Kugelflächen angeordnet sein müssen; die Zahl der Ecken einer einzelnen Art muss außerdem so groß sein wie die Zahl der Ecken einer regulären Figur.

Es steht nichts im Wege, diese räumliche Kongruenz als *vollkommenst* zu bezeichnen. Denn die Unvollkommenheit, die den Seitenflächen innewohnt, darf nicht der räumlichen Gestaltbildung angerechnet werden, sie ist für diese unwesentlich. Diese wird daher gleichwohl gleichzeitig als vollkommenst und als halbregulär bezeichnet.

IX. Definition

Vollkommen niederen Grades ist die Kongruenz, wenn die Seitenflächen regulär sind und die Ecken alle auf einer Kugelfläche liegen und gleichartig sind, wenn jedoch die Seitenflächen verschiedenen Arten angehören, wobei die Zahl der Seitenflächen der einzelnen Art so groß sein muss wie die Zahl der Seitenflächen in einer der vollkommensten Figuren, d.h. nicht kleiner als 4, da dies die kleinste Zahl von Seitenflächen ist, durch die eine räumliche Figur begrenzt wird. [213, p. 68f. (Hervorh. Hrsg.)]

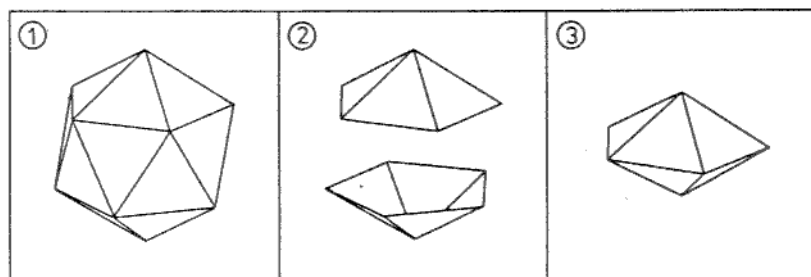
Bevor wir auf die Bedeutung einzelner Bedingungen in diesen Definitionen etwas näher eingehen, sollte der Leser die zugehörige große Tafel mit Figuren von Kepler betrachten, von der wir schon weiter oben eine Reproduktion beigelegt haben (Abbildung 1.45, S. 116). Sie zeigt die von Kepler gefundenen vollkommenen regulären oder halbregulären Figuren – im Sinne der obigen Definitionen.

Der Sinn von Keplers Definitionen und Sätzen hängt davon ab, was mit der Bedingung gemeint ist, dass die Ecken beziehungsweise die Flächen einer räumlichen Kongruenz “von der gleichen Art” sein sollen, “*inter se similes*”. Wie schon im Fall der ebenen Kongruenzen haben wir verschiedene Möglichkeiten einer exakten modernen Interpretation. So können wir die Bedingung für die Flächen eines Polyeders durch “isoedrisch” oder durch “monoedrisch” interpretieren. Ein Polyeder ist monoedrisch, wenn je zwei seiner Seitenflächen kongruent sind, also durch eine Isometrie des Raumes ineinander überführt werden. Kann diese Isometrie sogar so gewählt werden, dass sie das Polyeder in sich selbst überführt, dann nennen wir das Polyeder **isoedrisch**. Entsprechend können wir hinsichtlich der Ecken eines Polyeders zwei Bedingungen formulieren: “isogonal” und “monogonal”. Ein Polyeder ist **isogonal**, wenn seine Symmetriegruppe transitiv auf der Menge der Ecken operiert. Um “monogonal” zu definieren, müsste man zunächst wieder einen Begriff von **Eckenfigur** definieren. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten. Coxeter definiert z.B. in seinem Buch “Regular Polytopes” [89] als Eckenfigur einer Ecke p eines Polyeders P den geschlossenen

Streckenzug, der entsteht, wenn man die Mittelpunkte der mit p inzidierenden Kanten von P zyklisch miteinander verbindet, wobei für jede mit p inzidierende Fläche die Mittelpunkte ihrer beiden mit p inzidierenden Kanten verbunden werden. Eine andere Möglichkeit: Die Eckenfigur ist die Vereinigung aller mit p inzidierenden Kanten. Eine dritte Variante: Die Eckenfigur ist der Komplex aller mit p inzidierenden Kanten und Flächen. In den hier interessierenden Fällen, wo alle Flächen gleiche Kantenlänge haben und entweder regulär oder aber kongruente Rhomben sind, unterscheiden sich alle Varianten nicht wesentlich. Nachdem man eine Definition von "Eckenfigur" gewählt hat, kann man dann definieren: Ein Polyeder ist **monogonal**, wenn für je zwei Ecken die Eckenfiguren kongruent sind. Nach diesen Vorbemerkungen zu den Definitionen kommen wir nun zu Keplers Sätzen. Sein erstes Ergebnis ist, wie er selbst sagt, ein Scholion – also eine Auslegung – zum letzten Satz des letzten Buches von Euklid. Dieser lautet bekanntlich:

Weiter behaupte ich, dass sich außer den besprochenen fünf Körpern kein weiterer Körper konstruieren lässt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst würde. [122, p. 412]

Es geht also um die Existenz und Eindeutigkeit der regulären Polyeder, das heißt der fünf platonischen Körper. Dabei ist es wünschenswert, beim Beweis der Existenz eine möglichst starke Definition von Regularität zugrunde zu legen, beim Beweis der Eindeutigkeit aber eine möglichst schwache. Der zitierte Satz 18 aus Buch XIII der Elemente legt bekanntlich eine zu schwache Definition der Regularität zugrunde. Die pentagonale Bipyramide mit regulären Dreiecken als Seitenflächen ist ein Gegenbeispiel.



Euklids Satz ist also in der Tat auslegungsbedürftig, und wenn man Keplers Figur P_p betrachtet, kann man kaum zweifeln, dass Kepler dies Gegenbeispiel bekannt war. Es handelte sich also für Kepler darum, die Definition der Regularität durch eine möglichst schwache Bedingung für die Ecken zu verschärfen. In moderner Formulierung würde die schwächstmögliche – und damit bestmögliche – Definition lauten:

“Ein konvexes Polyeder ist **regulär**, wenn alle Seitenflächen regulär mit der gleichen Eckenzahl sind und an jeder Ecke die gleiche Anzahl von Seitenflächen zusammenstößt.”

Eine ein wenig stärkere, aber immer noch schwache Definition wäre:

“Ein konvexes Polyeder ist regulär, wenn es monoedrisch und monogonal ist und alle Seitenflächen regulär sind.”

Eine solche Definition wäre aber für Keplers Ansatz zum Beweis der Eindeutigkeit noch zu schwach gewesen, jedenfalls beim Oktaeder und beim Ikosaeder. Betrachten wir etwa den Fall des Ikosaeders, Keplers Figur P_p . Kepler beweist die Eindeutigkeit, indem er zeigt, dass ein Polyeder, bei dem an jeder Ecke 5 reguläre Dreiecke zusammenstoßen, immer in der gleichen Weise aufgebaut werden kann wie das reguläre Ikosaeder in der Konstruktion von Euklid. Dazu beginnt er mit einer Ecke und fügt dort 5 reguläre Dreiecke zusammen. Die so entstehende Figur ist aber dadurch alleine nicht eindeutig bestimmt. Anschaulich gesagt: Denkt man sich die Verbindung von je zwei Dreiecken, die längs einer Kante zusammenstoßen, als eine flexible Verbindung, dann ist die ganze Figur aus 5 Dreiecken nicht starr, sondern flexibel. Ebenso ist die aus 10 Dreiecken bestehende mittlere Zone der Figur P_p flexibel, und die untere Kappe aus 5 Dreiecken natürlich auch. Damit entsteht

das Problem, zu zeigen, dass man die drei Teile der Figur nur dann zu einem konvexen Polyeder zusammensetzen kann, wenn sie die durch das Vorbild des regulären Ikosaeders vorgegebene pentagonal-symmetrische Form haben. Das wäre zu Keplers Zeit wohl viel zu schwierig gewesen. Erst viel später – 1812 – bewies Cauchy einen allgemeinen Starrheitssatz für konvexe Polyeder, der Probleme dieser Art erledigt.

Dies, so vermute ich, ist der Grund, warum Kepler in der Definition VII verlangt, dass alle Ecken einer regulären Kongruenz auf einer Kugelfläche liegen sollen. Denn in Verbindung mit der Regularität und Kongruenz der Seitenflächen folgt daraus sofort, dass die Eckenfigur durch die Kantenzahl und Kantenlänge der Seitenflächen sowie die Zahl der mit einer Ecke inzidierenden Flächen eindeutig bestimmt ist. Aus der Tatsache, dass Kepler die Anordnung der Ecken auf einer Kugelfläche verlangt, scheint hervorzugehen, dass für ihn “inter se similes” für die Ecken nicht so etwas wie isogonal bedeutete, denn bei einem isogonalen konvexen Polyeder liegen die Ecken offensichtlich stets auf einer Kugelfläche. Aus dem gleichen Grunde hätte man anzunehmen, dass “inter se similes” für die Seiten nicht so etwas wie isoedrisch bedeutete, sondern eher monoedrisch. Damit ergäbe sich für Keplers Satz “Vollkommenste und reguläre Kongruenzen von ebenen Figuren zur Bildung einer räumlichen Figur gibt es fünf” die folgende moderne Interpretation:

“Es gibt bis auf Ähnlichkeit genau fünf monoedrische und monogonale konvexe Polyeder, deren Seiten regulär sind und deren Ecken auf einer Kugelfläche liegen.”

Keplers nächstes Ergebnis ist die Konstruktion von zwei nicht konvexen regulären Polyedern, dem **kleinen Sterndodekaeder** (Figur *Ss* auf Keplers Tafel Abb. 1.45) und dem **großen Sterndodekaeder** (Figur *Tt* auf Keplers Tafel). Beide Figuren haben als Seitenflächen jeweils 12 reguläre Sternfünfecke. Das kleine Sterndodekaeder hat 12 Ecken mit jeweils 5 inzidierenden Flächen, das große Sterndodekaeder hat 20 Ecken mit jeweils drei inzidierenden Flächen. Das kleine Sterndodekaeder entsteht aus dem Dodekaeder und das große Sterndodekaeder aus dem Ikosaeder, indem man auf die Seitenflächen von Dodekaeder bzw. Ikosaeder pentagonale bzw. trigonale

Pyramiden aufsetzt, deren Seitenflächen in der gleichen Ebene liegen wie die angrenzenden Flächen von Dodekaeder und Ikosaeder.

Die beiden Sterndodekaeder sind isogonal und isoedrisch und haben reguläre – wenn auch nicht konvexe – Polygone als Seitenflächen, so dass man sie also mit Recht als reguläre Polyeder bezeichnen kann, oder, um mit Kepler zu reden, als “vollkommenst und regulär”. Das kleine Sterndodekaeder hatten Künstler schon lange vor Kepler gefunden – ich erinnere an das Mosaik in San Marco (Abbildung 1.37). Das große Sterndodekaeder wurde wohl zuerst von Kepler entdeckt. Wie so viele Entdeckungen dieses großen Wissenschaftlers wurde auch diese vergessen oder nicht zur Kenntnis genommen, und die Sterndodekaeder wurden mehrfach wiederentdeckt, insbesondere 1809 von Poincot, der seltsamerweise Keplers Weltharmonik zitiert, ohne Keplers Entdeckung der Sterndodekaeder zu erwähnen. Poincot selbst entdeckte noch zwei weitere nichtkonvexe reguläre Polyeder, und damit war die Liste der regulären Polyeder im 3-dimensionalen Raum dann vollständig: Es gibt ihrer neun.

Außer den im Sinne von Kepler “vollkommensten und regulären” Figuren, also den fünf platonischen Körpern und den zwei Sterndodekaedern, zeigt seine Figurentafel noch zwei weitere von ihm entdeckte Figuren, die im Sinne seiner Definitionen “vollkommenst und halbreulär” sind. Es sind dies konvexe Polyeder, die von 12 bzw. 30 rhombischen Seitenflächen begrenzt werden und deswegen **Rhombendodekaeder** bzw. **Rhombentriakontaeder** genannt werden. Diese beiden Figuren werden im folgenden noch eine ganz besondere Rolle spielen. Bevor wir aber darauf eingehen, wollen wir das letzte wichtige Thema aus dem Buch II der Weltharmonik besprechen, nämlich Keplers Behandlung der archimedischen Polyeder. Keplers Ergebnis:

Vollkommene räumliche Kongruenzen niederen Grades gibt es
13. Es entstehen hierbei die 13 archimedischen Körper. [213,
Prop. xxviii, p. 84]

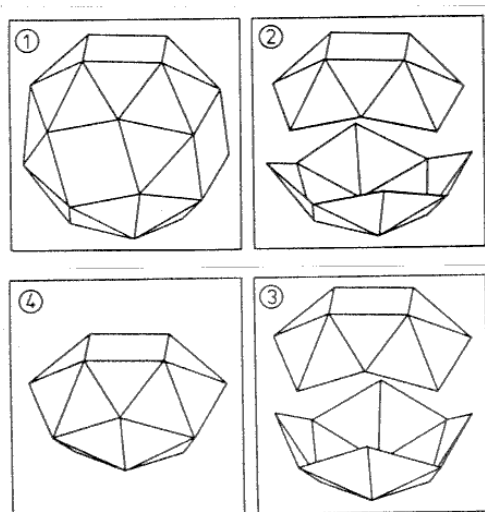
Sinn und Richtigkeit des Satzes hängen von der Interpretation der in den Definitionen verwendeten Bedingungen in kritischer Weise ab. Um dies

diskutieren zu können, zählen wir die Bedingungen noch einmal auf:

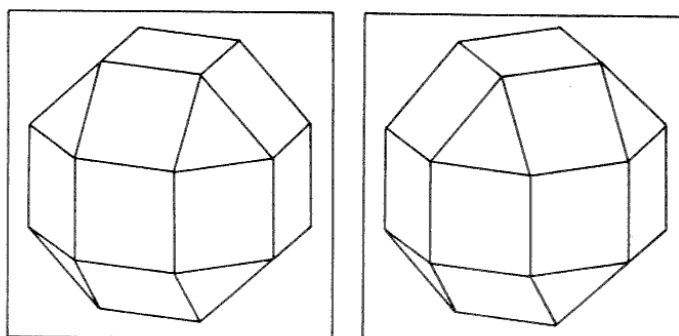
- (i) Die Seitenflächen sind regulär.
- (ii) Die Ecken sind gleichartig.
- (iii) Die Ecken liegen auf einer Kugelfläche.
- (iv) Die Seitenflächen sind verschiedenartig.
- (v) Die Zahl der Seitenflächen einer jeden Art ist mindestens gleich 4.

Die Bedingung (iv) dient natürlich dazu, die regulären Polyeder auszuschließen. Da die Bedingungen (i) und (iv) allein nicht zur Charakterisierung der archimedischen Polyeder ausreichen, wie das z.B. Pappus behauptet hatte, dürfte zu Keplers Zeiten klar gewesen sein. Es ist sehr leicht, nicht-archimedische konvexe Polyeder zu konstruieren, deren Seitenflächen regulär, aber nicht alle von der gleichen Art sind. So gibt es beispielsweise bei den archimedischen Polyedern $(3, 4, 3, 4)$, $(3, 5, 3, 5)$, $(3, 4, 4, 4)$ und $(3, 4, 5, 4)$ geschlossene Kantenzüge, die ein reguläres ebenes n -Eck bilden, $n = 6, 10, 8, 10$. Schneidet man die Polyederoberfläche längs dieses Kantenzuges auf, so zerfällt sie in zwei Stücke. Verdreht man diese um einen Winkel vom Bogenmaß $2\pi/n$ und setzt sie dann wieder zusammen, so erhält man ein nicht-archimedisches Polyeder. Man kann auch beide Stücke einzeln jeweils durch eine ebene reguläre n -Eckfläche abschließen und erhält wiederum nicht-archimedische Polyeder.

Die folgende Serie von 4 Zeichnungen zeigt eine interessantere Konstruktion. Man beginnt mit einem archimedischen Polyeder $(3, 3, 3, 3, 4)$, Bild 1. Man entfernt daraus eine bandförmige Zone von 4 Quadraten und 8 Dreiecken. Der Rest besteht aus zwei Stücken, die jeweils aus einem Quadrat und 12 Dreiecken aufgebaut sind, Bild 2. Diese beiden Aggregate sind flexibel. Man kann die Lage der in sich starren Dreiecke im Raum stetig ändern, wobei jedoch während des Deformationsprozesses die Dreiecke und Vierecke stets mit den gleichen Kanten aneinanderstoßen. Man deformiert die Aggregate also in geeigneter Weise, Bild 3. Danach fügt man sie zu einem konvexen Polyeder zusammen, Bild 4.



Man kann zeigen, dass es außer den archimedischen Polyedern und den Prismen und Antiprismen bis auf Ähnlichkeit nur endlich viele konvexe Polyeder gibt, die nur reguläre Seitenflächen haben. Ihre Bestimmung ist ein interessantes Problem (N.W. Johnson: “Convex polyhedra with regular faces” [207]). Aber dies war natürlich nicht das Problem von Kepler. Sein Problem war vielmehr, unter all diesen Polyedern die besonders regelmäßigen archimedischen durch geeignete Homogenitätsbedingungen für die Ecken auszuzeichnen. Dabei hat seine Bedingung (iii) wie schon im Fall der regulären Polyeder den Zweck, den Beweis der Eindeutigkeit zu erleichtern. Die zentrale Bedingung ist die Bedingung (ii), die Gleichartigkeit der Ecken. Und hier besteht nun, im Gegensatz zum Fall der regulären Polyeder, nicht nur a priori, sondern auch a posteriori ein Gegensatz zwischen den beiden Möglichkeiten der Interpretation von “gleichartig”, zwischen “isogonal” und “monogonal”. Interpretiert man “Gleichartigkeit der Ecken” durch “isogonal”, dann ist Keplers Charakterisierung der 13 archimedischen Polyeder richtig, interpretiert man sie durch “monogonal”, dann wird sie falsch. Die folgenden beiden Bilder zeigen links ein archimedisches Polyeder $(3, 4, 4, 4)$ und rechts ein auf den ersten Blick ganz ähnlich aussehendes Polyeder, das aus $(3, 4, 4, 4)$ durch den oben beschriebenen Prozess erzeugt wurde.



Dies Polyeder wurde zufällig bei einem mißlungenen Versuch entdeckt, ein Modell von $(3, 4, 4, 4)$ zu machen. (C.P.C. Miller [247], vgl. [88, p.336]). Dieses Polyeder ist ein Gegenbeispiel zu der monogonalen Variante von Keplers Satz: Die Seitenflächen sind reguläre 3- und 4-Ecke, ihre Anzahl ist 8 bzw. 18, die Ecken liegen auf einer Kugelfläche und die Eckenfiguren sind kongruent, aber das Polyeder ist trotzdem nicht archimedisch. Übrigens kann man beweisen, dass es außer diesem Polyeder keine weiteren Gegenbeispiele gibt.

Damit ergibt sich ein Dilemma: Entweder unterstellt man, dass Kepler sich geirrt hat, oder aber, dass er bei seinen Definitionen mit der Gleichartigkeit von Ecken bzw. Flächen doch mehr im Sinn gehabt hat als das, was wir mit “monogonal” und “monoedrisch” gefasst haben. Dies würde bedeuten, dass er über das aus der Antike tradierte kombinatorisch-geometrische Symmetriekonzept hinausgehend bei der Feststellung der Gleichartigkeit von Teilen einer Figur ihre Lage relativ zur gesamten Figur in einer wesentlich stärkeren Weise hätte berücksichtigen müssen, als dies bis dahin geschehen war. Dafür wäre es nicht erforderlich gewesen, über einen Symmetriebegriff in der Art des modernen gruppentheoretischen Symmetriebegriffs zu verfügen, und auch nicht, die Kongruenz von Figuren durch die Isometrien des umgebenden Raumes zu vermitteln. Es hätte beispielsweise eine Definition der folgenden Art genügt: “Die Ecken einer Figur sind gleichartig, wenn die Figur von jeder Ecke ausgehend durch Aneinanderfügen ihrer Flächen in der gleichen Weise erzeugt wird.” In moderner Sprache würde dies zum mindesten bedeuten, dass die kombinatorische Symmetriegruppe transitiv

auf den Ecken operiert, und für konvexe Polyeder mit regulären Flächen würde daraus wegen des schon erwähnten Starrheitssatzes von Cauchy folgen, dass sie isogonal sein müssen. Eine derartige Definition hätte wohl dem kombinatorisch-geometrischen Ansatz von Kepler durchaus entsprechen. Aber Keplers Beweise geben keinen eindeutigen Beleg für eine derartige begriffliche Erfassung der globalen kombinatorischen Struktur. Sehr wohl arbeitet Kepler mit der lokalen kombinatorischen Struktur, insbesondere mit so etwas wie den Eckenfiguren. Wir haben das schon bei seiner Klassifikation der archimedischen Flächenteilungen der Ebene gesehen, und die gleichen Prinzipien finden wir wieder bei der Klassifikation der archimedischen Polyeder mit dem einzigen Unterschied, dass die Summe der Winkel aller an einer Ecke anstoßenden Flächen jetzt nicht gleich 2π ist, sondern kleiner als 2π . Natürlich verfolgt Kepler beim allmählichen kombinatorischen Aufbau einer Flächenteilung oder eines Polyeders die Entwicklung der kombinatorischen Struktur über die lokalen Eckenfiguren hinaus, aber eine systematische begriffliche Erfassung der globalen Struktur als solcher gibt es nicht.

Ich nehme deswegen an, dass Kepler sich einfach geirrt hat, da er nicht sorgfältig genug war. Er hat einfach übersehen, dass im Falle $(3, 4, 4, 4)$ – und nur in diesem einen Fall – durch die lokale Struktur, d.h. die Eckenfigur, die globale Struktur des Polyeders noch nicht bestimmt ist, sondern dass es zwei Möglichkeiten gibt, das archimedische Polyeder $(3, 4, 4, 4)$ und dasjenige, welches Miller erst 300 Jahre später zufällig entdeckte, obwohl man es zu Keplers Zeiten ohne weiteres hätte konstruieren können. Was geschehen wäre, wenn Kepler dieses Polyeder gesehen hätte, darüber kann man nur spekulieren. Ich vermute, dass er es durch eine Verschärfung seiner Definitionen ausgeschlossen hätte.

Damit haben wir von den fünf Bedingungen, die Kepler zur Charakterisierung der archimedischen Polyeder benutzt, die ersten vier ausführlich diskutiert, und die Subtilitäten, auf die wir dabei stießen, gaben Anlass zu Betrachtungen über die Entwicklung des Symmetriebegriffs. Zur fünften Bedingung ist folgendes anzumerken. Den Bedingungen (i) bis (iv) genügen außer den archimedischen Polyedern noch zwei unendliche Serien von konve-

xen Polyedern: die halbbregulären Prismen und die Antiprismen. Ein solches n -gonales **Prisma** hat als Seitenflächen 2 reguläre n -Ecke und n Quadrate. Das Eckensymbol ist $(4, 4, n)$. Dabei ist $n \neq 4$, denn für $n = 4$ ergäbe sich das reguläre Hexaeder. Das n -gonale halbbreguläre Antiprisma hat als Seitenflächen zwei reguläre n -Ecke und $2n$ reguläre Dreiecke. Das Eckensymbol ist $(3, 3, 3, n)$. Dabei ist $n \neq 3$, denn für $n = 3$ ergäbe sich das reguläre Oktaeder. Die Prismen sind natürlich seit der Antike bekannt, während die Antiprismen anscheinend zuerst von Kepler betrachtet wurden. Sie sind als Figur A auf einer seiner Tafeln mit Flächenteilungen der Ebene abgebildet. Es ist durchaus sinnvoll, diese Prismen und Antiprismen zu den archimedischen Polyedern hinzuzunehmen, denn sie bilden zusammen mit diesen die Klasse der semiregulären Polyeder. Ein nicht reguläres konvexes Polyeder heißt nach einer 1900 von **Gosset** gegebenen Definition **semiregulär**, wenn es isogonal ist und reguläre Flächen hat. Das entspricht den Bedingungen (i) bis (iv) von Keplers Definition IX. Durch die Bedingung (v) schließt Kepler die Prismen und Antiprismen aus. Warum? Zweifellos, weil sie ihm noch unvollkommener erschienen als die archimedischen Körper, die ihrerseits im Vergleich zu den platonischen Körpern schon "vollkommen niederen Grades waren". Aber warum sind die Prismen und Antiprismen weniger vollkommen als die archimedischen Körper? Kepler gibt keinen Grund an. Aus heutiger Sicht liegt der entscheidende Unterschied in einer Eigenschaft der Symmetriegruppen: Die Symmetriegruppen der Prismen und Antiprismen sind **reduzibel**, sie lassen eine bestimmte Symmetrieachse dieser Körper invariant. Die Symmetriegruppen der archimedischen Polyeder hingegen sind **irreduzibel**, genau wie die Symmetriegruppen der platonischen Körper.²²

Keplers Beweis dafür, dass es nur 13 archimedische Polyeder gibt, ist, wie schon gesagt, vom gleichen Typ wie seine entsprechende Behandlung der 11 archimedischen Flächenteilungen der Ebene. Wir gehen darauf nicht näher ein. Neben dieser Art der Behandlung der archimedischen Polyeder steht bei ihm aber noch eine andere, bei der diese Polyeder nicht durch

²²Dies kann man als einen Hinweis auf die vom Autor (E.B.) zugrunde gelegte Definition halbbregulärer Polyeder verstehen: Ein isoedrisches Polyeder mit mindestens zwei Typen regulärer, unter sich jeweils kongruenter Seitenflächen heißt *halbbregulär* oder *archimedisch*, wenn es eine irreduzible Symmetriegruppe hat. (Hrsg.)

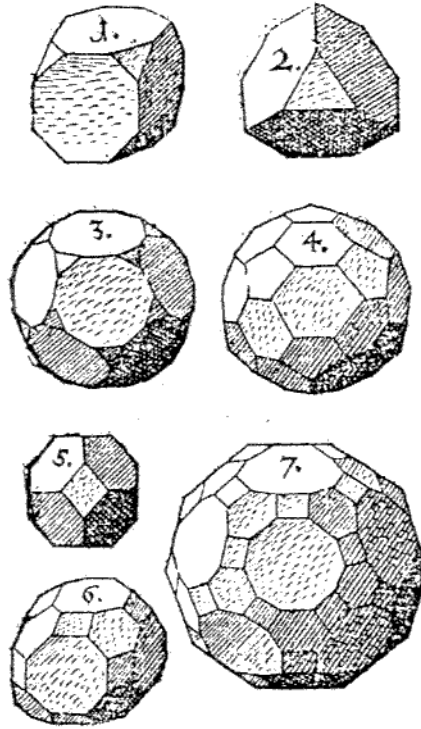
Aneinanderfügen ihrer Seitenflächen konstruiert werden, sondern vielmehr als räumliche Körper erzeugt werden, indem andere, besonders einfache Körper zum Schnitt gebracht werden, und zwar eben die vorher von Kepler beschriebenen vollkommensten Körper, also die 5 platonischen Körper, das Rhombendodekaeder und das Rhombentriakontaeder. So entsteht zum Beispiel das archimedische Polyeder $(3, 4, 3, 4)$, indem man in geeigneter Weise den Kubus und das Oktaeder zum Schnitt bringt, und deswegen nennt Kepler dieses Polyeder **Kuboktaeder**. Diese Auffassung bewährt sich für alle archimedischen Polyeder mit der Einschränkung, dass man im Fall von $(3, 3, 3, 3, 4)$ und $(3, 3, 3, 3, 5)$ nicht mit den genannten Polyedern auskommt, sondern zwei isoedrische mit 24 bzw. 60 Pentagonen zu Hilfe nehmen muss, welche als Symmetriegruppe die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien des Würfels bzw. des Dodekaeders haben. Diese Polyeder, das **Pentagonikositetraeder** und das **Pentagonhexakontaeder**, sind dual zu den archimedischen Polyedern $(3, 3, 3, 3, 4)$ und $(3, 3, 3, 3, 5)$. Insbesondere sind sie eigentlich nicht einfacher, und insofern bringt die Schnittkonstruktion, welche z.B. $(3, 3, 3, 3, 4)$ als Schnitt eines Hexaeders, eines Oktaeders und eines Pentagonikositetraeders darstellt, keinen Gewinn an Einfachheit. Kepler waren das Pentagonikositetraeder und das Pentagonhexakontaeder noch nicht bekannt, und dementsprechend bezeichnete er z.B. $(3, 3, 3, 3, 4)$ als “cubus simus”, was wohl durch “abgeplatteter” oder “abgestumpfter” Würfel zu übersetzen wäre, denn das lateinische simus – von griechisch $\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ – bedeutet soviel wie platt, plattnäsiger, stumpfnäsiger. Die übrigen Namen, die Kepler den archimedischen Polyedern gegeben hat, entsprechen der oben beschriebenen Erzeugungsweise. Sie sind glücklich gewählt und sind noch heute – in verschiedenen Übersetzungen – im Gebrauch. Das Unglück ist nur, dass bei der Übersetzung der lateinischen Wörter simus und truncus, also abgestumpft und gestutzt, durch andere ähnliche Worte ein heilloses Durcheinander entstanden ist. Ich gebe deswegen hier nur eine Liste von Keplers lateinischen Namen und die von mir gewählten Übersetzungen.

64 DE FIGURARUM HARMON:

que imparilateram rejicitur, per XXIII, cum duobus Octogonicis, planum locum implet: cum majoribus etiam superat 4 rectos; nec a surgit ad solidum angulum formandum. Ita transactum est cum Tetragono, cum duae sola debent esse planorum species.

Duo Pentagonici cum uno Hexagonico aut quocumq, alio unico rejectitium quid inchoant, per XXIII, quod supra etiam de Trigono & Tetragono cum binis Pentagonicis usurpavimus. Insuper cum uno Decagonico planitiam servant, nec cum illo aut majoribus a surgunt in soliditatem.

X. Truncum Icosidodecaedron.



Unus ergo Pentagonicus cum duobus Hexagonicis minus facit 4 rectis; & congruunt duodecim Pentagoni cum viginti Hexagonis in unum Triacontaedron, quod appello Truncum Icosidodecaedron. Formam habet signatam numero 4. Nec plura expectanda à Pentagono. Nam unus Pentagonus cum duobus Heptagonicis jam superat 4. rectos.

Hexagonicus cum duobus alijs implet planitiam, cum majoribus superat 4 rectos. Itaq, hic finis est mixtorum ex duabus speciebus.

Quod si trium specierum Plana concurrere possunt ad unum angulum solidum: Primum anguli duo plani, unus Tetragoni, alter Pentagoni superant 2 rectos; majores his, multo magis: tres vero Trigonomum trium, aequant 2 rectos: nequeunt igitur tres Trigonici admitti, ne summa omnium superet 4 rectos. Duo vero Trigonici cum uno Tetragono & uno Pentagonico vel pro eo Hexagonico, aut quocumque majori, rejiciuntur, per pr. XXIII, quia Trigonus imparilatera figurari debet Tetragono & Pentagono, vel pro eo Hexagono &c.

XI. Rhombicosidodecaedron.

Unus igitur Trigonicus cum duobus Tetragonis & uno Pentagonico, minus efficiunt 4 rectis, & congruunt 20 Trigoni cum 30 Tetragonis & 12 Pentagonis, in unum Hexacontaedron, quod appello Rhombicosidodecaedron, seu sextum Rhombum Icosidodecaedricum. Pingitur num. 11. fol. antecedentis

Unus Trigonicus, duo Tetragonici, cum uno Hexagonico, aequant rectos quatuor; cum uno majori, superant; nec ad solidum a surgunt. Mistantur igitur duos Tetragonicos.

Unus Trigonicus, unus Tetragonicus, & duo Pentagonici superant 4 rectos; multoq, magis si bini majores plani anguli admiscerentur. Desinit igitur misceri anguli plani quaterni ad formandum unum solidum; desinit ergo & Trigonus ingredi mixturam triplicem. Nam unus Trigonicus, unus Tetragonicus

Abbildung 1.60: Harmonice Mundi Buch 2, Proposition 28. Die ersten sieben Archimedischen Polyeder

62 DE FIGURARUM HARMON:

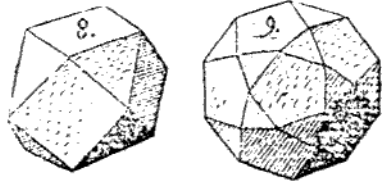
Cum enim miscantur in hoc gradu figura diversa, quare per propof. XXI. miscbuntur aut duarum aut trium specierum figura. Quod si duarum, tunc inter eas vel sunt Trigoni vel non sunt.

Igr ex Trigonis & Tetragonis fiunt solida tria, quibus quidem def. IX. competat. Nam illa rejicit formas hasce tres, in quibus solidum angulum claudunt, cum uno Tetragonico plano angulo, tam duo, quam tres plani Trigonici; aut cum duobus Tetragonis, unus Trigonici; quia in primo casu unus solus Tetragonus est, fitq. dimidium Octaedri; & anguli solidi sunt diversiformes: in secundo duo soli Tetragoni, in tertio duo soli Trigoni: qua p. X. sunt imperfecta congruentia. Restant ergo modi hi, in quibus angulum solidum claudunt 4 lani, Primum, quatuor Trigonici & unus Tetragonici. Sunt enim minores 4 rectis. Congruunt igitur sex Tetragoni & Triginta duo (id est 20 & 12.) Trigoni, & fit figura Triacontaëdrica, quod appello Cubum simum. Hic in schemate sequenti pictus est Numero 12.

091
I. Cubus
simus.

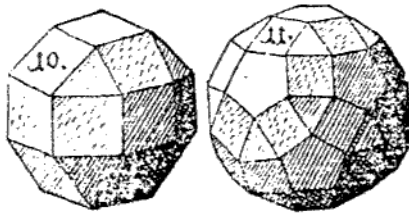
Quina enim Trigonici plani & unus Tetragonici superant quatuor rectos, cum debeant ad solidum claudendum esse minores quatuor rectis, per XVI. Sic etiam quatuor Trigonici & duo Tetragonici. Tres vero Trigonici & duo Tetragonici faciunt quatuor rectos.

II. Rh. Cub. octaedron.



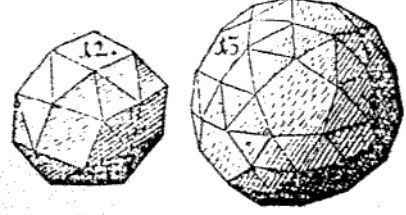
Secundo duo Trigonici & duo Tetragonici minus habent quatuor rectis; Hic igitur congruunt octo Trigoni & sex Tetragoni ad formandum unum Tetraëskadecaëdron, quod cuboctaedron appello. Pictum est hic numero octavo. Duo vero Trigonici cum tribus Tetragonis superant 4 rectos.

III. Rhombici Cuboctaedron.



Tertio unus Trigonici & tres Tetragonici minus habent 4 rectis. Hic ergo congruunt octo Triangula & octodecim (id est 12 & 6) quadrangula, ad unum Icosihexaedron, quod appello sectum Rhombi Cuboctaedricum: vel Rhombicuboctaedron. Pictus est hic numero 10.

IV. Dodecaedron simum



In his 12 tribus sunt Tetragoni juxta Trigonos: sequitur ut & Pentagonicos ijs seorsim associemus.

Quina, plani Trigonici juxta unum Pentagonicum non stant, quia neq. juxta minorem eo, Tetragonicum, stare poterant. Quatuor ergo Trigonici, cum uno Pentagonico, minus efficiunt 4 rectis, & congruunt octoginta (id est 20 & 60) Trigoni, cum duodecim Pentagonis, ad formandam Ennecontakedyhedron, quod appello Dodecaedron simum. Pingitur hic numero 13. Et in hoc ordine simorum, Icosaedron possit esse tertium, quod est quasi Tetraedron simum.

Tres

Abbildung 1.61: Harmonice Mundi Buch 2, Proposition 28. Die letzten 6 Archimedischen Polyeder

(3, 8, 8)	cubus truncus	<i>gestutztes Hexaeder</i>
(3, 6, 6)	tetraedron truncum	<i>gestutztes Tetraeder</i>
(3, 10, 10)	dodecaedron truncum	<i>gestutztes Dodekaeder</i>
(5, 6, 6)	icosiedron truncum	<i>gestutztes Ikosaeder</i>
(4, 6, 6)	octaedron truncum	<i>gestutztes (gest.) Oktaeder</i>
(4, 6, 8)	cuboctaedron truncum	<i>rhombisch gest. Kuboktaeder</i>
(4, 6, 10)	icosidodecaedron truncum	<i>rhombisch gest. Ikosidodekaeder</i>
(3, 4, 3, 4)	cuboctaedron	<i>Kuboktaeder</i>
(3, 5, 3, 5)	icosidodecaedron	<i>Ikosidodekaeder</i>
(3, 4, 4, 4)	rhombicuboctaedron	<i>Rhombikuboktaeder</i>
(3, 4, 5, 4)	rhombicosidodecaedron	<i>Rhombikosidodekaeder</i>
(3, 3, 3, 3, 4)	cubus simus	<i>abgestumpfter Würfel</i>
(3, 3, 3, 3, 5)	dodecaedron simum	<i>abgestumpftes Dodekaeder</i>

Kepler hat die archimedischen Flächenteilungen und die archimedischen Polyeder nicht nur – durch Betrachtung der Eckenfiguren – abgeleitet, sondern sie auch durch den Text begleitende Figurentafeln bildlich dargestellt. Die Anordnung der Figuren entspricht jedoch nicht der Reihenfolge ihrer Herleitung. Vielmehr hat Kepler in subtiler Weise die Möglichkeiten der Nummerierung der Figuren, ihrer Gruppierung in der Tafelfläche und der Anordnung der Tafeln im Text genutzt, um seine Einsichten in die kombinatorisch-geometrischen Beziehungen zwischen den Figuren auszudrücken. Es lohnt sich, diese Figuren zu betrachten, die Seiten 62 und 64 aus der Originalausgabe von *Harmonices mundi libri V*. Die Figuren sind auf zwei Tafeln verteilt. Die eine zeigt die Figuren 1-7, die zweite 8-13. Die Figuren 1-7 zerfallen in zwei Gruppen. Die Figuren 1-5 entstehen durch Stutzen eines platonischen Polyeders mittels eines geeigneten dualen Polyeders, Figur 6 und 7 entstehen durch Stutzen von Kuboktaeder und Ikosidodekaeder mittels Rhombendodekaeder und Rhombentriakontaeder. Die sechs Figuren 8-13 zerfallen in drei Paare. Das erste Paar, Figur 8 und 9, besteht aus Kuboktaeder und Ikosidodekaeder. Diese entstehen durch den Schnitt dualer platonischer Körper mit gleichen Kantenmittelpunkten. Das zweite Paar, Figur 10 und 11, besteht aus Rhombikuboktaeder und Rhombikosidode-

kaeder. Hier werden in bestimmter Weise Hexaeder, Oktaeder und Rhombendodekaeder bzw. Dodekaeder, Ikosaeder und Rhombentriakontaeder zum Schnitt gebracht. Das letzte Paar schließlich, Figur 12 und 13, besteht aus dem cubus simus und dem dodecaedron simum. Ich möchte nicht auf alle Feinheiten in der Anordnung der Figuren eingehen, aber ich möchte sehr nachdrücklich darauf hinweisen, dass es sich bei dieser in der Anordnung und Benennung der Figuren zum Ausdruck kommenden Betrachtungsweise keineswegs um einen antiquierten Standpunkt handelt, welcher heute durch das moderne gruppentheoretische Symmetriekonzept überholt und abgelöst wäre, so dass also ein moderner Mathematiker diese Figuren ganz anders anordnen müsste, nämlich in 4 Gruppen entsprechend ihren Symmetriegruppen O, I, T^*, O^*, I^* . Um das zu beweisen, füge ich hier eine Tabelle ein, deren Bedeutung später noch in allen Einzelheiten erklärt wird. Sie zeigt jeweils in der linken Spalte ein halbreguläres Polyeder und in der rechten Spalte das dazu duale Polyeder. Die mittlere Spalte zeigt das Eckensymbol und das **Delaney-Symbol**. Dieses von *A. Dress* eingeführte Symbol wird später eine zentrale Rolle in der Klassifikation aller isogonalen bzw. aller isoedrischen konvexen Polyeder spielen. Es kodiert für diese Polyeder gleichzeitig ihren **kombinatorischen Typ** und ihre **Symmetriegruppe**.²³ Vergleicht man Keplers Gruppierung der 13 Figuren mit der entsprechenden Gruppierung der Delaney-Symbole nach deren graphischer Gestalt, so findet man eine vollkommene Übereinstimmung.

Wie wir später im einzelnen ausführen werden, bilden nach Vorgabe einer Gruppe von Symmetrien die isogonalen konvexen Polyeder eines bestimmten kombinatorischen Typs ein Stratum der Dimension 0, 1 oder 2, und entsprechendes gilt für die dazu dualen isoedrischen Polyeder. Keplers Numerierung der 13 archimedischen Polyeder entspricht innerhalb der beiden Gruppen 1-7 und 8-13 einer Anordnung nach aufsteigender Dimension: Die beiden ersten Figuren der zweiten Gruppe, Kuboktaeder und Ikosidodekaeder, sind

²³Zur Definition des Delaney-Symbols siehe S. 610 (Hrsg.).

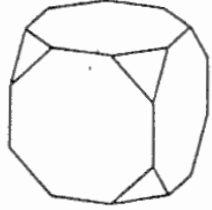
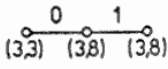
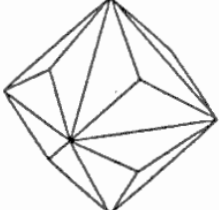
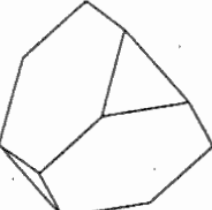
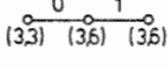
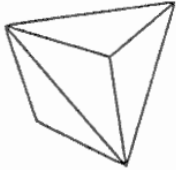
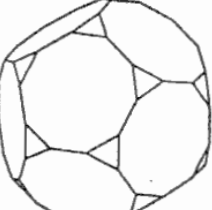
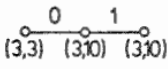

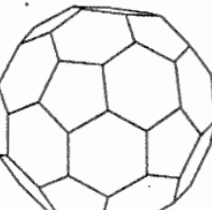
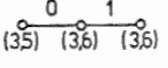
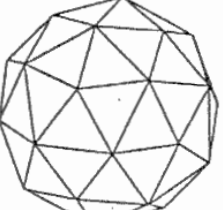
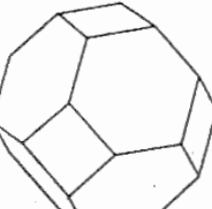
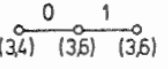
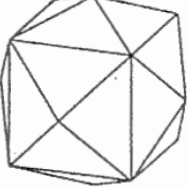
		
gestutztes Hexaeder	(3,8,8)	Triakisoktaeder
		
gestutztes Tetraeder	(3,6,6)	Triakistetraeder
		
gestutztes Dodekaeder	(3,10,10)	Triakisikosaeder
		
gestutztes Ikosaeder	(5,6,6)	Pentakisdodekaeder
		
gestutztes Oktaeder	(4,6,6)	Tetrakishexaeder

Abbildung 1.62: Halbreguläre Polyeder (links) mit Eckensymbolen und ihre dualen Polyeder (rechts) mit Delaney-Symbolen (Mitte)

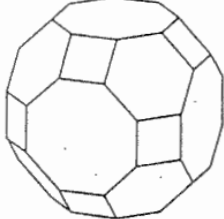
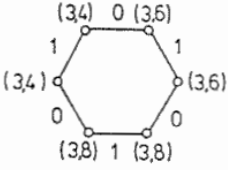
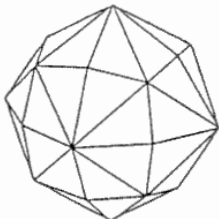

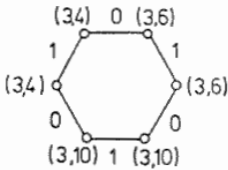
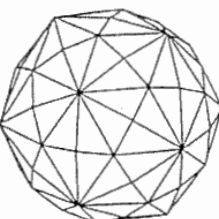
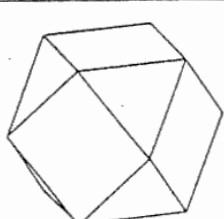
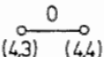
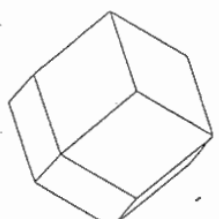
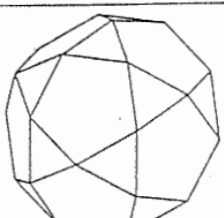
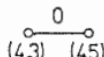
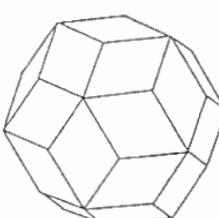
		
rhombisch gestutztes Kuboktaeder	(4,6,8)	Hexakisoktaeder
		
rhombisch gestutztes Ikosidodekaeder	(4,6,10)	Hexakisikosaeder
		
Kuboktaeder	(3,4,3,4)	Rhombendodekaeder
		
Ikosidodekaeder	(3,5,3,5)	Rhombentriakontaeder

Abbildung 1.63: Halbreguläre Polyeder (links) mit Eckensymbolen und ihre dualen Polyeder (rechts) mit Delaney-Symbolen (Mitte)

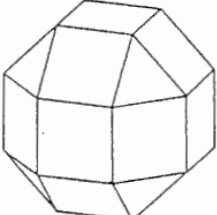
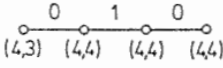
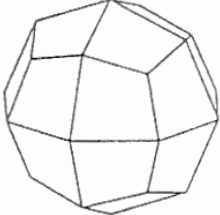
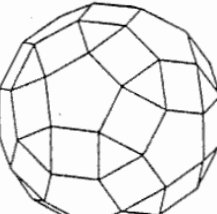
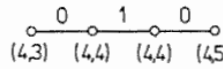
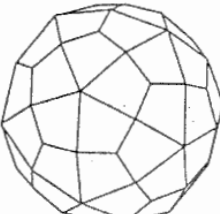
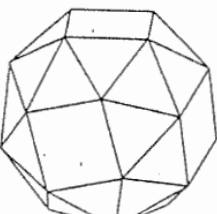
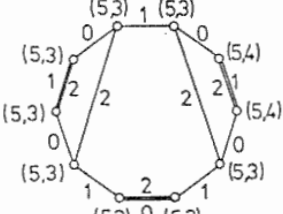
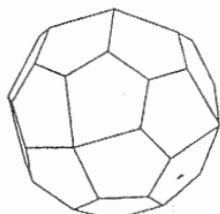
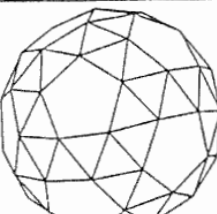
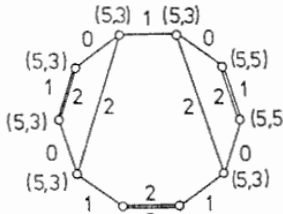
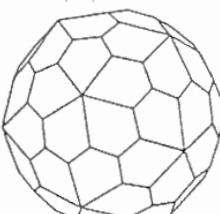
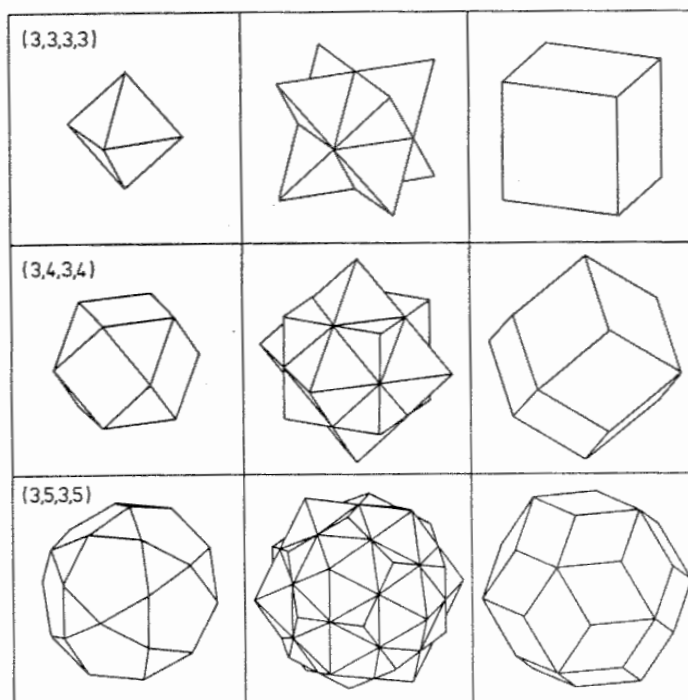
		
Rhombikuboktaeder	(3,4,4,4)	Deltoidikositetraeder
		
Rhombikosidodekaeder	(3,4,5,4)	Deltoidhexekontaeder
		
abgestumpfter Würfel	(3,3,3,3,4)	Pentagonikositetraeder
		
abgestumpftes Dodekaeder	(3,3,3,3,5)	Pentagonhexekontaeder

Abbildung 1.64: Halbreguläre Polyeder (links) mit Eckensymbolen und ihre dualen Polyeder (rechts) mit Delaney-Symbolen (Mitte)

0-dimensionale Strata. Die jeweils letzten zwei, also die Figuren 6, 7, 12, 13, gehören zu 2-dimensionalen Strata, und alle übrigen zu 1-dimensionalen.

Von besonderem Interesse sind offensichtlich aus heutiger Sicht diejenigen isogonalen bzw. isoedrischen Polyeder, die ein 0-dimensionales Stratum bilden, bei denen das Polyeder bei gegebenem Um- oder Inkugelradius also schon durch seinen kombinatorischen Typ bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist. Diese Polyeder haben offensichtlich mehr als die anderen den Charakter des Einzigartigen, des Vollkommenen, das nicht geändert werden kann, ohne dass die Gestalt zerstört wird. Geben wir als Gruppe von Symmetrien die Symmetriegruppen T^* , O^* , I^* der platonischen Körper oder die in ihnen enthaltenen Gruppen der orientierungserhaltenden Isometrien T , O , I vor, dann werden die 0-dimensionalen Strata bei den isogonalen Polyedern von den 5 platonischen Körpern sowie von **Kuboktaeder** und **Ikosidodekaeder** gebildet, und bei den isoedrischen Polyedern dual dazu von den 5 platonischen Körpern sowie **Rhombendodekaeder** und **Rhombentriakontaeder**.

Genau diesen beiden von ihm selbst entdeckten Polyedern weist auch Kepler eine ganz besondere Rolle zu, und er stellt sie auf eine Ebene mit den vollkommensten, den platonischen Körpern. Von ihnen soll jetzt die Rede sein. Ich folge dabei der Darstellung von Coxeter in seinem Buch "Regular Polytopes" [89]. Das Kuboktaeder und Ikosidodekaeder entstehen beide, indem man ein platonisches Polyeder und das dazu duale Polyeder mit den gleichen Kantenmittelpunkten zum Schnitt bringt. Der Schnitt von Kubus und Oktaeder gibt das Kuboktaeder, der Schnitt von Ikosaeder und Dodekaeder das Ikosidodekaeder. Dual dazu ergibt die Vereinigung der Eckenmengen der beiden Polyeder eines solchen Paares die Eckenmenge des Rhombendodekaeders bzw. des Rhombentriakontaeders. Da – wie wir später beweisen werden – jedes konvexe Polyeder die konvexe Hülle seiner Eckpunkte ist, kann man also auch sagen: Rhombendodekaeder und Rhombentriakontaeder sind die konvexen Hüllen von Paaren dualer platonischer Körper. Natürlich kann man diese Konstruktionen auch für ein Paar von dualen Tetraedern ausführen. Als Durchschnitt erhält man ein Oktaeder, als konvexe Hülle dual dazu ein Hexaeder. Die Zeichnung illustriert diese Beziehungen.



Die beiden auf diese Weise durch Schnitt von zwei dualen regulären Polyedern neu entstehenden Polyeder, das Kuboktaeder und das Ikosidodekaeder bezeichnet man auch als quasiregulär. Wir wollen für diese beiden Polyeder die Kanten bestimmen. Das quasireguläre Polyeder sei der Durchschnitt $P \cap Q$ der dualen Polyeder P und Q . Die Flächen von P seien p -Ecke, die von Q seien q -Ecke. Für das Kuboktaeder gilt $\{p, q\} = \{3, 4\}$, für das Ikosidodekaeder $\{p, q\} = \{3, 5\}$. Die Kanten von $P \cap Q$ entstehen als Durchschnitt eines p -Ecks von P und eines q -Ecks von Q . Dieser Durchschnitt ist sowohl die Verbindungsstrecke zweier benachbarter Kantenmittelpunkte in dem p -Eck, als auch in dem q -Eck. Bezeichnet man die Kantenlängen des p -Ecks und des q -Ecks mit a bzw. b , dann ist also die Länge der Kanten von $P \cap Q$

$$a \cos \frac{\pi}{p} = b \cos \frac{\pi}{q} .$$

Nun betrachten wir die dualen Polyeder, die konvexen Hüllen von $P \cup Q$.

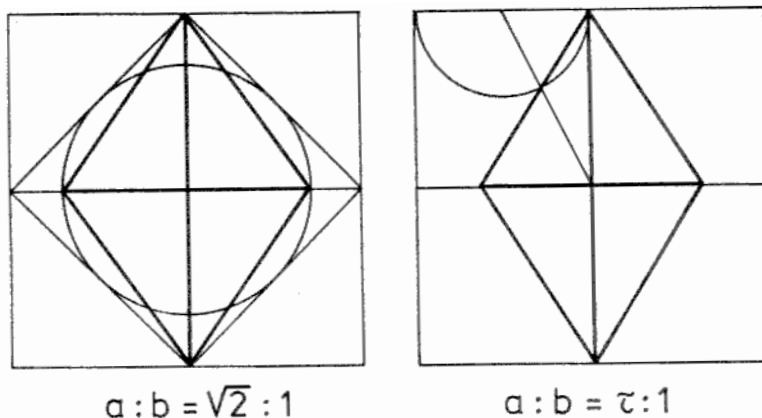
Diese drei Polyeder, das Hexaeder, das Rhombendodekaeder und Rhombentriakontaeder, haben eine wichtige Eigenschaft gemeinsam: Ihre Flächen sind Rhomben. Die Gestalt dieser Rhomben wird durch das Verhältnis ihrer Diagonalen bestimmt. Die Diagonalen sind aber offensichtlich gerade die Kanten der Polyeder P und Q . Ihr Verhältnis ist daher die Zahl

$$a : b = \cos \frac{\pi}{q} : \cos \frac{\pi}{p} .$$

Damit ergeben sich die folgenden Verhältnisse der Diagonalen der Rhomben:

(p, q)	$a : b$
(3, 3)	1 : 1
(3, 4)	$\sqrt{2} : 1$
(3, 5)	$\tau : 1$

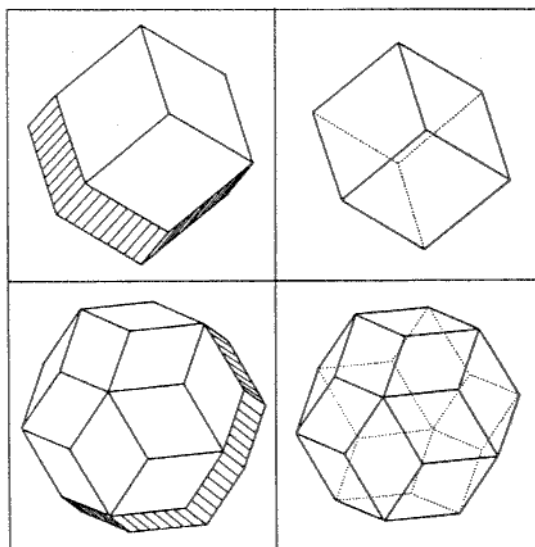
Insbesondere stehen die Diagonalen beim Rhombentriakontaeder im Verhältnis des goldenen Schnitts!



Eine der vielen interessanten Eigenschaften von Rhombendodekaeder und Rhombentriakontaeder hat Kepler in seiner Figurentafel sehr gut sichtbar dargestellt. Wählt man für eines dieser Polyeder eine Kantenrichtung aus, dann bilden die Rhomben, die eine Kante mit dieser Richtung haben, eine ringförmige **Zone**. Der gesamte Komplex aller Rhomben des Polyeders zerfällt in diese Zone und zwei an deren zwei Rändern angrenzende scha-

lenförmige Kappen aus jeweils 3 bzw. 10 Rhomben. Entsprechend zerfällt das erste der drei oben durch konvexe Hüllenbildung aus Paaren von platonischen Körpern erzeugten Polyeder, das reguläre Hexaeder, in eine Zone aus 4 Quadraten und 2 Kappen aus je einem Quadrat. Quadrate sind ja spezielle Rhomben.

Offensichtlich sind die beiden Ränder der ringförmigen Zone durch Parallelverschiebung in Kantenrichtung ineinander überführbar. Daher sind die Ränder der beiden Kappen kongruent, und man kann diese längs ihrer Ränder zusammensetzen. Man erhält so noch zwei weitere von Rhomben begrenzte Polyeder: Aus dem Rhombendodekaeder entsteht ein konvexes Polyeder, das von 6 Rhomben begrenzt ist, und aus dem Rhombendodekaeder entsteht ein konvexes Polyeder, das von 20 Rhomben begrenzt wird.

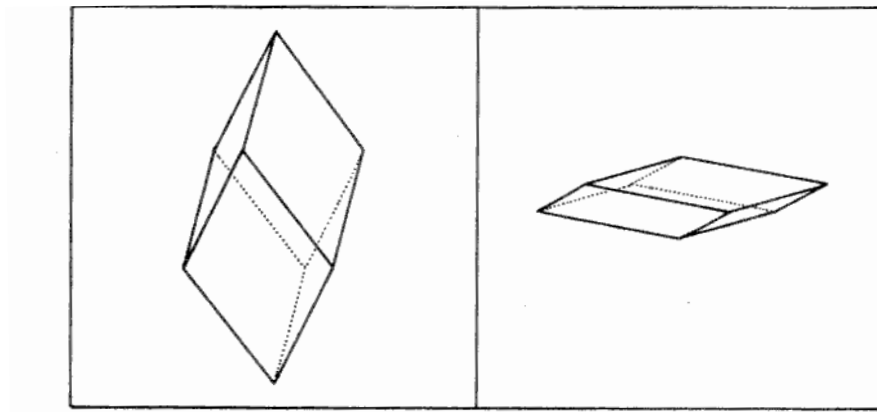


Das gerade konstruierte, von 6 Rhomben begrenzte Polyeder hat schon Kepler in Betracht gezogen, aber dann wieder außer acht gelassen, weil die letzte Bedingung seiner Definition VIII nicht erfüllt war. Er nannte dies Polyeder rhombisches Hexaeder. Die von 6 Rhomben begrenzten konvexen Polyeder spielen eine wichtige Rolle in der geometrischen Kristallographie. Im Anschluss an die Terminologie der Kristallographen bezeichnen wir sie als **Rhomboeder**.

Das Polyeder mit zwanzig Rhombenflächen wurde um 1885 von dem großen russischen Kristallographen E.S. Fedorov entdeckt (“Načala učenija o figurach”[132], Auszüge in E.S. Fedorov: “Elemente der Gestaltenlehre”[134]). Wir wollen dieses Polyeder **Rhombenikosaeder** nennen.

Rhomben und die dazu dualen Rechtecke sind die einfachsten ebenen Vierecke. Man braucht mindestens 6 Rhomben, um ein konvexes Polyeder zu konstruieren, dessen Seitenflächen Rhomben sind. Man überlegt sich leicht, dass ein solches Polyeder notwendigerweise die kombinatorische Struktur eines Würfels hat. Insbesondere hat es 8 Ecken, und an jeder Ecke treffen 3 Rhomben zusammen. Wenn die Rhomben Quadrate sind, muss das Polyeder ein Würfel sein, ein reguläres Hexaeder. Wenn die Rhomben keine Quadrate sind, haben sie zwei spitze Winkel $0 < \beta < 90^\circ$ und zwei stumpfe Winkel $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ wobei natürlich $\beta + \gamma = 180^\circ$. Man überlegt sich leicht, dass es dann stets genau zwei Punkte gibt, in denen drei gleiche Winkel zusammentreffen. Diese Punkte liegen symmetrisch zum Schwerpunkt des Polyeders und es treffen in beiden Punkten jeweils nur spitze oder nur stumpfe Winkel zusammen. Im ersten Fall nennt man das Polyeder ein **spitzes Rhomboeder**, im zweiten Fall ein **stumpfes Rhomboeder**. Den Winkel an diesen beiden Polen wollen wir mit α bezeichnen, also $\alpha = \beta$ für spitze und $\alpha = \gamma$ für stumpfe Rhomboeder. Durch α ist das Rhomboeder bis auf Ähnlichkeit vollständig bestimmt. Wegen $3\alpha < 360^\circ$ gibt es stumpfe Rhomboeder nur für $60^\circ < \beta < 90^\circ$. Also gibt es zu einem gegebenen Rhombus nur ein Rhomboeder mit dazu kongruenten Seitenflächen, wenn $0 < \beta \leq 60^\circ$, und dies ist ein spitzes Rhomboeder. Für $60 < \beta < 90^\circ$ gibt es zwei Rhomboeder, ein spitzes und ein stumpfes. Und für $\beta = 90^\circ$ gibt es wieder nur eins, das reguläre Hexaeder. Als Beispiel zeigen wir in orthogonaler Parallelprojektion Bilder der beiden Rhomboeder für den Rhombus mit dem Achsenverhältnis $\tau : 1$, also $\beta = 2 \tan^{-1} \tau^{-1} \approx 63,43^\circ$ und $\gamma = 2 \tan^{-1} \tau \approx 116,57^\circ$. Das stumpfe Rhomboeder ist in diesem Fall sehr flach. Um beide Pole sichtbar zu machen, wurde die Projektionsrichtung senkrecht zu der dreizähligen Symmetrieachse durch die beiden Pole

gewählt. Die Volumina des spitzen und des stumpfen Rhomboeders verhalten sich wie $\tau^2 : 1$. Ich bezeichne diese beiden durch den goldenen Schnitt definierten Rhomboeder als **Rhomboeder**. Wir werden sehen, dass diese beiden Rhomboeder eine wichtige Rolle bei der geometrischen Beschreibung der erst vor wenigen Jahren entdeckten Quasikristalle spielen (Abbildungen 1.65 bis 1.69).



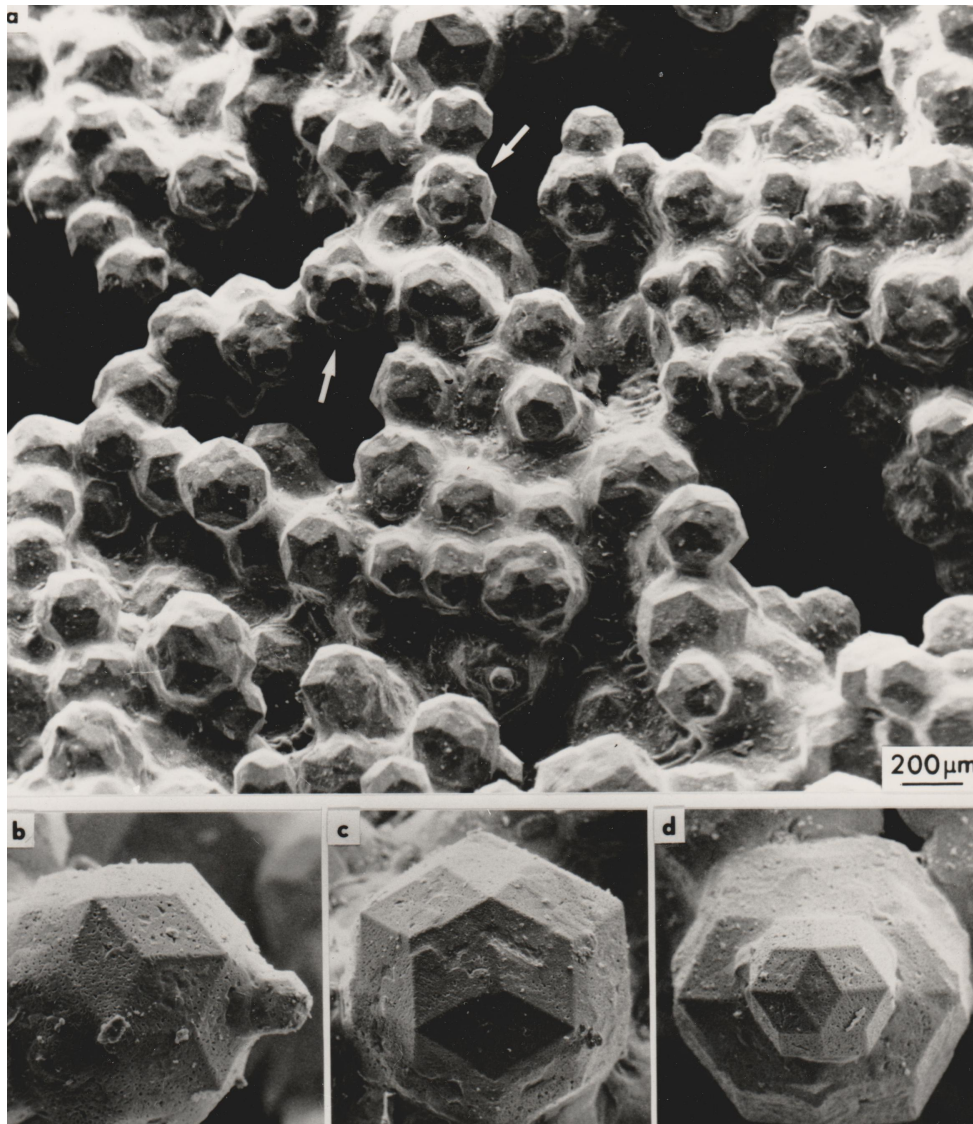


Abbildung 1.65: Quasikristalle der Legierung Al_6CuLi_3 , ikosaedrische T2-Phase.

Oben: Rhombentriakontaeder und komplexe Aggregate, (Details der mit Pfeilen markierten Aggregate nächste Seite). Unten: Rhombentriakontaeder.

Bilder von J.M.Lang, M. Audier, B. Dubost und P. Sainfort.

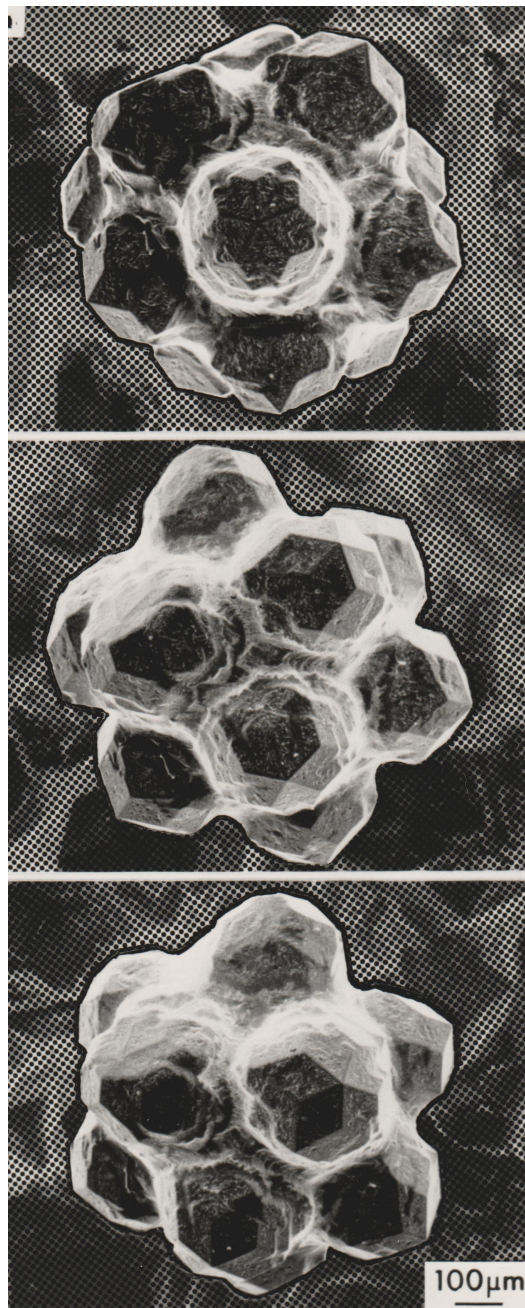


Abbildung 1.66: Quasikristalle der $T2 - Al_6CuLi_3$ -Phase. Die Aggregate können durch Anfügen von 12 Rhombentriakontaedern an einen Stern aus 20 spitzen goldenen Rhomboedern aufgebaut werden. Modelle dazu zeigt die folgende Seite. Bilder von J.M. Lang, M. Audier, B. Dubost und P. Sainfort.

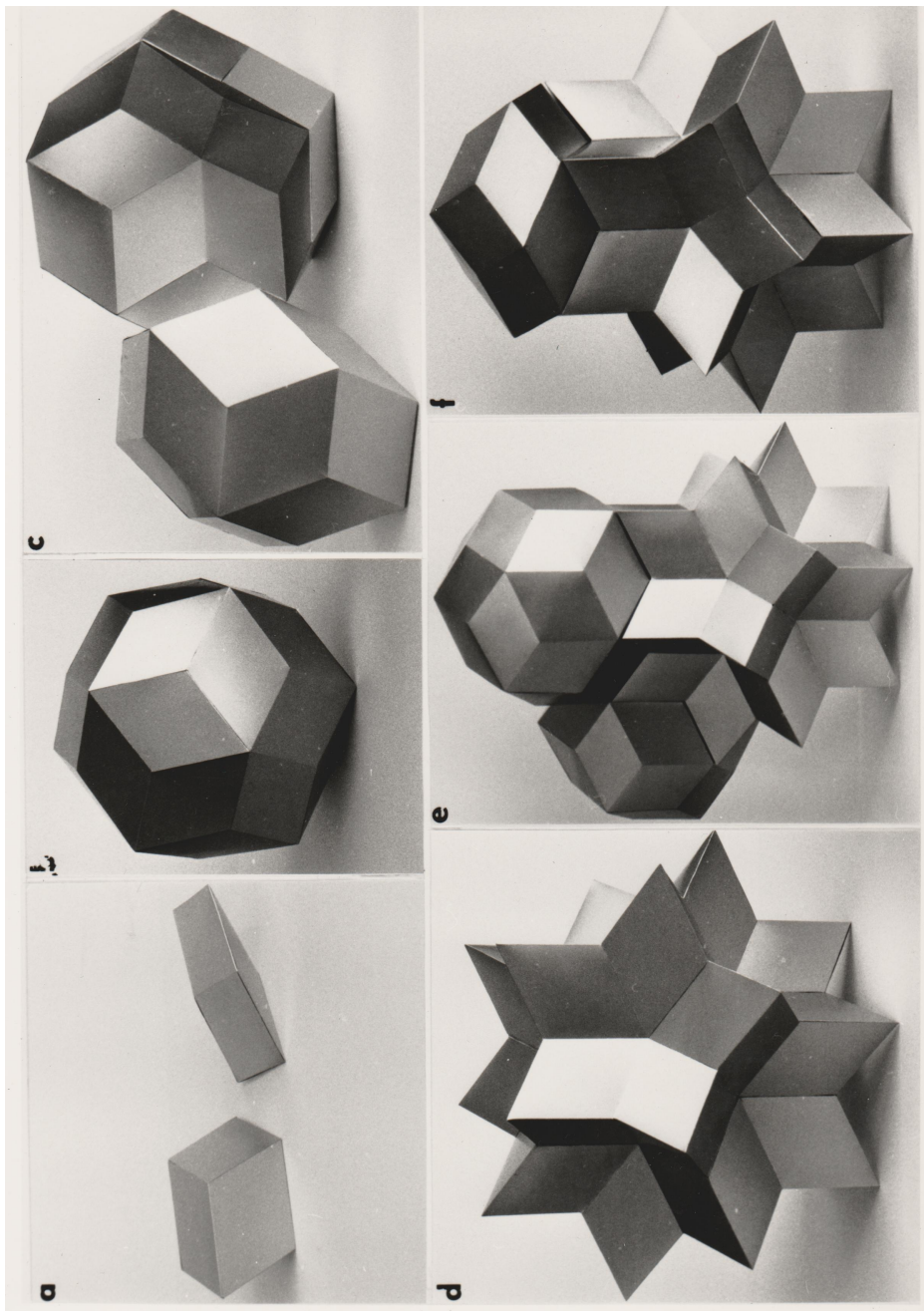


Abbildung 1.67: Modelle zur Morphologie von Quasikristallen: a) Spitzes und stumpfes goldenes Rhomboeder, b) Rhombentriakontaeder, c) Rhombenikosaeder, d) Stern aus 20 spitzen goldenen Rhomboedern, e) Anfügen von Rhombentriakontaedern an den Stern, f) Anfügen von Rhombenikosaedern an den Stern. Bilder von J.M. Lang, M. Audier, B. Dubost und M. Sainfort.

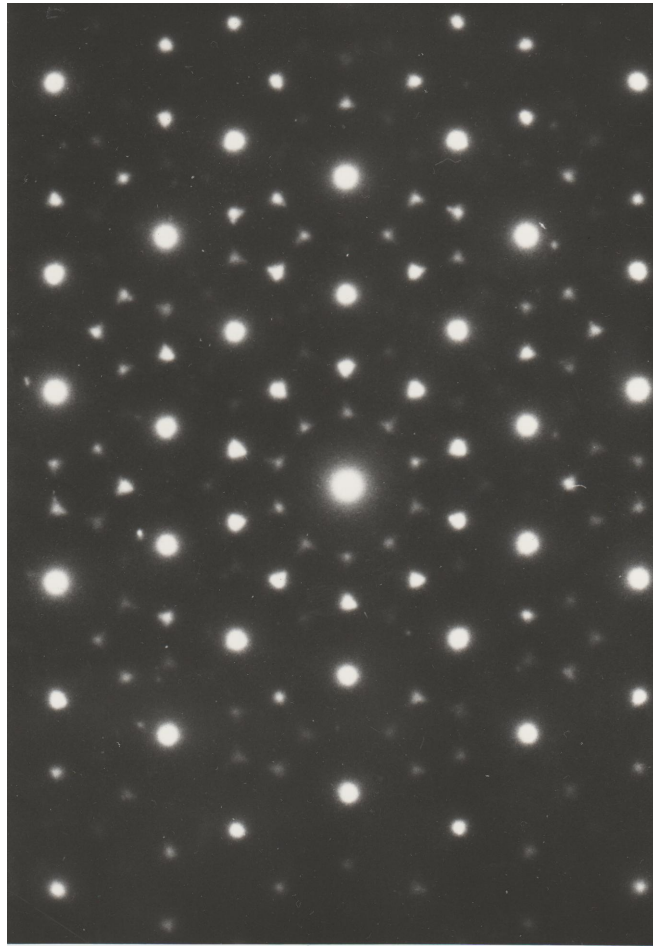


Abbildung 1.68: Elektronenbeugungsdiagramm eines Quasikristalls (Legierung Al 14 at% Mn) entlang einer 5-zähligen Ikosaederachse. Reflexe in einer Hierarchie regulärer 5-Ecken angeordnet. Das Diagramm hat eine 10-zählige Drehsymmetrie. Bild von K. Urban.

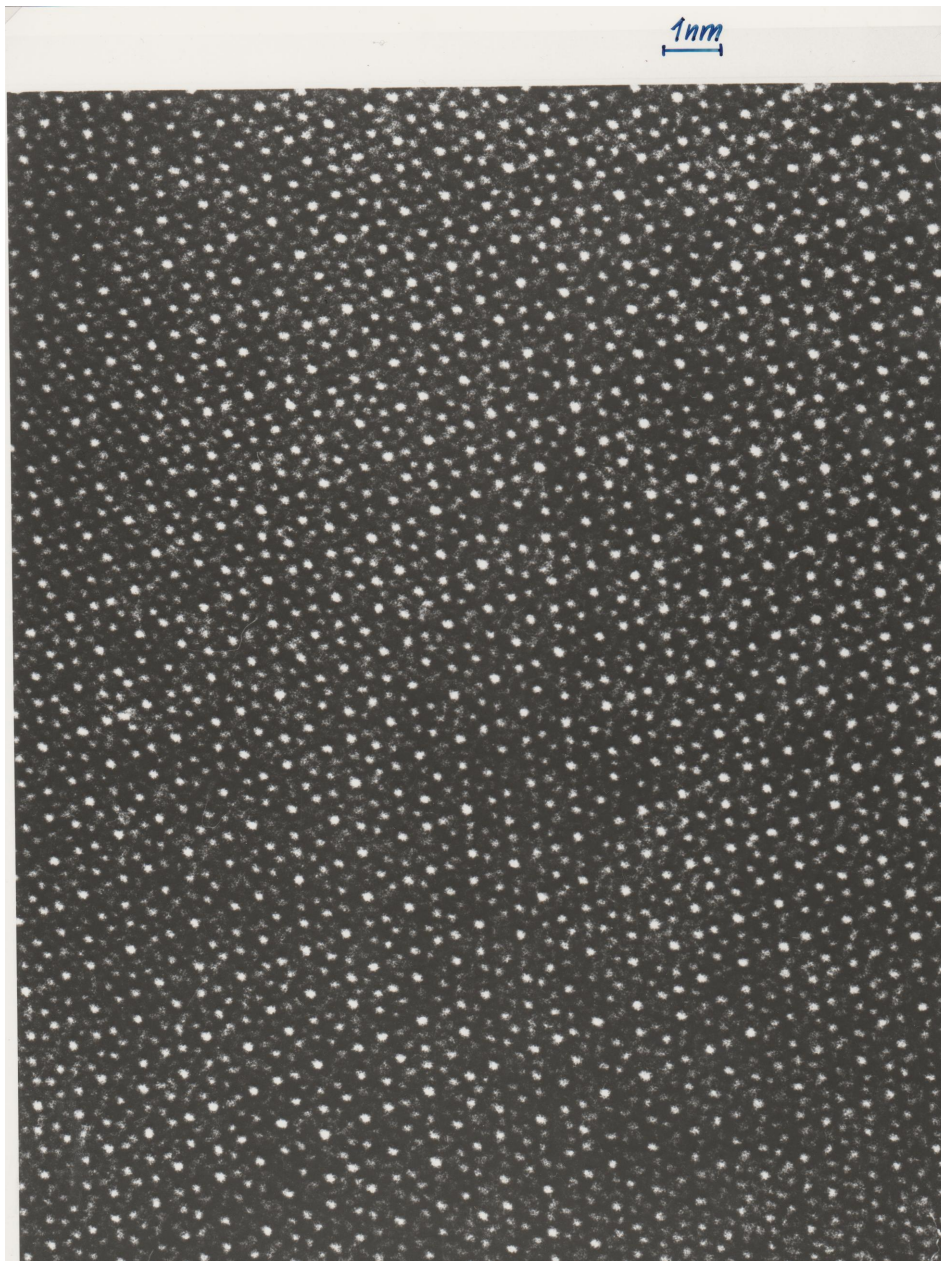


Abbildung 1.69: Hochauflösende elektronenmikroskopische Strukturabbildung eines Quasikristalls: (Legierung Al mit 14at% Mn) entlang der 5-zähligen Ikosaederachse. Bild von K. Urban.

Für die klassische geometrische Kristallographie hingegen sind drei andere Rhomboeder wichtig und spielen dort eine ausgezeichnete Rolle, und zwar diejenigen, deren Winkel α die Werte 60° , 90° und $109,47^\circ = \arccos(-1/3)$ hat. Hier ist eine kleine Tabelle der zugehörigen Achsenverhältnisse $\tan(\alpha/2)$ der Rhomben:

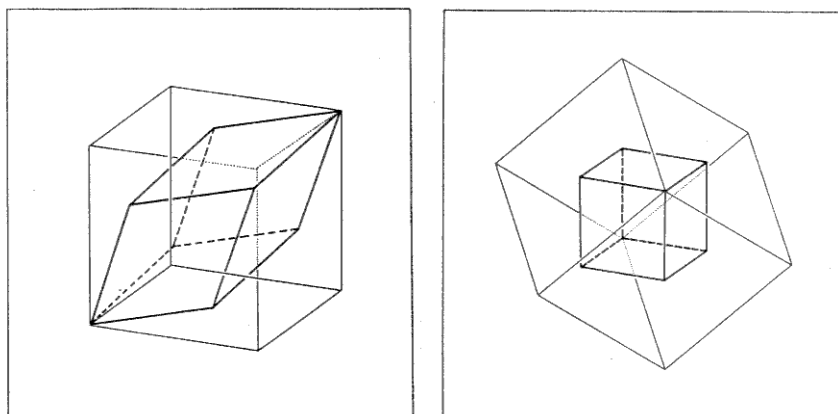
α	$\cos \alpha$	$\tan \alpha/2$
60	$1/2$	$1 : \sqrt{3}$
90	0	$1 : 1$
$109.47^\circ \dots$	$-1/3$	$\sqrt{2} : 1$

Diese Rhomboeder stehen zueinander in engen Beziehungen, die man mit Hilfe der folgenden Konstruktion beschreiben kann. Es sei R ein Rhomboeder mit dem Winkel α . Dann bilden die beiden Pole von R zusammen mit den 6 Seitenmittelpunkten die Eckpunkte eines neuen Rhomboeders R' mit dem Winkel α' , wobei zwischen $\cos \alpha$ und $\cos \alpha'$ die folgende Relation besteht:

$$\cos \alpha' = (1 + 3 \cos \alpha) / (2 + 2 \cos \alpha) .$$

Aus dem Rhomboeder mit $\alpha = 109.479^\circ \dots$ entsteht so dasjenige mit 90° , und aus diesem entsteht das mit 60° .

Wir sehen also, dass die Rhomboeder, also die konvexen Polyeder, deren Seiten kongruente Rhomben in minimal möglicher Anzahl sind, bis auf Ähnlichkeit eine einparametrische Familie bilden, die durch den kontinuierlichen reellen Parameter α parametrisiert wird, $0 < \alpha < 120^\circ$.



Wir fragen nun: Was für konvexe Polyeder gibt es, deren Seiten kongruente Rhomben in höherer Anzahl sind? Einige Beispiele kennen wir schon: Keplers Rhombendodekaeder und Rhombentriakontaeder und Fedorovs Rhombenikosaeder. Sind dies vielleicht schon alle? Um die Antwort zu finden, wollen wir systematisch vorgehen. Die Ansätze dazu stammen von E.S. Fedorov aus der schon zitierten Arbeit [134] und von H.S.M. Coxeter und P.S. Donchian [91] (siehe auch [89]). Das endgültige Ergebnis fand S. Bilinski im Jahre 1960 [24].

Ausgangspunkt ist der Begriff der Zone, der bei Kepler schon angedeutet ist. Er wurde von dem deutschen Kristallographen Christian Samuel Weiss als wichtiger Begriff bei der morphologischen Beschreibung von Kristallen eingeführt und von dem Kristallographen E.S. Fedorov zum Grundbegriff bei der Untersuchung einer wichtigen Klasse von Polyedern gemacht, die er Zonoeder nannte. Wir führen hiervon nur einige einfache Definitionen und Tatsachen an. Sie sind anschaulich klar, und darum dürfen wir die Beweise bis zur systematischen Entwicklung der Theorie der konvexen Polyeder verschieben.

P sei ein konvexes Polyeder. Unter einer **Zone** von P verstehe ich einen Komplex Z von Flächen und von zueinander parallelen Kanten von P welche so miteinander inzidieren wie die Kanten und Ecken eines konvexen ebenen n -Ecks. Die Zone besteht also aus n parallelen Kanten und aus n Flächen, und bei geeigneter zyklischer Anordnung inzidieren je zwei zyklisch aufeinanderfolgende Flächen mit einer der Kanten. Die Vereinigungsmenge der Flächen der Zone bezeichne ich mit $\partial_Z^{\circ}P$ und gestatte mir, diesen Teil des Randes ∂P von P ebenfalls eine "Zone" von P zu nennen. Eine solche Zone ist homöomorph zu einer Zylinderwand $S^1 \times [0, 1]$. Der Rest des Randes von P , genauer: die Vereinigung der Flächen, welche nicht zu der Zone gehören, zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten, die beide homöomorph zu einer Kreisscheibe sind und – topologisch – so an die Zone angeheftet sind wie Boden und Deckel eines Zylinders an die Wand. Wir nennen diese beiden Komponenten des Restrandes die zu der Zone gehörigen Kappen. Nach Wahl einer Richtung für die Kanten der Zone können wir eine positive Kappe ∂_Z^+P und eine negative Kappe ∂_Z^-P unterscheiden. Insgesamt haben wir also die

folgende Zerlegung des Randes von P in eine Zone und zwei Kapfen:

$$\partial P = \partial_Z^+ P \cup \partial_Z^\circ P \cup \partial_Z^- P .$$

Diese Zerlegung ist durch P und die Kantenrichtung eindeutig bestimmt, denn zu einer gegebenen Richtung gibt es höchstens eine Zone mit dieser Richtung, weil zu Z alle zu dieser Richtung parallelen Flächen und Kanten gehören.

Eine besonders einfache Situation liegt dann vor, wenn alle Flächen der Zone Parallelogramme sind. In diesem Fall sind alle Kanten der Zone parallel gleich lange Strecken. Nach kohärenter Wahl einer Orientierung ist ihnen also eindeutig ein Translationsvektor v zugeordnet, der die Anfangspunkte in die Endpunkte überführt. Ohne Auszeichnung einer Orientierung entspricht der Zone Z das Paar von Vektoren $\{\pm v\}$, und umgekehrt bestimmt dieses Paar die Zone. Die Translation v überführt das Randpolygon $\partial_Z^- P \cap \partial_Z^\circ P$ von $\partial_Z^- P$ in das Randpolygon $\partial_Z^+ P \cap \partial_Z^\circ P$ von $\partial_Z^+ P$. Daher kann man $v(\partial_Z^- P)$ mit $\partial_Z^+ P$ zusammensetzen. Man erhält so den Rand eines neuen konvexen Polyeders $P_v = P \cap v(P)$, also

$$\partial P_v = \partial_Z^+ P \cup v(\partial_Z^- P) .$$

Beispiele für diesen Prozess des Entfernens einer Zone des Randes haben wir schon gesehen: Aus dem Rhombendodekaeder entsteht so ein Rhomboeder und aus dem Rhombentriakontaeder das Rhombenikosaeder. Umgekehrt kann man aus dem Polyeder P_v und dem Vektor v das Polyeder P rekonstruieren. Denn wenn man das in P enthaltene "kleinere Polyeder" $P_v \subset P$ durch die 1-parametrische Familie von Translationen $-tv$ mit $0 \leq t \leq 1$ verschiebt, überstreicht es gerade das ganze Polyeder P , also:

$$P = P_v - [0, 1]v .$$

Wir beschränken uns jetzt auf die Betrachtung von konvexen Polyedern, deren Seiten sämtlich Parallelogramme sind. Unter einem "**Kantenvektor**" von P verstehen wir eine Translation, die einen Endpunkt einer Kante von P in den anderen Endpunkt dieser Kante verschiebt. Die Menge der

Kantenvektoren von P bezeichnen wir mit $K(P)$. Dies ist eine interessante Konfiguration von endlich vielen Vektoren. Sie ist "sternförmig" in dem Sinne, dass mit v auch $-v$ zu $K(P)$ gehört. Sind alle Kanten gleich lang, etwa o.B.d.A. Einheitsstrecken, dann ist $K(P)$ ein System von Punkten auf der Einheitskugel. Als Beispiele betrachten wir die drei Polyeder P die wir oben als konvexe Hülle von Paaren dualer platonischer Körper erzeugt haben: Hexaeder, Rhombendodekaeder und Rhombentriakontaeder. Dann entsprechen die Kantenrichtungen den 3 Diagonalen des Oktaeders bzw. den 4 Diagonalen des Hexaeders bzw. den 6 Diagonalen des Ikosaeders. $K(P)$ ist also in diesen drei Fällen die Eckenmenge eines regulären Polyeders. Das gibt uns die Hoffnung, auch andere hinreichend regelmäßige Polyeder P mit Hilfe von $K(P)$ bestimmen zu können.

P sei weiterhin ein konvexes Polyeder, dessen Seiten sämtlich Parallelogramme sind. Zu jedem $v \in K(P)$ gehört dann eine Zone Z_v von $K(P)$. Sie besteht aus allen zu v parallelen Kanten und Flächen von P . Auf diese Weise ergibt sich eine bijektive Korrespondenz zwischen den Zonen von P und den Paaren von Kantenvektoren $\{\pm v\}$. Das durch Entfernen der Zone Z_v entstehende Polyeder P_v hat wieder nur Parallelogramme als Seitenflächen, und zwischen den Kantenvektormengen $K(P)$ und $K(P_v)$ besteht die Beziehung

$$K(P_v) = K(P) - \{\pm v\} .$$

Damit erhält man wegen der obigen Rekonstruktion von P aus P_v und v durch Induktion die folgende Rekonstruktion von P aus $K(P)$. Man wähle in jedem Paar von Kantenvektoren $\{\pm v\}$ einen Repräsentanten aus. Wenn $K(P)$ aus p Paaren besteht, sind das p Vektoren v_1, \dots, v_p , und es gilt:

$$K(P) = \{\pm v_1, \dots, \pm v_p\} .$$

Es gibt dann einen Punkt $x \in P$, so dass gilt:

$$P = \{x\} - [0, 1]v_1 - \dots - [0, 1]v_p .$$

Das Polyeder P ist also kongruent zu der folgenden konvexen Menge

$P(v_1, \dots, v_p)$ von Vektoren:

$$P(v_1, \dots, v_p) := \sum_{i=1}^p [0, 1]v_i = \{t_1v_1 + \dots + t_pv_p \mid 0 \leq t_i \leq 1\} .$$

Diese Menge ist übrigens offensichtlich auch die konvexe Hülle der folgenden Menge von höchstens 2^p Vektoren:

$$\{t_1v_1 + \dots + t_pv_p \mid t_i = 0, 1\} .$$

Diese letztere Menge umfasst daher die Menge der Eckpunkte des Polyeders $P(v_1, \dots, v_p)$. Ihre Anzahl und die Zahl der Flächen wollen wir jetzt bestimmen.

Wir behaupten: Zu jedem ungeordneten Paar von verschiedenen Vektoren $\{v_i, v_j\}$ gibt es eine Parallelogrammfläche mit diesen Kantenvektoren. Wir beginnen den Beweis mit einer Vorbemerkung. Wir haben die Wahl der Repräsentanten v_1, \dots, v_p keiner Einschränkung unterworfen. Verschiedene Wahlen liefern verschiedene Polyeder $P(v_1, \dots, v_p)$, aber alle diese Polyeder gehen durch Translationen ineinander über. Daher können wir o.B.d.A. ein v_k durch $-v_k$ ersetzen, wenn uns das nützlich scheint. Ferner können wir o.B.d.A. annehmen, dass $i = 1$ und $j = 2$.

Nun sei E die Ebene, die von v_1 und v_2 aufgespannt wird. Falls noch weitere Vektoren v_k in E liegen, seien dies o.B.d.A. diejenigen mit $k \leq n$. Die übrigen v_k liegen dann in einem der beiden offenen Halbräume, in welche E den Raum zerlegt, und wegen der obigen Vorbemerkung können wir o.B.d.A. annehmen, dass sie alle in dem gleichen Halbraum liegen. Daraus folgt, dass die Ebene E eine sogenannte "Stützebene" des konvexen Polyeders $P(v_1, \dots, v_p)$ ist (siehe Abschnitt 13.7.1), und dass der Durchschnitt $E \cap P(v_1, \dots, v_p)$ eine Seite von $P(v_1, \dots, v_p)$ ist. Dieser Durchschnitt ist

$$E \cap P(v_1, \dots, v_p) = \sum_{i=1}^n [0, 1]v_i .$$

Dies ist ein konvexes n -Eck. Da P aber nach Voraussetzung nur Parallelogramme als Seiten hat, folgt $n = 2$, und $P(v_1, \dots, v_p)$ hat wie behauptet die Seite $[0, 1]v_1 + [0, 1]v_2$.

Als nächstes bemerken wir, dass $P(v_1, \dots, v_p)$ und daher auch P zentralsymmetrisch ist. Der Mittelpunkt von $P(v_1, \dots, v_p)$ ist offensichtlich $\frac{1}{2}(v_1 + \dots + v_p)$. Wegen dieser Symmetrie gehört zu jeder Seite von P eine gegenüberliegende parallele und kongruente Seite mit den gleichen Kantenvektoren. Eine weitere zu diesen beiden Seiten parallele Seite kann das konvexe Polyeder P aber nicht haben. Wir erhalten also als Ergebnis: Zu jedem Paar $\{v_1, v_j\}$ gibt es genau zwei Seiten von P mit diesen Kantenvektoren. Anders gesagt:

Ein konvexes Polyeder P , dessen Seitenflächen sämtlich Parallelogramme sind, und das $2p$ Kantenvektoren besitzt, hat p Zonen. Je zwei Zonen schneiden sich in genau zwei Parallelogrammen. Insbesondere ist die Zahl f der Flächen von P gleich

$$f = p(p - 1) .$$

Für $p = 3, 4, 5, 6$ ist $p(p - 1)$ gleich 6, 12, 20, 30, also gleich der Flächenzahl von Rhomboeder, Rhombendodekaeder, Rhombenikosaeder, und Rhombentriakontaeder. Für die Zahl k der Kanten ergibt sich dann natürlich $k = 2p(p - 1)$, weil alle Flächen vier Kanten haben und jede Kante in zwei Flächen liegt. Die Zahl e der Ecken kann man dann schließlich aus dem Eulerschen Polyedersatz $e - k + f = 2$ berechnen, und man erhält $e = 2 + p(p - 1)$.

Es ist nicht schwer, zu zeigen, dass es auch für jedes $p > 6$ konvexe Polyeder mit p Zonen gibt, die nur Parallelogramme als Seiten haben. Die Zahl ihrer Ecken, Kanten und Seiten ist dann – wie eben gezeigt – durch p bestimmt, nicht jedoch ihre kombinatorische Struktur. Da man die Zonen offenbar einzeln beliebig verlängern und verkürzen kann, ohne die kombinatorische Struktur zu ändern, bedeutet es in dieser Hinsicht auch keine Einschränkung, wenn man verlangt, dass alle Flächen Rhomben sind. Die Situation ändert sich jedoch grundlegend, wenn wir verlangen, dass diese Rhomben alle kongruent sind.

Es sei also jetzt P ein konvexes, monoedrisches, von Rhomben begrenztes Polyeder. Die Kantenlänge der Rhomben sei o.B.d.A. gleich Eins, so dass $K(P)$ eine Menge von Punkten auf der Einheitssphäre ist. $K(P)$ be-

steht aus p Punktepaaren $\{\pm v\}$, und für je zwei verschiedene Punktepaare $\{\pm v\}$, $\{\pm w\}$ ist der Absolutbetrag des Skalarproduktes $|\langle v, w \rangle|$ der gleiche. Natürlich ist $p \geq 3$, weil P ein 3-dimensionales Polyeder ist. Behauptung: Es gilt $p \leq 6$. Beweis: Es sei $v_1 \in K(P)$ beliebig fest gewählt. Wir bezeichnen v_1 als "Nordpol", $-v_1$ als "Südpol", den zugehörigen Durchmesser als "Polachse", den dazu senkrechten Großkreis als "Äquator" und die dazu parallelen Kreise auf der Sphäre als Breitenkreise. Wenn für die Skalarprodukte $\langle v, w \rangle = 0$ gilt, liegen die übrigen Punkte von $K(P)$ auf dem Äquator. Dann ist $p = 3$, und $K(P)$ besteht aus den Ecken eines Oktaeders. Andernfalls liegen sie auf zwei Breitenkreisen, dem "nördlichen" und "südlichen" Breitenkreis mit Abstand $|\langle v, w \rangle|$ von der Äquatorebene. Nun betrachten wir einen zweiten Punkt $v_2 \in K(P)$, der von v_1 verschieden ist. v_2 liege auf dem nördlichen Breitenkreis. Nun sind $\pm v_2$ auch wieder "Breitenkreise" senkrecht zur Achse durch v_2 zugeordnet, und alle Punkte von $K(P) - \{\pm v_2\}$ müssen auf diesen liegen. Also liegen alle Punkte von $K(P) - \{\pm v_1, \pm v_2\}$ auf dem Durchschnitt dieses zweiten Paares von parallelen Breitenkreisen mit dem ersten Paar von Breitenkreisen. Dieser Durchschnitt besteht aus höchstens 8 Punkten. Damit ist gezeigt: $p \leq 6$.

Wir haben nunmehr zu diskutieren, welche Konfigurationen $K(P)$ für $p = 3, 4, 5, 6$ in Frage kommen. Dabei bestimmen wir zunächst die maximalen Konfigurationen, d.h. diejenigen $K(P)$, die nicht in einem $K(P')$ echt enthalten sind. Die übrigen $K(P)$ entstehen dann durch Fortlassen von Punktepaaren aus den maximalen.

Unser Ergebnis wird das folgende sein:

$K(P)$ sei eine endliche, zentralsymmetrische Punktmenge auf der Einheitskugel, die aus p Punktepaaren $\{v\}$ besteht. Für verschiedene Punktepaare $\{\pm v\}$, $\{\pm w\}$ sei konstant $|\langle v, w \rangle| = c$. Dann ist $K(P)$ maximal genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $p = 3$ und $K(P)$ ist keine Teilmenge der Eckenmenge eines regulären Hexaeders oder Ikosaeders.
- (ii) $p = 4$ und $K(P)$ ist die Eckenmenge eines regulären Hexaeders.
- (iii) $p = 6$ und $K(P)$ ist die Eckenmenge eines regulären Ikosaeders.

Im Fall (i) ist $K(P)$ die Eckenmenge eines trigonalen Antiprismas und P ist ein Rhomboeder. Für $\frac{1}{2} \leq c \leq 1$ gibt es bis auf Isometrie nur eine Konfiguration. Sie entspricht dem spitzen Rhomboeder. Für $0 < c < \frac{1}{2}$ gibt es zwei Konfigurationen, eine für das stumpfe und eine für das spitze Rhomboeder. Für $c = 0$ gibt es nur eine: $K(P)$ ist Eckenmenge eines Oktaeders und P ein reguläres Hexaeder. Der Wert $c = \sqrt{1/5}$ ist völlig ausgeschlossen, denn genau die beiden Konfigurationen mit $c = \sqrt{1/5}$ sind Teilmengen der Eckenmenge eines Ikosaeders. Für $c = 1/3$ ist die Konfiguration ausgeschlossen, die dem stumpfen Rhomboeder entspricht, da genau diese Teilmenge der Eckenmenge eines regulären Hexaeders ist.

Im Fall (ii) ist P das Keplersche Rhombendodekaeder, und im Fall (iii) ist P das Keplersche Rhombentriakontaeder.

Die obige Bestimmung der maximalen $K(P)$ ergibt sich im wesentlichen aus der folgenden Aussage:

$K(P) = \{\pm v_1, \pm v_2, \pm v_3, \pm v_4\}$ sei eine Menge von 8 Punkten auf der Einheitssphäre und es sei konstant $|\langle v_i, v_j \rangle| = c$ für $i \neq j$. Dann gilt entweder $c = 1/3$ oder $c = 1/\sqrt{5}$. Im ersten Fall ist $K(P)$ eine Eckenmenge eines regulären Hexaeders, und im zweiten Fall ist $K(P)$ eine Teilmenge der Eckenmenge eines regulären Ikosaeders.

Beweis: O.B.d.A. gelten $\langle v_1, v_i \rangle > 0$ für $i = 2, 3, 4$. Es gilt nicht $\langle v_i, v_j \rangle > 0$ für alle i, j , denn sonst wären v_1, v_2, v_3, v_4 die Ecken eines der Sphäre einbeschriebenen Tetraeders wegen $\langle v_i, v_j \rangle = c$, und dann wäre $\langle v_i, v_j \rangle < 0$. Man sieht leicht, dass man dann o.B.d.A. zusätzlich annehmen kann: $\langle v_2, v_3 \rangle < 0$ und $\langle v_2, v_4 \rangle < 0$. Wir projizieren $K(P)$ durch die orthogonale Parallelprojektion n auf die Ebene, die von $\pm v_1$ und $\pm v_2$ aufgespannt wird. Die Bildpunkte $\pi(v_i)$ bezeichnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \pi(v_1) &= A & \pi(-v_1) &= A' \\ \pi(v_2) &= B & \pi(-v_2) &= B' \\ \pi(v_3) &= C & \pi(-v_3) &= C' \end{aligned}$$

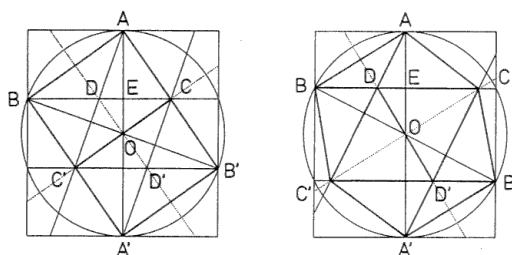
Aus den Voraussetzungen und Annahmen folgt $\pi(v_4) = C$ und $\pi(-v_4) = C'$. Die Bilder der übrigen vier Schnittpunkte der zu v_1 und v_2 gehörigen Paare von parallelen Breitenkreisen bezeichnen wir mit D und D' . Dabei sei D

der Schnittpunkt der Geraden durch A, C' sowie durch B, C . Auf Grund der Konstruktion ist klar, dass die Punkte C, C' und D, D' die diagonal gegenüberliegenden Ecken eines Rhombus sind, und dass die Diagonale CC' parallel zu AB und daher DD' senkrecht zu AB ist. Schließlich sei E der Schnittpunkt von AA' und BC , und O das Bild des Mittelpunktes der Sphäre. Die beigegebenen Zeichnungen illustrieren die Situation, wobei wir zwei Fälle unterscheiden.

Fall (1): $\langle v_3, v_4 \rangle < 0$

Fall (2): $\langle v_3, v_4 \rangle > 0$

Im Fall (1) gilt offensichtlich $AB = CC'$, und im Fall (2) gilt $AB = DD'$ denn das Dreieck $\Delta = OAB$ ist ähnlich zum Dreieck $\Delta' = CDD'$, und die Höhe von Δ über der Basis AB ist im Fall (2) gleich der Höhe von Δ' über der Basis DD' wegen $\langle v_1, v_2 \rangle = c = \langle v_3, v_4 \rangle$.



Daher gilt im Fall (1): Das Dreieck ABE ist ähnlich zum Dreieck OCE , und wegen $AB = 2OC$ folgt $AE = 2OE$, also $c = OE = 1/3$.

Analog gilt im Fall (2): Das Dreieck ABE ist ähnlich zum Dreieck DOE , und wegen $AB = 2DO$ folgt $BE = 2OE$ für die Katheten in dem rechtwinkligen Dreieck BEO mit Hypotenuse 1. Also gilt $c = OE = \sqrt{1/5}$.

Im Fall (1) ist nunmehr klar, dass $K(P)$ die Eckenmenge eines Würfels ist, und im Fall (2) zeigt der Vergleich mit Euklids Konstruktion des Ikosaeders, dass $K(P)$ wegen $c = \sqrt{1/5}$ eine Teilmenge der Eckenmenge eines Ikosaeders ist. q.e.d.

Ich bemerke übrigens, dass die beiden Figuren, die den Beweis illustrieren, in gleichartiger Weise aus zwei Paaren konstruiert sind, die aus einer Figur und einem zugehörigen Gnomon bestehen. Das eine ist ein Paar aus

zwei kongruenten Rechtecken mit Seitenverhältnis $\sqrt{2} : 1$. Dies Rechteck ist sein eigenes Gnomon. Das andere Paar besteht aus einem Rechteck mit Seitenverhältnis $\tau : 1$, und das Gnomon dazu ist ein Quadrat über der längeren Seite. In der Mitte beider Figuren bilden C, C', D, D' die Ecken eines Rhombus mit Diagonalenverhältnis $\sqrt{2} : 1$ bzw. $\tau : 1$.

Nach der Bestimmung der maximalen Konfiguration $K(P)$ von Kantenvektoren ist die Ableitung der übrigen sehr leicht. Beim regulären Hexaeder sind wegen der Isogonalität alle 4 Diagonalen durch Symmetrieeoperationen ineinander überführbar. Durch Weglassen eines Eckenpaares $\{\pm v\}$ entsteht also bis auf Isometrie stets die gleiche Konfiguration von 6 Punkten $K(P)$. Das zugehörige Polyeder P ist ein stumpfes Rhomboeder mit dem Flächendiagonalenverhältnis $\sqrt{2} : 1$.

Beim regulären Ikosaeder sind wiederum wegen der Isogonalität alle 6 Diagonalen symmetrisch äquivalent. Durch Weglassen eines Eckenpaares $\{\pm v\}$ entsteht also stets die gleiche Konfiguration von 10 Punkten $K(P)$. Das zugehörige Polyeder ist das Rhombenikosaeder von Feodorov. Man sieht leicht, dass auch beim Weglassen von 2 Eckenpaaren immer bis auf Isometrie stets die gleiche Konfiguration $K(P)$ von 8 Punkten entsteht. Das zugehörige Polyeder P ist kombinatorisch vom gleichen Typ wie das Keplersche Rhombendodekaeder, aber seine Rhomben haben das Diagonalenverhältnis $\tau : 1$, im Gegensatz zum Verhältnis $\sqrt{2} : 1$ bei Keplers Körper. Wir wollen daher zur Unterscheidung wenn nötig in Zukunft das aus dem Würfel abgeleitete Rhombendodekaeder von Kepler als "kubisches Rhombendodekaeder" bezeichnen und das andere, mit dem goldenen Schnitt als Achsenverhältnis, als "goldenes Rhombendodekaeder". Dieses goldene Rhombendodekaeder wurde anscheinend erst 1960 von S. Bilinski entdeckt. Bis dahin war es von E.S. Fedorov und anderen bei der Bestimmung der konvexen monoedrischen Polyeder mit Rhombenflächen anscheinend übersehen worden.

Wenn wir schließlich von den 6 Diagonalen des regulären Ikosaeders 3 fortlassen wollen, dann gibt es für die Konfiguration $K(P)$ der 6 übrigbleibenden Punkte bis auf Isometrie zwei Möglichkeiten. Im ersten Fall besteht $K(P)$ aus den 3 Ecken eines Dreiecks des Ikosaeders und ihren 3 Antipodalpunkten. P ist dann ein spitzes Rhomboeder mit Diago-

nenverhältnis $\tau : 1$. Oder aber $K(P)$ besteht gerade aus den übrigen 6 Punkten, und ist ein stumpfes Rhomboeder mit dem Diagonalenverhältnis. Wir erhalten also auf diese Weise gerade das spitze und das stumpfe goldene Rhomboeder.

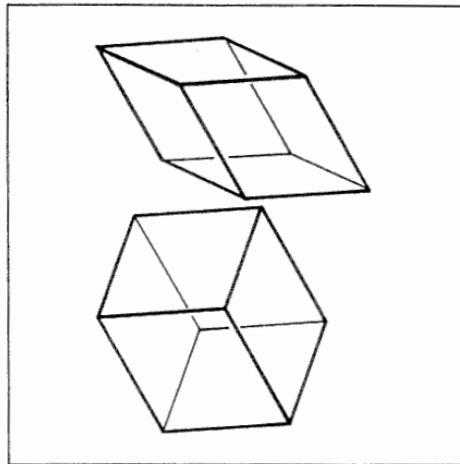
Wir fassen zusammen. Es gibt genau die folgenden konvexen monoedrischen Polyeder mit rhombischen Flächen:

- a) Die Rhomboeder mit einem Winkel $0 < \alpha < 120^\circ$,
- b) das kubische Rhombendodekaeder,
- c) das goldene Rhombendodekaeder,
- d) das Rhombenikosaeder,
- e) das Rhombentriakontaeder.

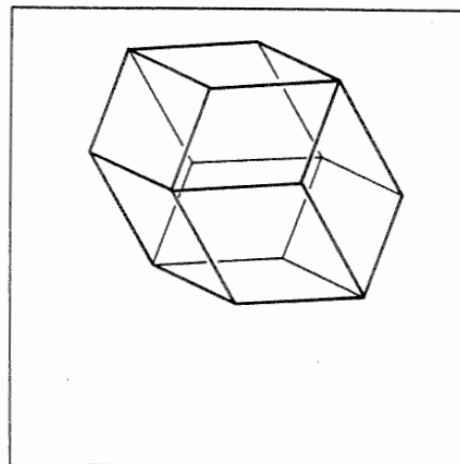
Das Diagonalenverhältnis der Rhomben ist $0 < \tan \frac{\alpha}{s} < \sqrt{3}$ für die Rhomboeder, für das kubische Rhombendodekaeder und τ für die drei übrigen Polyeder. Die Bildseite 1.70 zeigt die fünf Polyeder, deren Flächen Rhomben mit dem Diagonalenverhältnis τ sind.

Eine Besonderheit dieser von kongruenten Rhomben begrenzten konvexen Polyeder besteht darin, dass sie in engem Zusammenhang mit interessanten Raumeinteilungen des 3-dimensionalen euklidischen Raumes stehen, und dass durch diese ganz verschiedenartige Strukturen in der belebten und unbelebten Natur beschrieben werden. Für das kubische Rhombendodekaeder hat Kepler selbst dies schon bemerkt. Im Anschluss an die Definition der räumlichen Kongruenz schreibt er im 2. Buch der Weltharmonik:

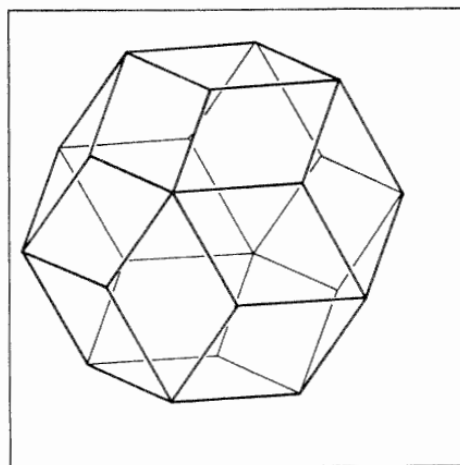
Man beachte, dass es noch eine andere Kongruenz gibt, bei der es sich nicht um das Zusammenfügen ebener Figuren zur Bildung einer räumlichen handelt, sondern um das Zusammenstoßen räumlicher Figuren, die den Raum um einen Punkt herum ausfüllen. Solcher körperlicher Figuren gibt es nur zwei, den Würfel und das Rhombendodekaeder. Denn 8 Würfecken stoßen in einem Punkt zusammen und füllen den Raum ganz aus.



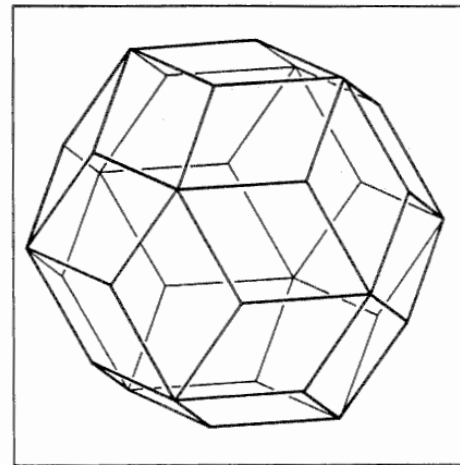
spitzes und stumpfes
goldenes Rhomboeder



goldenes Rhombendodekaeder



Rhombenikosaeder



Rhombentriakontaeder

Abbildung 1.70: Die 5 konvexen monoedrischen Polyeder

Das Rhombendodekaeder aber besitzt zwei Arten von Ecken, 8 dreikantige stumpfe und 6 vierkantige spitze. Der Raum wird ausgefüllt entweder durch 4 stumpfe oder 6 spitze Ecken. Ein ähnliches Gebilde bauen die Bienen auf mit aneinanderstoßenden Zellen. Hier liegen rückwärts um eine einzelne Zelle jeweils 3 andere mit abgekehrten Grundflächen, während sich an die Seiten 6 anschließen. Man könnte vorne noch 3 andere anbringen, um die Figur abzuschließen, wenn der Zugang zu der Zeile nicht offen sein müsste. Über diese Art Kongruenz räumlicher Figuren ist in diesem Buch nicht die Rede. [214, p. 65]

1.6 Raumteilungen, Kugelpackungen, Kristallstrukturen

Ausführlicher hat Kepler die Raumteilung durch Rhombendodekaeder in einer anderen Schrift behandelt, einem kleinen, aber sehr interessanten Aufsatz, der wohl 1610 entstand, 1611 gedruckt wurde und den Titel trägt: “Ioannis Kepleris C. Maist. Mathematici Strena Seu de Nive Sexangula”, zu deutsch also: “Johannes Keplers, des Kaiserlichen Mathematikers Neujahrgabe oder Vom Sechseckigen Schnee” [212]. Es gibt inzwischen verschiedene deutsche Übersetzungen, etwa [215, 217], und einen Kommentar aus moderner Sicht von einem theoretischen Physiker, P. Kramer [230].²⁴ Keplers Schrift war ein Neujahrgeschenk für seinen Freund Johannes Matthus Wackher von Wackenfels, damals Hofrat Kaiser Rudolfs II. in Prag. Es geht darin um die Ursache für die sechseckige Gestalt der Schneeflockensternchen mit ihren gefiederten Strahlen:

Nachdem also feststand, dass die Ursache der innewohnenden sechseckigen Gestalt in einem Wirken liegt, haben wir uns gefragt, was denn dies für ein Wirkendes sei und auf welche Weise es wirke, ob als eingepflanzte Form oder von außen wirkender

²⁴E.Brieskorn schreibt “Es gibt inzwischen eine gute deutsche Übersetzung von F. Seck mit einem Kommentar aus moderner Sicht von einem theoretischen Physiker, P. Kramer [.]” Diese Übersetzung, as der vermutlich die folgenden deutschsprachigen Zitate stamme, habe ich nicht verifizieren können. Die Seitenangaben der folgenden Zitate aus *Strena . . .* verweisen auf die entsprechenden Stellen in den beiden o.a. Übersetzungen (Hrsg.).

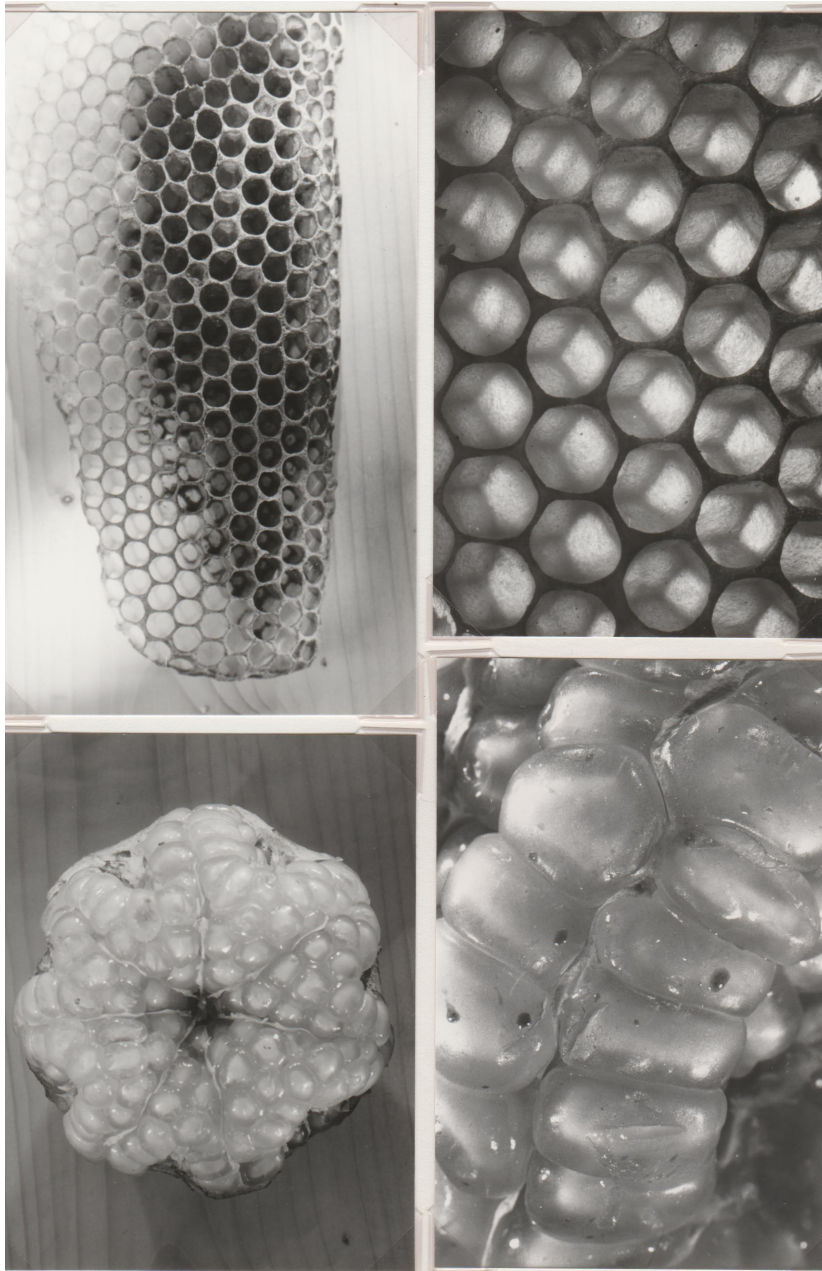


Abbildung 1.71: Oben: Bienenwaben. Unten: Granatäpfel.
Bilder von E. Brieskorn.

Grund; ob es die sechseckige Figur aus einem Zwang der Materie bilde oder aus seiner eigenen Natur, der etwa entweder das Urbild der Schönheit, die im Sechseck liegt, oder die Kenntnis des Ziels, zu dem jene Form hinführt, eingeboren ist?

Um Entscheidungsmöglichkeiten in diesen Fragen aufzuzeigen, benutzen wir wohlbekanntere Beispiele, jedoch solche, die geometrisch zu beschreiben sind. Denn für unsere Untersuchung wird dieser Exkurs sehr förderlich sein. [215, p. 10f.]²⁵

Keplers erstes Beispiel ist der Bau der Bienenwaben. Die Bildseite 1.71 zeigt Photographien einer Bienenwabe und eines Granatapfels, der Kepler als zweites Beispiel dient. Kepler beschreibt die Bienenwaben genau und betont, dass jede Zelle am Boden, wo die Zellen der beiden Schichten einer Wabe aneinanderstoßen, durch drei Rhombenflächen begrenzt wird.

Durch diese Rhomben angeregt, begann ich geometrisch zu untersuchen, ob ein Körper, ähnlich den fünf regelmäßigen und den vierzehn Archimedischen, nur aus Rhomben aufgebaut werden kann. Und ich fand zwei solche Körper, von denen der eine dem Würfel und Oktaeder, der andere dem Dodekaeder und Ikosaeder verwandt ist (der Würfel selbst vertritt die Stelle eines dritten, verwandt mit zwei aneinandergelagerten Tetraedern). [215, p. 11]²⁶

Die hier mitgeteilte Entdeckung hat Kepler schon vor dem Jahre 1600 gemacht. In einem Brief an seinen Tübinger Lehrer Mästlin vom 22. November 1599 schreibt er:

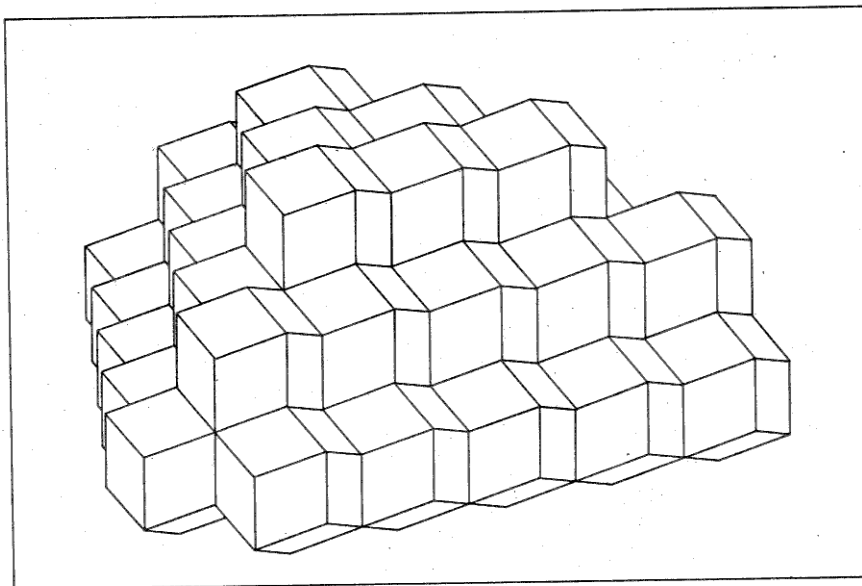
Ich bemühe mich in zwischen, aus den rhombischen Körpern mit 12 und 30 Seitenflächen sowie aus den archimedischen Körpern die Exzentrizitäten zu gewinnen. [216, p. 87]

Vom Bau der Bienenwaben ausgehend beschreibt Kepler dann die Ausfüllung des dreidimensionalen Raumes durch kongruente Rhombendo-

²⁵[217, p. 25]

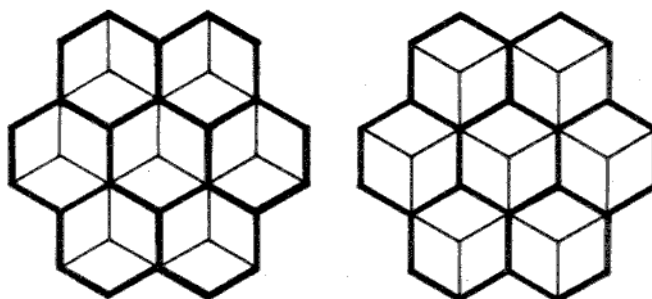
²⁶[217, 26f.]

dekaeder, wobei an jeder der 12 Rhombenflächen ein weiteres Rhombendodekaeder angrenzt und an den spitzen Ecken jeweils sechs Rhombendodekaeder mit ihren spitzen Ecken zusammenstoßen, an den stumpfen Ecken aber vier, und zwar mit ihren stumpfen Ecken. Das folgende Bild zeigt einen Ausschnitt aus dieser Raumteilung.



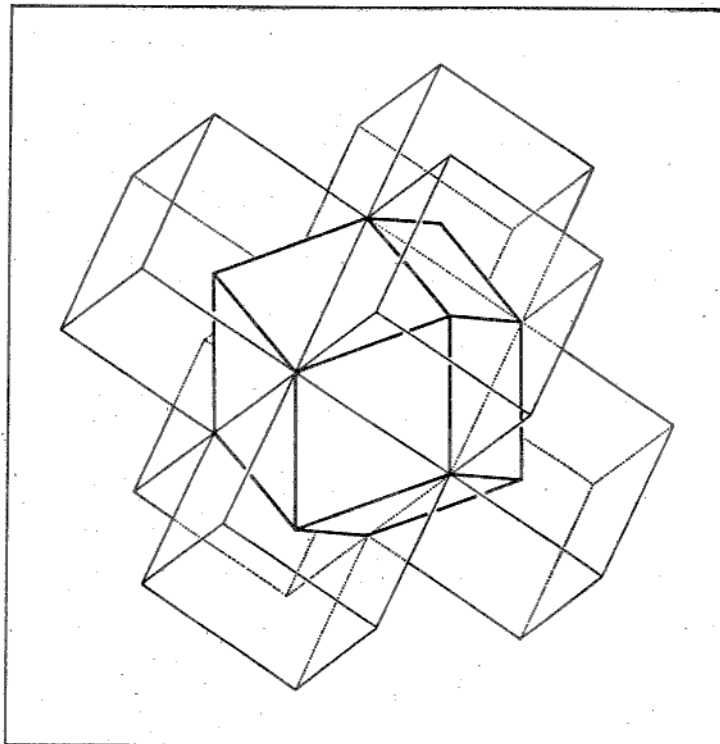
Dabei sind drei Schichten von Rhombendodekaedern übereinandergelagert. Innerhalb einer jeden Schicht ist jedes Rhombendodekaeder von 6 weiteren umgeben, die an den 6 Rhomben einer Zone desselben angrenzen.

Bei orthogonaler Parallelprojektion einer solchen Schicht auf eine Ebene senkrecht zu den Zonenkanten projizieren sich die Seitenflächen der Zonen auf die Kanten einer regulären 6-Eckteilung der Ebene, und die beiden Kappen der Rhomboeder liefern zwei Unterteilungen dieser 6-Eckteilung in Rhomben.



Die im Inneren der 6-Ecke liegenden Kanten dieser beiden Rhombenteilungen bilden die 6-Eckteilungen der Ebene, welche zu den beiden benachbarten Schichten gehören. Wie man sieht, sind diese beiden 6-Eckteilungen voneinander verschieden. Die beiden Mengen ihrer 6-Eckzentren bilden eine disjunkte Zerlegung der Eckenmenge der ursprünglichen 6-Eckteilung.

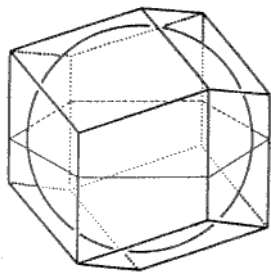
Die gerade gegebene Beschreibung der Rhombendodekaeder-Raumteilung betont eine Schichtung mit hexagonal gepackten Schichten. Man kann die gleiche Raumteilung aber noch auf eine andere Weise sehen, welche die kubische Symmetrie des Rhombendodekaeders stärker hervorhebt. Dazu erinnern wir daran, dass die kurzen Diagonalen eines kubischen Rhombendodekaeders gerade die Kanten eines Würfels sind, dessen Eckpunkte mit den 8 stumpfen Ecken des Rhombendodekaeders zusammenfallen. Um die 6 spitzen Ecken zu erhalten, setzen wir an jede der 6 Seiten des Würfels einen kongruenten Würfel an, so dass eine Figur von der Form eines Achsenkreuzes entsteht. Dann sind die 6 spitzen Ecken die Mittelpunkte der angesetzten Würfel.



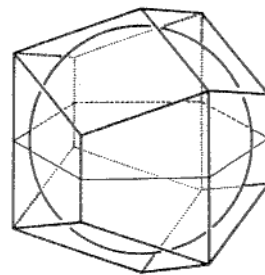
Damit ist klar, wie man die Raumteilung in Rhombendodekaeder konstruieren kann, indem man von einer regulären Raumteilung in achsenparallele kongruente Würfel ausgeht. Man zerlegt die Menge der Würfel W in zwei disjunkte Mengen W' und W'' derart, dass kein Würfel aus W' mit einem anderen Würfel aus W' eine Seite gemeinsam hat, und dass ebenso kein Würfel aus W'' eine gemeinsame Seite mit einem anderen Würfel aus W'' hat. Offensichtlich gibt es genau eine derartige Zerlegung. Dann wählt man eine der beiden Würfelmengen, etwa W' , und beschreibt um jeden Würfel von W' ein Rhombendodekaeder mit den Würfecken als stumpfen Ecken. Die spitzen Ecken liegen dann in den angrenzenden 6 Würfeln von W'' . Das System der so konstruierten Rhombendodekaeder bildet die gesuchte Raumteilung.

Die gerade beschriebene Konstruktion der Raumteilung durch Rhombendodekaeder bringt zweifellos die Symmetrie dieser Raumteilung besser

zum Ausdruck als die erste Konstruktion durch Aufeinanderstapeln von hexagonal gepackten Schichten. Wenn wir trotzdem eben diese Konstruktion als erste eingeführt haben, so deswegen, weil die von Kepler hergestellte Beziehung dieser Konstruktion zur Gestalt der Bienenwaben noch eine zweite kombinatorische Möglichkeit in sich birgt, die Kepler nicht realisiert hat. Kepler sieht ja das Rhombendodekaeder als Abschluss der offenen Zelle einer Bienenwabe. Umgekehrt entstehen zwei kongruente offene Zellen dieser Gestalt, indem man das Rhombendodekaeder durch einen Schnitt senkrecht zu einer Zonenrichtung zerlegt, dessen Schnittebene durch den Mittelpunkt des Rhombendodekaeders geht. Die Schnittebene trifft die Zone in einem regulären Hexagon. Deswegen hat man aber nun zwei Möglichkeiten, aus den beiden offenen Wabenzellen eine geschlossene Wabenzelle zusammenzusetzen. Bei der einen ergibt sich das Rhombendodekaeder. Bei der zweiten wird eine der beiden offenen Zellen vor dem Zusammensetzen um 60° gedreht. Dann ergibt sich eine **“hexagonale Wabenzelle”** mit einer hexagonalen Zone aus 6 Trapezen und zwei Kappen aus je drei Rhomben, die kongruent zu den entsprechenden Kappen des Rhombendodekaeders sind. Jedoch haben die Kappen in den beiden geschlossenen Wabenzellen unterschiedliche Lage zueinander. Beim Rhombendodekaeder liegen sie punktsymmetrisch zum Mittelpunkt, bei der hexagonalen Wabenzelle spiegelsymmetrisch zu der Schnittebene. Entsprechend unterscheiden sich die Projektionen auf die Ebene.



Rhombendodekaeder mit
einbeschriebener Kugel



hexagonale Wabenzelle
mit einbeschriebener Kugel

Damit kommen wir zu der folgenden Konstruktion von Raumteilungen aus Waben. Unter einer Wabe wollen wir hier eine unendlich in Richtung einer Ebene ausgebreitete Doppelschicht von offenen Wabenzellen verstehen, die an ihren durch jeweils 3 Rhomben begrenzten Böden genauso aneinandergrenzen wie die Zellen einer Bienenwabe. Der Rand der Wabe besteht dann aus zwei parallelen regulären ebenen 6-Eckteilungen. Für das Aneinandersetzen von zwei Waben gibt es dann bis auf Kongruenz genau zwei Möglichkeiten. Bei der einen entsteht in der Mitte eine Schicht von Rhombendodekaedern, bei der anderen eine Schicht von hexagonalen geschlossenen Wabenzellen. Durch unendlich oft wiederholtes Aneinanderfügen von Waben in beiden Richtungen senkrecht zur Wabenebene erhält man Raumteilungen, die aus Schichten von Rhombendodekaedern und Schichten von hexagonalen Wabenzellen bestehen. Dabei können die beiden Arten von Schichten in beliebiger Reihenfolge abwechseln, so dass man eine Menge von verschiedenen Raumteilungen von der Kardinalität des Kontinuums erhält.

Zwei von diesen Raumteilungen sind natürlich besonders ausgezeichnet: Zum einen die von Kepler konstruierte, die nur aus Rhombendodekaedern besteht. Zum anderen diejenige, die nur aus hexagonalen Wabenzellen besteht. Kepler erwähnt sie nicht. Vielleicht hat er sie übersehen oder aber ignoriert, weil sowohl ihre Elemente, die hexagonalen Wabenzellen, als auch die Anordnung ihrer Mittelpunkte weniger regelmäßig sind als bei der anderen Teilung. Diese zweite Raumteilung ist jedoch praktisch genauso wichtig wie die erste, und wir wollen sie daher in unsere Betrachtungen einbeziehen.

Das zweite Beispiel Keplers für lebendige Gestalten, die durch die Geometrie des Rhombendodekaeders beschrieben werden, sind die Kerne der Granatäpfel. Diese Kerne sind – in gewissen Regionen des Granatapfels – in Schichten angeordnet, wobei jeweils zwei Schichten aneinanderstoßen und dort, wo sie aneinanderstoßen, durch eine dünne Haut getrennt werden. Auf meinen Bildern sieht man, wie der Granatapfel durch diese Häute in Sektoren geteilt ist, und man sieht eine einzelne durch eine solche Haut getrennte Doppelschicht. Löst man die Kerne, dann erkennt man auf der Haut ihre Eindrücke in Form einer aus drei Rhomben gebildeten Kappe, und mit ein wenig Phantasie kann man die Gestalt der Kerne durch ein Rhombendode-

kaeder beschreiben. Kepler fragt nun nach dem Grund für diese Gestalt, und dies führt ihn zu einer sehr interessanten Idee, der Idee der **Kugelpackung**.

Denn die Kerne sind anfangs, solange sie noch klein sind und ihnen der Raum innerhalb der Schale genügt, rund und werden erst später, wenn die Schale erhärtet und sie ständig wachsen, zusammengedrängt und gepreßt, wie es auch bei den Erbsen in ihren länglichen Hülsen geschieht. Aber die Erbsen haben keinen Raum zum Ausweichen, sie sind ja in ihren Schoten in einer Reihe hineingepackt; sie werden daher nur von zwei Seiten gepreßt. Die runden Kerne im Granatapfel dagegen finden anfangs einen freieren Raum vor und dringen, durch ihre runde Gestalt begünstigt, leicht einzeln zwischen je drei Kerne ein, die von der gegenüberliegenden Reihe her wachsen, wobei sie die Flüssigkeit von der Druckstelle weg in den freien Raum abdrängen. Wenn man aber eine Menge runder gleich großer Kügelchen aus weichem Material in einem runden Gefäß einschließt und dieses durch Metallreifen von allen Richtungen gleichmäßig zusammendrückt, dann werden die meisten Kügelchen in rhombische Gestalt zusammengepreßt, besonders wenn man zuvor durch vorsichtiges Erschüttern des Gefäßes ihnen erlaubt hat, in wirbelnder Bewegung einen möglichst engen Raum einzunehmen. Denn bei geradliniger Anordnung der Kugeln, die nicht durcheinandergebracht werden kann, wird man durch Druck sogar Würfel hervorbringen. [215, p. 15]²⁷

Kepler schlägt also hier ein Experiment vor und hat es vielleicht auch selber ausgeführt. Ich habe – nicht sehr ernsthaft – versucht, es mit 100 Kügelchen aus plastischer Modelliermasse zu wiederholen, kann aber Keplers Ergebnis nicht ganz bestätigen. Von den ganz im Inneren der zusammengesetzten Masse befindlichen Kugeln – etwa 30 – nahmen bei zufälliger Anordnung zu Beginn nur etwa 2-3 wenigstens ungefähr die Gestalt von Rhombendodekaedern an. Die übrigen wurden zu Polyedern von unregelmäßiger

²⁷[217, p. 29f.]

Gestalt, deren Flächenzahl zwischen 8 und 14 schwankte. Hingegen erhielt ich sehr wohl Rhombendodekaeder, wenn die Kugeln zu Anfang in einer bestimmten Weise gepackt waren, die schon Kepler genau beschrieben hat und die wir nachher noch genauer besprechen werden nämlich als **kubisch dichteste Packung**. Wählt man hingegen als Ausgangslage die 1883 von dem Kristallographen Barlow beschriebene **hexagonal dichteste Kugelpackung**, dann entstehen beim Zusammenpressen die oben beschriebenen hexagonalen Wabenzellen. H.S.M. Coxeter berichtet in seinem Buch “Unvergängliche Geometrie” über eine Reihe von ernsthaften Experimenten mit qualitativ ähnlichen Ergebnissen [90, p.489-490].

Wir beschreiben jetzt genau die **Kugelpackungen**, welche zu den vorher konstruierten Raumteilungen des 3-dimensionalen euklidischen Raumes durch Rhombendodekaeder und durch hexagonale Wabenzellen gehören. Es ist klar, dass das kubische Rhombendodekaeder eine einbeschriebene Kugel besitzt, die alle 12 Rhombenflächen im jeweiligen Mittelpunkt der Fläche berührt. Wenn der dem Rhombendodekaeder einbeschriebene Würfel die Kantenlänge 1 hat, hat das Rhombendodekaeder das Volumen 2, während die Kugel den Durchmesser $\sqrt{2}$ und das Volumen $2\pi/3\sqrt{2}$ hat. Das Verhältnis der Volumina von Kugel und Rhombendodekaeder ist also

$$\frac{\pi}{3 \cdot \sqrt{2}} = 0.74048 \dots$$

Offensichtlich hat die hexagonale Wabenzelle die gleiche einbeschriebene Kugel, die ebenfalls alle 12 Flächen berührt, und das Verhältnis der Volumina ist auch das gleiche. Die fraglichen Kugelpackungen entstehen aus den Raumteilungen durch Rhombendodekaeder und hexagonale Wabenzellen einfach dadurch, dass jedem dieser Polyeder seine Inkugel einbeschrieben wird. Die Kugelpackung, die so aus der Rhombendodekaederteilung entsteht, nennen wir die **kubisch dichteste Kugelpackung**; diejenige, welche aus der Raumteilung durch hexagonale Wabenzellen entsteht, nennen wir die **hexagonal dichteste Kugelpackung**.

Natürlich können wir die gleiche Konstruktion auch für alle die anderen Raumteilungen ausführend, die aus beliebig abwechselnden Schichten

von Rhombendodekaedern und hexagonalen Wabenzellen bestehen, und wir erhalten so eine überabzählbare Familie von Kugelpackungen, die alle die gleiche Dichte $\pi/3 \cdot \sqrt{2}$ haben.

Bis eben haben wir die Worte “Kugelpackung” und “Dichte” verwendet, ohne genau zu sagen, was damit gemeint ist. Wir wollen das jetzt nachholen.

Unter einer **Kugelpackung** in einem n -dimensionalen euklidischen Raum E wollen wir eine Menge \mathcal{K} von abgeschlossenen, zueinander kongruenten Kugeln $K \subset E$ verstehen, so dass für je zwei verschiedene Kugeln $K, K' \in \mathcal{K}$ der Durchschnitt $K \cap K'$ entweder leer ist oder ein gemeinsamer Randpunkt. In der deutschen Literatur spricht man statt von einer Kugelpackung auch von einer **Lagerung von Kugeln im Raum**.

Nun sei \mathcal{K} eine Kugelpackung in E . Wir wollen, wenn möglich, ihre Dichte definieren. Dazu sei $o \in E$ ein beliebig fest gewählter Punkt. B_r sei die Kugel vom Radius r mit Mittelpunkt o und $V(B_r)$ ihr Volumen. Ebenso sei $V(K)$ das Volumen von $K \in \mathcal{K}$. Dann definieren wir für die Kugelpackung \mathcal{K} eine **untere Dichte** $\underline{\Delta}$ und eine **obere Dichte** $\overline{\Delta}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\underline{\Delta} &= \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V(B_r)} \sum_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset B_r}} V(K), \\ \overline{\Delta} &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V(B_r)} \sum_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset B_r}} V(K).\end{aligned}$$

Diese unteren und oberen Dichten sind unabhängig von der Wahl des Punktes o . Das sieht man wie folgt. Es sei o' ein weiterer Punkt in E im Abstand d von o , und B' sei die Kugel vom Radius r mit Mittelpunkt o' . Wir setzen:

$$\Delta_r = \frac{1}{V(B_r)} \sum_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset B_r}} V(K), \quad \Delta'_r = \frac{1}{V(B'_r)} \sum_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset B'_r}} V(K).$$

Dann gilt für $r > d$ offensichtlich die folgende Abschätzung:

$$\left(1 - \frac{d}{r}\right)^n \Delta_{r-d} \leq \Delta'_r \leq \left(1 + \frac{d}{r}\right)^n \Delta_{r+d}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\liminf_{r \rightarrow \infty} \Delta'_r &= \liminf_{r \rightarrow \infty} \Delta_r = \underline{\Delta}, \\ \limsup_{r \rightarrow \infty} \Delta'_r &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \Delta_r = \overline{\Delta}.\end{aligned}$$

Man macht sich durch Beispiele leicht klar, dass es Kugelpackungen mit $\underline{\Delta} \neq \overline{\Delta}$ gibt. Wenn jedoch $\underline{\Delta} = \overline{\Delta}$ gilt, dann nennen wir für eine solche Kugelpackung \mathcal{K} die Zahl

$$\Delta(\mathcal{K}) = \underline{\Delta} = \overline{\Delta}$$

die **Dichte** der Kugelpackung \mathcal{K} . Wenn wir von der Dichte einer Kugelpackung reden, ist also stillschweigend vorausgesetzt, dass diese Dichte im obigen Sinne definiert ist.

Es stellt sich nun eine vollkommen einfache und natürliche Frage:

Was ist die größtmögliche Dichte einer Kugelpackung im dreidimensionalen euklidischen Raum?

Die Antwort auf diese so einfache und natürliche Frage zur Geometrie des euklidischen Raumes ist auch heute, mehr als 2000 Jahre nach Euklid und mehr als 300 Jahre nach Kepler, nicht bekannt. Es wird allgemein vermutet, dass die größtmögliche Dichte gerade von Keplers Kugelpackung erreicht wird, also:

$$\boxed{\max_{\mathcal{K}} \Delta(\mathcal{K}) \stackrel{?}{=} \pi/3\sqrt{2}}.$$

Ein Beweis dieser Vermutung ist bisher nicht gefunden worden.²⁸ Der eine oder andere junge Leser, der von den stolzen Erfolgen der modernen Strukturmathematik begeistert ist, könnte wohl meinen, es handle sich hier um irgendein altmodisches und unbedeutendes Randproblem der elementaren Mathematik. Das wäre weit gefehlt. J.H. Conway und N.J.A. Sloane

²⁸Anm. des Hrsgs.: E. Brieskorn hat das Manuskript seiner Vorlesung seit den frühen 1990er Jahren nicht mehr verändert. Im Jahr 1998 gab Thomas Hales an, die Keplersche Vermutung durch komplizierte Falldiskussionen, ausgeführt mit einem Programm zur linearen Optimierung, beweisen zu können. Nach Urteil einer Gruppe von Experten ist der Computerbeweis mittlerweile als vollständig anzusehen. Eine Darstellung der Beweisstruktur gibt Hales in [172].

stufen dies Problem als “eines der berühmten offenen Probleme in der Mathematik” ein, und J. Milnor nennt das Ausbleiben eines Beweises für die allgemein als richtig angesehene Vermutung einen “Skandal” [249].

Die Vermutung über dichteste Kugelpackungen im dreidimensionalen Raum ist in der Tat Teil eines ganzen Kreises von wichtigen miteinander zusammenhängenden Problemen, den David Hilbert im Jahre 1900 in seinem berühmten Vortrag vor dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris als das 18. Problem umrissen hat: “Aufbau des Raumes aus kongruenten Polyedern” [190]. Auf den folgenden beiden Seiten findet man Hilberts Text zum 18. Problem, und man sollte diesen studieren, bevor man hier weiterliest.

Es handelt sich beim 18. Problem wie gesagt um einen ganzen Problemkreis, und bei seiner Bearbeitung ist die Forschung in ganz verschiedenen Richtungen erfolgreich fortgeschritten. Es ist natürlich ganz unmöglich, über diese Fortschritte hier im einzelnen zu berichten. Ich will nur auf die verschiedenen Richtungen hinweisen.

Der erste Teil von Hilberts 18. Problem, die Frage nach der Endlichkeit der Anzahl von Typen diskreter Bewegungsgruppen im n -dimensionalen euklidischen Raum mit kompaktem Fundamentaltbereich, wurde um 1910 von Bieberbach positiv beantwortet. Für $n = 1$ ist die Anzahl natürlich 2 und für $n = 2$ ist sie 17. Für $n = 3$ hatten die Kristallographen und Mathematiker um 1890 die Anzahl 230 gefunden. Bieberbach bewies dann 1910 die Endlichkeit für jedes n . Erst 1973 wurde die Anzahl für $n = 4$ bestimmt: 4895. Seitdem sind die Raumgruppentypen für $n \leq 4$ vollständig bekannt, und ihre Kenntnis bildet die Grundlage der geometrischen Kristallographie, in der sich gruppentheoretische, zahlentheoretische und kombinatorisch-geometrische Denkweisen durchdringen. Darüber wird im letzten Teil dieses Buches zu berichten sein.²⁹

²⁹Siehe Anmerkung S. 139.

D. Hilbert (1900): 18. Problem:

Ich nenne noch eine geometrische Aufgabe.

18. Aufbau des Raumes aus congruenten Polyedern.

Wenn man nach denjenigen Gruppen von Bewegungen in der Ebene fragt, für die ein Fundamentalbereich existirt, so fällt bekanntlich die Antwort sehr verschieden aus, jenachdem die betrachtete Ebene die Riemannsche (elliptische), Euklidische oder Lobatschewskiysche (hyperbolische) ist. Im Falle der elliptischen Ebene giebt es eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Fundamentalbereichen und es reicht eine endliche Anzahl von Exemplaren congruenter Bereiche zur lückenlosen Ueberdeckung der ganzen Ebene aus: die Gruppe besteht eben nur aus einer endlichen Anzahl von Bewegungen. Im Falle der hyperbolischen Ebene giebt es eine unendliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Fundamentalbereichen, nämlich die bekannten Poincaréschen Polygone; zur lückenlosen Ueberdeckung der Ebene ist eine unendliche Anzahl von Exemplaren congruenter Bereiche notwendig. Der Fall der Euklidischen Ebene steht in der Mitte; denn in diesem Falle giebt es nur eine endliche Anzahl von wesentlich verschiedenen Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich; aber zur lückenlosen Ueberdeckung der ganzen Ebene ist eine unendliche Anzahl von Exemplaren congruenter Bereiche notwendig.

Genau die entsprechenden Thatsachen gelten auch im dreidimensionalen Raume. Die Thatsache der Endlichkeit der Bewegungsgruppen im elliptischen Raume ist eine unmittelbare Folge eines fundamentalen Satzes von C. Jordan²⁾, wonach die Anzahl der wesentlich verschiedenen Arten von endlichen Gruppen linearer Substitutionen mit n Veränderlichen eine gewisse endliche, von n abhängige Grenze nicht überschreitet. Die Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich im hyperbolischen Raume sind von Fricke und Klein in den Vorlesungen über die Theorie

1) Vgl. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, Kap. VII, insbesondere § 38.

2) Journal für Mathematik, Bd. 84 (1878) und Atti della Reale Accademia di Napoli 1880.

der automorphen Funktionen¹⁾ untersucht worden und endlich haben Fedorow²⁾, Schoenflies³⁾ und neuerdings Rohn⁴⁾ den Beweis dafür erbracht, daß es im Euklidischen Raume nur eine endliche Zahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich giebt. Während nun die den elliptischen und hyperbolischen Raum betreffenden Resultate und Beweismethoden unmittelbar auch für den n -dimensionalen Raum Geltung haben, so scheint die Verallgemeinerung des den Euklidischen Raum betreffenden Satzes erhebliche Schwierigkeiten zu bieten und es ist daher die Untersuchung der Frage wünschenswert, ob *es auch im n -dimensionalen Euklidischen Raume nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich giebt.*

Ein Fundamentalbereich einer jeden Bewegungsgruppe zusammen mit den congruenten aus der Gruppe entspringenden Bereichen liefert offenbar eine lückenlose Ueberdeckung des Raumes. Es erhebt sich die Frage, ob ferner auch *solche Polyeder existiren, die nicht als Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen auftreten und mittelst derer dennoch durch geeignete Aneinanderlagerung congruenter Exemplare eine lückenlose Erfüllung des ganzen Raumes möglich ist.* Ich weise auf die hiermit in Zusammenhang stehende, für die Zahlentheorie wichtige und vielleicht auch der Physik und Chemie einmal Nutzen bringende Frage hin, wie man unendlich viele Körper von der gleichen vorgeschriebenen Gestalt, etwa Kugeln mit gegebenem Radius oder reguläre Tetraeder mit gegebener Kante (bez. in vorgeschriebener Stellung) im Raume am dichtesten einbetten, d. h. so lagern kann, daß das Verhältnis des erfüllten Raumes zum nichterfüllten Raume möglichst groß ausfällt.

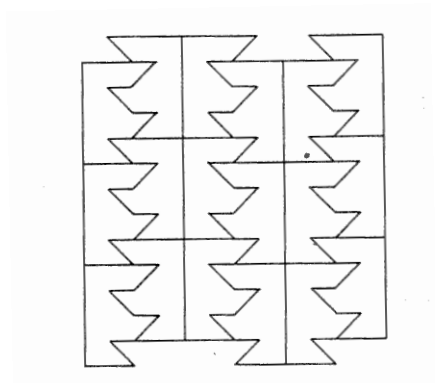
1) Leipzig 1897. Vgl. insbesondere Abschnitt I, Kap. 2—3.

2) Symmetrie der regelmäßigen Systeme von Figuren 1890.

3) Krystallsysteme und Krystallstructur, Leipzig 1891.

4) Mathematische Annalen Bd. 53.

Der zweite Teil von Hilberts 18. Problem betrifft unter anderem die Frage nach der Existenz eines n -dimensionalen Polyeders, das zwar als Pflasterstein von monoedriscen Raumteilungen des n -dimensionalen euklidischen Raumes auftreten kann, aber nicht von isoedriscen.³⁰ Wir wollen ein solches Polyeder kurz **anisoedrisch** nennen. Hilberts Frage wurde von K. Reinhardt 1928 für $n = 3$ durch Konstruktion eines komplizierten 3-dimensionalen anisoedriscen Polyeders positiv beantwortet. 1935 fand H. Heesch, der von der mathematischen Kristallographie her zu diesen Problemen kam, eine einfachere Lösung. Er erfand für $n = 2$ ein ziemlich einfaches anisoedrisches Polygon. Durch Prismenbildung erhält man daraus dann auch anisoedrische Polyeder für alle $n > 2$ [182]. Das nächste Bild zeigt ein Beispiel für eine Pflasterung mit Heesch's Polygon. Bei diesem Beispiel zerfallen die Pflastersteine bzgl. der Symmetriegruppe der Pflasterung in zwei Äquivalenzklassen. Eine Pflasterung mit nur einer Äquivalenzklasse ist unmöglich – das ist ja gerade die Entdeckung von Heesch.



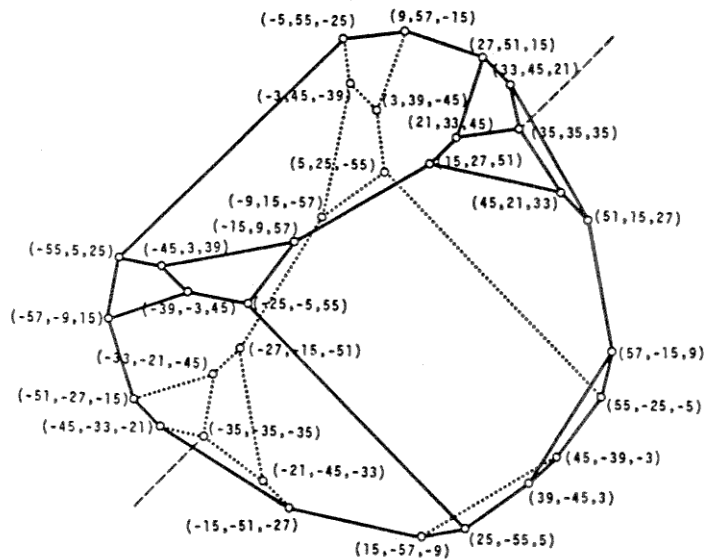
Die meisten Berichte über den zweiten Teil des 18. Hilbertschen Problems – z.B. der von Milnor – schließen mit der Entdeckung von Heesch und ignorieren einfach alles, was danach kam. Die Entwicklung war aber damit keineswegs abgeschlossen, sondern wurde von den Kristallographen und von einer kleinen Gruppe von kombinatorischen Geometern weitergeführt.

³⁰E. Brieskorn überträgt hier die Definition isoedrischer Flächenteilungen (p. 124) auf beliebige Dimensionen. Eine Teilung des n -dimensionalen Raumes wird hier also als *isoedrisch* bezeichnet, falls die Symmetriegruppe der Teilung transitiv auf den n -Pflastersteinen operiert. (Hrsg.)

Für die Kristallographie standen Fragen dieser Art seit den Arbeiten des berühmten russischen Kristallographen Fedorov auf der Tagesordnung. Über diese weitere Entwicklung informiert ein reichhaltiger Übersichtsartikel von B. Grünbaum und G.C. Shephard: "Tilings with congruent tiles" [165]. Aus der Vielzahl der darin aufgeführten Probleme und Ergebnisse erwähne ich nur ein oder zwei.

Erstens wurde das Ergebnis von Heesch gewaltig verbessert. 1978 entdeckte R.B. Kerschner noch viel einfachere, konvexe anisoedrische Polygone, nämlich gewisse konvexe Fünfecke. Wir erwähnten diese schon früher bei der Diskussion von Keplers Bedingungen für Pflasterungen.

Zweitens wurde viel Arbeit auf die Untersuchung von 3-dimensionalen konvexen Polyedern verwendet, die als Pflastersteine isoedrischer Raunteilungen des 3-dimensionalen euklidischen Raumes auftreten können. Es stellte sich heraus, dass die kombinatorische Struktur solcher Polyeder komplizierter sein kann, als man zunächst erwartete. Man entdeckte derartige Polyeder mit immer mehr Flächen, bis hin zu solchen mit 38 Flächen. Das folgende Bild zeigt ein Beispiel mit 18 Flächen, das von Kristallographen gefunden wurde (H.D. Löckenhoff, E. Hellner) [240]. Die hier reproduzierte Abbildung ist dem Artikel von Grünbaum und Shephard entnommen und entstand durch Umzeichnen einer ähnlichen Abbildung von Löckenhoff und Hellner.



Das abgebildete Polyeder mag kompliziert erscheinen. Die folgenden Erklärungen sollen helfen, seine Struktur und Symmetrie zu verstehen. Einige der dabei verwendeten Begriffe werden allerdings erst später genau definiert. Das Polyeder hat die gleiche Symmetriegruppe wie ein trigonales Trapezoeder, nämlich D_3 , eine Diedergruppe mit sechs Elementen. Die Elemente sind die 3 zyklischen Permutationen der Koordinaten x, y, z und die drei Involutionen $(x, y, z) \mapsto (-y, -x, -z)$ sowie $(x, y, z) \mapsto (-x, -z, -y)$ und $(x, y, z) \mapsto (-z, -y, -x)$. Dazu gehören die folgenden Symmetrieelemente. Zu den zyklischen Permutationen gehört eine 3-zählige Rotationsachse. Sie geht durch die beiden Elemente $\pm(35, 35, 35)$. Zu den drei Involutionen gehören drei 2-zählige Rotationsachsen. Sie sind senkrecht zu der 3-zähligen Achse, gehen durch die Punkte $\pm(1, -1, 0)$ bzw. $\pm(0, 1, -1)$ und $\pm(-1, 0, 1)$ und treffen den Rand des Polyeders in gewissen Kantenmittelpunkten. Die 18 Flächen des Polyeders zerfallen bezüglich der Operation der Symmetriegruppe in 3 Orbits von jeweils 6 Flächen. Der erste Orbit besteht aus den 6 Achtecken, der zweite aus den 6 Vierecken, welche die 2-zähligen Achsen treffen, und der dritte aus den 6 Vierecken, welche die 3-zählige Achse treffen. Dieser Zerlegung der Menge der Flächen in drei Orbits entspricht eine Darstellung des Polyeders als Durchschnitt von 3 einfachen Polyedern

mit jeweils 6 Flächen, nämlich von zwei trigonalen Trapezoedern und einer trigonalen Bipyramide.

Im Vergleich zu Keplers Rhombendodekaeder ist das gerade gezeigte Beispiel doch schon ein recht kompliziertes Polyeder, und man sieht daran, auf welche schwierigen kombinatorisch-geometrischen Probleme die Untersuchung von isoedrischen Raumteilungen des 3-dimensionalen euklidischen Raumes führen kann.

Der letzte Teil von Hilberts 18. Problem gilt der Frage nach den dichtesten Lagerungen von kongruenten Körpern, etwa von Kugeln. Für Lagerungen von Kreisscheiben in der Ebene ist die größtmögliche Dichte bekannt: Sie wird von der regulären hexagonalen Packung erreicht und ist gleich $\pi/\sqrt{12}$. Dieses schöne Ergebnis hat eine lange Geschichte, die bis auf eine Arbeit von Thue aus dem Jahre 1892 zurückgeht. Unabhängig davon wurde die Aussage 1940 von Fejes Tóth erneut bewiesen. Einen kurzen Beweis findet man in seinem Buch "Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum" [351].

Für Kugelpackungen im dreidimensionalen euklidischen Raum ist die größte Dichte, wie schon gesagt, nicht bekannt und vermutlich gleich $\pi\sqrt{3}$.³¹

Die Lage ändert sich, wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass nur gitterförmige Kugelpackungen betrachtet werden. Eine Kugelpackung ist **gitterförmig**, wenn die Mittelpunkte der Kugeln ein **Punktgitter** bilden. Ein Punktgitter im n -dimensionalen affinen euklidischen Raum E ist eine Teilmenge $\Gamma \subset E$ von der Form

$$\Gamma = \{0 + a_1v_1 + \dots + a_nv_n \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n\} .$$

Dabei ist $0 \in E$ ein Punkt im Raum E -und v_1, \dots, v_n sind reell linear unabhängige Translationsvektoren. Ebene Gitter haben wir schon früher kennengelernt, bei Bravais' Diskussion der Phyllotaxis. Räumliche Gitter werden wir später wegen ihrer kristallographischen Bedeutung systematisch studieren.

Das einfachste räumliche Punktgitter ist natürlich das Standardgitter $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ im euklidischen Standardraum \mathbb{R}^3 . Jedem Punkt p dieses Gitters

³¹Siehe Anmerkung 28.

können wir seine **Dirichletzelle** zuordnen. Das ist die Menge derjenigen Punkte des euklidischen Raumes, deren Abstand von p nicht größer ist als ihr Abstand von irgend einem anderen Gitterpunkt. Für das hier betrachtete einfachste räumliche Punktgitter sind die Dirichletzellen achsenparallele Würfel der Kantenlänge 1 mit den Gitterpunkten als Zentren. Sie bilden eine Raumteilung von \mathbb{R}^3 , und die Inkugeln dieser Würfel bilden eine gitterförmige Kugelpackung der Dichte $\pi/6$. Dies ist gewiß das einfachste Beispiel für eine gitterförmige Kugelpackung, aber natürlich hat diese Packung nicht die maximale Dichte.

Eine dichteste gitterförmige Kugelpackung ist gerade die kubisch dichteste Packung von Kepler. Um zu sehen, dass diese Packung gitterförmig ist, erinnern wir uns an eine frühere Konstruktion. Mittels dieser hatten wir die Raumteilung durch Rhombendodekaeder aus der Raumteilung durch Würfel gewonnen (p. 301). Dabei wurden die Zentren der Hälfte aller Würfel zu Zentren der Rhombendodekaeder. Wählen wir zu diesem Zweck diejenige Hälfte aus, die den Nullpunkt enthält, dann wird diese Menge von Zentren offenbar die folgende Menge:

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0(2)\} .$$

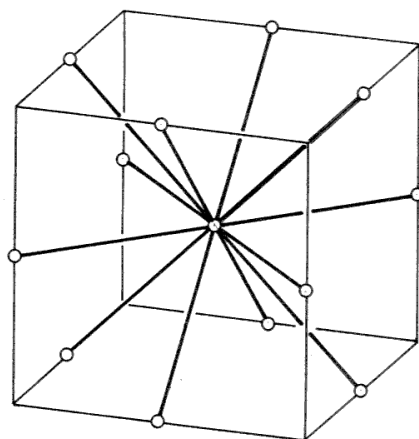
Dies ist offensichtlich ein Gitter, und die kubisch dichteste Kugelpackung von Kepler ist daher gitterförmig. Die Dirichletzellen dieses Gitters Γ sind gerade die Rhombendodekaeder der Raumteilung Keplers.

Betrachten wir eines dieser Rhombendodekaeder, etwa dasjenige mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Es hat 12 benachbarte Rhombendodekaeder. Mit jedem hat es eine seiner 12 rhombischen Flächen gemeinsam. Die Translationsvektoren, welche den Nullpunkt in die Mittelpunkte dieser 12 benachbarten Rhombendodekaeder verschieben, sind orthogonal zu den gemeinsamen rhombischen Flächen. Es sind die folgenden 12 aus den Standard-Basisvektoren e_1, e_2, e_3 gebildeten Vektoren:

$$\pm e_i \pm e_j , \quad i < j .$$

Man kann die 12 Nachbarzentren auch als die 12 Kantenmittelpunkte eines

achsenparallelen Würfels der Kantenlänge 2 mit Mittelpunkt 0 sehen, oder auch als die Ecken eines Kuboktaeders.



$$\Lambda = \{\pm e_i \pm e_j\}$$

Die aus den 12 Vektoren bestehende Menge Λ bildet offenbar eine sehr symmetrische Konfiguration. Sie ist invariant unter der Symmetriegruppe des Würfels. Das ist eine Gruppe der Ordnung 48. Darin enthalten ist die Untergruppe W der Ordnung 24, welche die beiden dem Würfel eingeschriebenen Tetraeder nicht vertauscht. Diese Gruppe W wird gerade von den Spiegelungen s_α an den Ebenen senkrecht zu den Vektoren $\alpha \in \Lambda$ durch den Nullpunkt erzeugt:

$$W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Lambda \rangle$$

Die Menge Λ ist eine Menge von Vektoren in einem euklidischen Vektorraum V mit den folgenden charakteristischen Eigenschaften.

- (0) $\Lambda \subset V$ ist endlich, erzeugt V und enthält 0 nicht.
- (1) $s_\alpha(\beta) \in \Lambda$ für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$, m.a.W. Λ ist invariant unter der von den Spiegelungen erzeugten Gruppe $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Lambda \rangle$.
- (2) $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$.

Eine Menge Λ von Vektoren in einem euklidischen Vektorraum V mit diesen Eigenschaften nennt man ein **Wurzelsystem**. Wurzelsysteme spielen eine zentrale Rolle in der Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen und Algebren und in vielen anderen Zusammenhängen. Man kann die Wurzelsysteme vollständig klassifizieren. Zunächst kann man jedes Wurzelsystem eindeutig in eine direkte Summe von irreduziblen Wurzelsystemen zerlegen. Es genügt also, diese zu klassifizieren. Wir setzen zusätzlich voraus, dass die betrachteten Wurzelsysteme reduziert sind. Das heißt: Aus $\alpha \in \Lambda$ und $n\alpha \in \Lambda$ folgt $n = \pm 1$. Dann hat man als Hauptergebnis der Theorie einen Klassifikationssatz der folgenden Form.

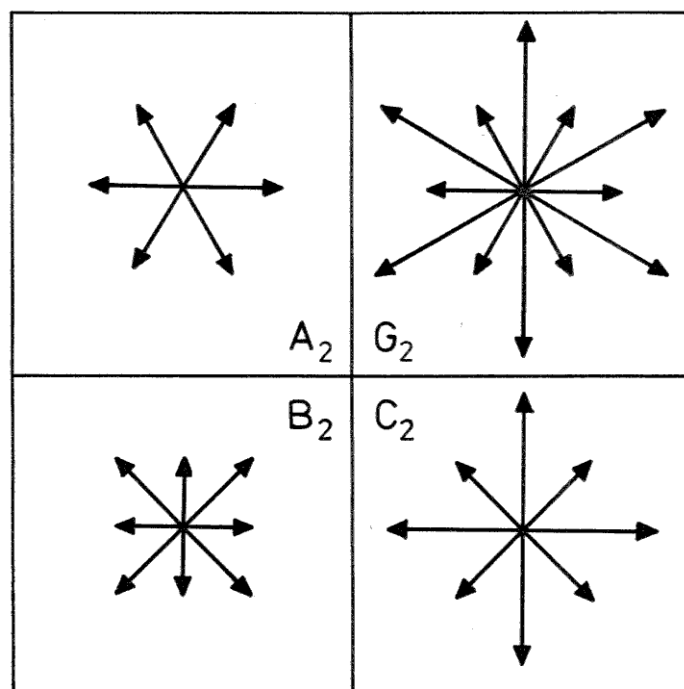
Die reduzierten irreduziblen Wurzelsysteme bilden vier unendliche Serien A_k , $k \geq 1$ sowie B_k , $k \geq 2$ und C_k , $k \geq 2$ und schließlich D_k , $k \geq 3$. Außer diesen gibt es nur noch fünf exzeptionelle Systeme: E_6 , E_7 , E_8 , F_4 und G_2 . Für die Anfangsglieder der Serien gibt es die folgenden Ausnahme-Isomorphismen: $B_2 \cong C_2$ und $A_3 \cong D_3$. Weitere Isomorphismen gibt es nicht.

Eine leicht verständliche, explizite Beschreibung dieser Wurzelsysteme, ihrer zugehörigen Gitter, der Spiegelungsgruppen W – die man auch **Weylgruppen** nennt – und vieler anderer wichtiger Daten findet man auf den zehn Tafeln am Ende des folgenden Buches von N. Bourbaki: “Groupes et Algèbres de Lie” [33].

Ich kann hier natürlich nicht die Theorie dieser Wurzelsysteme entwickeln, obwohl sie auf der Grundlage der linearen Algebra ohne weiteres verständlich ist – dafür steht in diesem Buch nicht genügend Raum zur Verfügung. Im übrigen ist das Buch von Bourbaki eine ausgezeichnete Quelle für alle Fragen, die Wurzelsysteme und ihre vielfältigen Beziehungen zu anderen mathematischen Strukturen betreffen. Insbesondere findet man dort natürlich einen Beweis des Klassifikationssatzes.

Hier gebe ich nur in einer kleinen Tabelle für die Systeme der unendlichen Serien das Wurzelsystem Λ und das davon erzeugte Gitter Γ an und zeige Bilder für die reduzierten irreduziblen Systeme A_2 , $B_2 \cong C_2$, G_2 . Die Gitter \mathbb{Z}^k bzw. \mathbb{Z}^{k+1} sind dabei die Standardgitter im euklidischen Standardraum \mathbb{R}^k bzw. \mathbb{R}^{k+1} .

A_K	$\Gamma = \{(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^{k+1} \mid x_0 + \dots + x_k = 0\}$ $\Lambda = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$
B_K	$\Gamma = \mathbb{Z}^k$ $\Lambda = \Lambda = \{\pm e_i\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid i < j\}$
C_k	$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^k \mid x_1 + \dots + x_k \equiv 0(2)\}$ $\Lambda = \{\pm 2e_i\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid i < j\}$
D_k	$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^k \mid x_1 + \dots + x_k \equiv 0(2)\}$ $\Lambda = \{\pm e_i \pm e_j \mid i < j\}$



Die Wurzelsysteme der vier unendlichen Serien

Wir sehen also: Die kubisch dichteste Kugelpackung von Kepler ist gitterförmig. Das Gitter der Kugelzentren ist das Wurzelgitter vom Typ A_3 , und die Konfiguration der 12 Kugeln, welche eine gegebene Kugel der Packung berühren, wird durch die 12 Wurzeln, d.h. die 12 Vektoren des Wurzelsystems A_3 beschrieben. Anders gesagt: Die Zentren dieser 12 Ku-

geln bilden die Eckpunkte eines Kuboktaeders. Dieses Kuboktaeder nennt man auch **Koordinationspolyeder** dieser Kugelpackung.

Ein wichtiger Vorteil einer gittertheoretischen Betrachtungsweise von Raumteilungs- und Lagerungsproblemen, den wir im Falle ebener Gitter bereits früher hervorgehoben haben, liegt darin, dass Translationsgitter besonders einfache Fundamentalbereiche haben, nämlich Parallelepipede. Zu jeder Wahl einer Basis v_1, \dots, v_k eines Gitters $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$ mit $0 \in \Gamma$, das heißt zu jeder Darstellung dieses Gitters Γ in der Form

$$\Gamma = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k\},$$

gehört eine Raumteilung von \mathbb{R}^k durch die folgenden Parallelepipede:

$$\{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \mid n_i \leq a_i \leq n_i + 1\}, (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k.$$

Bei der Untersuchung einer Raumteilung oder einer Lagerung in \mathbb{R}^k , auf der das Translationsgitter Γ operiert, genügt es dann, ihren Durchschnitt mit einem dieser Parallelepipede zu untersuchen.

Allerdings enthält die Wahl einer Basis immer eine gewisse Willkür. Bei ebenen Gittern haben wir schon gesehen, wie man durch Reduktionstheorie diese Willkür beschränken kann, und für räumliche Gitter werden wir das später systematisch studieren. Es bleibt jedoch die Tatsache, dass in gewissen Fällen auch die bestmögliche Wahl einer Basis die Symmetrie des Gitters nicht in dem Sinne unmittelbar zum Ausdruck bringt, dass diese direkt in der Symmetrie des Parallelepipeds wahrzunehmen wäre. Im Falle des Wurzelgitters Γ vom Typ A_3 beispielsweise operiert offensichtlich die Symmetriegruppe des Würfels auf dem Gitter Γ . Aber es gibt natürlich keine Basis von Γ mit einem Würfel als zugehörigem Paralleleiped. Durch die Wahl einer Gitterbasis von Γ wird also die kubische Symmetrie von Γ verschleiert. Da es – besonders in der Kristallographie – sehr wichtig ist, die Symmetrie leicht zu sehen, verzichtet man dann oft lieber auf die Bedingung, dass die Vektoren v_1, \dots, v_k das Gitter Γ erzeugen sollen, als auf die Symmetrie. Statt einer Basis von Γ wählt man lieber eine Basis eines Untergitters $\Gamma' \subset \Gamma$ von endlichem Index $|\Gamma/\Gamma'|$, eine Basis, deren Parallel-

epipede die Symmetrie von Γ sinnfälliger widerspiegeln. Dafür nimmt man in Kauf, dass diese Parallelepipede nun nicht mehr Fundamentalbereiche von Γ sind, sondern größer als diese: Das Verhältnis ihres Volumens zu dem eines Fundamentalbereichs von Γ ist gerade der Index von Γ' in Γ .

Als Beispiel betrachten wir das Wurzelgitter Γ vom Typ $A_3 \cong D_3$ unter diesem Gesichtspunkt.

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0(2)\}.$$

Als Untergitter Γ' , wählen wir das Gitter \mathbb{Z}^3 der Punkte von \mathbb{Z}^3 mit geraden Koordinaten. Es bestehen dann die folgenden Inklusionsrelationen von Gittern:

$$2\mathbb{Z}^3 \subset \Gamma \subset \mathbb{Z}^3.$$

Der Index von $2\mathbb{Z}^3$ in Γ ist 4, der von Γ in \mathbb{Z}^3 ist 2, und der von $2\mathbb{Z}^3$ in \mathbb{Z}^3 ist natürlich 8. Als Basis des Gitters $2\mathbb{Z}^3$ wählen wir $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$. Das hiervon aufgespannte Parallelepiped ist ein achsenparalleler Würfel der Kantenlänge 2. Die Gitterpunkte von Γ in diesem Würfel sind die 8 Eckpunkte des Würfels und seine 6 Flächenmittelpunkte. Deswegen bezeichnet man Γ auch als **flächenzentriertes kubisches Gitter**, und den Würfel mit dem gerade beschriebenen Punktsystem bezeichnet man als **flächenzentrierte kubische Zelle**. Das Gitter der kubisch dichtesten Kugelpackung ist also ein flächenzentriertes kubisches Gitter.

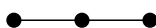
Als Fundamentalbereich dieses Gitters Γ kann man ein sehr spezielles Parallelepiped wählen: Ein spitzes Rhomboeder mit dem Winkel $\alpha = 60^\circ$. Die 8 Ecken dieses Rhomboeders sind die 6 Flächenmittelpunkte der flächen zentrierten kubischen Zelle zusammen mit 2 von ihren Eckpunkten, die einander räumlich-diagonal gegenüber liegen. Die Beziehung zwischen dem Würfel und diesem ihm einbeschriebenen Rhomboeder haben wir schon früher bei der Diskussion der verschiedenen Arten von Rhomboedern erörtert.

Fasst man das 60° -Rhomboeder als dasjenige Parallelepiped auf, welches von drei gleichlangen Vektoren aufgespannt wird, die paarweise Winkel von 60° miteinander bilden, dann entspricht dies der Wahl einer Basis von drei

Vektoren in Γ , deren Eckpunkte den drei Eckpunkten einer der Dreiecksflächen des als Koordinationspolyeder auftretenden Kuboktaeders entsprechen, z.B. $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$. Natürlich gibt es noch andere naheliegende Möglichkeiten für die Wahl einer Basis. Eine besonders naheliegende besteht darin, drei Eckpunkte einer quadratischen Fläche des Kuboktaeders zu wählen. Die drei entsprechenden Basisvektoren von Γ seien v_1, v_2, v_3 , in lückenloser Reihenfolge der entsprechenden Punkte des Vierecks. Die Winkel zwischen diesen Vektoren sind:

$$\begin{aligned}\angle(v_1, v_2) &= 60^\circ \\ \angle(v_2, v_3) &= 60^\circ \\ \angle(v_1, v_3) &= 90^\circ\end{aligned}$$

In der Theorie der Wurzelsysteme ist es üblich, v_2 durch $-v_2$ zu ersetzen. Dadurch erhält man statt der Winkel von 60° Winkel von 120° . Die so erhaltene Konfiguration von Basisvektoren stellt man dann durch das folgende Diagramm dar:

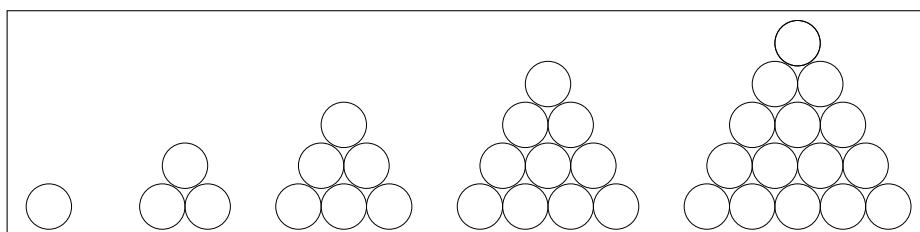


Dabei stehen die Punkte für die Vektoren, die Strecken für die Winkel von 60° und fehlende Strecken für Winkel von 90° . Man nennt derartige Diagramme **Dynkindiagramme**. Sie sollten aber besser **Coxeterdiagramme** heißen, denn sie wurden zuerst um 1934/35 von H.S.M. Coxeter eingeführt.

Die Wahl einer Basis für das Gitter der Zentren einer gitterförmigen Kugelpackung führt zu einer Erzeugung der Packung durch iterierte Verschiebung einer Kugel in Richtung eines der drei Basisvektoren. Benutzt man zunächst nur zwei von diesen Basisvektoren, so erhält man eine ebene Schicht von Kugeln. Der dritte Vektor verschiebt diese ebene Schicht in parallele Schichten, aus denen sich dadurch die dreidimensionale Packung aufbaut. Das bemerkenswerte an der kubisch dichtesten Packung ist dabei, dass im Falle der oben beschriebenen Basen bei richtiger Numerierung der Basisvektoren die Parallelverschiebung der Ebenen als dichtest-mögliches Aufeinanderlegen beschrieben werden kann. Im Falle der rhomboedrischen Basis

entsteht darüber hinaus die ebene Schicht durch dichtes Aneinanderfügen geradliniger Kugelreihen, die durch dichtes Aneinanderlegen von Kugeln entstehen. Solche Gitter nennen Conway und Sloane “**laminated**”, was man vielleicht durch “**Gitter mit Schichtaufbau**” übersetzen könnte. Offensichtlich ist das Wurzelgitter vom Typ A_3 das einzige dreidimensionale Gitter mit Schichtaufbau.

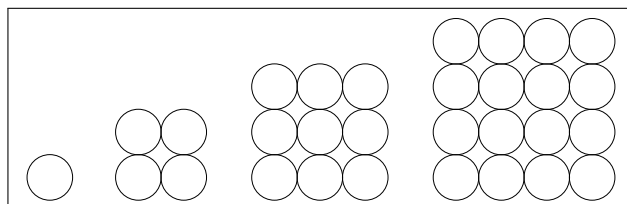
Ich finde es sehr bemerkenswert, dass Kepler in seiner Abhandlung “Strena seu de Nive Sexangula” [212] genau jene beiden Erzeugungsweisen der kubisch dichtesten Kugelpackung beschreibt, welche den beiden oben erwähnten kanonischen Wahlen einer Basis entsprechen. Der rhomboedrischen Basis entspricht der Aufbau aus hexagonal dicht gepackten ebenen Schichten, wobei jede Schicht in Lücken der vorhergehenden Schicht gelegt wird. Dafür gibt es, wie wir schon sahen, jeweils zwei Möglichkeiten. Nachdem aber die ersten zwei Schichten gelegt sind, ist die weitere Anordnung eindeutig bestimmt durch die Bedingung, dass die Packung gitterförmig sein soll. – Einen anschaulichen Ausschnitt aus der Packung erhält man, indem man aus endlich vielen aufeinanderfolgenden Schichten wie folgt Kugeln auswählt. In der obersten Schicht wählt man eine Kugel, in der darunter liegenden die drei, welche die erste Kugel berühren, in der Schicht darunter die 6, welche die vorigen drei berühren, in der nächsten Schicht 10, usw.



Man erhält so einen pyramidenförmigen Kugelhaufen mit der Symmetrie des Tetraeders, und die drei Kanten, die an einer Ecke der Grundfläche der Pyramide zusammenlaufen, entsprechen der rhomboedrischen Basis des Gitters.

Der zweite Aufbau durch Schichten geht von einer regulär quadratisch gepackten ebenen Schicht aus. In die Lücken dieser quadratischen Schicht legt man auf die einzig mögliche Weise eine zweite quadratische Schicht,

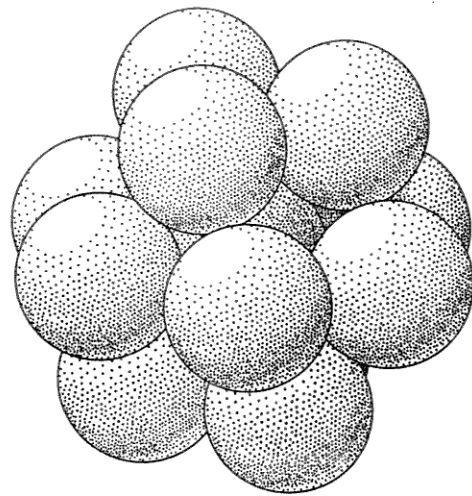
usw. ähnlich wie oben kann man wieder wie folgt einen Ausschnitt aus der Kugelpackung von einfacher Gestalt durch Auswahl geeigneter Kugeln in endlich vielen aufeinanderfolgenden Schichten bestimmen. In der obersten Schicht wählt man eine Kugel, in der darunter liegenden die 4, welche die erste berühren, in der nächsten die 9, welche die vorigen 4 berühren, dann 16 usw.



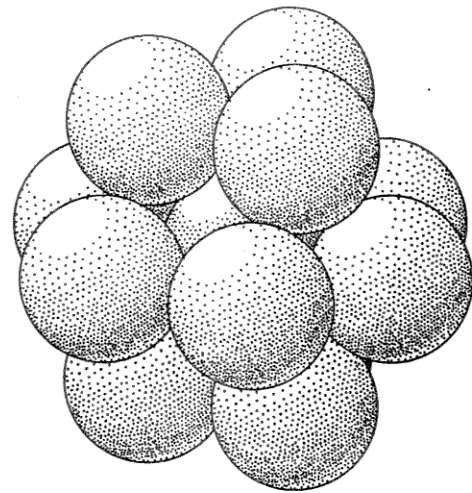
Man erhält so einen Kugelhaufen von der Form einer Pyramide. Die Grundfläche ist ein Quadrat, die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke. Die drei Kanten, die an einer Ecke der Grundfläche zusammenlaufen, entsprechen der oben beschriebenen Gitterbasis mit zwei Winkeln von 60° und einem Winkel von 90° .

Nachdem wir die kubisch dichteste Kugelpackung von verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet haben, wollen wir uns zum Vergleich auch die hexagonal dichteste Packung ansehen. Auch hier sind alle Kugeln in gleicher Weise von jeweils 12 sie berührenden anderen Kugeln umgeben, deren Zentren sich wieder als Ecken eines Koordinationspolyeders auffassen lassen. Dieses Polyeder ist jetzt jedoch nicht mehr ein Kuboktaeder, sondern ein nicht-archimedisches Polyeder mit 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen, und mit zwei verschiedenen Arten von Ecken. Wir haben dies Polyeder schon früher bei der Diskussion der Definition der archimedischen Polyeder konstruiert, indem wir das Kuboktaeder $(3, 4, 3, 4)$ längs eines Sechsecks aufgeschnitten und die beiden Hälften um 60° gegeneinander verdreht wieder zusammengesetzt hatten. Dieses Polyeder ist dual zur hexagonalen Wabenzelle.

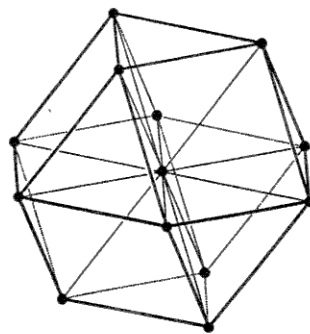
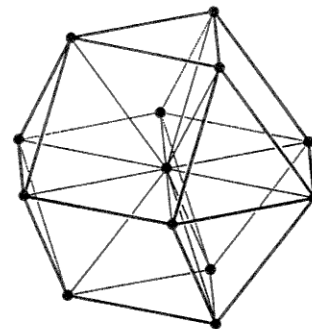
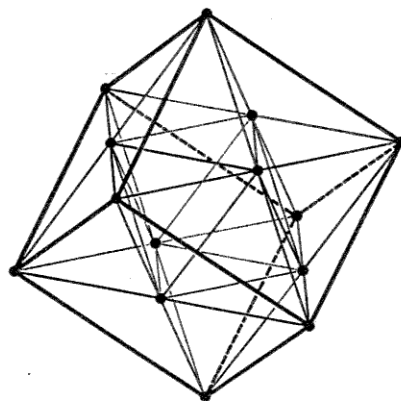
Die hexagonal dichteste Kugelpackung ist nicht gitterförmig. Denn zwei aufeinanderfolgende, in ihrer Ebene hexagonal dicht gepackte Schichten liegen ja genauso aufeinander wie bei der kubisch dichtesten Packung, und



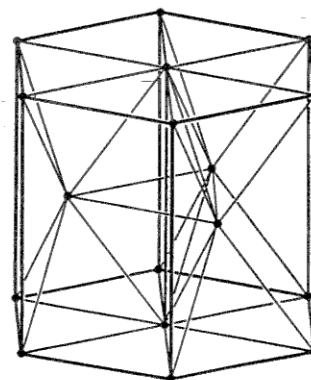
kubisch dichteste Packung



hexagonal dichteste Packung

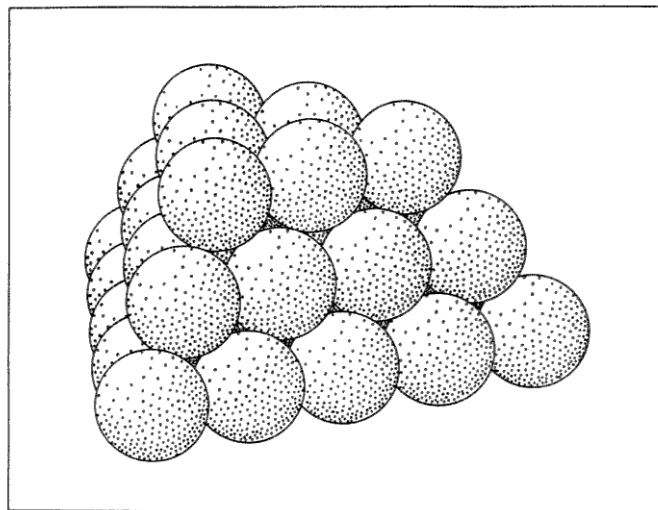
Koordinationspolyeder
kubisch dichteste PackungKoordinationspolyeder
hexagonal dichteste Packung

flächenzentrierte kubische Zelle

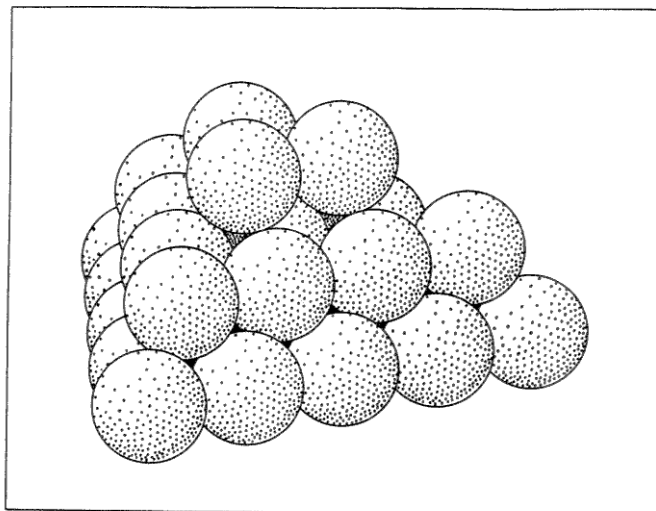


Zentren in einer hexagonalen Zelle

Abbildung 1.72: Koordinationspolyeder und Zellen der kubisch und hexagonal dichtesten Kugelpackungen



kubisch dichteste Packung



hexagonal dichteste Packung

Abbildung 1.73: Kubisch und hexagonal dichteste Kugelpackungen

bei gitterförmiger räumlicher Packung ist durch zwei aufeinanderfolgende Schichten der Rest der Anordnung schon eindeutig bestimmt. Lässt man jedoch von der hexagonal dichtesten Packung jede zweite Schicht fort, dann erhält man eine zwar nicht mehr dichteste, dafür aber gitterförmige Lagerung von Kugeln. Man kann daher die hexagonal dichteste Kugelpackung als die Vereinigung von zwei gegeneinander verschobenen und zueinander kongruenten gitterförmigen Packungen ansehen. Die Gitter dieser Packungen sind räumlich hexagonale Gitter. Damit ist folgendes gemeint. Die Gitter sind die orthogonale direkte Summe aus einem ebenen Wurzelgitter vom Typ A_2 und einem eindimensionalen Gitter. Sie sind also Wurzelgitter vom Typ $A_2 + A_1$. Als fundamentales Parallelepiped eines solchen räumlichen hexagonalen Gitters könnte man ein gerades Prisma mit einem 60° -Rhombus als Basis nehmen. Man zieht es jedoch wiederum vor, statt dessen einen größeren, aber dafür symmetrischeren Bereich zu verwenden, nämlich ein aus drei solchen Prismen zusammengesetztes hexagonales Prisma. Man denkt sich also den dreidimensionalen Raum in der offensichtlichen Weise in solche hexagonalen Zellen zerlegt. Die Zentren der hexagonal dichtesten Kugelpackung in einer solchen hexagonalen Zelle sind dann die 12 Ecken des hexagonalen Prismas, die 2 Mittelpunkte seiner beiden hexagonalen Flächen und die 3 Mittelpunkte von 3 der 6 trigonalen Prismen, aus denen die Zelle zusammengesetzt ist. Die begleitenden Bildseiten zeigen für die kubisch dichteste und die hexagonal dichteste Packung jeweils nebeneinander die 12 Berührungskugeln einer Kugel, die Koordinationspolyeder und die Zentren in einer Zelle, sowie einen Ausschnitt aus drei aufeinanderfolgenden Schichten (Abbildung 1.72, 1.73).

Es ist nützlich, die kubisch dichteste und die hexagonal dichteste Kugelpackung sowie die entsprechenden Raumteilungen durch Rhombendodekaeder und hexagonale Wabenzellen auch noch unter dem folgenden Gesichtspunkt zu betrachten, der zur bisherigen Betrachtungsweise in gewissem Sinne dual ist. Wenn wir bei diesen Packungen jedes Kugelzentrum mit den 12 Zentren der Nachbarkugeln durch eine Strecke verbinden, dann erhalten wir das Kantennetz einer Raumteilung des dreidimensionalen euklidischen Raumes durch Tetraeder und Oktaeder. Um sich dies klar zu machen, ist es am besten, die Zentren zweier aufeinanderfolgender ebener Schichten zu be-

trachten. Innerhalb der beiden Ebenen, in denen diese Zentren liegen, bilden die Kanten eine reguläre Flächenteilung durch Dreiecke. Jedes Zentrum ist innerhalb seiner Ebene mit 6 anderen Zentren verbunden. Zusätzlich ist jedes Zentrum der einen Ebene mit drei Zentren der anderen Ebene durch Kanten verbunden. Man sieht leicht, dass dies das Kantennetz einer Lagerung von Tetraedern und Oktaedern ist, welche die Schicht zwischen den beiden Ebenen ausfüllt. Im Inneren dieser von Tetraedern und Oktaedern gebildeten Schicht stoßen an jeder Dreiecksfläche ein Tetraeder und ein Oktaeder zusammen. Die freien Dreiecksflächen bilden zusammen die beiden Netzebenen, wobei in jeder Ebene jeweils Tetraederflächen und Oktaederflächen abwechseln. Durch diese Regeln ist der Aufbau einer solchen schichtförmigen Lagerung von Tetraedern und Oktaedern eindeutig bestimmt. Die Tetraeder einer solchen Lage zerfallen in zwei Arten; je nachdem, mit welcher der beiden ebenen Grenzflächen dieser Lage sie eine Dreiecksfläche gemeinsam haben. Es sind – in einem leicht zu präzisierenden Sinne – doppelt so viele Tetraeder vorhanden wie Oktaeder. Die nächste Bildseite zeigt zwei Ausschnitte aus einer solchen Lage von Tetraedern, einmal in orthogonaler Parallelprojektion auf die Netzebenen, zum anderen in orthogonaler Parallelprojektion auf eine andere Ebene (Abbildung 1.74). Das zweite Bild ist einem Lehrmaterial von H. Emde für Architekten entnommen: “Geometrie der Knoten-Stab-Tragwerke” [114]. Die Kantennetze derartiger Schichten von Tetraedern und Oktaedern können als geometrisches Modell für sehr stabile Knoten-Stab-Tragwerke dienen. Man kann auch mehrere Schichten übereinander packen oder die Packung in anderen Ebenen fortsetzen. Man erhält so ein flexibles Gestaltungsprinzip für die Konstruktion von Tragwerken für Dächer großer Hallen.

Dual zum Aufbau der Raumteilungen durch Rhombendodekaeder bzw. hexagonale Wabenzellen aus Schichten kann man nun Raumteilungen aus Tetraedern und Oktaedern aufbauen, indem man die gerade beschriebenen Schichten übereinander stapelt. Beim Hinzufügen einer neuen Schicht gibt es nur zwei Möglichkeiten: Entweder stoßen an der gemeinsamen Grenzfläche immer verschiedenartige Polyeder zusammen, d.h. Tetraeder mit Oktaedern, oder aber immer gleichartige: Tetraeder mit Tetraedern, Oktaeder mit Ok-

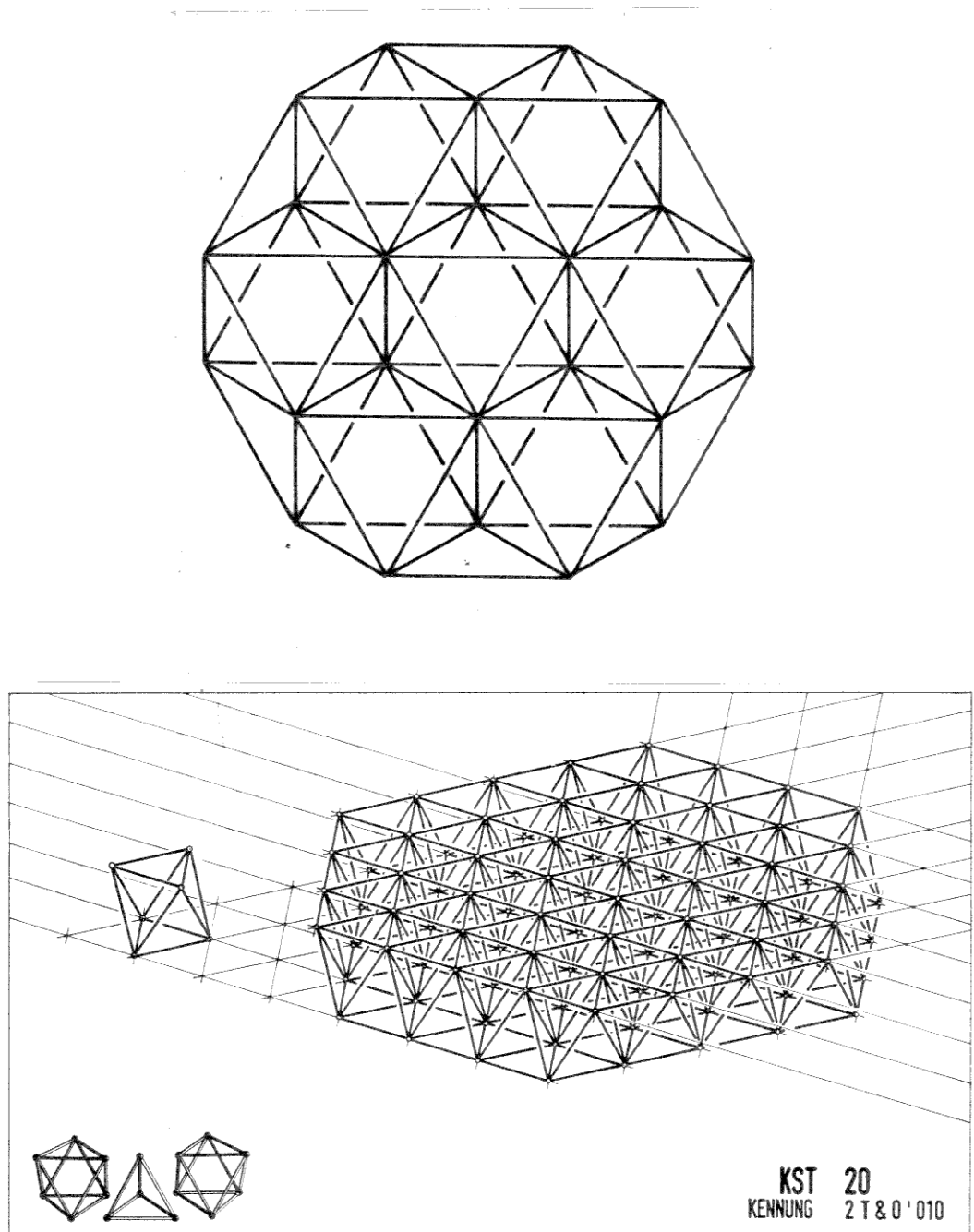


Abbildung 1.74: Tetraeder-Oktaeder-Kantennetz der kubisch und hexagonal dichtesten Kugelpackungen

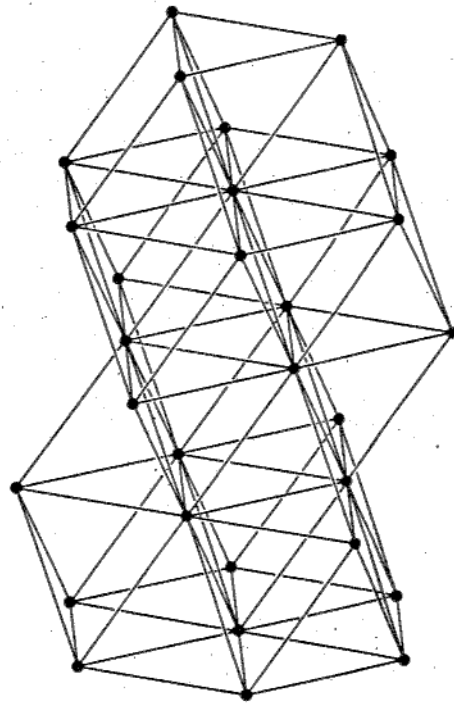
taedern. Wählt man stets die erste Möglichkeit, dann erhält man die duale Raumteilung zu Keplers Raumteilung durch Rhombendodekaeder. Wählt man stets die zweite Möglichkeit, dann bekommt man die duale Raumteilung zur Raumteilung durch hexagonale Wabenzellen. Wählt man bald die eine, bald die andere Möglichkeit, dann entstehen kontinuierlich viele verschiedene Raumteilungen durch Tetraeder und Oktaeder. Bei der Dualität entsprechen die Tetraeder denjenigen Ecken von Rhombendodekaedern bzw. hexagonalen Wabenzellen, in denen 3 Kanten eines solchen Polyeders zusammenlaufen. An einer solchen Ecke stoßen ja gerade 4 Rhombendodekaeder oder hexagonale Wabenzellen zusammen. Ihre 4 Zentren sind die Ecken des Tetraeders, und umgekehrt ist das Zentrum des Tetraeders gerade die Ecke des Rhombendodekaeders bzw. der hexagonalen Wabenzelle. Analog entsprechen die Oktaeder denjenigen Ecken von Rhombendodekaedern oder hexagonalen Wabenzellen, wo 6 derartige Polyeder zusammenstoßen. Ihre Zentren sind die Ecken des Oktaeders. Die Kanten der Oktaeder und Tetraeder entsprechen dual den Rhombenflächen der ursprünglichen Raumteilung und stehen auf diesen senkrecht. An jeder Kante stoßen zwei Tetraeder und zwei Oktaeder zusammen, im kubischen Fall jeweils abwechselnd ein Tetraeder und ein Oktaeder.

Geht man von einer kubisch dichtesten Packung aus, dann bilden die Oktaederzentren wieder die Zentren einer kubisch dichtesten Packung, und die so definierte Dualitätsbeziehung zwischen zwei kongruenten kubisch flächenzentrierten Punktgittern ist involutiv. Fasst man nämlich die Punkte des ersten Gitters wie früher als Mittelpunkte der Hälfte der Würfel einer regulären Raumteilung durch Würfel auf, dann sind die Punkte des zweiten Gitters die Mittelpunkte der anderen Hälfte der Würfel. Auch die Mittelpunkte der Tetraeder jeweils einer Art bilden die Zentren einer kubisch dichtesten Packung.

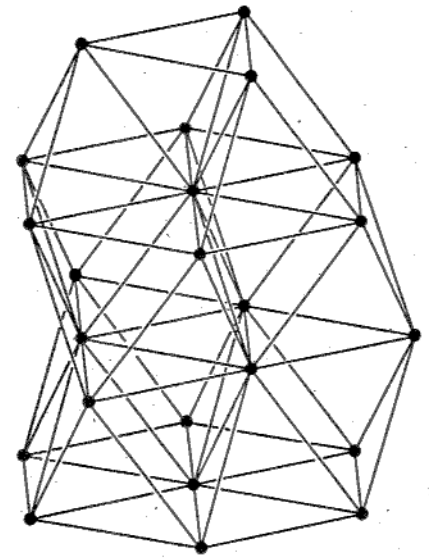
Geht man von einer hexagonal dichtesten Packung aus, dann bilden die Mittelpunkte der Tetraeder jeweils einer Art auch wieder die Zentren einer hexagonal dichtesten Packung. Hingegen bilden die Oktaederzentren in diesem Fall ein hexagonales Gitter.

Die folgenden beiden Abbildungen zeigen Ausschnitte aus dem

Tetraeder-Oktaeder-Kantennetz für die kubisch dichteste und die hexagonal dichteste Packung. In beiden Fällen sind die horizontalen Netzebenen hexagonal genommen. Die Ausschnitte wurden so gewählt, dass jeweils die Ecken eines vollständigen Koordinationspolyeders und einer kubisch-flächenzentrierten Zelle bzw. einer hexagonalen Zelle zu sehen sind.



kubisch dichteste Packung



hexagonal dichteste Packung

Die gerade entwickelte duale Betrachtungsweise der Raumteilungen ist auch für die Kugelpackungen von Belang, und zwar für die Beschreibung der **Lücken** zwischen den Kugeln. Allerdings ist es nicht einfach, diesen Begriff mathematisch formal zu fassen. Wie man leicht sieht, ist der Außenraum einer dreidimensionalen Kugelpackung zusammenhängend, besteht also, anschaulich gesprochen, aus einem Stück. Wie soll man dieses Gebiet in Bereiche zerlegen, die dem entsprechen, was man anschaulich mehr oder weniger deutlich als Lücke wahrnimmt? Eine partielle Lösung besteht darin, nur die Zentren der Lücken zu definieren, und zwar als die Punkte, in denen der Abstand von der Vereinigung der Kugelzentren ein lokales Maximum annimmt. Einen solchen Punkt nennen Conway und Sloane in ihrem Buch über Kugelpackungen ein **Loch**. Ein absolutes Maximum heißt bei ihnen ein **tiefes Loch**, jedes andere ein **seichtes Loch**. Bei der kubisch dichtesten Kugelpackung und der hexagonal dichtesten Packung sind die Löcher gerade die Ecken der Dirichletzellen, also der Rhombendodekaeder bzw. hexagonalen Wabenzellen, m.a.W. die Zentren der Oktaeder und Tetraeder. Die Oktaederzentren sind die tiefen Löcher, die Tetraederzentren die seichten. Darüber hinaus hat man bei diesen Packungen die Raumteilung in Oktaeder und Tetraeder, und es ist sinnvoll, den Durchschnitt eines solchen Oktaeders bzw. Tetraeders mit dem Außenraum der Kugelpackung eine **große Lücke** bzw. **kleine Lücke** zu nennen. In eine solche Lücke kann man eine kleinere Kugel so lagern, dass sie gerade die 6 bzw. 4 Kugeln der ursprünglichen Packung berührt, welche die Ecken des Oktaeders bzw. Tetraeders als Zentrum haben. Das Verhältnis ihres Radius zu dem der ursprünglichen Packung wäre dann $\sqrt{2}-1$ für die großen Lücken und $\sqrt{3/2}-1$ für die kleinen.

Das Nachdenken über Kugelpackungen ist kein müßiges geometrisches Spiel. Bei Kepler ist es ein Versuch, die sechseckige Form der Schneekristalle durch einen hypothetischen Aufbau aus kleinsten Teilchen zu erklären. Es ordnet sich so in den großen Plan der Weltharmonik ein, in den Versuch, den Grund für den harmonischen Bau des Kosmos in seinem Aufbau aus Elementen zu finden, die sich auf Grund ihrer einfachen, durch rationale Konstruktion fassbaren Geometrie regelmäßig zusammenfügen. Schon die

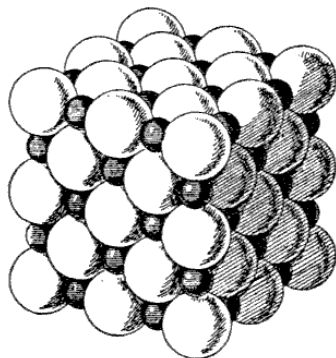
regulären Polyeder selbst wie auch die Flächen- und Raumteilungen werden in dieser Weise als regelmäßige Anordnung einfacher Elemente begriffen, und in diesem Sinne ist es zu verstehen, wenn Kepler von ihrer “Gestalt und Struktur” spricht. Auch Kugeln sind solche einfachsten, regelmäßig anzuordnenden Elemente, und so ist das Nachdenken über Kugelpackungen von allem Anfang an Teil jenes Suchens nach den “weltbildenden” Verhältnissen, Teil des Versuchs, den Grund für die wahrnehmbare Gestalt in nicht unmittelbar wahrnehmbaren, aber durch den denkenden Verstand klar erfassbaren geometrischen Strukturen zu finden.

Ein solches Denken ist nicht etwa nur der Ausdruck von Keplers ganz persönlichem Glauben, es ist spätestens seit Plato eine Grundtendenz unseres Versuchs, Wirklichkeit denkend zu erkennen. Ein Musterbeispiel für diese Bewegung des Denkens von der Gestalt hin zur Struktur ist die Geschichte der Kristallographie. Davon wird später noch mehr zu berichten sein. An dieser Stelle wollen wir über diese Geschichte einen großen doppelten Sprung tun, von Kepler zu Barlow, und von Barlow zu dem, was wir heute über die Struktur von Kristallen wissen.

1.7 Kristallstrukturen, Tammes Problem

Der englische Kristallograph *William Barlow* vermutete 1883 die Existenz von fünf sehr symmetrischen Kristallstrukturen [16], [17]. Zwei von diesen Strukturen waren die kubisch dichteste Kugelpackung und die hexagonal dichteste Kugelpackung. Die kubisch dichteste Packung hatte Kepler entdeckt. Die hexagonal dichteste entdeckte – soweit ich weiß – Barlow. Von diesen zwei Strukturen sind zwei weitere in sehr natürlicher Weise abgeleitet, indem bei den beiden dichtesten Packungen in jede oktaedrische Lücke wie oben beschrieben eine kleinere Kugel eingefügt wird. Aus der kubisch dichtesten Packung entsteht so eine Struktur, die heute **Natriumchlorid-Struktur** genannt wird, und aus der hexagonal dichtesten Packung entsteht die **Nickelarsenid-Struktur**. Barlow selbst vermutete bereits, dass das Kochsalz die Natriumchlorid-Struktur hat. Hier ist ein Bild dieser Struk-

tur aus einer Arbeit von Barlow [18, Figur 8]. Ein Beweis dieser Vermutung von Barlow über die Struktur von Kochsalz war im Jahre 1883 noch nicht möglich, und tatsächlich hat der Kristallograph Sohncke ihm damals widersprochen.



Mit der Entdeckung der Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen durch Max von Laue 1912 wurde ein Mittel zur Aufklärung der Struktur von Kristallen gefunden. 1913 veröffentlichten *W.L. Bragg* und *W.H. Bragg* die ersten Bestimmungen von Kristallstrukturen. Seitdem sind viele Tausende von Kristallstrukturen bestimmt worden. Das heutige Wissen über die Struktur der Kristalle stützt sich damit auf eine sehr große empirische Basis.

Es ist natürlich ganz unmöglich, dieses Wissen über Kristallstrukturen hier auszubreiten. Dafür fehlen mir der Raum und die Kenntnisse. Ich will an dieser Stelle nur exemplarisch über einige aus Kugelpackungen abgeleitete Strukturen berichten, und vorher will ich etwas zur Rolle geometrischer Modelle in der Kristallographie und Kristallchemie sagen. Für alle Einzelheiten muss ich auf die Lehrbücher dieser Disziplinen verweisen. Besonders empfehlen möchte ich das ausgezeichnete mehrbändige Werk von B.K. Vainshtein, V.M. Fridkin und V.L. Indenbom “Modern Crystallography” und zwar hier besonders Band II [353]. Zur Kristallchemie verweise ich auf L. Pauling: “Die Natur der chemischen Bindung” [282] und R.C. Evans: “Einführung in die Kristallchemie” [124].

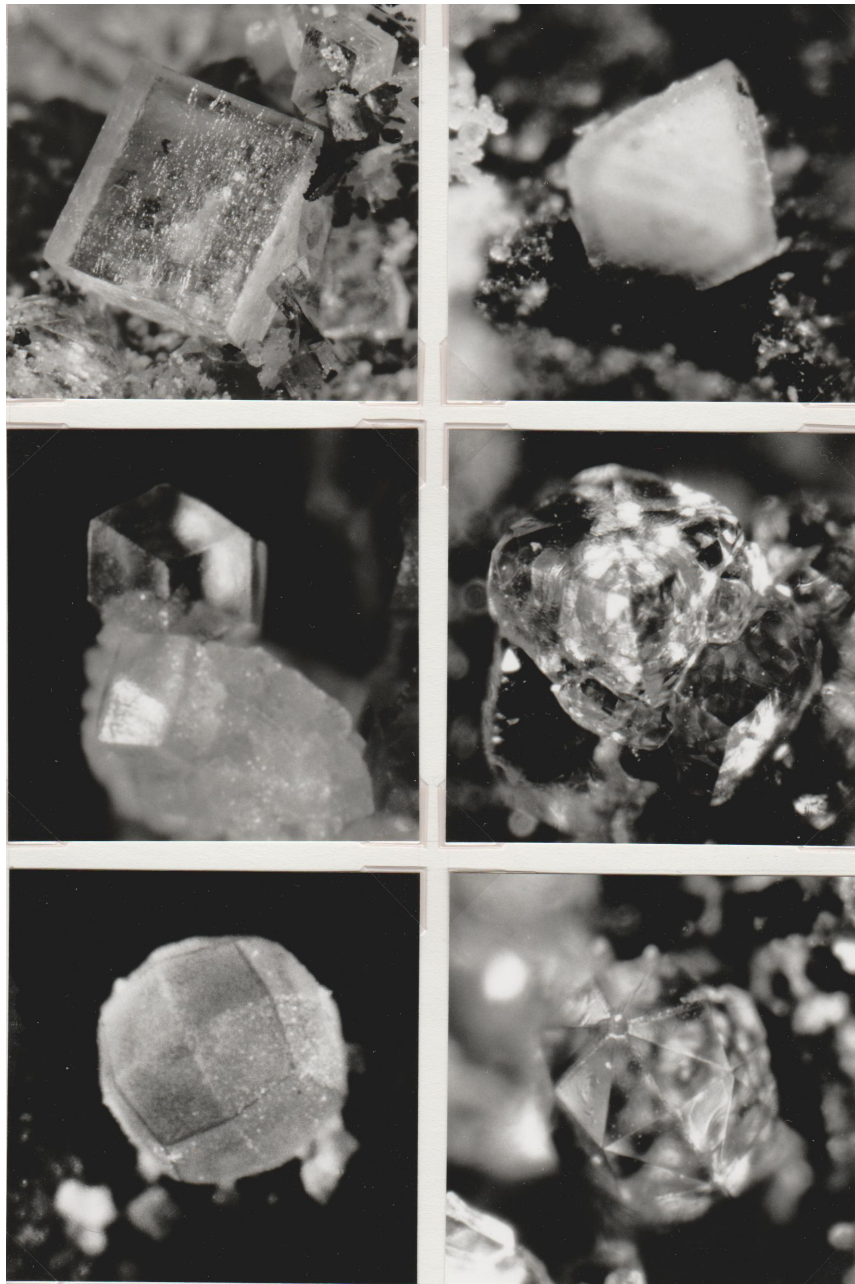


Abbildung 1.75: Einfache Kristallformen Fluorit aus der Grube Clara bei Wolfach. Vergrößerung: Hexaeder 20x, Oktaeder 110x, Rhombendodekaeder , Tetrakishexaeder 50x, Ikositetraeder 115x, Hexakisoktaeder 120x. Bilder von E. Brieskorn.

Kristallische Substanzen sind durch eine jeweils für diese Substanz spezifische regelmäßige Anordnung der Elemente ausgezeichnet, aus denen diese Substanz aufgebaut ist. Diese Elemente können Atome, Ionen, Moleküle und auch noch andere Einheiten sein. Jede reale Anordnung von Teilchen einer kristallinen Substanz erstreckt sich natürlich nur über einen endlichen Bereich und hat in aller Regel Defekte, d.h. Abweichungen von der Regelmäßigkeit. Für viele Zwecke genügt es jedoch, statt solcher realen Strukturen idealisierte Strukturen zu betrachten: unendlich ausgedehnte vollkommen regelmäßige Strukturen im 3-dimensionalen euklidischen Raum. Vom mathematischen Standpunkt aus ist die grundlegende gemeinsame charakteristische Eigenschaft aller dieser idealen Strukturen die Tatsache, dass ihre Symmetriegruppen **kristallographische Gruppen** sind. Eine kristallographische Gruppe ist eine Gruppe von Isometrien des 3-dimensionalen euklidischen Raumes, so dass die Untergruppe der in ihr enthaltenen Translationen ein Gitter in dem zugehörigen Translationsvektorraum ist. Die kristallographischen Gruppen sind nach Bieberbach dasselbe wie die diskreten Isometriegruppen mit kompaktem Fundamentalbereich, über die wir im Zusammenhang mit dem 18. Hilbertschen Problem berichtet haben, und es gibt, wie damals schon erwähnt, 230 Typen solcher Gruppen. Darüber wird später ausführlicher berichtet. Hier geht es eher darum, dass sehr viele ganz verschiedene Kristallstrukturen die gleiche Symmetriegruppe haben können. Die Zahl der bekannten Typen von Kristallstrukturen ist sehr viel größer als die Zahl 230 der Typen kristallographischer Gruppen. Die Beschreibung einer Kristallstruktur beinhaltet also sehr viel mehr als die Angabe einer Symmetriegruppe.

Was aber ist nun eigentlich gemeint, wenn von Kristallstruktur die Rede ist? Der Mathematiker erwartet heute als Definition einer bestimmten Art von Struktur in der Regel eine genaue Festlegung der Beziehungen zwischen den Elementen der Struktur, wobei die Elemente selbst entweder unter Benutzung anderer, als bekannt angesehener Strukturen bestimmt oder aber nur implizit durch die Art ihrer Beziehungen charakterisiert werden. Einen derart geschlossenen Strukturbegriff darf man von einem nicht mathematisch denkenden Naturwissenschaftler nicht erwarten. Der Kristallograph

wird dafür offen sein, als Elemente von Kristallstrukturen Atome ebenso zu akzeptieren wie Ionen oder Moleküle bis hin zu riesigen organischen Molekülen oder gar Viren. Und in die Beschreibung der Struktur wird eben alles eingehen, was er experimentell oder theoretisch darüber herausfinden kann: nicht nur die räumliche Anordnung der Struktureinheiten, sondern auch die verschiedenen Arten von Wechselwirkung zwischen diesen Elementen, die Elektronendichte, statistische Abweichungen von der Regelmäßigkeit der Anordnung, Defekte und vieles andere. Zum Verhältnis einer solchen mehr oder weniger realistischen Beschreibung der Kristallstrukturen auf experimenteller und theoretischer Grundlage zu rein geometrischen Modellen dieser Strukturen möchte ich aus dem Abschnitt 1.5.1 des Buches von Vainshtein zitieren.

1.5.1. Das physikalische und das geometrische Modell eines Kristalls.

Die Theorie der Kristallstruktur, das heißt die Theorie ihres Aufbaus aus einer Anordnung von aufeinander wirkenden Atomen, beruht auf den allgemeinen Prinzipien der Thermodynamik, der Festkörperphysik und der Quantenmechanik. Zugleich jedoch ist das Ergebnis dieser Wechselwirkung von erstaunlicher geometrischer Einfachheit: In der Einheitszelle einer dreidimensional periodischen Struktur nehmen die Atome in ganz bestimmten Abständen voneinander ganz bestimmte Positionen ein.

Gerade die Betrachtung dieser Geometrie ohne Berücksichtigung ihrer physikalischen Ursachen führt unter Hinzunahme gewisser relativ einfacher physikalischer oder chemischer Daten, die ebenfalls geometrisiert werden, zum Verständnis vieler Regelmäßigkeiten der atomaren Struktur von Kristallen.

Das geometrische Modell eines Kristalls berücksichtigt die Anordnung seiner strukturellen Einheiten, d.h. der Atome oder Moleküle, die Abstände zwischen ihnen und ihre Koordination. Unter Benutzung eines der kristallchemischen Radiensysteme kann man Atome als starre Kugeln modellieren und Moleküle als fe-

ste Körper von komplizierter Gestalt. Man kann dann Packungen solcher Kugeln oder Körper untersuchen. Diese formale geometrische Betrachtungsweise wird dadurch ergänzt, dass man die Natur der chemischen Bindung zwischen den Atomen berücksichtigt: Man untersucht stabile Gruppierungen von Atomen – Koordinationspolyeder, Komplexe, Moleküle usw. – und ihre Formen und Symmetrien sowie deren Beziehung zur räumlichen Symmetrie des Kristalls.

Das geometrische Modell eines Kristalls ist eine außerordentlich stark vereinfachte Abwandlung seines physikalischen Modells. Der geometrische Ansatz war der Ausgangspunkt für die Entwicklung von Begriffen zur Erfassung der atomaren Struktur von Kristallen. Er ist seiner Natur nach beschränkt und kann nicht den Anspruch erheben, Kristallstrukturen in all ihren Einzelheiten zu erklären. Dennoch ist er eine wirkliche Hilfe bei der Formulierung und Beschreibung einer Reihe von Gesetzmäßigkeiten der Kristallstrukturen in einfacher und bildhafter Form. [353, p. 87f. (Übersetzung. E.B.)]

Das ist eine sehr klare Beschreibung der Rolle der Geometrie bei der theoretischen “Erklärung” realer Strukturen aus moderner Sicht. Sie erscheint nicht mehr, wie bei Kepler, als der eigentliche Grund für die Existenz der Struktur, sondern als erfolgreiches Hilfsmittel zu ihrer Beschreibung. Allerdings wäre aus philosophischer Sicht wohl anzumerken, dass damit das Problem, warum denn der geometrische Ansatz Erfolg hat, nicht verschwindet, ferner auch, dass in der theoretischen Physik und besonders in der Quantenmechanik des Atoms sehr viel Geometrie steckt, und schließlich, dass letzten Endes auch diese Physik wohl nicht erklärt, sondern nur beschreibt.

Ansonsten will ich dem klaren Text der Kristallographen nichts hinzufügen als einige Erläuterungen und einige nur skizzenhaft ausgeführte Beispiele geometrischer Modelle von Kristallstrukturen.

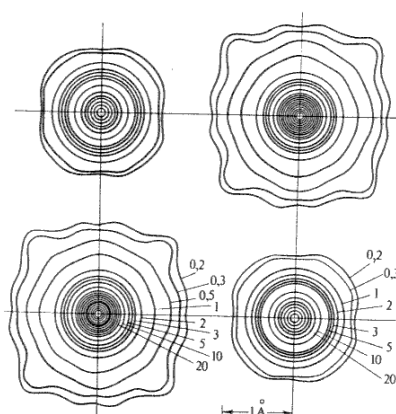
Die erste Erläuterung betrifft die **kristallchemischen Radiensysteme**. Wenn man ein Atom oder ein Ion im geometrischen Modell durch eine

Kugel darstellen will, muss man ihm insbesondere einen Radius zuordnen. Das ist aber ein nicht triviales Problem. Ein Atom oder ein Ion wird sowohl als einzelnes Teilchen wie auch als Teilchen im Verband der Kristallstruktur adäquat durch mehr oder minder vereinfachte quantenmechanische Modelle beschrieben. Dabei interessieren insbesondere die Zustände der äußeren Elektronenhüllen. Diese werden durch Wellenfunktionen ψ beschrieben, die man als Lösungen einer Schrödingergleichung erhält. Da man sich den Zustand eines Elektrons angenähert als eine bahnartige Bewegung vorstellt, bezeichnet man derartige Wellenfunktionen von Elektronen in einem Atom als Orbitale. Die Orbitale der verschiedenen Elektronen in ihren jeweiligen Zuständen haben eine interessante Geometrie. Manche haben sphärische Symmetrie, aber andere eben nicht. Da dies so ist, stellt ein sphärisches Modell in jedem Fall eine starke Vereinfachung dar. Außerdem ist fast a priori klar, dass es keine kanonische Definition für den Radius eines Atoms oder eines Ions geben kann. Es zeigt sich jedoch, dass man auf verschiedenen Wegen für die Elemente der periodischen Systems Systeme von Radien definieren kann, so dass ein derartiges kristallchemisches Radiensystem jeweils für eine gewisse Klasse von Kristallstrukturen eine angemessene geometrische Modellierung der Atome einer Art durch Kugeln mit dem Radius ermöglicht, der für dieses Element durch das System festgelegt wird

Es gibt, wie gesagt, eine ganze Reihe derartiger Radiensysteme. Sie werden auf verschiedenen Wegen entweder aus dem theoretischen quantenmechanischen Modell abgeleitet oder experimentell durch Messen und Vergleichen verschiedener, aber ähnlicher Kristallstrukturen gewonnen. Ein Beispiel für einen auf theoretischem Wege definierten Atomradius ist der **orbitale Radius** r_0 der äußersten Elektronenhülle. Ist $D(r)$ das Integral der Elektronendichte $|\psi|^2$ über die Sphäre vom Radius r , dann ist r_0 derjenige Radius, für den die Funktion $D(r)$ ihr Maximum annimmt. Ein experimentell ermitteltes System von **Atomradien** r_{at} erhält man durch Messen des kürzesten Abstandes d zweier Atome in einer Kristallstruktur des betreffenden Elementes. Der Atomradius wird dann vorläufig einfach durch $r_{at} = d/2$ definiert. Da ein Element in verschiedenen Strukturen kristallisieren kann, und auch andere Kristallstrukturen als die von Elementen zu berücksichtigen

sind, liefern verschiedene Messungen verschiedene vorläufige Werte, und das endgültige Radiensystem entsteht dann durch Abgleichung aller dieser Werte für das ganze System der Elemente.

Von den Atomradien wohl zu unterscheiden sind die **Ionenradien**. Bei Kationen können diese sehr viel kleiner sein als die entsprechenden Atomradien. Verliert beispielsweise ein Natriumatom das einzige Elektron seiner äußeren Elektronenhülle, dann wird die danach kommende innere Elektronenhülle des Natriumatoms für das so entstehende positive Natriumion Na^+ zur äußeren, und der orbitale Radius $r_0(\text{Na}^+)$ des Kations ist erheblich kleiner als der orbitale Radius $r_0(\text{Na})$ des Atoms. Fügt man andererseits den 7 Elektronen der äußeren Hülle eines Chloratoms ein achttes hinzu, dann ist der orbitale Radius $r_0(\text{Cl}^-)$ des so entstehenden Chloranions nur geringfügig größer als der orbitale Radius $r_0(\text{Cl})$ des Chloratoms. Man darf jedoch nicht erwarten, dass diese orbitalen Radien der Ionen das gesuchte System von Ionenradien bilden können. Denn jedes kristallographische Radiensystem soll so sein, dass im entsprechenden geometrischen Modell die Kugeln, die unmittelbar benachbarte Atome oder Ionen modellieren, einander berühren oder doch nahezu berühren. Für das Radiensystem bedeutet dies, dass es nahezu additiv sein muss: Der Abstand benachbarter Atome muss ungefähr gleich der Summe der Atom- bzw. Ionenradien der entsprechenden Elemente sein. Für die orbitalen Radien der äußeren Hüllen von Ionen in Zonenkristallen ist diese Bedingung nicht erfüllt. Vielmehr liegt zwischen den entsprechenden Schalen eine Zone, in der die Elektronendichte des Gesamtsystems sehr geringe Werte annimmt. Zum Beispiel zeigt die folgende, aus Vainshtein [353] übernommene Abbildung die durch Röntgenstrukturanalyse ermittelte Elektronendichte für einen Schnitt durch ein Natriumchloridkristall. Die größeren Regionen gehören zu den Cl^- -Anionen, die kleineren zu den Na^+ -Kationen. Der Abstand von einem Kation zu einem benachbarten Anion ist 2.8202 Å.



Damit ergibt sich ein Ansatz zur Ermittlung eines Systems von **physikalischen Ionenradien** r_{ph} . Man misst für eine große Anzahl von Ionenkristallen auf der Verbindungsstrecke von zwei benachbarten Ionenzentren die Abstände der entsprechenden beiden Maxima von dem Punkt, wo die Elektronendichte ihr Minimum annimmt. Dies gibt vorläufige Meßwerte für die Ionenradien der beiden Ionen. Durch Abgleich erhält man das System der Radien r_{ph} . Diese hängen jedoch nicht nur von der Zonenart ab, sondern auch von ihrer Koordination, d.h. der Anzahl der unmittelbar benachbarten Ionen der entgegengesetzten Art. Beim Natriumchlorid ist diese für beide Ionenarten gleich 6.

Ein etwas anderes Radiensystem bilden die sogenannten effektiven Ionenradien r_i . Sie werden durch Messen, Vergleichen und Abgleichen aus den Ionenabständen einer Reihe von Ionenkristallen und aus anders begründeten Annahmen über die Radien einzelner Ionenarten abgeleitet (siehe z.B. Pauling, loc. cit.).

Die folgende kleine Tabelle gibt die verschiedenen hier erwähnten Radien für Na, Na⁺, Cl, Cl⁻ und für 6-fache Koordination in Angström.

Natrium-Radien	Chlor-Radien	Summe
$r_{at}(\text{Na}) = 1,89$	— — — — —	
$r_0(\text{Na}) = 1,713$	$r_0(\text{Cl}) = 0,725$	2.438
$r_0(\text{Na}^+) = 0,278$	$r_0(\text{Cl}^-) = 0,742$	
$r_{ph}(\text{Na}^+) = 1,16$	$r_{ph}(\text{Cl}^-) = 1,67$	2.830
$r_i(\text{Na}^+) = 1,02$	$r_i(\text{Cl}^-) = 1,81$	2.830

Wie man sieht, gibt sowohl die Summe der physikalischen als auch die der effektiven Ionenradien fast genau den experimentell ermittelten Abstand von 2.82 Å. Allgemein liegen die Differenzen zwischen den realen gemessenen Werten und denjenigen, die sich aus idealen geometrischen Strukturmodellen und derartigen modernen Radiensystemen ergeben, bei einfachen Strukturen in der Grenordnung von nur 1 – 3 %. Soviel zu den kristallchemischen Radiensystemen.

Die zweite Erläuterung betrifft die Natur der **chemischen Bindung** zwischen den Atomen, bzw. Ionen oder Molekülen, durch welche diese Struktureinheiten in der Kristallstruktur zusammengehalten werden. Der Begriff der chemischen Bindung wurde seit der Mitte des 19. Jahrhunderts in der Strukturchemie entwickelt. Sie beinhaltet die Vorstellung von irgendwelchen Kräften, durch welche mehrere Atome oder Atomgruppen so fest zusammengehalten werden, dass es dem Chemiker angebracht erscheint, sie als ein neues, selbständiges Ganzes zu betrachten (Pauling, loc. cit., p. 4). Im Unterschied zu der klassischen liefert die moderne Strukturchemie ein bis in die Einzelheiten gehendes Bild vom Bau der Stoffe, das nicht nur die Atomanordnung einschließt sondern auch die Elektronenverteilung in Molekeln und Kristallen. Die theoretische Grundlage dieses Bildes bilden die allgemeinen Prinzipien der Quantentheorie und speziell die Quantenchemie, die experimentellen physikalischen Techniken wie die Röntgenstrukturanalyse. Wenn man von diesem modernen Bild als dem realistischeren ausgeht, erscheint jede chemische Bindung als ein Zustand der äußeren Elektronen eines ge-

benen multiatomaren Systems. Die klassischen Unterscheidungen verschiedener Bindungsarten interpretieren sich in diesem Rahmen als der Versuch, im Kontinuum aller möglichen Zustände qualitativ verschiedenartige Typen von Zuständen zu unterscheiden. So gesehen ist von vornherein nicht zu erwarten, dass diese Typen rein auftreten, und dass für jede Kristallstruktur eine eindeutige Zuordnung zu einem bestimmten Typ möglich ist. Die Erfahrung und die theoretische Analyse zeigt jedoch andererseits, dass diese qualitativen Unterscheidungen eine gewisse Berechtigung haben, und dass es zweckmäßig ist, sie bei der Modellierung von Kristallstrukturen mit in Betracht zu ziehen.

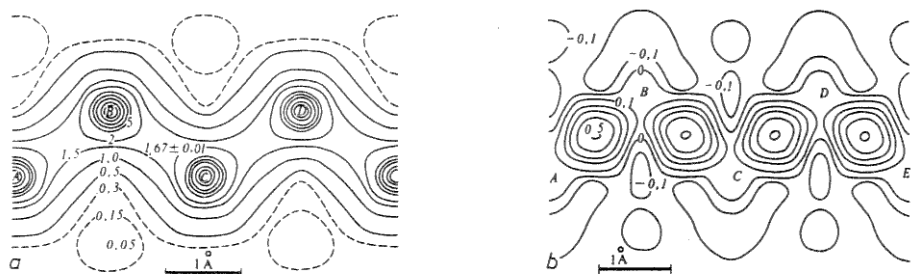
Man unterscheidet bei der Bindung in Kristallstrukturen die folgenden Typen:

- (1) Ionenbindung,
- (2) covalente Bindung,
- (3) metallische Bindung,
- (4) Van der Waals-Bindung,
- (5) Wasserstoff-Bindung.

Ich beschränke mich auf einige Bemerkungen über die ersten drei Bindungsarten. Dies sind die starken Bindungen. Sie unterscheiden sich voneinander durch die Art der Verteilung der äußeren Elektronen. Am einfachsten zu verstehen ist die **Ionenbindung**. Bei ihr hat die Elektronendichte ausgeprägte Maxima in der Umgebung der Zentren der Atome und sehr niedrige Werte in den Zwischenräumen. Die Atome sind teilweise ionisiert, und die Bindung lässt sich als Wirkung ungerichteter Coulombkräfte zwischen den positiv geladenen Kationen und den negativ geladenen Anionen verstehen. Typische Beispiele für Ionenkristalle sind die Halogenide der Alkalimetalle, z.B. Natriumchlorid.

Die **covalente Bindung** ist dadurch charakterisiert, dass benachbarte Atome Elektronen ihrer äußeren Hüllen teilen und sich so – im Gegensatz

zur Ionenbindung – zwischen den Zentren in der Umgebung eines gewissen Bereichs der verbindenden Strecken eine relative Erhöhung der Elektronendichte einstellt. Das Wort relativ bezieht sich hier zum einen auf den Vergleich mit der Ionenbindung, zum anderen auf den Vergleich mit Bereichen, die nicht auf den Verbindungsstrecken zwischen den Zentren liegen. Die absoluten Werte dieser relativen Erhöhung sind jedoch so gering im Vergleich zu der hohen Elektronendichte in der Umgebung der Zentren, dass sie in einem Niveaulinienbild der gesamten Elektronendichte nicht unmittelbar wahrnehmbar sind. Erst wenn man die Elektronendichte der nicht an der Bindung beteiligten inneren Elektronenhüllen abzieht, zeigt die so entstehende Differenzelektronendichte deutlich die erwähnte relative Erhöhung. Ein klassisches Beispiel für eine Kristallstruktur mit covalenter Bindung ist der Diamant. Jedes Kohlenstoff-Atom eines Diamanten ist von vier anderen unmittelbar benachbarten Kohlenstoff-Atomen umgeben. Das Koordinationspolyeder ist ein Tetraeder. Die beiden folgenden Abbildungen, die aus dem Buch von Vainshtein [353, p. 46] stammen, zeigen für die Elektronendichte und die Differenzdichte experimentell ermittelte Niveaulinien für einen ebenen Schnitt durch ein Diamantgitter. Die Schnittebene ist durch ein Atom und zwei seiner Nachbaratome gelegt. Das System der Strecken, die ein Atom mit seinen vier Nachbaratomen verbinden, schneidet in dieser Ebene eine Familie von parallelen Zickzack-Linien aus.



Covalente Bindungen können sich nur in gewissen Richtungen herstellen, die durch die Möglichkeiten der Kombination der Orbitale der beteiligten Atome beschränkt sind. Dementsprechend bestehen starke Beschränkungen

für die Koordination bei der Konstruktion von geometrischen Modellen für Kristallstrukturen mit überwiegend covalenter Bindung.

Bei der **metallischen Bindung** schließlich sind die gemeinsamen äußeren Elektronen sozusagen frei beweglich mit nahezu konstanter Dichte in den Zwischenräumen zwischen den Atomen gleichmäßig verteilt. Dies ist die vorherrschende Bindungsart in den Kristallstrukturen metallischer Elemente und intermetallischer Verbindungen.

Bevor wir nun einzelne Beispiele für Typen von Kristallstrukturen betrachten, wollen wir ein wichtiges allgemeines Prinzip für die Bildung solcher Strukturen formulieren. Das grundlegende physikalische Prinzip ist natürlich, dass die Energie der realen Anordnung der Teilchen in einer bestimmten Kristallstruktur geringer ist als die Energie anderer potentieller Anordnungen, die sich von der realen hinreichend wenig unterscheiden. Ich möchte die Anwendung dieses Prinzips am Beispiel eines Ionenkristalls mit Natriumchlorid-Struktur illustrieren.

Der Hauptbeitrag zur potentiellen Energie eines solchen Kristalls kommt von der Coulombschen Wechselwirkung der Ionen. Gleichgeladene Ionen stoßen sich ab, entgegengesetzt geladene ziehen sich an. Zusätzlich zur Coulomb-Wechselwirkung tritt bei Annäherung und Überlappung der äußeren Elektronenschalen eine charakteristische Abstoßung auf. Sie wirkt der Coulombschen Anziehung verschieden geladener Ionen entgegen, so dass diese bei einem bestimmten Abstand voneinander ins Gleichgewicht kommen.

Das Coulombsche Potential eines punktförmigen Teilchens mit der Ladung q im Abstand r vom Teilchen ist q/r . Es sei e die Ladung eines Elektrons, und z_i, z_j ganze Zahlen. Die potentielle Energie eines Paares von Ionen mit den Ladungen $z_i e, z_j e$ im Abstand r_{ij} ist dann gleich $z_i z_j e^2 / r_{ij}$. Für eine endliche Menge I von Ionen erhält man ihre Energie durch Summation über alle ungeordneten Paare von verschiedenen Ionen $i, j \in I$. Beim Übergang zu einem idealisierten unendlichen Kristallgitter hätte die Bildung einer solchen Doppelsumme keinen Sinn. Man betrachtet statt dessen die potentielle Energie pro Ion, d.h. man fixiert ein $i \in I$ und summiert über alle $j \neq i$. Wir werden sehen, dass bei der Bildung einer derartigen unendlichen Sum-

me Vorsicht geboten ist. Geeignete Summationsprozesse lassen sich jedoch rechtfertigen, und man erhält dadurch für einen idealisierten Ionenkristall die potentielle Coulomb-Energie V pro Ion in der Form

$$V = -\frac{Ae^2z^2}{R} .$$

Dabei ist $\pm z$ die Anzahl der Elementarladungen der Kationen und Anionen des *NaCl*-Gitters, und R der Minimalabstand zwischen einem Kation und einem Anion. A ist eine für die Kristallstruktur charakteristische Konstante, die man **Madelung-Konstante** nennt, weil *Madelung* in einer klassischen Arbeit zum ersten Mal eine Methode zu ihrer Berechnung angegeben hat (E. Madelung: "Das elektrische Feld in Systemen von regelmäßig angeordneten Punktladungen" [242]). Als Beispiel berechnet Madelung die Konstante A für die Natriumchlorid-Struktur und erhält nach wenigen Schritten als approximativen Wert 1.744. Ein genauerer Wert ist:

$$A = 1.74756 \dots .$$

Die Berechnung dieser Konstanten führt auf sehr interessante mathematische Probleme, auf die wir nachher noch zurückkommen werden. Zunächst wollen wir die Diskussion der potentiellen Energie des Kristallgitters zu Ende führen. Die abstoßende andere Wechselwirkung leistet ebenfalls einen Beitrag zur potentiellen Energie. Diesen setzt man nach Max Born in der Form Be^2/R^m an, wobei der Koeffizient B und der Exponent m auf Grund von empirischen Daten wie der Kompressibilität des Kristalls angenähert zu bestimmen sind. Insgesamt erhält man so für die potentielle Energie U pro Ion:

$$U = -\frac{ae^2z^2}{R} + \frac{be^2}{R^m} .$$

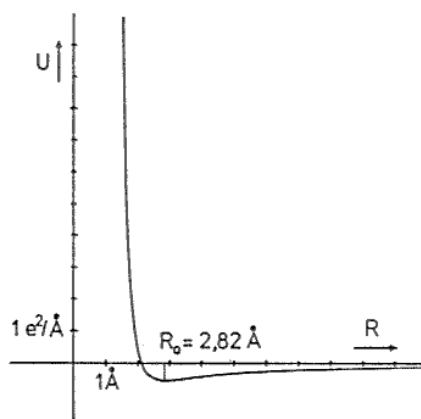
Diese Funktion von R hat ihr Minimum in der einzigen Nullstelle R_0 der Ableitung, d.h. in

$$R_0 = \left(\frac{kB}{z^2A} \right)^{\frac{1}{m-1}} .$$

Wenn die Konstanten z und A sowie m und B bekannt sind, kann R_0 be-

rechnet werden und man erhält so eine theoretische Vorhersage für den minimalen Ionenabstand. Man geht jedoch meist den umgekehrten Weg. Man misst den minimalen Ionenabstand, setzt ihn gleich R_0 und berechnet dann B aus z und A sowie R_0 und m .

Für Natriumchlorid ist $z = 1$ und $A = 1.74756 \dots$ sowie $R_0 \approx 2.8202 \text{ \AA}$, und für den Exponenten ist der Wert $m = 8$ geeignet. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der zugehörigen Funktion U .



Nachdem die physikalische Bedeutung der Madelung-Konstanten nunmehr klar ist, wollen wir uns jetzt dem mathematischen Problem ihrer Definition und ihrer Berechnung zuwenden.

Wir identifizieren das Natriumchloridgitter mit \mathbb{Z}^3 . Gitterpunkte $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0(2)$ entsprechen Ionen mit Ladung $+e$ und erhalten das Gewicht $+1$, solche mit $x_1 + x_2 + x_3 \equiv 1(2)$ entsprechen Ionen mit Ladung $-e$ und erhalten das Gewicht -1 . Die gesuchte Definition der Madelungkonstanten könnte dann in einer geeigneten Summationsvorschrift für die folgende 3-fach unendliche formale Reihe bestehen:

$$(*) \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^3 - \{0\}} \frac{(-1)^{x_1 + x_2 + x_3}}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}} .$$

Um die Natur dieser Reihe deutlicher hervortreten zu lassen, führen wir eine abstrahierende Notation ein. Wir bezeichnen das Gitter \mathbb{Z}^3 mit Γ und

die komplexe Zahl $1/2$ mit s . Das Skalarprodukt des Gitters ist $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Die Zahl (-1) schreiben wir in der Form $e^{\pi i}$, und die Linearform $x_1 + x_2 + x_3$ betrachten wir als das Skalarprodukt (h, x) mit einem Gittervektor $h = (1, 1, 1)$. Damit stellen wir die obige Reihe in der folgenden Form dar:

$$(**) \quad Z_{\Gamma, h}(s) = \sum_{x \in \Gamma - \{0\}} \frac{e^{\pi i(h, x)}}{(x, x)^s}$$

Reihen dieser Art, die einem Gitter Γ und einem Vektor h zugeordnet sind, nennt man in der Mathematik **Epsteinsche Zetareihen**, während die Physiker und Chemiker solche und ähnliche andere Reihen als "*Gittersummen*" bezeichnen. Die Untersuchung derartiger Reihen in dieser Allgemeinheit begann wohl mit einer Arbeit von *P. Epstein*: "Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen" [118]. Epstein bewies, dass für ein k -dimensionales Gitter Γ die Reihe $Z_{\Gamma, h}(s)$ für alle komplexen s mit Realteil $\text{Rea}(s) > k/2$ absolut konvergiert und in diesem Bereich eine komplex-analytische Funktion darstellt, die man dann **Epsteinsche Zetafunktion** nannte. Für andere Werte von s ist jedoch allenfalls bedingte Konvergenz zu erwarten. Dies Problem ist von *O. Emersleben* in seiner Dissertation, Göttingen 1922, untersucht worden. Weitere Ergebnisse dazu findet man in seiner Arbeit "Über die Konvergenz der Reihen Epsteinscher Zetafunktionen" [115].

Da für die Reihe (*) allenfalls bedingte Konvergenz zu erwarten ist, muss die Frage nach der Reihenfolge der Summationen aufmerksam geprüft werden. Ein erster Versuch besteht darin, die Gittervektoren nach der Größe ihrer Quadratnorm

$$n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

zu ordnen. Wir definieren die Zahl $r_k(n)$ der Darstellungen von n als Summe von k Quadraten von ganzen Zahlen wie folgt:

$$r_k(n) = \text{Card}\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^k \mid x_1^2 + \dots + x_1^2 + \dots + x_k^2 = n\} .$$

Damit erhalten wir aus der formalen Reihe (*) durch Anordnung der Sum-

manden nach der Quadratnorm n der Gittervektoren die folgende einfach unendliche formale Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r_3(n)}{n^{1/2}} = -\frac{6}{\sqrt{1}} + \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{4}} - \frac{24}{\sqrt{5}} + \frac{24}{\sqrt{6}} - \frac{0}{\sqrt{7}} + \frac{12}{\sqrt{8}} \pm \dots .$$

Die Untersuchung der zahlentheoretischen Funktionen r_k gehört seit **Diophant** zu den wichtigsten Aufgaben der klassischen Zahlentheorie. (Vgl. dazu L.E. Dickson [100, vol. 2, chaps. 6–9]). *Gauß*, *Dirichlet* und *Eisenstein* haben Formeln für die Berechnung dieser Funktionen durch andere zahlentheoretische Funktionen angegeben [113].

Es besteht eine enge Beziehung zwischen den Funktionen r_k und gewissen Theta-Reihen. Die formale **Theta-Reihe** Θ_Γ eines Gitters Γ mit ganzzahliger quadratischer Form (x, x) ist die folgende formale Potenzreihe in einer Unbestimmten q :

$$\Theta_\Gamma = \sum_{x \in \Gamma} q^{(x,x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_\Gamma(n) q^n .$$

Nach Definition gilt dabei für die Koeffizienten:

$$a_\Gamma(n) = \text{Card}\{x \in \Gamma \mid (x, x) = n\} .$$

Für das Standardgitter $\mathbb{Z}^k \subset \mathbb{R}^k$ gilt offensichtlich:

$$a_{\mathbb{Z}^k}(n) = r_k(n) .$$

Aus der Definition der Theta-Reihen von Gittern folgt ganz allgemein für die orthogonale direkte Summe von Gittern sofort die Beziehung:

$$\Theta_{\Gamma \oplus \Gamma'} = \Theta_\Gamma \cdot \Theta_{\Gamma'} .$$

Die Thetareihe $\Theta_{\mathbb{Z}}$ des 1-dimensionalen Standardgitters $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist aber offensichtlich die folgende Reihe:

$$\Theta_{\mathbb{Z}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots .$$

Dies ist die klassische **Jacobische Theta-Reihe** Θ_3 . Damit haben wir das folgende Ergebnis:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_k(n) q^n = \Theta_3^k .$$

In Anbetracht der Vorzeichenwechsel bei den Summanden der Reihe (***) liegt es nahe, statt der formalen Potenzreihe mit den Koeffizienten $r_k(n)$ die Potenzreihe mit den Koeffizienten $(-1)^n r_k(n)$ zu betrachten. Diese Potenzreihe hängt in ganz analoger Weise mit der Jacobischen Theta-Reihe Θ_4 zusammen, die wie folgt definiert ist:

$$\Theta_4 = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} \mp \dots .$$

Denn offenbar gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r_k(n) q^n = \Theta_4^k .$$

Wir haben die Θ -Reihen hier rein formal definiert. Für tiefere Untersuchungen substituiert man in diesen Definitionen $q = e^{\pi iz}$, und dadurch werden aus den Potenzreihen in der Unbestimmten q analytische Funktionen von z in der oberen Halbebene.

Immerhin gestatten schon die oben hervorgehobenen formalen Beziehungen, die Zahlen $r_k(n)$ für jedes gegebene k und n systematisch zu berechnen – wenn auch auf etwas mühselige Weise.

Wenn man nun $k = 3$ setzt und die Zahlen $r_3(n)$ etwa für $n \leq 100$ berechnet und die ersten 100 Partialsummen der Reihe (***) auswertet, erlebt man eine Enttäuschung: Man sieht nicht den geringsten Anschein von Konvergenz. Für den ahnungslosen Novizen ist dies umso enttäuschender, als manche Lehrbücher die Madelung-Konstante ausgerechnet durch diese Reihe (***) definieren. So behauptet z.B. das sonst so schöne Lehrbuch der Kristallographie von Vainshtein in Bezug auf diese Reihe:

The series converges rapidly; the value M is called Madelung's constant. [353, p. 61]

Das Gegenteil ist der Fall. 0. Emersleben hat seit 1923 in mehreren Veröffentlichungen darauf hingewiesen: Die Reihe $(***)$ konvergiert **nicht**. Da dies nichts half, hat Emersleben in der oben zitierten Arbeit von 1951 einen elementaren Beweis für die Divergenz gegeben. Er zeigt unter anderem, dass die Reihenglieder nicht einmal gegen 0 konvergieren. Offenbar hat auch das nichts geholfen. Einen erneuten Versuch zur Aufklärung und eine sehr gute aktuelle Übersicht zur Konvergenz und Divergenz verschiedener Verfahren zur Berechnung der Madelung-Konstanten bietet ein Artikel von D. Borwein, J.M. Borwein und K.F. Taylor: "Convergence of lattice sums and Madelung's constant" [31]. Für Einzelheiten und Beweise zu den im folgenden referierten Ergebnissen sei auf diesen Artikel verwiesen.

Unser erster naiver Versuch einer direkten Summation der Reihe $(*)$ durch die Reihe $(***)$ ist gescheitert. Das Verfahren dabei bestand darin, die Summanden für die Gitterpunkte in einer Kugel mit Mittelpunkt 0 zu addieren und den Radius dieser Kugel gegen ∞ gehen zu lassen. Dieser Prozess divergiert. Umso bemerkenswerter ist es, dass ein scheinbar ganz ähnliches und mindestens ebenso einfaches Verfahren zur direkten Summation Erfolg hat. Bei diesem zweiten Verfahren addieren wir jetzt diejenigen Summanden der Reihe $(*)$, deren zugehörige Gitterpunkte in einem achsenparallelen Würfel mit Mittelpunkt O liegen, und lassen dann die Kantenlänge gegen ∞ streben.

Wir betrachten also die folgenden Partialsummen:

$$a_n := \sum_{\substack{|x_i| \leq n \\ x \neq 0}} \frac{(-1)^{x_1+x_2+x_3}}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}} .$$

Dann gilt: Die Folge der a_n konvergiert, und der Limes ist, bis aufs Vorzeichen – die gesuchte Madelungsche Konstante:

$$A = - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

Einen elementaren Beweis für die Konvergenz mit Fehlerabschätzung findet man in der zitierten Arbeit von Borwein. Die Konvergenz ist langsam, aber

regelmäßig. Die Teilfolge a_{2m+1} konvergiert monoton steigend, die Teilfolge a_{2m} monoton fallend. Die folgende Tabelle gibt einige Folgenglieder a_n bis zu $n = 100$.

n	$-a_n$	n	$-a_n$
10	1.6926	9	1.8083
20	1.7194	19	1.7772
30	1.7286	29	1.7671
40	1.7333	39	1.7622
50	1.7361	49	1.7592
60	1.7380	59	1.7573
70	1.7394	69	1.7559
80	1.7404	79	1.7548
90	1.7412	89	1.7540
100	1.7418	99	1.7534

Wie man sieht, nähern sich die beiden Tabellenfolgen sehr gleichmäßig von beiden Seiten dem Grenzwert a mit einem Fehler $|a - a_n| \approx 0.57/n$. Dies legt den Versuch nahe, durch Abänderung des Summationsverfahrens schneller konvergierende Folgen zu gewinnen. Eine einfache Lösung ist, das arithmetische Mittel zu bilden: $b_n = (a_n + a_{n+1})/2$. Dann nimmt b_n für $70 \leq n \leq 99$ bei Abrundung auf 4 Dezimalen abwechselnd die Werte 1.7475 oder 1.7476 an, und der Prozess liefert also nach 70 Schritten die Madelung-Konstante bis auf eine Einheit der 4. Dezimalen. Der Aufwand für dieses Ergebnis ist allerdings erheblich, denn die Rechenzeit zur Berechnung von α_n wächst wie ein Polynom 3. Grades mit n . Mein kleiner programmierbarer Taschenrechner, ein HP41CV, hat für a_{100} ca. 40 Stunden und 30 Minuten gebraucht. Glücklicherweise gibt es sehr viel schnellere einfache direkte Summationsmethoden. Eine davon ist die von *H.M. Evjen* ("On the stability of certain heteropolar crystals" [125]). Evjens Methode: Die Summanden für die Gitterpunkte im Inneren des Würfels werden wie vorher addiert, also mit Gewicht 1, aber die Summanden für die Gitterpunkte auf dem Rand des Würfels werden mit anderen Gewichten addiert. Die Gewichte sind $1/8$ für die Ecken, $1/4$ für die Kanten und $1/2$ für die Flächen. Die so definierte Folge c_n konvergiert schnell: Für $4 \leq n \leq 15$ ist der Fehler $|a - c_n| \approx 0.04/n^4$. Vierstellige

Genauigkeit wird schon mit $n = 8$ erreicht, in etwa 165 sec. mit meinem HP41. Und ab $n = 26$ hat man 6 richtige Stellen (aufgerundet):

$$A \approx 1.747565$$

Ist die einfachste Lösung immer die beste?

Bei aller Attraktivität solcher einfachen direkten Summationsmethoden wird man sich angesichts der nur bedingten Konvergenz fragen, wie diese Methoden, deren Wahl doch willkürlich erscheinen könnte, mathematisch zu rechtfertigen sind. Wie kann man die Madelung-Konstante ohne Rückgriff auf derartige Verfahren definieren? Eine Möglichkeit hierzu bieten die Ergebnisse der analytischen Zahlentheorie. Man kann dabei von der zu (*) gehörigen Epsteinschen Zeta-Reihe bzw. Zetafunktion ausgehen oder aber – was auf das gleiche hinauskommt – von der zu (***) gehörigen gewöhnlichen

Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r_3(n)}{n^s} .$$

Diese Reihe ist für $\text{Re}(s) > 3/2$ absolut konvergent und stellt dort eine analytische Funktion $Z(s)$ dar:

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r_3(n)}{n^s} .$$

Diese **Epsteinsche Zeta-Funktion** besitzt eine eindeutige Fortsetzung als analytische Funktion in der ganzen s -Ebene. Die analytische Fortsetzung für $\text{Re}(s) > 0$ entsteht durch eine normalisierte **Mellin-Transformation** aus der Funktion $\Theta_4^3(e^{-t}) - 1$, wo Θ_4 wie oben eine **Jacobische Theta-Reihe** bezeichnet:

$$Z(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} (\Theta_4^3(e^{-t}) - 1) t^{s-1} dt .$$

Damit kann man nach **Emersleben** die **Madelung-Konstante** ganz kanonisch wie folgt definieren:

$$A = -Z\left(\frac{1}{2}\right) .$$

Man kann ferner zeigen, dass die oben beschriebenen einfachen direkten Summationsverfahren tatsächlich gegen die so definierte Konstante konvergieren, und damit sind sie auch mathematisch in befriedigender Weise gerechtfertigt. Die Energie eines Kristallgitters ist der Wert einer zahlen-theoretischen Zetafunktion – das ist schon wundersam.

Wir kehren zurück zu unserem physikalischen Prinzip: Die potentielle Energie der Kristallstruktur ist ein Minimum. Diesem physikalischen Prinzip entspricht ein geometrisches Prinzip für die Konstruktion geometrischer Modelle von Kristallstrukturen mit ungerichteter Wechselwirkung. Es besagt, dass die Kugeln des Modells unter Berücksichtigung von Randbedingungen – Anteil der verschiedenen Atomarten, Radien usw. – möglichst dicht gepackt sind. “Möglichst dicht” ist natürlich eine vage Formulierung. Unter anderem ist damit gemeint: Möglichst geringe Abstände zwischen benachbarten Kugeln und möglichst wenig Lücken, in welche Kugeln von einer im Modell verwendeten Art passen würden.

Am vollkommensten wird dem gerade formulierten Prinzip für die Konstruktion geometrischer Modelle von Kristallstrukturen dann Genüge getan, wenn die Modelle tatsächlich dichteste Kugelpackungen sind. Das ist bei vielen Metallen und intermetallischen Verbindungen der Fall.

Etwa 30 Elemente, und zwar Metalle und Edelgase, besitzen eine Modifikation mit der **kubisch dichtesten Packung** als Kristallstruktur. Dazu gehören unter anderen die Metalle Kupfer, Silber und Gold, also Cu, Ag, Au. Einige weitere derartige Metalle sind Li, α -Ca, Al, Pb, Mo, Mn, γ -Fe, β -Co, Ni, Pt.

Etwa 30 weitere Elemente besitzen eine Modifikation mit der **hexagonal dichtesten** Packung als Kristallstruktur. Dazu gehören unter anderen die Metalle Li, Na, Ca, Mg, β -Ca, Zn, Cd, Ti, α -Co, Cr, α -Ni.

Ein Beispiel für eine Legierung mit **kubisch dichtester Packung** ist eine Legierung von Kupfer und Gold im Verhältnis 3 :1, also Cu_3Au . In dieser sogenannten α' -Phase der Kupfer-Gold-Legierung sitzen die Kupferatome in den Flächenmittelpunkten der kubisch flächenzentrierten Zelle, und die Goldatome sitzen an den Ecken. Allerdings ist dies nur als statistisch richtige Aussage zu interpretieren: Nur 85 % der Flächenzentren sind wirklich von

Kupferatomen besetzt, die übrigen 15 % von Goldatomen. Entsprechend sitzen nur auf 55 % der Ecken Goldatome, auf den übrigen 45 % hingegen sind die restlichen Kupferatome.

Ein anderes interessantes Beispiel für eine dichteste Packung bietet eine Legierung von Silber, Wismut und Tellur: AgBiTe_2 . Um sie zu beschreiben, kommen wir noch einmal auf den Schichten-Aufbau von Kugelpackungen mit der größten bekannten Dichte zurück. Bei Projektion der Zentren eines solchen Systems von parallelen Schichten auf eine dazu parallele Ebene gibt es für das System der Zentren einer Schicht drei mögliche Lagen, die wir mit a, b, c bezeichnen wollen. Jede dichteste Packung mit Schichtenaufbau lässt sich dann durch eine in beiden Richtungen unendliche Folge von Buchstaben a, b, c beschreiben, in der niemals zwei gleiche Buchstaben aufeinanderfolgen. Die Folge ist natürlich nur bis auf eine Translation, Umkehr der Reihenfolge und Permutation von $\{a, b, c\}$ bestimmt. Zur **kubisch dichtesten Packung** gehört die Folge

... *abcabcabcabc* ...

Zur **hexagonal dichtesten** Packung gehört die Folge

... *ababababab* ...

Zum geometrischen Modell einer Kristallstruktur gehört aber nicht nur die Beschreibung der Position der Zentren der Kugeln, sondern auch die Angabe der jeweiligen Atomart. Zur Abkürzung bezeichnen wir die Atomarten von Silber, Wismut und Tellur mit den Buchstaben A, B und T . Dann hat die Legierung AgBiTe_2 eine kubisch dichteste Packung mit einem Schichtaufbau der Periode 12 nach dem folgenden Schema (Vainshtein, loc. cit., p. 107).

a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
A	T	B	T	A	T	B	T	A	T	B	T

Natürlich ist das Modell der kubisch dichtesten Packung in einem solchen Fall eine stark idealisierte Beschreibung, denn die Atomradien der Metalle der Legierung sind nicht genau gleich. Zum Beispiel sind die Atomradien

1.44 Å für Ag, 1.82 Å für Bi und 1.7 Å für Te für Koordinationszahl 12. Erfahrungsgemäß liegt die Grenze für Substituierbarkeit von Atomarten für metallische Bindung bei einer Differenz der Atomradien von etwa 10-15 % der Radien. Eine weitere Einschränkung für die Gültigkeit des obigen Modells ist außerdem, dass die Aussagen über den Schichtaufbau wieder nur statistisch zu interpretieren sind.

Bei manchen Elementen ist die Kristallstruktur eine dichteste Kugelpackung mit regelmäßigem Schichtaufbau, aber nicht so einfach wie bei der hexagonal dichtesten oder der kubisch dichtesten Packung. So besitzen Praseodym, Neodym und Samarium eine dicht gepackte Struktur mit einer Schichtenfolge der Periode 4

... *abacabac* ...

Beim Aufbau von Verbindungen aus Atomen oder Ionen mit sehr verschiedenen Radien werden Strukturen möglich, die aus dichtesten Packungen dadurch entstehen, dass die Lücken ganz oder teilweise mit Kugeln von kleinerem Radius ausgefüllt werden. Wir besprechen einige besonders einfache Beispiele derartiger Strukturen, und zwar die folgenden:

- **Natriumchlorid-Struktur**
- **Fluorit-Struktur**
- **Nickelarsenid-Struktur**
- **Zinkblende-Struktur**
- **Wurtzit-Struktur**
- **Struktur der Heusler-Phase.**

Auf der nächsten Bildseite sind diese Strukturen graphisch dargestellt. Man zeichnet üblicherweise bei der Darstellung von Kristallstrukturen keine Bilder von Kugelpackungen etc., denn diese wären wegen der gegenseitigen Überdeckung der Projektionen der Kugeln optisch nicht leicht analysierbar.

Stattdessen stellt man die Atome oder Ionen durch kleine – d.h. zu kleine – Kugeln dar und ihre Koordination, d.h. den Kontakt zu den nächsten Nachbarn, durch verbindende Strecken. Die verschiedenen Atomarten stellt man durch unterschiedliche Größe und Färbung der Kugeln dar. Natürlich zeigt man nur einen geeigneten Ausschnitt aus der Struktur. Für die Wahl einer solchen Zelle gibt es bei den Kristallographen gewisse Konventionen, an die wir uns hier bewusst nicht ganz gehalten haben. Die hier gewählte Darstellung ist rein geometrisch und zeigt die Entstehung von Kristallstrukturgruppen aus dichtesten Kugelpackungen. Als Ausschnitt ist jeweils wie früher eine kubisch-flächenzentrierte Zelle bzw. eine hexagonale Zelle dieser Kugelpackung gewählt. Die Kugeln dieser Packungen sind größer dargestellt als die in die Lücken gefüllten kleineren Kugeln. Außer den Kanten der Zellen sind die Koordinationen der in die Lücken eingefüllten Kugeln durch punktierte Strecken dargestellt.

Die Bezeichnung der Strukturtypen ist die bei den Kristallographen übliche. Sie ist nicht ganz einheitlich. In gewissen Fällen dient als Repräsentant der Name einer chemischen Verbindung: z.B. Natriumchlorid, Nickelarsenid. In gewissen anderen Fällen würde dies nicht ausreichen, da ein und dieselbe chemische Verbindung auf verschiedene Weise kristallisieren kann. Diese verschiedenen Formen mit verschiedenen Kristallstrukturen nennt man **Modifikationen**. In vielen Fällen werden diese verschiedenen Modifikationen durch verschiedene natürlich vorkommende Mineralien realisiert. Ein Beispiel ist Zinksulfid, ZnS , von dem zwei Modifikationen existieren, die durch die Mineralien Zinkblende (= Sphalerit) und Wurtzit realisiert werden. In solchen Fällen wählt man als Namen des Kristallstrukturtyps oft einen solchen Mineralnamen als Repräsentanten. In anderen Fällen, wenn die entsprechenden Modifikationen eher oder ausschließlich unter experimentellen Bedingungen entstehen, unterscheidet man die Modifikationen einfach durch Buchstaben α, β, γ oder durch die Entstehungsbedingungen, z.B. die Temperatur, oder durch die Namen von Wissenschaftlern, welche diese Struktur analysiert haben, z.B. Laves-Phase, Heusler-Phase usw.

Wir besprechen jetzt die erwähnten sechs Strukturtypen.

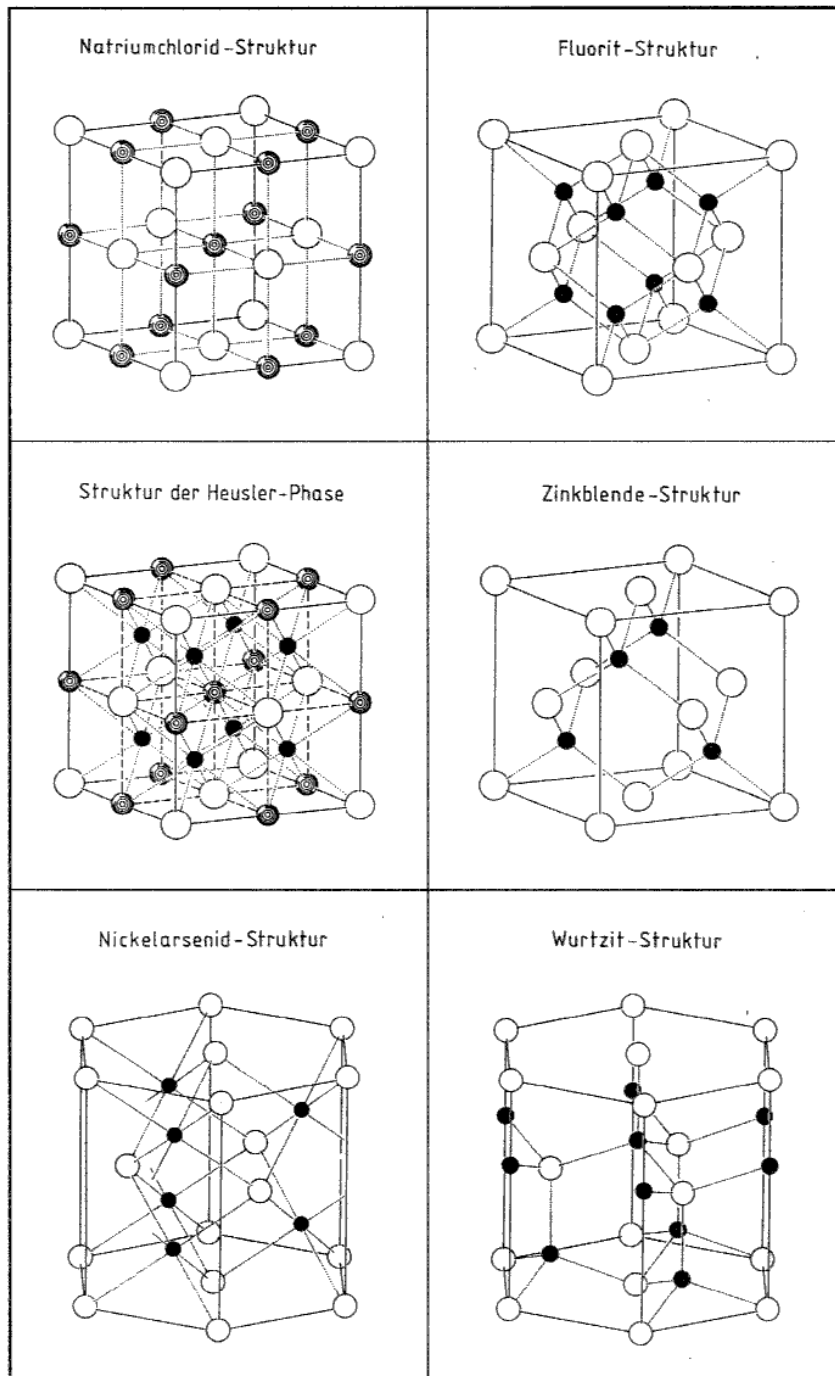


Abbildung 1.76: Einige einfache Kristallstrukturtypen

Natriumchlorid-Struktur.

Das ideale geometrische Modell dieser Struktur entsteht durch Füllen aller oktaedrischen Lücken in einer kubisch dichtesten Packung, wobei im Idealfall das Verhältnis der Radien gleich $\sqrt{2} - 1$ ist. Repräsentant dieses Strukturtyps ist das Natriumchlorid, NaCl, Kochsalz, als Mineral Halit. Dies ist die typische Struktur vieler einfacher Ionenkristalle. Dazu gehören 17 der 20 Halogenide von Alkalimetallen, ferner viele Oxide, Sulfide, Selenide, Telluride, Nitride und Carbide. Einige Beispiele für Mineralien mit dieser Struktur sind Halit NaCl, Sylvin KCl, Chlorargyrit AgCl, Periklas MgO und Bleiglanz (= Galenit) PbS.

Solange man nur die Lagen der Zentren berücksichtigt, sind das flächenzentrierte kubische Gitter der Zentren der kubisch dichtesten Packung und das flächenzentrierte Gitter der Oktaederzentren gleichwertig. Das Koordinationspolyeder jedes Zentrums der einen Art bezüglich Zentren der jeweils anderen Art ist ein Oktaeder.

Berücksichtigt man jedoch die Ableitung des Modells aus einer dichtesten Kugelpackung durch Füllen der Lücken mit kleineren Kugeln, dann sind die beiden Lagen nicht mehr gleichwertig: Die kleineren Kugeln in den oktaedrischen Lücken modellieren die Ionen mit dem kleineren Radius. Bei den Halogeniden der Alkalimetalle sind die effektiven Ionenradien der Anionen Cl^- , Br^- , I^- größer als die Kationen Li^+ , Na^+ , K^+ , Rb^+ , Cs^+ , und auch F^- ist noch größer als Li^+ , Na^+ . Die Anionen müssten dann also durch die Kugeln der dichtesten Packung modelliert werden, die Kationen durch die Kugeln in den Lücken. Jedoch ist das Verhältnis des Kationenradius $r_i(A^+)$ zum Anionenradius $r_i(X^-)$ bei den meisten der 17 Alkalihalogenide mit NaCl-Struktur größer als der ideale Wert $\sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$. Als Beispiel gebe ich für LiCl und NaCl die Verhältnisse der Ionenradien bei 6-facher Koordination an, wobei ich die Radien der Tabelle 1.8.b von Vainshtein, loc. cit., zugrunde lege:

$$\begin{aligned} r_i(\text{Li}^+)/r_i(\text{Cl}^-) &\approx 0.42, \\ r_i(\text{Na}^+)/r_i(\text{Cl}^-) &\approx 0.56. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass nur Berührungen zwischen Anionen und Kationen statt-

finden, aber keine zwischen Anionen und Anionen. Das ideale mathematische Modell gibt diese Verhältnisse nicht richtig wieder, da dort jede der großen Kugeln mit 12 Kugeln gleicher Art Kontakt hat. In einem realistischen geometrischen Modell sind die den Anionen entsprechenden Kugeln daher kleiner zu modellieren, so dass nur Kontakte entsprechend den Verhältnissen der Zonenradien stattfinden. Die Zentren sind natürlich wie beim idealen Modell.

Fluorit-Struktur.

Das ideale mathematische Modell dieses Strukturtyps entsteht durch Füllen aller tetraedrischen Lücken in einer kubisch dichtesten Packung mit kleineren Kugeln, wobei das Radienverhältnis im Idealfall gleich $\sqrt{3/2}-1 \approx 0.2247$ ist. Der Repräsentant dieses Typs von Strukturen ist das Calciumfluorit CaF_2 . Das entsprechende Mineral heißt einfach Fluorit oder auch Flusspat. Die Kationen Ca^{++} entsprechen den Kugeln der dichtesten Packung. Ihr Koordinationspolyeder ist ein Würfel. Die Anionen F entsprechen den Kugeln in den tetraedrischen Lücken, und ihr Koordinationspolyeder ist natürlich ein Tetraeder. Jedoch ist beim Fluorit das Verhältnis der Ionenradien $r_i(\text{F}^-)/r_i(\text{Ca}^{++}) \approx 1.17$ nicht nur weit entfernt vom idealen Wert 0.2247, sondern sogar größer als eins. Das heißt: Den größeren Kugeln des idealen Modells entsprechen die kleineren Ionen. Es ist also wiederum notwendig, das ideale Modell durch Abänderung der Radien realistisch zu modifizieren, und die Ableitung aus dichtesten Packungen hat dann eigentlich nur noch heuristische Bedeutung. Gleiches gilt für die anderen noch zu behandelnden Strukturmodelle und wird ab jetzt nicht mehr erwähnt.

Es gibt zahlreiche Beispiele für diesen Strukturtyp, besonders bei Fluoriden von Metallen mit großen 2-wertigen Kationen und bei Oxiden von Metallen mit großen vierwertigen Kationen. Mineralische Beispiele sind Uraninit UO_2 und Thorianit ThO_2 .

Vertauscht man in der Fluoritstruktur die Rolle von Anionen und Kationen, so dass also dann die Anionen hexaedrisch koordiniert sind und die Kationen tetraedrisch, dann entsteht eine Variante der Fluoritstruktur, die von einigen Autoren als “**Anti-Fluoritstruktur**” bezeichnet wird. Diese kommt bei Oxiden, Sulfiden, Seleniden und Telluriden der Alkalimetalle vor,

z.B. bei Li_2O , Li_2Te und Na_2S . Das Radienverhältnis bei Li_2Te ist beispielsweise $r_i(\text{Li}^+)/r_i(\text{Te}^{--}) \approx 0.27$, also nicht allzu weit entfernt vom "idealen" Wert 0.2247.

Die Fluoritstruktur kommt ferner bei intermetallischen Verbindungen vor, z.B.: Mg_2Ge , Mg_2Si , Mg_2Sn , Mg_2Pb .

Nickelarsenid-Struktur.

Diese Struktur entsteht durch Füllen aller oktaedrischen Lücken in einer hexagonal dichtesten Packung. Repräsentant ist Nickelarsenid, NiAs , als Mineral Nickelin = Rotnickelkies. Das Koordinationspolyeder der Nickelatome ist ein Oktaeder, das der Arsenatome ein trigonales Prisma. Auch für diesen Typ von Struktur gibt es viele Beispiele, z.B. NiS , NiSe , NiAs . Außer Nickelin gibt es weitere Erze als mineralische Beispiele, z.B. kosmisches Troilit FeS in Meteoriten.

Zinkblende-Struktur.

Beim Schichtenaufbau der dualen Raumteilungen zu den Raumteilungen durch Rhombendodekaeder oder hexagonale Wabenzellen haben wir in jeder aus Oktaedern und Tetraedern bestehenden Schicht die Menge der Tetraeder in zwei Hälften zerlegt. Entsprechend können wir in einer kubisch oder hexagonal dichtesten Kugelpackung mit Schichtaufbau tetraedrische Lücken von zwei Arten unterscheiden.

Das ideale mathematische Modell der Zinkblende-Struktur entsteht aus einer kubisch dichtesten Kugelpackung, indem die Hälfte der tetraedrischen Lücken, nämlich alle von einer Art, durch kleinere Kugeln gefüllt werden. Bei der so entstehenden Struktur haben beide Arten von Zentren ein Tetraeder als Koordinationspolyeder.

Repräsentant dieses Strukturtyps ist das Mineral Zinkblende (= Sphalerit) ZnS . Die eine Art von Kugeln modelliert die Zinkatome, die andere die Schwefelatome. Wie man die Atomarten den Kugelarten zuordnet, ist offenbar gleichgültig, solange man die Radien ignoriert.

Die Zinkblende-Struktur kommt vor allem bei Verbindungen von Paaren von Elementen vor, die im Periodensystem im gleichen Abstand links und rechts von der Gruppe IV b stehen.

Ein Beispiel, bei dem beide Elemente zur Gruppe IV gehören, ist Sili-

ciumcarbid (Carborundum), SiC. Die covalenten Bindungen zwischen alle Atomen dieses Gitters verleihen dem Siliciumcarbid eine sehr große Härte. Es wird als Schleifmittel verwendet.

Beispiele aus den Gruppen III und V: BN, GaAs. Bornitrid, das bei hohen Drücken gewonnen wird, hat ähnliche mechanische Eigenschaften wie Diamant. Galliumarsenid ist ein Halbleiter und spielt eine wichtige Rolle in der Mikroelektronik.

Beispiele aus den Gruppen II und VI: ZnS, ZnSe, CdS, CdSe. Beispiele aus den Gruppen I und VII: CuCl und γ -AgJ.

Bei Kristallstrukturen vom Zinkblende-Typ kommen sowohl überwiegend covalente Bindung als auch Übergänge von covalenter Bindung zu ionischer und metallischer Bindung vor. Der Anteil der ionischen oder metallischen Bindung nimmt mit dem Abstand von Gruppe IV b und mit der Anzahl der inneren Elektronen zu. Siliciumcarbid und Bornitrid haben beispielsweise starke covalente Bindungen, während beim Silberjodid der covalente Anteil zwar noch überwiegt, aber nicht mehr so stark ist.

Wandelt man die Zinkblende-Struktur dadurch ab, dass man alle Positionen mit Atomen der gleichen Art besetzt, dann entsteht als neue Struktur die **Diamant-Struktur**. Der Diamant ist der klassische Repräsentant einer rein covalenten Bindung. In der Diamantstruktur kristallisieren außer dem Kohlenstoff auch noch die Elemente Silicium und Germanium aus der Gruppe IV.

Wurtzit-Struktur.

Das ideale mathematische Modell der Wurtzit-Struktur entsteht aus der hexagonal dichtesten Packung durch Ausfüllen der Hälfte der tetraedrischen Lücken mit kleineren Kugeln. Beide Arten von Zentren sind wieder tetraedrisch koordiniert. Diese Struktur ist eng verwandt mit der Zinkblende-Struktur. So ist beispielsweise die Madelung-Konstante für die Zinkblende-Struktur 1,638, für die Wurtzit-Struktur 1,641.

Repräsentant ist das Mineral Wurtzit, chemisch ZnS wie die Zinkblende.

Auch andere Verbindungen haben Modifikationen sowohl in der Zinkblende-Struktur wie in der Wurtzit-Struktur. Beispielsweise hat das Silberjodid bei Raumtemperatur die stabile Modifikation γ -AgJ vom Zinkblende-Typ. Bei 137°C wandelt sich diese in die Modifikation β -AgJ vom Wurtzityp um. Weitere derartige Beispiele für Verbindungen mit einer Modifikation mit Wurtzit-Struktur: ZnSe, CdS, CdSe, SiC.

Auch aus der Wurtzit-Struktur kann man eine neue Struktur erzeugen, indem man alle Positionen mit Atomen einer einzigen Art besetzt. Die so entstehende Struktur ist eng verwandt mit der Diamant-Struktur, und tatsächlich gibt es auch eine Kohlenstoff-Modifikation mit dieser Struktur.

Struktur der Heusler-Phase.

Diese Struktur entsteht durch Füllen aller tetraedrischen und oktaedrischen Lücken in einer kubisch dichtesten Packung. Sie kommt bei Legierungen vor, z.B. AlMnCu_2 , AlZrCu_2 , AlHfNi_2 , AlNbNi_2 . Beispielsweise besetzen bei AlMnCu_2 die Kupferatome die tetraedrischen Lücken, und die Al-Atome bzw. Mn-Atome die beiden anderen Positionen.

Die besprochenen Beispiele von Kristallstrukturen stellen lediglich einige einfachere Fälle von Strukturen dar, die sich aus dichtesten Packungen ableiten lassen. Darüber hinaus gibt es eine ungeheure Vielfalt von anderen Strukturen, die keine so einfache Beschreibung gestatten. Die systematische Beschreibung von Kristallstrukturen ist ein ernstes Problem, zu dem die Mathematiker bisher vielleicht zu wenig beigetragen haben.

Für unsere Untersuchung von Kugelpackungen mit der größten bekannten Dichte war es wichtig, die unmittelbare Umgebung einer Kugel in einer solchen Packung zu kennen. Sie besteht aus 12 anderen Kugeln, welche die gegebene berühren. Die Anordnung dieser Kugeln wird durch ein einfaches Koordinationspolyeder beschrieben. Bei der kubisch dichtesten Packung ist dies ein Kuboktaeder, und bei der hexagonal dichtesten Packung das früher beschriebene nicht-archimedische Polyeder mit 14 Flächen – 6 Quadraten und 8 Dreiecken. Wegen seiner Konstruktion durch Zusammensetzen von zwei spiegelsymmetrischen Hälften wollen wir dies Polyeder ab jetzt das **“Disheptaeder”** nennen.

Wir wollen nun zunächst einmal von dem globalen Problem der dichte-

sten Packungen von Kugeln im Raum ganz absehen und uns nur mit dem räumlich lokalen Problem befassen, kongruente Kugeln so anzuordnen, dass sie alle eine gleich große Kugel berühren. Wir stellen die folgende Frage:

Wieviele in einer Lagerung von kongruenten Kugeln können eine von ihnen höchstens berühren?

Diese Anzahl will ich **“maximale sphärische Kontaktzahl”** nennen. In der englischen Literatur heißt diese Zahl auch **kissing number**. Im Englischen hat “kiss” auch die Bedeutung einer leichten Berührung, insbesondere einer Berührung von Billardkugeln.

... er stieß eine Kugel an, manchmal sanft, manchmal hart, scheinbar sinnlos und zwecklos, sie hob, indem sie die beiden anderen berührte, für ihn jedesmal eine neue geometrische Figur aus dem grünen Nichts; Sternenhimmel, in dem nur wenige Punkte beweglich waren; Kometenbahnen, weiß über grün, rot über grün geschlagen; Spuren leuchteten auf, die sofort wieder ausgelöscht wurden; zarte Geräusche deuteten den Rhythmus der gebildeten Figur an: fünfmal, sechsmal, wenn die angestoßene Kugel die Bande oder die anderen Kugeln berührte; nur wenige Töne hoben sich aus der Monotonie heraus, hell oder dunkel; die wirbelnden Linien waren alle an Winkel gebunden, unterlagen geometrischen Gesetzen und der Physik; die Energie des Stoßes, die er durch das Queue dem Ball mitteilte, und ein wenig Reibungsenergie; alles nur Maß; es prägte sich dem Gehirn ein; Impulse, die sich zu Figuren umprägen ließen; keine Gestalt und nichts Bleibendes, nur Flüchtiges, löschte sich im Rollen der Kugel wieder aus; oft spielte er halbe Stunden lang nur mit einem einzigen Ball: weiß über grün gestoßen, nur ein einziger Stern am Himmel; leicht, leise, Musik ohne Melodie, Malerei ohne Bild; kaum Farbe, nur Formel. Heinrich Böll, *Billard um halb zehn*.³²

Könnte es nicht sein, dass ein Kuss etwas ganz anderes ist als eine

³²[29, p. 40f.]

flüchtige Berührung von zwei Körpern? Ich denke an die ersten Zeilen eines Gedichtes von Novalis:³³

*Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren
Sind Schlüssel aller Kreaturen
Wenn die, so singen oder küssen,
Mehr als die Tiefgelehrten wissen, ...*

Bleiben wir also um der Liebe und der Wahrheit willen beim trockenen Gelehrtendeutsch: “maximale sphärische Kontaktzahl”.

Wir wissen schon, dass die maximale sphärische Kontaktzahl mindestens 12 ist. Die Frage ist also: Ist sie gleich 12 oder ist sie größer? Dieses ist anscheinend eine alte Frage. Verschiedene weiter unten zitierte Autoren – B.L. van der Waerden und K. Schütte, L. Fejes Tóth sowie J.H. Conway – berichten ohne Quellenangabe, es sei eine alte Streitfrage zwischen Newton und Gregory gewesen, ob die Zahl 12 oder 13 sei. Ich nehme an, dass David Gregory der Jüngere gemeint ist – Fejes Tóth erwähnt allerdings seltsamerweise in diesem Zusammenhang James Gregory. John Leech schreibt: “It was conjectured by David Gregory – in an unpublished notebook at Christ Church, Oxford – that a sphere can touch thirteen non-overlapping spheres equal to it” [236]. H.S.M. Coxeter berichtet:

Among the unpublished papers of David Gregory, H.W. Turnbull found notes of a conversation with Newton in 1694 about the distribution of stars of various magnitudes. The question arose: Can a rigid material sphere be brought into contact with 13 other such spheres of the same size? Gregory said “Yes” and Newton said “No”, but 180 years were to elapse before a conclusive answer was given. [89]

Das **Problem der 13 Kugeln**, die Frage “12 oder 13?”, wurde 1874 entschieden. Die richtige Antwort ist 12 (C. Bender, R. Hoppe und S. Günther

³³[276, p.395]

1874/75 [21, 197, 167]). Neuere Beweise stammen von K. Schütte und B.L. van der Waerden [324]. Den kürzesten Beweis gab J. Leech: “The problem of the thirteen spheres” [236]. Leechs Beweis ist elementar, aber durchaus nicht trivial.

Das Problem der maximalen Kontaktzahl von Kugeln im 3-dimensionalen euklidischen Raum wird zu einem Problem der Lagerung von endlich vielen Punkten auf einer 2-dimensionalen Sphäre, indem wir den berührenden Kugeln ihren jeweiligen Berührungspunkt zuordnen. In dieser Fassung lautet das Problem: Ist es möglich, 13 Punkte auf einer Einheitssphäre so anzuordnen, dass der sphärische Abstand zwischen je zweien von ihnen mindestens $2\pi/6$ ist? Damit ordnet sich das Problem der 13 Kugeln in einen größeren Problemkreis ein, der Lagerungen auf der Sphäre betrifft, und über den wir jetzt berichten wollen.

Es sei d der sphärische Abstand auf der Einheitssphäre S^2 , und $X \subset S^2$ sei irgendeine endliche Menge von mindestens zwei Punkten auf der Sphäre. Wir definieren die Zahl $\delta(X)$ wie folgt:

$$\delta(X) = \min\{d(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y\} .$$

Alsdann definieren wir für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ die Zahl δ_k wie folgt:

$$\delta_k := \max\{\delta(X) \mid X \subset S^2, \text{Card}(X) = k\} .$$

Schließlich definieren wir: Eine endliche Menge von Punkten $X \subset S^2$ heißt **k-maximal**, wenn gilt:

$$\text{Card}(X) = k \text{ und } \delta(X) = \delta_k .$$

Damit ergeben sich für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ die folgenden Probleme:

- (1) Bestimme die Zahl δ_k !
- (2) Bestimme bis auf Isometrie alle k -maximalen $X \subset S^2$!

Diese geometrischen Probleme hinsichtlich der Lagerung von Punkten auf der Sphäre kann man auch als Probleme der Lagerung von sphärischen Ka-

lotten formulieren. Ist $X \subset S^2$ eine Menge von k Punkten, $k \geq 2$ mit $\delta(X) = \delta$, dann erhält man eine Lagerung von kongruenten sphärischen Kalotten in S^2 , indem man jedem $x \in X$ die folgende Kalotte K_x zuordnet:

$$K_x = \{y \in S^2 \mid d(x, y) \leq \delta/2\} .$$

Wenn X eine k -maximale Menge ist, ist die so konstruierte Lagerung von Kalotten in einem offensichtlichen Sinne k -maximal, und umgekehrt entstehen alle **k-maximalen Lagerungen** von Kalotten offenbar auf diese Weise. Die Probleme für die Lagerungen von Punkten einerseits und von Kalotten andererseits sind äquivalent.

Wir erinnern uns, dass wir Lagerungen von sphärischen Kalotten in diesem Buch schon früher einmal betrachtet haben: Die 5000 Jahre alten neolithischen Steinsphären sind wunderbare Modelle für solche Lagerungen. Bevor man weiterliest, sollte man die Tafeln mit den Abbildungen dieser Sphären noch einmal mit Andacht betrachten (Abbildungen 1.3 bis 1.9, S. 17ff.).

Auch mit der Verteilung endlich vieler Punkte auf einer Sphäre haben wir uns schon beschäftigt, als wir über die Morphologie von Pollenkörnern berichtet haben. Ein wichtiger Punkt dabei war die regelmäßige Verteilung der Öffnungen. In vielen Fällen sind die pori relativ kleine, kreisförmige Öffnungen, die wir in einem idealisierten mathematischen Modell als Punkte auf einer Sphäre darstellen können. 1930 hat der holländische Palynologe P.M.L. Tammes die Anordnung dieser Öffnungen sorgfältig untersucht (“On the Origin of Number and Arrangement of the Places of Exit on the Surface of Pollen Grains” [347]. L. Fejes Tóth berichtet darüber in seinem schönen Buch “Reguläre Figuren” [350]. Danach hat Tammes versucht, die Zahl und Anordnung der Öffnungen durch die folgende Hypothese zu erklären:

“Auf den Pollen kommen stets so viele Öffnungen zustande, wie unter der Bedingung Platz haben, dass der gegenseitige Abstand zwischen je zwei Öffnungen nicht kleiner wird als eine für die Art kennzeichnende Größe.”

Wir formalisieren diese Hypothese mathematisch wie folgt. Die für die jeweilige Art kennzeichnende Größe ist eine reelle Zahl; die entsprechende

reelle Variable sei δ . Wir definieren eine Funktion \varkappa von δ wie folgt:

$$\varkappa(\delta) = \max\{\text{Card}(X) \mid \delta(X) \geq \delta\} .$$

Die Hypothese besagt dann in ihrer obigen schwachen Form zunächst einmal nur, dass die Zahl der Öffnungen gleich dem Wert $\varkappa(\delta)$ für ein geeignetes δ ist. Wie sieht die Funktion \varkappa nun aus? Sie nimmt nur natürliche Zahlen als Werte an, und sie ist offensichtlich schwach monoton fallend. Die Sprungstellen sind genau die oben definierten Zahlen δ_k , denn man sieht leicht, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \delta \leq \delta_k &\Leftrightarrow \varkappa(\delta) \geq k , \\ \delta > \delta_k &\Leftrightarrow \varkappa(\delta) < k . \end{aligned}$$

Die Funktion $\varkappa(\delta)$ ist also eindeutig bestimmt durch die schwach monoton fallende Folge der δ_k :

$$\delta_2 \geq \delta_3 \geq \delta_4 \geq \delta_5 \geq \delta_6 \geq \dots .$$

Eine Zahl k ist als Wert von $\varkappa(\delta)$ genau dann ausgeschlossen, wenn $\delta_k = \delta_{k+1}$ gilt. Die Hypothese von Tammes führt also zunächst einmal auf das erste der oben genannten Probleme: Bestimmung der Zahlen δ_k . Will man nicht nur die Zahl k der Öffnungen erklären, sondern ihre Anordnung, dann bietet sich die folgende, von Tammes vermutlich intendierte Ergänzung seiner Hypothese an:

“Wenn die Zahl der Öffnungen in einem Pollenkorn gleich k ist, wird ihre Anordnung durch eine k -maximale Menge beschrieben.”

Dies führt zum zweiten der oben genannten Probleme: Bestimmung der k -maximalen Mengen. Daher nennt Fejes Tóth den Komplex aus diesen beiden Problemen **Tammes’ Problem**.

Für die niedrigsten Werte von k ist das Problem leicht lösbar. So gilt natürlich $\delta_2 = \pi$, und eine **2-maximale Menge** ist ein Paar von Antipodpunkten. Ebenso sieht man leicht ein, dass $\delta_3 = 2\pi/3$. Eine **3-maximale Menge** besteht aus 3 Punkten auf einem Großkreis, die paarweise den Abstand $2\pi/3$ haben. Eine **4-maximale Menge** besteht aus den Eckpunkten

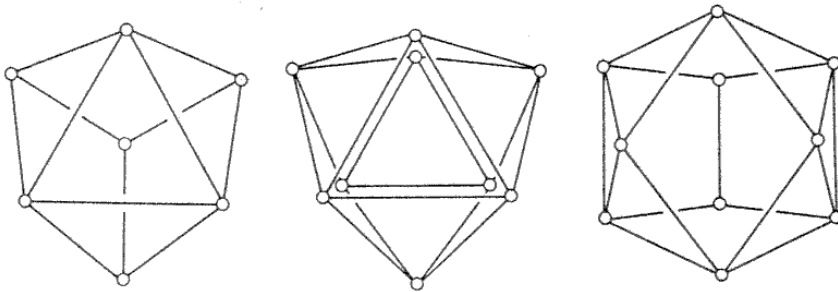
eines regulären Tetraeders, und wenn man das einmal weiß, ist es eine leichte Übung, es auch zu beweisen. Die Lösung für $k = 5$ war Tammes wohl auch schon bekannt: $\delta_5 = \pi/2$. In diesem Fall sind jedoch die 5-maximalen Mengen nicht bis auf Isometrie eindeutig bestimmt. Man kann beweisen, dass jede **5-maximale Menge** ein Paar von Antipodalpunkten enthält. Die übrigen drei Punkte liegen auf dem zugehörigen Äquator. Bis auf Isometrie ist ihre Lage durch die beiden größten Abstände α, β zwischen ihnen bestimmt. Durch diese beiden Parameter erhält man eine bijektive Abbildung der Menge der Isometrieklassen von 5-maximalen Mengen auf ein Dreieck. Die drei Ecken entsprechen den folgenden Paaren $(\alpha, \beta) : (3\pi/4, 3\pi/4), (2\pi/3, 2\pi/3), (\pi, \pi/2)$. Die 5-maximalen Mengen zu $(\pi, \pi/2)$ entstehen dadurch, dass man von den 6 Ecken eines regulären Oktaeders eine fortlässt. Für die Eckenmenge X eines regulären Oktaeders gilt $\delta(X) = \pi/2$. Daraus folgt $\delta_6 \geq \pi/2$. Andererseits gilt $\delta_6 \leq \delta_5 = \pi/2$. Also folgt $\delta_6 = \pi/2$, und die **6-maximalen Mengen** sind genau die Eckenmengen der regulären Oktaeder. Insbesondere folgt $\delta_5 = \delta_6$, und die Zahl 5 tritt nicht als Wert der Funktion δ auf.

Damit ist Tammes' Problem für $k = 2, 3, 4, 5, 6$ gelöst. Für die nächsten Zahlen wird das Problem wesentlich schwieriger. Für die Zahlen $k = 7, 8, 9, 10, 11, 12$ wurden die Lösungen in den Jahren von 1943 bis 1963 gefunden. Außer für diese Zahlen ist die vollständige Lösung meines Wissens nur für $k = 24$ bekannt.

Die Lösung für $k = 12$ wurde 1943 von **Fejes Tóth** gefunden. Die **12-maximalen Mengen** sind genau die Eckenmengen der regulären Ikosaeder [349]. Für $k = 7, 8, 9$ wurde Tammes' Problem in mehreren gemeinsamen Arbeiten von W. Habicht, K. Schütte und B.L. van der Waerden gelöst [169, 323, 354]. Die noch fehlenden Fälle $k = 10, 11$ wurden dann 1963 von L. Danzer in seiner Göttinger Habilitationsschrift erledigt. Diese erschien 1986 in englischer Übersetzung [93].

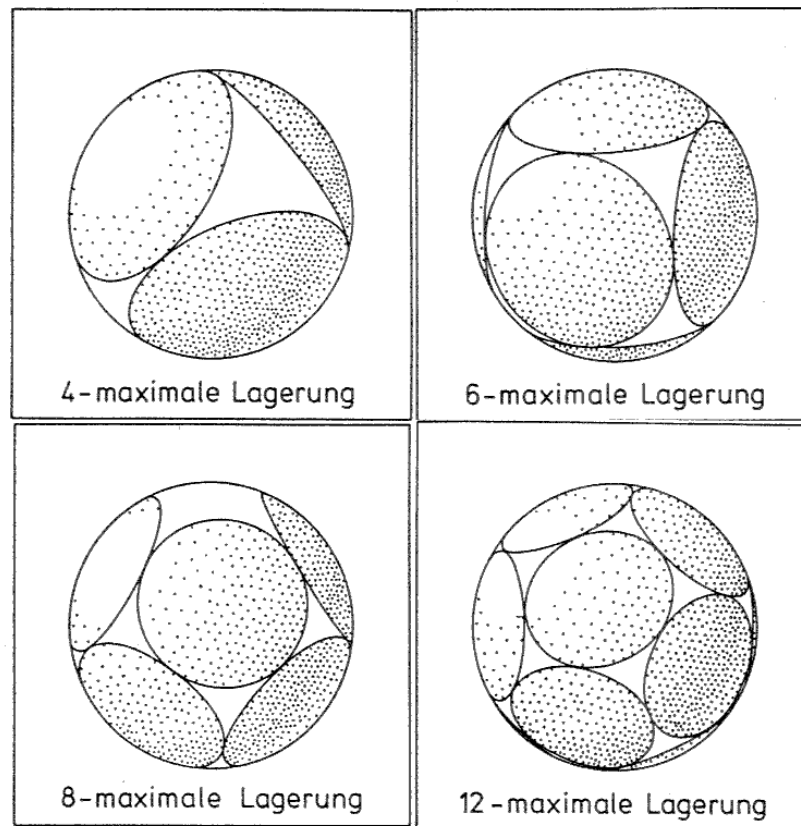
Die Lösungen für $k = 8, 11$ und 12 lassen sich leicht und schön beschreiben. Die 8-maximalen Mengen sind bis auf Isometrie eindeutig. Sie sind genau die Eckenmengen der "archimedischen" Antiprismen $(3, 3, 3, 4)$. Für 11 und 12 gilt $\delta_{11} = \delta_{12}$, und die maximalen Mengen sind wiederum bis auf Isometrie eindeutig bestimmt. Eine **12-maximale Menge** ist, wie schon ge-

sagt, die Eckenmenge eines regulären Ikosaeders. Jede **11-maximale Menge** entsteht daraus durch Fortlassen eines Eckpunktes. Für die übrigen Fälle $k = 7, 8, 9$ sind die k -maximalen Mengen ebenfalls bis auf Isometrie eindeutig bestimmt. Sie lassen sich jedoch nicht so einfach als Eckenmengen von regulären oder halbbregulären Polyedern beschreiben. Am einfachsten beschreibt man die k -maximalen Mengen X in diesen Fällen durch einen Graphen. Die Eckpunkte des Graphen sind die Punkte von X . Zwei Punkte x, y werden durch eine Strecke verbunden, wenn $d(x, y) = \delta_k$ gilt. Für $k = 4, 6, 8$ und 12 ergibt sich so das Kantennetz von Tetraeder und Oktaeder, vom Antiprisma $(3, 3, 3, 4)$ und vom Ikosaeder. Für $k = 7, 9, 10$ fanden Hachicht, Schütte, van der Waerden und Danzer die im Folgenden abgebildeten Graphen. Die Abbildungen wurden als Zentralprojektion des Kantennetzes konstruiert, wobei das Projektionszentrum den Abstand 7 vom Mittelpunkt der Einheitssphäre hatte. Mit einiger Mühe kann man sich dadurch die Lage der Punkte auf der Sphäre gut vorstellen.



Graphen der k -maximalen Mengen für $k=7,9,10$

Auf der nächsten Seite findet man Bilder der k -maximalen Lagerungen von sphärischen Kalotten für $k = 4, 6, 8$ und 12 sowie eine Tabelle der δ_k für $2 \leq k \leq 12$.



k	$\cos \delta_k$	δ_k
2	-1	180°
3	$-1/2$	120°
4	$-1/3$	$= 109,4712^\circ$
5	0	90°
6	0	90°
7	$\cot 40^\circ \cdot \cot 80^\circ$	$= 77,8695^\circ$
8	$(\sqrt{8}-1)/7$	$= 74,8585^\circ$
9	$1/3$	$= 70,5288^\circ$
10		$= 66,1468^\circ$
11	$\sqrt{1/5}$	$= 63,4349^\circ$
12	$\sqrt{1/5}$	$= 63,4349^\circ$

Die Beweismethode besteht in der sorgfältigen Untersuchung des Graphen. Seine Projektion auf S^2 zerlegt die Sphäre in konvexe Polygone. Man zeigt, dass für $k \geq 6$ jede Ecke zu mindestens 3 und höchstens 5 Kanten gehört. Mit Hilfe von Winkelabschätzungen in der sphärischen Geometrie schließt man die Existenz von sphärischen Polygonen mit zu vielen Ecken aus. Dann eliminiert man die Graphen, die nicht auf S^2 liegen können. Nach zahlreichen Fallunterscheidungen bleibt zum Schluss für jedes $k \neq 5$ genau ein Graph übrig, der wirklich zu einer k -maximalen Menge gehört. Es ist nicht schwer, in jedem Einzelfall zu beweisen, dass dieser Graph die zugehörigen k -maximalen Mengen bis auf Isometrie eindeutig bestimmt. Für alle Einzelheiten sei auf die beiden Bücher von Fejes Tóth [350, 351] und auf die Arbeit von Danzer verwiesen [93].

Zum Schluss möchte ich noch einmal auf die neolithischen Steinsphären zurückkommen. Wie wir gesehen haben, führen die k -maximalen Lagerungen von sphärischen Kalotten für $k = 4, 6$ und 12 auf symmetrische Anordnungen mit der Symmetrie des Tetraeders, des Oktaeders und des Ikosaeders. Ich meine, man könnte mit guten Gründen vermuten, dass die Menschen jener Zeit diese regelmäßigen Anordnungen durch Versuche mit Lagerungen auf Sphären entdeckt haben. Um diese Hypothese zu prüfen, müsste man auch die nicht regelmäßigen Anordnungen genauer untersuchen.

1.8 Konfigurationsräume von Kugelpackungen

Wir wenden uns nun wieder den Problemen der Lagerung von Kugeln im Raum zu. Die von Schütte und van der Waerden bewiesene Abschätzung

$$\delta_{13} < \pi/3$$

bedeutet, dass die maximale sphärische Kontaktzahl 12 ist. Wir fragen daher: Was können wir über die verschiedenen möglichen Anordnungen von 12 kongruenten Kugeln sagen, die eine gegebene zu ihnen kongruente Kugel berühren? Natürlich können wir auch diese Frage wieder als ein Problem der Lagerung von Punkten auf der Standardsphäre formulieren. Dazu betrach-

ten wir die folgende Menge \mathfrak{X} von Punktlagerungen $X \subset S^2$:

$$\mathfrak{X} = \{X \subset S^2 \mid \text{Card}(X) = 12, \delta(X) \geq \pi/3\} .$$

Die Elemente von \mathfrak{X} entsprechen bijektiv den möglichen Anordnungen von 12 nicht nummerierten Kugeln. Die bijektive Beziehung wird dadurch hergestellt, dass man jedem System von 12 Kugeln das System seiner 12 Berührungspunkte in S^2 zuordnet.

Würde man mit nummerierten Kugeln arbeiten, dann wäre die Menge der Anordnungen von 12 nummerierten Berührungskugeln natürlich mit dem folgenden Raum zu identifizieren:

$$\tilde{\mathfrak{X}} = \{(x_1, \dots, x_{12}) \in (S^2)^{12} \mid d(x_i, x_j) \geq \pi, 1 \leq i < j \leq 12\} .$$

Auf $(S^2)^{12}$ operiert die symmetrische Gruppe S_{12} durch Vertauschung der Koordinaten, und die Zuordnung $(x_1, \dots, x_{12}) \mapsto \{x_1, \dots, x_{12}\}$ induziert eine kanonische Bijektion

$$\tilde{\mathfrak{X}}/S_{12} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X} .$$

Wenn wir die Bedingung $\delta(X) \geq \pi/3$, die von unserem Kugelproblem kommt, fallen lassen und beliebige Punktlagerungen bzw. Lagerungen von nummerierten Punkten betrachten, dann werden wir dazu geführt, die folgenden Räume zu betrachten:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \{X \subset S^2 \mid \text{Card}(X) = 12\} \\ \tilde{\mathcal{Y}} &= \{(x_1, \dots, x_{12}) \in (S^2)^{12} \mid x_i \neq x_j, 1 \leq i < j \leq 12\} . \end{aligned}$$

Man hat natürlich wieder eine kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \tilde{\mathcal{Y}} &\rightarrow \mathcal{Y} \\ (x_1, \dots, x_{12}) &\mapsto \{x_1, \dots, x_{12}\} , \end{aligned}$$

und diese induziert eine kanonische Bijektion

$$\tilde{\mathcal{Y}}/S_{12} \rightarrow \mathcal{Y} .$$

Alle diese Räume haben kanonische Topologien. Denn $(S^2)^{12}$ hat die Produkttopologie, und $\tilde{\mathcal{Y}}$ sowie $\tilde{\mathcal{X}}$ haben dann die davon induzierte Topologie, und schließlich haben $\mathfrak{X} \approx \tilde{\mathcal{X}}/S_{12}$ und $\mathcal{Y} = \tilde{\mathcal{Y}}/S_{12}$ die jeweilige Quotiententopologie.

Damit haben wir insgesamt das folgende Diagramm von stetigen Abbildungen von interessanten topologischen Räumen:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\mathcal{X}} & \hookrightarrow & \tilde{\mathcal{Y}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{\mathcal{X}}/S_{12} & \hookrightarrow & \tilde{\mathcal{Y}}/S_{12} \\
 \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\
 \mathfrak{X} & \hookrightarrow & \mathcal{Y}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \varphi \curvearrowright \\
 \psi \curvearrowleft
 \end{array}$$

Die horizontalen Abbildungen sind Inklusionen von Unterräumen, und die vertikalen Abbildungen sind unverzweigte Überlagerungen bzw. Homöomorphismen. Mit diesen Definitionen haben wir die Möglichkeit, qualitative Aussagen über die möglichen Anordnungen von 12 Berührungskugeln zu formulieren. Beispielsweise können wir die Aussage, dass sich zwei Lagerungen X_0 und X_1 aus \mathfrak{X} stetig ineinander überführen lassen, jetzt so präzise formulieren: X_0 und X_1 sind in \mathfrak{X} durch einen stetigen Weg verbindbar. Damit stellt sich die Frage nach der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von \mathfrak{X} . Dass es endlich viele sind, ist klar, weil \mathfrak{X} offensichtlich kompakt ist. Darüber hinaus stellt sich die Frage, ob sich zwei Punkte in einer Komponente durch wesentlich verschiedene Wege miteinander verbinden lassen, also durch nicht zueinander homotope Wege. Mit anderen Worten: Sind die Zusammenhangskomponenten einfach-zusammenhängend? Wenn nicht: Was ist ihre Fundamentalgruppe?

In Anbetracht der Tatsache, dass der Raum $\tilde{\mathcal{X}}$ als Unterraum des 24-dimensionalen Raumes $(S^2)^{12}$ durch 66 Ungleichungen definiert ist, ist nicht zu erwarten, dass man leicht Antworten auf die oben formulierten Fragen bekommt. Ich muss sogar sagen, dass ich nicht weiß, ob diese Fragen schon vollständig beantwortet sind oder nicht. Ich will hier nur über einige hübsche Teilresultate berichten, die besonders schöne anschauliche

Geometrie enthalten. Die allgemeinen Fragen habe ich nur aufgeworfen, um diesen Teilresultaten die rechte Perspektive zu geben.

Bevor ich auf den Konfigurationsraum \mathfrak{X} zu sprechen komme, will ich aber auf den sehr viel einfacheren Konfigurationsraum \mathscr{Y} eingehen, den man sehr gut kennt. Allgemein kann man für jeden Raum M und jede natürliche Zahl $k \geq 1$ zwei **Konfigurationsräume** wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} F_k(M) &= \{(x_1, \dots, x_k) \in M^k \mid x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\} \\ B_k(M) &= \{x \subset M \mid \text{Card}(X) = k\} \end{aligned}$$

Natürlich hat man wieder eine kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} F_k(M) &\rightarrow B_k(M) \\ (x_1, \dots, x_k) &\rightarrow \{x_1, \dots, x_k\}, \end{aligned}$$

und diese induziert eine Bijektion

$$F_k(M)/S_k \xrightarrow{\cong} B_k(M).$$

Allgemein sind solche Konfigurationsräume von **Fadell** und **Neuwirth** untersucht worden [130, 129]. Besonders interessant sind diese Konfigurationsräume $F_k(M)$ und $B_k(M)$, wenn M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist. Und ganz besonders wichtig sind dabei die beiden klassischen Fälle, wo M die 2-dimensionale euklidische Ebene E^2 oder die 2-dimensionale Sphäre S^2 ist. Unsere oben eingeführten Konfigurationsräume \mathscr{Y} und $\widetilde{\mathscr{Y}}$ sind einfach die Spezialfälle $\mathscr{Y} = B_{12}(S^2)$ und $\widetilde{\mathscr{Y}} = F_{12}(S^2)$. Die Fälle $M = E^2$ und $M = S^2$ sind deswegen so interessant, weil die Fundamentalgruppen ihrer Konfigurationsräume **Zopfgruppen** sind. Die Geschichte dieser Gruppen geht auf eine Arbeit von **A. Hurwitz** aus dem Jahre 1891 zurück: “Über Riemannische Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten” [202]. Als an sich interessante Struktur wurde die Theorie der Zöpfe von Emil

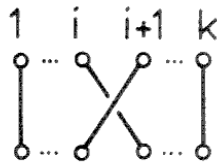
Artin entwickelt: "Theorie der Zöpfe", [5].³⁴ Über den Stand der Theorie bis 1974 berichtet J. Birman: "Braids, links, and mapping class groups" [27]. Inzwischen haben sich hochinteressante Beziehungen zwischen der Theorie der Zopfgruppen und ganz anderen Gebieten der Mathematik entwickelt. Einen guten Überblick dazu gibt der von J.S. Birman und A. Libogger herausgegebene Konferenzbericht: "Braids, Proceedings of a Summer Research Conference held July 13-26, 1986" [28]. Dort findet man auch einen Aufsatz von mir, der erklärt, warum Zopfgruppen beim Studium der Singularitäten komplexer Räume interessant sind [56]. Ich muss es mir hier versagen, auf irgendeine dieser interessanten Beziehungen der Zopfgruppen zu anderen Gebieten einzugehen. Ich will hier nur ganz elementar und anschaulich Zöpfe beschreiben und ihre Beziehung zu den Konfigurationsräumen herstellen.

Wir beginnen mit einer operationalen Beschreibung von Zöpfen. Jeder **Zopf** hat eine gewisse Anzahl k von **Strängen**. Er entsteht, indem diese Stränge durch gewisse Operationen miteinander verflochten werden. Man kann diese Operationen nacheinander ausführen, und man kann jede Operation auch rückgängig machen. Auf diese Weise erhält man eine Gruppe von Flechtoperationen, die Zopfgruppe mit k Strängen. Die Flechtoperationen lassen sich letzten Endes als Komposition von $k - 1$ sehr einfachen Operationen $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ und von ihren Inversen $\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{k-1}^{-1}$ auffassen.

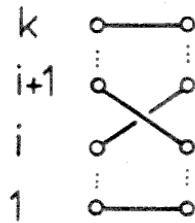
Die Operation σ_i besteht darin, den i -ten und den $(i + 1)$ -ten Strang einmal zu überkreuzen, während die übrigen Stränge von der Operation unberührt bleiben. Dabei soll der $(i + 1)$ -te Strang aus der Blickrichtung des Flechtenden bei σ_i über dem i -ten liegen, bei σ_i^{-1} darunter.

Graphisch könnte man die Operation σ_i , wie folgt darstellen, wenn man sich vorstellt, dass wie beim Flechten eines Zopfes die festen Enden oben, die freien unten sind:

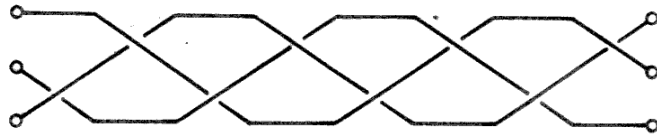
³⁴Zur Geschichte der Knotentheorie und der Zöpfe siehe den Band von M Epple [117]. Er erschien erst nach Abfassung des hier vorliegenden Textes, wurde dann aber von E. Brieskorn hoch geschätzt (Hrsg.).



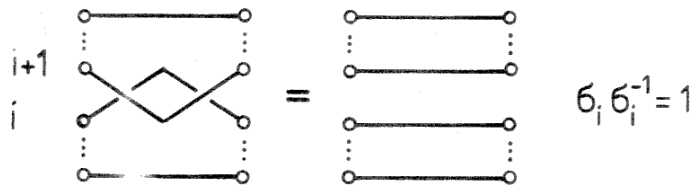
Durch Komposition dieser Operationen würde bei der graphischen Darstellung ein von oben nach unten laufendes Muster entstehen. Da wir aber in Europa von links nach rechts schreiben und nicht von oben nach unten, stellen wir die Operation σ_i wie folgt dar:



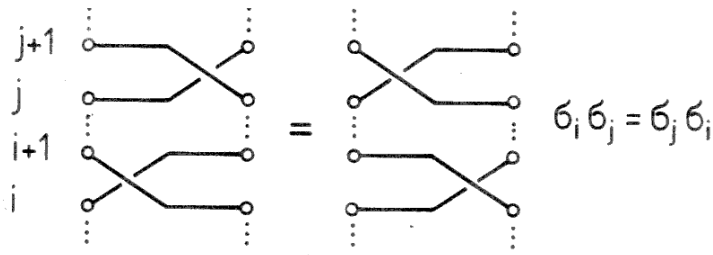
Zum Beispiel erhält man den vielleicht häufigsten Zopf mit 3 Strängen durch abwechselnde Anwendung von σ_1^{-1} und σ_2 :



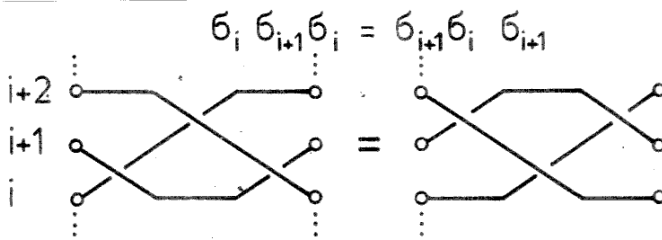
Zwischen den erzeugenden Operationen $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ bestehen gewisse Relationen. So sind selbstverständlich die Operationen σ_i und σ_i^{-1} zueinander invers:



Ferner ist klar, dass σ_i und σ_j vertauschbar sind, wenn $|i - j| > 1$



Schließlich hat man noch die folgende Relation:



Artin hat gesehen, dass aus diesen einfachen Relationen schon alle anderen ableitbar sind. Daher ist es möglich, die Zopfgruppe mit k Strängen wie folgt zu definieren:

Definition:

Die **Zopfgruppe mit k Strängen** B_k ist die Gruppe mit den Erzeugenden $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ und mit den Relationen

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{für } |i - j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} && \text{für } i = 1, \dots, k - 1. \end{aligned}$$

Diese Definition der Zopfgruppen in der Sprache der kombinatorischen Gruppentheorie ist einfach und direkt. Der ganze Abstraktionsprozess von den anschaulichen manuellen Operationen des Flechtens zu den abstrakten mathematischen Operationen als Elementen einer Gruppe wird in einem einzigen Schritt vollzogen. Hätte ich diese radikale Abstraktion nicht durch Verweis auf die Anschauung und graphische Darstellung begleitet, wüsste man wohl kaum, was eigentlich mit der Definition gemeint war.

Es ist natürlich, dass E. Artin seine Theorie nicht gleich mit dieser abstrakten Definition der Zopfgruppen angefangen hat, sondern mit einer De-

definition von Zöpfen, durch die nicht die Operation des Flechtens modelliert wurde, sondern die räumlichen Gebilde, welche durch diese Operation erzeugt werden, eben jene, die man üblicherweise Zöpfe nennt. Während die operationale Definition gleich und unvermittelt ein algebraisches Objekt schafft, nämlich eine Gruppe, führt ein mehr anschauliches Denken zunächst zu geometrischen Objekten, eben den Zöpfen, die dann ihrerseits die Elemente einer algebraischen Struktur bilden, die man Zopfgruppe nennt. Der Reiz und die Fruchtbarkeit dieser Begriffsbildung beruht gerade auf der Verbindung von geometrischem und algebraischem Denken, und wir wollen deshalb jetzt eine solche mehr geometrische Beschreibung von Zöpfen skizzieren. Wir benutzen dabei nicht den ursprünglichen Ansatz von Artin aus der Arbeit von 1925, in der er mit Projektionen von Zöpfen in der Art der obigen graphischen Darstellungen arbeitete, sondern eine flexiblere Methode, die er später entwickelt hat (E. Artin: “Theory of braids” [6]). Wir nehmen uns dabei die Freiheit, Artin so zu interpretieren, dass sein Ansatz in den von Fadell entwickelten übergeht (E. Fadell, J. Van Buskirk: “The braid groups of E^2 und S^2 ” [131]).

Ein Zopf ist ein räumliches Gebilde, das aus k Strängen besteht. Die k Stränge modellieren wir durch k im 3-dimensionalen euklidischen Raum verlaufende Linien. Genauer gesagt sollen dies k disjunkte Jordanbögen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ sein. Von diesen Bögen nehmen wir an, dass sie ganz in einem bestimmten Teil des Raumes liegen. Und zwar soll dieser Teil das Gebiet zwischen zwei bestimmten parallelen Ebenen sein. Wir beschreiben dieses Raumstück als das cartesische Produkt $E^2 \times [0, 1]$ einer euklidischen Ebene E^2 mit einem Intervall $[0, 1]$. Die Jordanbögen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ liegen also in $E^2 \times [0, 1]$. Die Anfangspunkte aller Bögen sollen in $E^2 \times \{0\}$ liegen und die Endpunkte in $E^2 \times \{1\}$. Bei Projektion auf E^2 liefern die Anfangspunkte eine Menge $X_0 \subset E^2$ von k Punkten, und die Eckpunkte liefern eine Menge $X_1 \subset E^2$. Wir verlangen $X_0 = X_1$. Wir verlangen aber nicht, dass jeder einzelne Jordanbogen den gleichen Anfangs- und Endpunkt hat. Die bis jetzt formulierten Bedingungen sind für eine adäquate begriffliche Fassung unserer anschaulichen Vorstellung von Zöpfen noch nicht ausreichend. Sie würden beispielsweise noch zulassen, dass die einzelnen Stränge Knoten

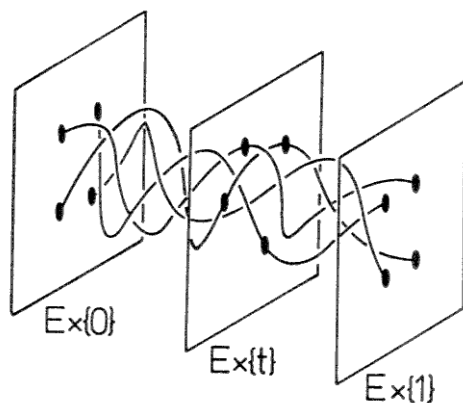
haben oder miteinander verknötet sind. Um solchen Wirrwarr zu vermeiden, verlangen wir für jedes $t \in [0, 1]$, dass die Bögen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ die Ebene $E_2 \times \{t\}$ in genau k Punkten treffen. Dadurch wird jedem $t \in [0, 1]$ eine Menge $X(t)$ von k verschiedenen Punkten aus E^2 zugeordnet:

$$X(t) \times \{t\} = E^2 \times \{t\} \cap \bigcup_{i=1}^k \gamma_i .$$

So erhalten wir schließlich durch die Zuordnung $t \mapsto X(t)$ eine stetige Abbildung des Intervalls $[0, 1]$ in den Konfigurationsraum von E^2 :

$$\xi : [0, 1] \rightarrow B_k(E^2).$$

Dies ist ein geschlossener Weg im Konfigurationsraum mit Anfangs- und Endpunkt X_0 .



Die nächste Frage ist nun, wann wir zwei solche Objekte als Darstellungen ein- und desselben Zopfes ansehen wollen. In unserer Anschauung von realen Zöpfen werden wir natürlich zwei derartige Gebilde, die durch geringfügige stetige Lageänderungen auseinander hervorgehen, als gleichartig und in diesem Sinne als den gleichen Zopf ansehen. Bei der mathematischen Formalisierung haben wir aber dann verschiedene Möglichkeiten der Definition, die a priori zu unterschiedlich feinen Äquivalenzrelationen führen könnten. Es stellt sich jedoch a posteriori heraus, dass alle in diesem Kontext sinnvollen Definitionen logisch gleichwertig sind. Wir dürfen uns daher

auf den Äquivalenzbegriff festlegen, der im Hinblick auf die Geometrie der Konfigurationsräume der natürlichste ist: Zwei geschlossene Wege ξ_0 und ξ_1 in $B_k(E^2)$ mit dem gleichen Anfangs- und Endpunkt $X_0 \in B_k(E^2)$ repräsentieren den gleichen Zopf, wenn sie als geschlossene Wege homotop sind. Sie repräsentieren also dann das gleiche Element in der Fundamentalgruppe $\pi_1(B_k(E^2), X_0)$. Und natürlich definieren wir dann die Komposition solcher Zöpfe durch das Produkt in der Fundamentalgruppe. Damit haben wir nun die gesuchte geometrische Definition der Zopfgruppen.

Definition:

$X_0 \subset E^2$ sei eine Menge von k Punkten in der Ebene E^2 . Dann ist die **geometrische Zopfgruppe** zu X_0 die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(B_k(E^2), X_0)$$

des Konfigurationsraumes $B_k(E^2)$ zum Basispunkt $X_0 \in B_k(E^2)$.

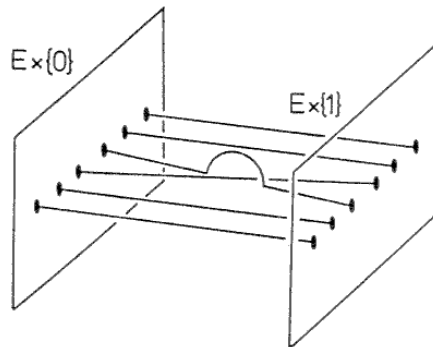
Wie hängt diese geometrische Definition mit der vorher gegebenen kombinatorisch-gruppentheoretischen Definition zusammen? Hier gibt es eine Schwierigkeit. Die algebraische Definition liefert eine eindeutig definierte Gruppe mit einem Erzeugendensystem, die geometrische hingegen Gruppen ohne Erzeugendensystem, und zwar unendlich viele, für jeden Basispunkt eine.

Wir werden für jede dieser Gruppen Isomorphismen mit der Gruppe B_k konstruieren; Isomorphismen, die jedoch nicht eindeutig bestimmt und also erst recht nicht kanonisch sind. Wir betrachten zunächst eine spezielle Situation, bei der wir die euklidische Geometrie der Ebene ins Spiel bringen, obwohl das in diesem topologischen Kontext nicht natürlich ist. Wir nehmen nämlich zunächst einmal an, dass die Punkte von X_0 auf einer Geraden L in der Ebene E^2 liegen. Wir wählen eine Orientierung dieser Geraden und eine Orientierung der Ebene. Dann numerieren wir die Punkte von X_0 entsprechend ihrer Reihenfolge auf der orientierten Geraden:

$$X_0 = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Wir betrachten die orthogonale Projektion $p : E^2 \rightarrow L$ der Ebene auf die Gerade. Bezüglich dieser Projektion liegt ein Punkt $z \in E^2$ definitionsgemäß über einem Punkt $y \in E^2$, wenn $p(y) = p(z)$, und wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Ist v ein Translationsvektor von L , der die Orientierung von L definiert, und w der Translationsvektor von E mit $w(y) = z$ dann definiert die Basis (v, w) die Orientierung von E . Damit ist die spezielle geometrische Situation fixiert, die uns die Konstruktion eines geeigneten Erzeugendensystems der Zopfgruppe zu X_0 ermöglicht.

Dazu wählen wir ein System von geschlossenen Wegen ξ_1, \dots, ξ_{k-1} in $B_k(E^2)$ wie folgt. Ich beschreibe die Bedingungen für die Wahl von ξ_i . Der Weg ξ_i definiert k Jordanbögen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ in $E^2 \times [0, 1]$. Wir betrachten die Bilder $\bar{\gamma}_i, \dots, \bar{\gamma}_k$ dieser Bögen bezüglich der Projektion $\pi : E^2 \times [0, 1] \rightarrow L \times [0, 1]$. Für $j \neq i, i+1$ soll $\bar{\gamma}_j$ die Strecke sein, die $(x_i, 0)$ mit $(x_{i+1}, 1)$ verbindet. $\bar{\gamma}_i$ soll die Strecke sein, die $(x_1, 0)$ mit $(x_{i+1}, 1)$ verbindet. $\bar{\gamma}_{i+1}$ soll die Strecke sein, die $(x_{i+1}, 0)$ mit $(x_i, 1)$ verbindet. $\bar{\gamma}_i$ und $\bar{\gamma}_{i+1}$ kreuzen sich dann in einem Punkt (x, t) . Über diesem Punkt liegen bezüglich der Projektion π jeweils ein Punkt (y, t) von γ_i und ein Punkt (z, t) von γ_{i+1} . Wir verlangen als letzte Bedingung, dass z bezüglich $p : E \rightarrow L$ über y liegt. Besser als diese etwas schwerfällige Beschreibung erklärt ein Bild die einfache geometrische Idee.



Es sei nun ξ_1, \dots, ξ_{k-1} ein entsprechend den obigen Bedingungen gewähltes System von Wegen, und $\sigma'_1, \dots, \sigma'_{k-1} \in \pi_1(B_k(E^2), X_0)$ seien die zugehörigen Homotopieklassen. $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_{k-1})$ hängt nur von $X_0 \subset L$ sowie

von den gewählten Orientierungen ab. Man kann zeigen, dass $\sigma'_1, \dots, \sigma'_{k-1}$ die Fundamentalgruppe erzeugen, und dass zwischen ihnen genau die gleichen Relationen bestehen wie zwischen den Erzeugenden $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ der abstrakten Zopfgruppe B_k . Daher definiert die Zuordnung $\sigma_i \mapsto \sigma'_i$ einen Isomorphismus

$$B_k \xrightarrow{\cong} \pi_1(B_k(E^2), X_0).$$

Damit haben wir für Punktmengen X_0 in spezieller Lage den gesuchten Isomorphismus konstruiert. Wenn die Punkte von X_0 nicht auf einer Geraden liegen, kann man eine homomorphe Abbildung von E^2 auf sich selbst wählen, welche X_0 in eine Punktmenge auf einer Geraden überführt. Dadurch erhält man für jeden Basispunkt X_0 Isomorphismen der Fundamentalgruppe mit der Gruppe B_k . Diese Isomorphismen sind aber keineswegs eindeutig bestimmt. Sie sind nicht kanonisch. Dies ist jedoch nicht als ein Mangel der geometrischen Definition der Zopfgruppen anzusehen, sondern gerade umgekehrt als ein interessantes Phänomen. Ich verweise dazu auf meinen oben zitierten Artikel über Zöpfe und automorphe Mengen [56].

Es besteht eine enge Beziehung zwischen der Zopfgruppe B_k und der symmetrischen Gruppe S_k . Es gibt nämlich einen kanonischen surjektiven Homomorphismus

$$B_k \rightarrow S_k.$$

Er ordnet dem erzeugenden Element $\sigma_i \in B_k$ die Transposition $\tau_i \in S_k$ zu, welche i und $i + 1$ vertauscht. Bezeichnen wir den Kern mit P_k , dann haben wir eine kanonische kurze exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \rightarrow P_k \rightarrow B_k \rightarrow S_k \rightarrow 1 .$$

Auf der geometrischen Ebene entspricht dem für jedes $X_0 \in B_k(E^2)$ ein kanonischer surjektiver Homomorphismus

$$\pi_1(B_k(E^2), X_0) \rightarrow \text{Sym}(X_0)$$

von der geometrischen Zopfgruppe auf die symmetrische Gruppe der Permutationen von X_0 . Den Kern dieses Homomorphismus nennt man die

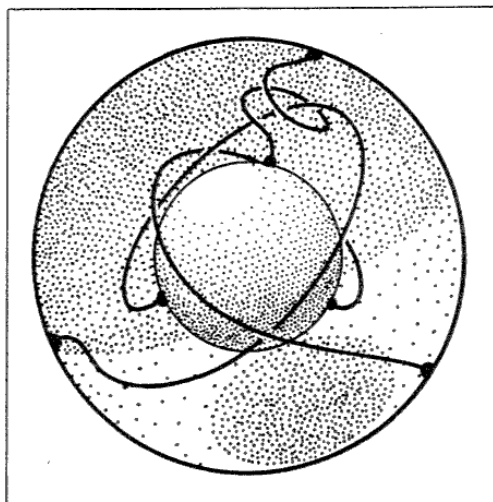
Gruppe der reinen Zöpfe. Die Elemente dieser Gruppe nennt man **reine Zöpfe** oder auch **gefärbte Zöpfe**. Denn man kann jedem Element $x \in X_0$ eine Farbe zuordnen, und dann kann man bei allen reinen Zöpfen den Strang mit Anfangs- und Endpunkt x in dieser Farbe färben, und diese Färbung ist mit der Komposition der Zöpfe verträglich. Die Gruppe der reinen Zöpfe ist ebenfalls eine Fundamentalgruppe eines Konfigurationsraumes. Numeriert man die Punkte von X_0 irgendwie, dann ist das zugehörige n -Tupel \tilde{X}_0 ein Punkt in $F_k(E^2)$, der bei der Überlagerungsabbildung $F_k(E^2) \rightarrow B_k(E^2)$ auf X_0 abgebildet wird. Die Überlagerungsabbildung induziert einen Homomorphismus der Fundamentalgruppen, und man erhält eine kanonische kurze exakte Sequenz:

$$1 \rightarrow \pi_1(F_k(E^2), \tilde{X}_0) \rightarrow \pi_1(B_k(E^2), X_0) \rightarrow \text{Sym}(X_0) \rightarrow 1 .$$

Die Gruppen der reinen Zöpfe ist also die Fundamentalgruppe des Konfigurationsraumes $F_k(E^2)$. Wir wenden uns nun den Fundamentalgruppen der Konfigurationsräume der Sphäre S^2 zu. Natürlich haben wir wieder eine kurze exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \pi_1(F_k(S^2), \tilde{X}_0) \rightarrow \pi_1(B_k(S^2), X_0) \rightarrow \text{Sym}(X_0) \rightarrow 1 .$$

Wir können die Elemente dieser Gruppen wieder als eine Art von Zöpfen interpretieren. Nur liegen die Stränge dieser Zöpfe nun nicht in einer ebenen Schicht $E^2 \times [0, 1]$, sondern in einer sphärischen Schicht $S^2 \times [0, 1]$, und wir wollen sie deshalb auch sphärische Zöpfe nennen.



Wir fassen die Sphäre S^2 als einpunktige Kompaktifizierung der Ebene auf:

$$S^2 = E^2 \cup \{\infty\} .$$

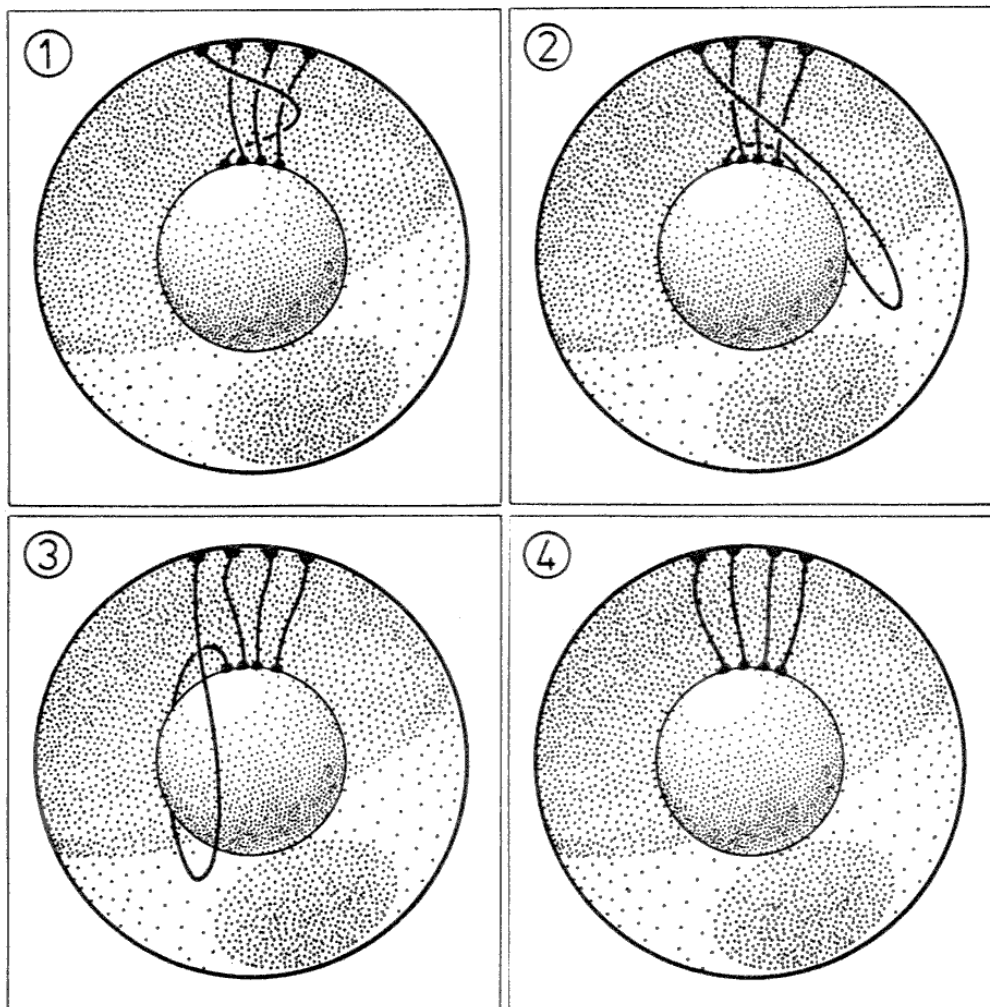
Dann induziert die Inklusion $E^2 \rightarrow S^2$ für jedes $X_0 \in B_k(E^2)$ einen kanonischen Homomorphismus

$$\pi_1(B_k(E^2), X_0) \rightarrow \pi_1(B_k(S^2), X_0) .$$

Man sieht leicht, dass dieser Homomorphismus surjektiv ist. Wählen wir in $\pi_1(B_k(E^2), X_0)$ wie oben ein System von Erzeugenden mit den gleichen Relationen wie in B_k , dann sind ihre Bilder $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1} \in \pi_1(B_k(S^2), X_0)$ ein Erzeugendensystem für die Gruppe der sphärischen Zöpfe. Sie genügen außer den ursprünglichen Relationen noch neuen weiteren Relationen. Man kann jedoch beweisen, dass die Hinzunahme einer geeigneten weiteren Relation genügt, um alle anderen zu erzeugen. Die Gruppe $\pi_1(B_k(S^2), X_0)$ hat ein Erzeugendensystem $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ mit den folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{für } |i - j| > 1 , \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} && \text{für } i = 1, \dots, k - 1 , \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{k-1} \sigma_{k-1} \cdots \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 &= 1 && (*) . \end{aligned}$$

Das nächste Bild illustriert die neue Relation (*).



Der aufmerksame Leser wird bemerken, dass wir eine ähnliche Situation schon einmal betrachtet haben, und zwar bei der Beschreibung der Spin-Gruppe als universeller Überlagerung der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3, \mathbb{R})$. Dort hatten wir bewiesen, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), 1)$ zyklisch von der Ordnung 2 ist. Auf den Seiten 207 und 208 von LA III hatten wir dies durch Experimente mit einem verdrehten Arm eines armen Verdrehten und mit einem verdrillten Band illustriert [57]. Die

Kanten dieses Bandes bilden einen sphärischen Zopf mit zwei Strängen, und zwar σ_1^4 . Die Sequenz von Abbildungen Seite 208 illustriert bei dieser Interpretation gerade die Relation $\sigma_1^4 = 1$, während die Relation (*) für den Fall $k = 2$ lautet: $\sigma_1^2 = 1$.

Warum ist das so?

Es gibt einen kanonischen Homomorphismus

$$\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), 1) \rightarrow \pi_1(B_k(S^2), X_0) .$$

Er ist wie folgt definiert. Die Gruppe $SO(3, \mathbb{R})$ operiert kanonisch auf der Sphäre S^2 und daher auch auf ihrem Konfigurationsraum $B_k(S^2)$. Daher kann man, wenn $g : [0, 1] \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$ irgendein geschlossener Weg in $SO(3, \mathbb{R})$ mit Anfangs- und Endpunkt 1 ist, wie folgt einen geschlossenen Weg $\xi : [0, 1] \rightarrow B_k(S^2)$ mit Anfangs- und Endpunkt X_0 definieren:

$$\xi(t) = g(t)(X_0) .$$

Die Zuordnung $g \mapsto \xi$ induziert beim Übergang zu Homotopieklassen den gesuchten Homomorphismus der Fundamentalgruppen. Nun ist aber die Gruppe $\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), 1)$ zyklisch von der Ordnung 2. Deshalb ist der Homomorphismus durch das Bild des erzeugenden Elementes bestimmt. Dieses ist ein ausgezeichnetes Element ς in der sphärischen Zopfgruppe:

$$\varsigma = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-1})^k .$$

Dieses Element ist von der Ordnung 2. Das führt auf die Relation

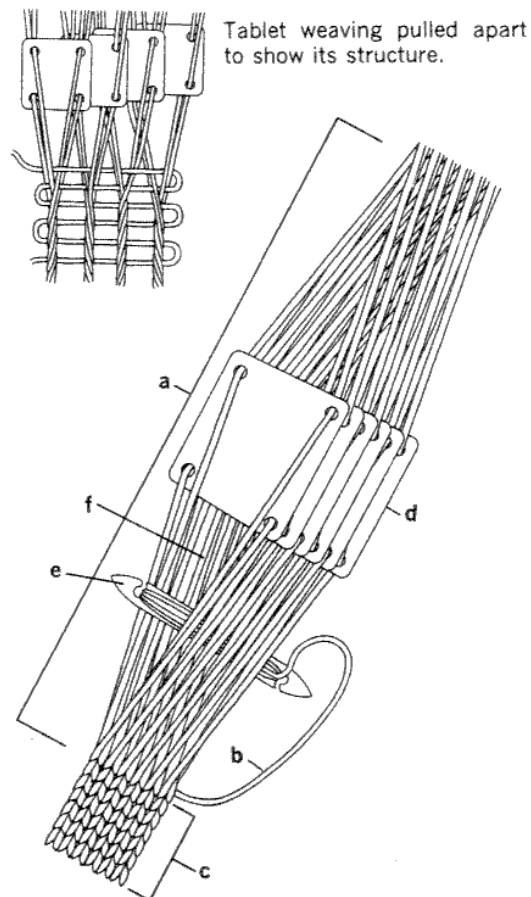
$$(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-1})^{2k} = 1 .$$

Für $k = 2$ ergibt sich gerade $\sigma_1^4 = 1$. Dass unser früheres Experiment nur $\sigma_1^4 = 1$ liefert und nicht $\sigma_1^2 = 1$, liegt natürlich daran, dass wir die Stränge eines Zopfes einzeln bewegen können, die Kanten eines Bandes aber nur gemeinsam.

Eigentlich habe ich die Geschichte der Zopfgruppen nicht richtig erzählt. Denn ich habe sie vor hundert Jahren beginnen lassen, mit der Arbeit von Hurwitz aus dem Jahre 1891. In diesem Kontext einer schon hoch entwickelten Funktionentheorie spielte der direkte Bezug zur praktischen, vor-mathematischen Erfahrung kaum eine Rolle. Ganz anders war das mit den grundlegenden Arbeiten von Emil Artin. Hier wurde ganz bewusst der Versuch unternommen, eine schon in vorgeschichtlichen Zeiten entwickelte kulturelle Tätigkeit des Menschen, in der sich praktische und künstlerische Momente schöpferisch verbinden, mathematisch begrifflich zu fassen und so zu operationalisieren. Bei manch einem mathematischen Begriff erweckt ja das vertraute Wort unserer Muttersprache, mit dem man ihn benennt, zu Unrecht den Anschein, als würde hier die Wortbedeutung im mathematischen Begriff gefasst. "Baum" und "Blatt", "Zweig" und "Wurzel" "Kuss" und "Körper", diese schönen Wörter bedeuten etwas anderes als die mathematischen Begriffe, denen man diese Namen geliehen hat. "Zopf" dagegen ist ein ehrlicher Name, auch wenn die mathematische Abstraktion von der reichen Vielfalt der kulturellen Tradition, die mit Zöpfen verbunden ist, nichts ahnen lässt.

Zöpfe und zopfartige Geflechte treten schon in vorgeschichtlicher Zeit auf, spätestens seit der mittleren Steinzeit. Spätestens in der Eisenzeit, vielleicht auch schon in der Bronzezeit, entwickelte sich die Plättchenwebtechnik, eine Technik zum Flechten von Zöpfen mit vielen Strängen, mit der am Rande von normalem Gewebe ein sehr haltbarer, fest geflochtener Randstreifen erzeugt wurde und auch einzelne Bänder mit kunstvollen Mustern. Diese Technik war im Nahen und im Fernen Osten bekannt, in Nordafrika wie in Europa, in Ägypten wie in Skandinavien spätestens seit dem 4. vorchristlichen Jahrhundert. Die folgenden Abbildungen aus einem Anleitungsbuch für Plättchenweben erklären die Technik. Im Mittelalter wurden auf diese Weise viele kunstvoll geschmückte Bänder für kirchliche Zwecke gewoben. Auf einem Wandteppich von 1530, heute im Musée des Beaux Arts in Reims, sieht man in einem himmlischen Garten die Jungfrau Maria, umgeben von Engeln und Einhörnern, ein Band mit einem zarten Blumenmuster webend. Das 16. Jahrhundert sah dann den Niedergang

dieser Kunst. Als Volkskunst hat sich die Technik des Plättchenwebens bis heute erhalten, zum Beispiel bei den Quechua-Indianern in Bolivien.



Solche Webereien sind nur ein besonders schönes Beispiel für die Verbindung von Schönerem und Nützlichem beim Flechten. Erwähnen muss man hier auch die teils praktischen, teils sehr dekorativen Flechtarbeiten, welche früher die Seeleute auf den Segelschiffen hergestellt haben. Hunderte von Beispielen dafür findet man in dem Buch von Clifford W. Ashley: "The

³⁵Dankend entnommen aus [335, p.7]

Ashley Book of Knots” [9]. Man sollte nicht in den Fehler verfallen, zu meinen, all dieses gehöre zu einer vergangenen Zeit. Zöpfe haben auch heute praktische Bedeutung. Wer offene Augen hat, findet in seiner eigenen Umwelt manches Beispiel. Die untenstehende Zeichnung zeigt einen Zopf mit 12 Strängen. Es ist ein Schnürsenkel. Darf man dergleichen in einem Buch für Mathematiker erzählen? Ich denke, man darf das. Zwar bestehen große Unterschiede zwischen dem begrifflich-abstrakten mathematischen Denken, dem konkreten, durch Anschauung und Erfahrung geleiteten praktischen Handeln und dem künstlerischen Schaffen. Doch eine absolute Trennung dieser Bereiche entspricht nicht der Wirklichkeit. Allerdings kann es lange dauern, bis das abstrakte Denken unsere kulturelle Erfahrung einholt. Die abstrakten Strukturen, die es gestatten, die uralte Operation des Flechtens und die davon erzeugten Gebilde im mathematischen Begriff zu fassen, nämlich die Gruppenstruktur und die Topologie, sind Schöpfungen des ausgehenden 19. und des beginnenden 20. Jahrhunderts.



Die Geschichte der Mathematik, das Auftreten alter Ideen in neuen Zusammenhängen, in denen sie sich mit anderen Ideen aus anderen Zusammenhängen zu neuen Mustern verbinden, die sich wieder auflösen, während andere Muster neu sich bilden, erscheint mir manchmal selbst unter dem Bild eines sich immer weiter wirkenden Gewebes. Und bisweilen sehe ich dies Symbol eines einzigen unendlichen Geflechtes mit seinen immer neu sich verschlingenden Linien als ein Bild der ganzen, in unendlich vielfältiger Weise dahinströmenden und wechselwirkenden Wirklichkeit.

In Fritjof Capras Buch: “Das Tao der Physik” [77] fand ich ein Zitat von Werner Heisenberg, das wohl etwas Ähnliches meint:

“Die Welt erscheint in dieser Weise als ein kompliziertes Gewebe von Vorgängen, in dem sehr verschiedenartige Verknüpfungen sich abwechseln, sich überschneiden und zusammenwirken und in dieser Weise schließlich die Struktur des ganzen Gewebes bestimmen.”

*W. Heisenberg,
Physik und Philosophie, 1973.*

Unser Bericht über die sphärischen Zopfgruppen hat deutlich gemacht, dass man den Konfigurationsraum $\mathcal{Y} = B_{12}(S^2)$ gut kennt: Er ist zusammenhängend, und seine Fundamentalgruppe ist die Gruppe der sphärischen Zöpfe mit 12 Strängen. Die höheren Homotopiegruppen dieses Raumes verschwinden. Das sieht man leicht durch Betrachtung der Konfigurationsräume $F_n(S^2)$ und Induktion über n . Der Homotopietyp von \mathcal{Y} ist also bekannt und durch die sphärische Zopfgruppe bestimmt. \mathcal{Y} ist ein **Eilenberg-MacLane-Raum** vom Typ $K(\pi_1(B_{12}(S^2)), 1)$.

Was können wir nun über den Konfigurationsraum \mathfrak{X} sagen, der die Konfigurationen von 12 Kugeln beschreibt, welche eine Kugel vom gleichen Radius berühren? Ich weiß nicht, ob \mathfrak{X} zusammenhängend ist, und drei Experten, die ich gefragt habe, konnten es mir auch nicht sagen. Deswegen stelle ich die bescheidenere Frage, ob die uns schon bekannten speziellen Konfigurationen in der gleichen Zusammenhangskomponente liegen. Wir haben bisher drei Arten von speziellen Konfigurationen neu kennengelernt. Zwei davon kommen von den beiden ausgezeichneten dichtesten Kugelpackungen, und wir wollen sie deswegen **kubisch dichteste Konfigurationen** bzw. **hexagonal dichteste Konfigurationen** nennen. Diese Konfigurationen sind u.a. deswegen speziell, weil sie auf dem Rand des Konfigurationsraumes \mathfrak{X} liegen, da ja ihr minimaler Punktabstand $\delta = \pi/3$ ist. Die dritte Konfigu-

rationsart, die wir schon kennen, ist die **maximale Konfiguration**. Die $X \in \mathcal{X}$, die eine maximale Punktlagerung beschreiben, sind ja die $X \subset S^2$ mit $\text{Card}(X) = 12$ und $\delta(X) = \delta_{12}$. Für sie gilt also

$$\delta(X) = \delta_{12} = \arccos \sqrt{1/5} \approx 63.4349^\circ > 60^\circ.$$

Daher gilt für diese Punkte $X \in \mathfrak{X}$, und darüber hinaus liegen diese Punkte im Inneren von X : Alle 12 Kugeln der Konfiguration sind einzeln frei beweglich, und eine Umgebung von X in \mathfrak{X} ist eine 24-dimensionale Mannigfaltigkeit. In dieser Hinsicht sind die maximalen Konfigurationen nicht speziell. Speziell sind sie jedoch durch ihre Symmetrie, denn sie sind genau die Eckenmengen der regulären Ikosaeder, und deswegen wollen wir jetzt eine maximale Konfiguration auch als **ikosaedrische Konfiguration** bezeichnen. Das sind also die drei speziellen Arten von Konfigurationen, die wir bisher kennengelernt haben. Zu jeder von diesen drei Arten von Konfigurationen gehört ein 3-dimensionaler Unterraum von \mathfrak{X} , eben die Menge aller Konfigurationen dieser Art. Da die orthogonale Gruppe $SO(3, \mathbb{R})$ transitiv auf der Menge der Konfigurationen einer Art operiert, ist dieser 3-dimensionale Raum von Konfigurationen einer Art ein homogener Raum

$$SO(3, \mathbb{R})/G .$$

Dabei ist die endliche Gruppe $G \subset SO(3, \mathbb{R})$ die eigentliche Symmetriegruppe einer Konfiguration der jeweiligen Art. Für kubisch dichteste Konfigurationen ist G die Gruppe der Drehungen eines Kuboktaeders. Das ist die gleiche Gruppe wie die Gruppe O der 24 Drehungen eines Würfels. Für die hexagonal dichteste Konfiguration ist G die Gruppe der Drehungen eines Disheptaeders. Das ist die gleiche Gruppe wie die Gruppe D_3 der 6 Drehungen eines trigonalen Trapezoeders. Für die ikosaedrische Konfiguration schließlich ist G die Gruppe I der 60 Drehungen eines Ikosaeders. Wir erhalten so in dem Konfigurationsraum \mathfrak{X} drei interessante 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten als Unterräume von speziellen Konfigurationen:

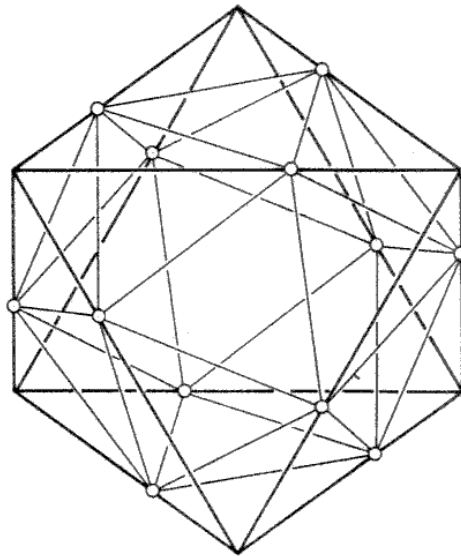
$$\begin{aligned}
SO(3, \mathbb{R})/0 &= \text{Raum der kubisch dichtesten Konfigurationen,} \\
SO(3, \mathbb{R})/D_3 &= \text{Raum der hexagonal dichtesten Konfigurationen,} \\
SO(3, \mathbb{R})/I &= \text{Raum der ikosaedriscen Konfigurationen.}
\end{aligned}$$

Die Mannigfaltigkeit $SO(3, \mathbb{R})/I$ ist ein berühmter Raum, der auch unter dem Namen sphärischer Dodekaederraum bekannt ist. Diese Mannigfaltigkeit hat eine wichtige Rolle in der Geschichte der Mannigfaltigkeiten gespielt, insbesondere im Zusammenhang mit der Poincarévermutung. Sie taucht in den verschiedensten mathematischen Zusammenhängen auf und wird uns auch in diesem Buch noch mehrfach begegnen.

Ich werde jetzt die folgende Behauptung beweisen:

Die kubisch dichtesten Konfigurationen, die hexagonal dichtesten Konfigurationen und die ikosaedriscen Konfigurationen liegen in der gleichen Wegzusammenhangskomponente des Raumes \mathfrak{X} aller Konfigurationen von 12 Kugeln, die eine Kugel vom gleichen Radius berühren.

Wir zeigen zunächst, wie man die ikosaedrische Konfiguration stetig in die kubisch dichteste Konfiguration überführen kann. Die eine Konfiguration besteht aus den 12 Ecken eines Ikosaeders, die andere aus den 12 Ecken eines Kuboktaeders. Die 12 Ecken des Kuboktaeders haben wir bisher als die 12 Kantenmittelpunkte eines Würfels angesehen. Wir können sie aber genauso gut als die 12 Kantenmittelpunkte eines dazu dualen Oktaeders betrachten. Und nun erinnern wir uns an Isidorus von Milet, an das sogenannte 15. Buch von Euklid und das darin gelöste 16. Problem. Dort wurde ein Ikosaeder einem Oktaeder einbeschrieben, indem die 12 Kanten des Oktaeders in bestimmter Weise im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt wurden. Die Ecken des Ikosaeders sind die 12 Teilungspunkte auf den Kanten. Um dem Leser das Blättern zu ersparen, zeigen wir hier noch einmal die entsprechende Figur (vgl. S. 82).



Es liegt nun offen vor unseren Augen, wie wir das Ikosaeder auf stetigem Wege in das Kuboktaeder überführen können: Wir lassen alle 12 Eckpunkte des Ikosaeders auf den Kanten gleichzeitig und gleichmäßig zu den Mittelpunkten der Kanten hinwandern. Zu jedem Zeitpunkt bilden die 12 Punkte die Ecken eines Polyeders, auf dem die Gruppe der 12 Drehungen eines Tetraeders operiert, und zwar transitiv auf den Ecken. Am Anfang ist dies Polyeder das Ikosaeder, am Ende das Kuboktaeder. In den Zwischenstadien passiert folgendes: Die 8 Dreiecke des Ikosaeders, die auf den Oktaederflächen liegen, drehen sich in diesen Oktaederflächen um deren Mittelpunkt und werden kleinere gleichseitige Dreiecke. Zum Schluss gehen sie in die 8 Dreiecke des Kuboktaeders über. Die 12 Dreiecke des Ikosaeders im Inneren des Oktaeders bilden 6 Paare von Dreiecken mit einer gemeinsamen Kante. Jedes von ihnen verwandelt sich allmählich in ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit der gemeinsamen Kante als Hypotenuse. Gleichzeitig vergrößert sich allmählich der Winkel zwischen den beiden Ebenen eines jeden Dreieckspaares, bis schließlich beide Ebenen zusammenfallen. In diesem Moment schließen sich die beiden Dreiecke eines jeden der 6 Paare zu einem der 6 Quadrate des Kuboktaeders zusammen; die gemeinsame Hypotenuse wird die Diagonale des Quadrats und verschwindet als Kante des Polyeders,

das nun das Kuboktaeder geworden ist.

Bei der gerade beschriebenen Umgestaltung eines Ikosaeders in ein Kuboktaeder hat sich der Radius der Umkugeln stetig verkleinert. Indem wir ihn durch eine entsprechende Homothetie vergrößern, erhalten wir eine einparametrische Familie von Polyedern, die alle der gleichen Sphäre S^2 einbeschrieben sind. Ihre Eckenmengen $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$, bilden einen stetigen Weg im Konfigurationsraum $\mathcal{X} = B_{12}(S^2)$, der mit einer ikosaedrischen Konfiguration $X(0)$ anfängt und mit einer kubisch dichtesten Konfiguration $X(1)$ endet. Der sphärische Minimalabstand $\delta(X(t))$ ist der sphärische Abstand der Ecken eines der 8 gleichseitigen Dreiecke. Er ist offensichtlich monoton abnehmend, und es gilt $\delta(X(1)) = \pi/3$. Also gilt stets $\delta(X(t)) \geq \pi/3$, und damit ist $t \mapsto X(t)$ ein Weg im Konfigurationsraum \mathcal{X} von der gesuchten Art.

Wir wollen nun zeigen, dass man die ikosaedrische Konfiguration auch in die hexagonal dichteste Konfiguration stetig überführen kann. Dies ist für mein Empfinden weniger offensichtlich, und in der Tat findet man bei Fejes Tóth in der 1. Auflage seines Buches über Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum auf Seite 177 die irrtümliche Behauptung, dass dies nicht möglich sei. Dass und wie es doch möglich ist, hat mir freundlicherweise Herr Danzer erklärt.

Wir suchen einen stetigen Weg im Konfigurationsraum

$$X^* : [0, 1] \rightarrow B_{12}(S^2) ,$$

der den folgenden Bedingungen genügt:

- (0)* $X^*(0)$ ist die Eckenmenge eines regulären Ikosaeders.
- (1)* $X^*(1)$ ist die Eckenmenge eines Disheptaeders.
- (2)* $\delta(X^*(t)) \geq \pi/3$

Herr Danzer beschreibt einen solchen Weg, indem er die 12 Punkte von $X^*(t)$ explizit durch Länge und Breite angibt und die Bedingun-

gen durch Rechnung nachprüft. Statt dieser analytischen Darstellung des Lösungsweges gebe ich eine geometrische Konstruktion an. Dass dabei die obigen drei Bedingungen erfüllt sind, wird ohne Rechnung evident sein.

Wir gewinnen den gesuchten Weg X^* zur Umgestaltung eines Ikosaeders in ein Disheptaeder aus dem schon konstruierten Weg X zur Umgestaltung eines Ikosaeders in ein Kuboktaeder. X ist ein stetiger Weg im Konfigurationsraum

$$X : [0, 1] \rightarrow B_{12}(S^2) ,$$

der u.a. den folgenden Bedingungen genügt:

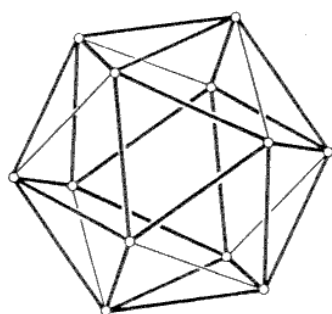
- (0) $X(0)$ ist die Eckenmenge eines regulären Ikosaeders.
- (1) $X(1)$ ist die Eckenmenge eines Kuboktaeders.
- (2) $\delta(X(t)) \geq \pi/3$.

X hatten wir mit Hilfe jenes Schülers des Isidorus von Milet konstruiert, und es genügt nicht nur den obigen drei Bedingungen, sondern hat auf Grund der Konstruktion zusätzliche geometrische Eigenschaften, die wir bei der Konstruktion von X^* benutzen werden.

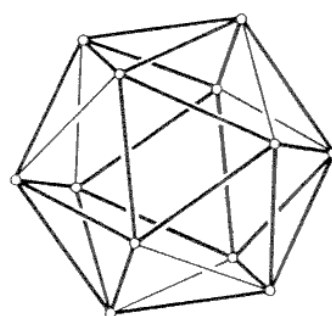
$X(t)$ ist die Eckenmenge eines konvexen Polyeders $P(t)$. Wie verlangt ist $P(0)$ ein reguläres Ikosaeder und $P(1)$ ein archimedisches Kuboktaeder. Für $0 < t < 1$ ist $P(t)$ ein verzerrtes Ikosaeder mit zwei Arten von Kanten, kurzen und langen. Für dieses Polyeder können wir zwei Arten von Kantennetzen betrachten: zum einen das Netz aller Kanten, zum anderen das Minimalkantennetz, das nur aus den kurzen Kanten besteht. Das Netz aller Kanten ist kombinatorisch isomorph zum Kantennetz des Ikosaeders, und für $t \rightarrow 1$ gehen die 6 langen Kanten in Diagonalen der 6 Quadrate des Kuboktaeders über. Das Minimalkantennetz ist kombinatorisch isomorph zum Kantennetz des Kuboktaeders, und für $t \rightarrow 0$ geht es in ein Teilkantennetz des Ikosaeders über, das durch Auslöschung von 6 Kanten aus dessen Netz entsteht.

Wir suchen nun eine Familie $P^*(t)$ von konvexen Polyedern mit Eckenmengen $X^*(t)$ und mit ganz analogen Eigenschaften, wobei überall in den obigen Aussagen das Kuboktaeder durch das Disheptaeder zu ersetzen ist.

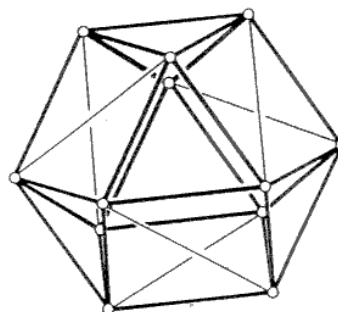
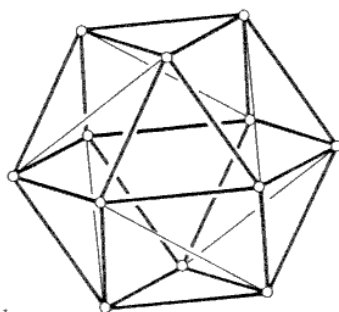
Wir betrachten zunächst die Anfangs- und Endpunkte $t = 0$ und $t = 1$ des zu konstruierenden Weges. Wir versuchen, durch Einzeichnen von 6 Diagonalen in Quadrate des Disheptaeders ein kombinatorisches Ikosaedernetz zu erzeugen und durch Löschen von 6 Kanten des Ikosaeders ein kombinatorisches Disheptaedernetz. Das ist in der Tat möglich. Die nächsten Abbildungen zeigen solche Kantennetze und zum Vergleich die früher konstruierten Netze für das Kuboktaeder.



Kuboktaeder



Disheptaeder



Im Fall des Kuboktaeders gibt es bis auf Isometrie jeweils nur ein derartiges Netz. Im Fall des Disheptaeders gibt es zwei, und diese sind zueinander spiegelbildlich gleich. Wenn man diese Netze eine Weile betrachtet, sieht man auch, wie man die disheptaedrischen Netze aus den kuboktaedrischen gewinnen kann und umgekehrt auch diese aus jenen, indem man die Netze längs gewisser Linien zerschneidet und anders wieder zusammensetzt. Die

Trennlinie legen wir folgendermaßen fest. Bei allen Figuren gibt es eine 3-zählige Drehachse – im disheptaedrischen Fall ist sie eindeutig bestimmt, im kuboktaedrischen Fall gibt es vier solche Achsen, die alle äquivalent sind. In der obigen Zeichnung ist die Projektionsrichtung so gewählt, dass sie fast mit einer solchen 3-zähligen Achse zusammenfällt. Solche 3-zähligen Achsen haben nicht nur die Figuren für $t = 0$ und $t = 1$, sondern auch alle verzerrten Ikosaeder für $0 < t < 1$, und wir können für jedes t eine Achse so wählen, dass diese stetig von t abhängt. Relativ zu dieser Achse verteilen sich die 12 Punkte von $X(t)$ auf 4 Breitenkreise, die spiegelbildlich symmetrisch zum Äquator liegen. Für das reguläre Ikosaeder hatte das schon Pappos bemerkt. Die Eckpunkte auf den beiden polnahen Breitenkreisen sind die Ecken von zwei Dreiecken in der Ebene der Breitenkreise. Ihre Breite nimmt für $t \rightarrow 1$ monoton zu. Entfernt man diese Ecken und alle angrenzenden Kanten, dann bleiben 6 Ecken auf den beiden äquatornahen Breitenkreisen übrig, auf jedem 3. Ihre Breite nimmt für $t \rightarrow 1$ monoton ab. Diese 6 Ecken sind durch einen Zyklus von 6 Kanten verbunden, die eine Zickzacklinie ähnlich dem Rand einer Krone bilden. Dieses zackige Hexagon ist die gesuchte Trennlinie. Für $t \rightarrow 1$ geht das zackige Hexagon in ein ebenes reguläres Hexagon in der Äquatorebene über.

Wir betrachten jetzt die Oberfläche $\partial P(t)$ der Polyeder $P(t)$, und wir zerschneiden sie längs der gerade definierten hexagonalen Trennlinie. Sie zerfallen dadurch in zwei Hälften, etwa $\partial^+ P(t)$ und $\partial^- P(t)$. Diese Hälften sind spiegelbildlich gleich, aber für $t > 0$ nicht orientierungserhaltend isometrisch. Wegen der Symmetrieeigenschaften des zackigen Hexagons können wir an $\partial^+ P(t)$ ein zweites, zu $\partial^+ P(t)$ kongruentes Exemplar $\partial_+ P(t)$ so ansetzen, dass beide zusammen den Rand $\partial P^+(t)$ eines durch diese Konstruktion eindeutig bestimmten Polyeders $P^+(t)$ bilden:

$$\partial P^+(t) = \partial^+ P(t) \cup \partial_+ P(t).$$

Entsprechend erhält man aus zwei Exemplaren von $\partial^- P(t)$ den Rand eines Polyeders $P^-(t)$:

$$\partial P^-(t) = \partial^- P(t) \cup \partial_- P(t) .$$

Für $0 < t < 1$ sind die $P^\pm(t)$ verzerrte Ikosaeder mit Kanten von zwei verschiedenen Längen. Ihr Kantennetz ist kombinatorisch isomorph zum Kantennetz des Ikosaeders. Für $t \rightarrow 1$ geht es in eines der Netze über, die aus dem Kantennetz der Disheptaeder $P^+(1), P^-(1)$ durch Hinzunahme von 6 Diagonalen entstehen. Hingegen ist das Netz der Minimalkanten von $P^\pm(t)$ kombinatorisch isomorph zum Kantennetz des Disheptaeders. Für $t \rightarrow 0$ geht es in eines der disheptaedrischen Teilnetze im Kantennetz des regulären Ikosaeders $P^+(0) = P^-(0)$ über.

Damit sind sogar mehrere stetige Wege zur Umgestaltung eines regulären Ikosaeders in ein Disheptaeder gefunden: Zwischenstadien sind die verzerrten Ikosaeder $P^+(t)$ oder $P^-(t)$. Wir betrachten ihre Eckenmengen:

$$\begin{aligned} X^+(t) &= \text{Eckenmenge von } P^+(t), \\ X^-(t) &= \text{Eckenmenge von } P^-(t). \end{aligned}$$

Auf Grund der Konstruktion ist klar, dass gilt:

$$X^\pm(t) \subset S^2, \quad \text{card}(X^\pm) = 12.$$

Wir erhalten daher zwei stetige Wege im Konfigurationsraum:

$$X^\pm : [0, 1] \rightarrow B_{12}(S^2) .$$

Und es ist nun offensichtlich, dass sowohl $X^* = X^+$ als auch $X^* = X^-$ die Bedingungen (0)* bis (2)* erfüllt. Insbesondere ist klar:

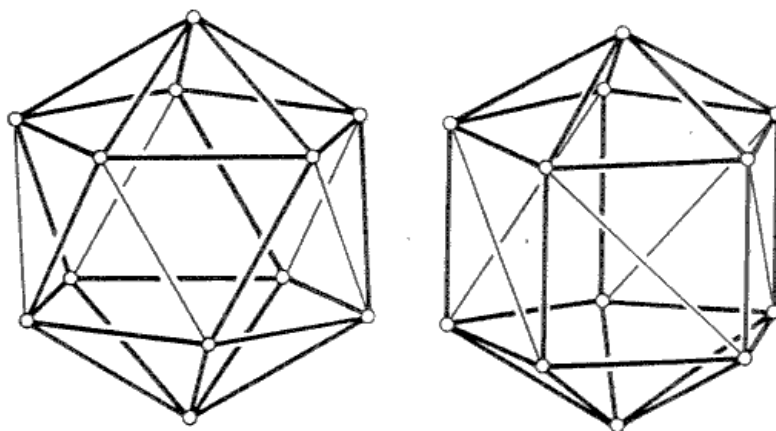
$$\delta(X^*(t)) \geq \pi/3 .$$

Denn wenn ein Punktepaar in einer der beiden Hälften von $\delta P^\pm(t)$ liegt, ist sein Abstand $\geq \pi/3$ wegen Bedingung (2) für den Weg X , aus dem X^\pm konstruiert wurde. Andernfalls liegt der eine Punkt auf dem nördlichen, der andere auf dem südlichen polnahen Breitenkreis, und der sphärische Abstand ist mindestens so groß wie der dieser Breitenkreise. Dieser nimmt sein Minimum für $t = 0$ d.h. für das Ikosaeder an, und dort ist er größer als δ_{12} , also erst recht größer als $\pi/3$. Damit sind die gesuchten Wege im

Konfigurationsraum \mathfrak{X} konstruiert.

Wir haben also bewiesen, dass die kubisch dichtesten Konfigurationen, die hexagonal dichtesten Konfigurationen und die ikosaedrischen Konfigurationen alle in der gleichen Zusammenhangskomponente des Konfigurationsraumes \mathfrak{X} liegen. Es gibt aber in dieser Komponente noch weitere für uns interessante Konfigurationen mit hoher Symmetrie. Eine davon entsteht wie folgt. Wir stellen das reguläre Ikosaeder so auf wie Euklid, das heißt, wir zeichnen eine der 5-zähligen Drehachsen aus. Relativ zu dieser Achse sind wie üblich Längen- und Breitenkreise und die beiden Pole definiert. Die zwei Pole sind Ecken des Ikosaeders. Die übrigen 10 Ecken verteilen sich zu je fünf auf zwei Breitenkreise. Ihre Breite φ hat schon Euklid bestimmt: $\sin \varphi = \sqrt{1/5}$, also $\varphi \approx 26,57^\circ$. Wir lassen jetzt jeden dieser 10 Punkte auf seinem jeweiligen Längenskreis in Richtung Pol wandern, bis er eine Breite von 30° erreicht hat. Dadurch entsteht ein verzerrtes Ikosaeder, das als Symmetriegruppe nur noch die Diedergruppe D_5 der Ordnung 10 hat: außer der 5-zähligen Achse gibt es fünf 2-zählige Achsen in der Äquatorebene.

Interessant ist nun, dass der sphärische Abstand eines Breitenkreises vom anderen ebenso wie der Abstand vom Pol nunmehr gleich 60° ist. Wir können daher die Punkte auf jedem der beiden Breitenkreise einzeln beliebig wandern lassen, solange nur der Abstand der Punkte auf einem Breitenkreis voneinander mindestens 60° bleibt. Beispielsweise können wir von dem verzerrten Ikosaeder ausgehend alle Punkte auf einem der beiden Breitenkreise um $\pi/5$ drehen. Wir erhalten dadurch die Eckpunkte eines Polyeders, das wir auch als Durchschnitt eines pentagonalen Prismas und einer pentagonalen Doppelpyramide beschreiben könnten.



Unsere Erkenntnisse über spezielle Konfigurationen $X \in \mathfrak{X}$ werden uns nützlich sein, wenn wir uns jetzt der Frage nach der Beziehung zwischen der Fundamentalgruppe des Konfigurationsraumes \mathfrak{X} und der Fundamentalgruppe des Konfigurationsraumes $\mathcal{Y} = B_{12}(S^2)$ zuwenden. Letztere ist ja, wie wir schon wissen, die Gruppe der sphärischen Zöpfe mit 12 Strängen.

Für jedes $X \in \mathfrak{X}$ haben wir ein kanonisches Diagramm von Gruppenhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(\mathfrak{X}, X) & & \\
 \downarrow \iota & \searrow \psi & \\
 \pi_1(\mathcal{Y}, X) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Symm}(X)
 \end{array}$$

Dabei ist ι von der Inklusion induziert, φ kanonisch und $\psi = \varphi \circ \iota$. Sind X_0 und X_1 zwei durch einen Weg verbundene Basispunkte in der gleichen Komponente, dann kann man die Diagramme für X_0 und X_1 unter Benutzung des Weges kanonisch identifizieren, und in diesem Sinne hängt das Diagramm nur von der Komponente ab. Wir interessieren uns für das Diagramm der Komponente, in der die oben untersuchten speziellen Konfigurationen liegen. Dafür werden wir beweisen:

$$\psi : \pi_1(\mathfrak{X}, X) \rightarrow \text{Symm}(X) \quad \text{ist surjektiv!}$$

Das Bild von ψ ist also die volle symmetrische Gruppe S_{12} der Ordnung 12.

Zum Beweis brauchen wir genügend viele Elemente in $\pi_1(\mathfrak{X}, X)$, de-

ren Bilder bezüglich ψ die symmetrische Gruppe erzeugen. Unsere früheren Erkenntnisse liefern uns mehrere verschiedene Methoden zur Konstruktion von Elementen in $\pi_1(\mathfrak{X}, X)$. Zunächst einmal bekommen wir auf ganz einfache Weise geschlossene Wege im Konfigurationsraum \mathfrak{X} mit Anfangs- und Endpunkt X , indem wir X durch Bewegungen im euklidischen Raum auf S^2 herum – und in die Ausgangslage zurückführen. Diese Bewegungen werden durch stetige Wege in der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3, \mathbb{R})$ beschrieben. Ein Element $g \in SO(3, \mathbb{R})$ überführt X in die Ausgangslage, wenn $gX = X$ gilt. Die Menge G_X dieser Elemente bildet die eigentliche euklidische **Symmetriegruppe** von X :

$$G_x = \{g \in SO(3, \mathbb{R}) \mid gX = X\} .$$

Man hat eine kanonische kurze exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \pi_1(SO(3, \mathbb{R}), 1) \rightarrow \pi_1(SO(3, \mathbb{R})/G_x, 1) \rightarrow G_x \rightarrow 1 .$$

Wie wir wissen, gilt:

$$\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), 1) \cong \{\pm 1\} .$$

Die Fundamentalgruppe der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit $SO(3, \mathbb{R})/G_x$ ist also eine Erweiterung der Gruppe G_x durch $\{\pm 1\}$. Diese Gruppe können wir auch wie folgt beschreiben. Es sei

$$\rho : \text{Spin}(O, 3; \mathbb{R}) \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$$

die universelle Überlagerung der orthogonalen Gruppe durch die Spingruppe (vgl. LA III, Satz 31).³⁶ Diese Spingruppe ist, wie wir wissen, isomorph zur Gruppe $S^3(\mathbb{H})$ der Einheitsquaternionen und auch isomorph zur speziellen unitären Gruppe $SU(2, \mathbb{C})$ (vgl. die Zusätze zu LA III, 26 – 28).³⁷ Zu jeder Gruppe G gehört nun ihr Urbild bezüglich ρ :

$$\tilde{G} = \rho^{-1}(G) .$$

³⁶In der digitalen Version von LA III, Satz 13.4.111.

³⁷In der digitalen Version von LA III, Zusätze zu 13.4.107 – 13.4.109.

Fasst man \tilde{G} mittels der erwähnten Isomorphismen als Untergruppe von $SU(2, \mathbb{C})$ auf, d.h. als eine Gruppe von 2×2 -Matrizen, dann nennt man diese Gruppe auch die zu G gehörige binäre Gruppe, und entsprechend nenne ich \tilde{G}_x die **binäre Symmetriegruppe** von X .

Aus der kanonischen Identifikation von 3-Mannigfaltigkeiten

$$\text{Spin}(O, 3; \mathbb{R})/\tilde{G}_x = SO(3, \mathbb{R})/G_x$$

ergibt sich eine kanonische Identifikation von Gruppen:

$$\tilde{G}_x = \pi_1(SO(3, \mathbb{R})/G_x, 1) .$$

Damit schreibt sich die obige kurze exakte Sequenz jetzt so:

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \tilde{G}_x \rightarrow G_x \rightarrow 1 .$$

Da sich $SO(3, \mathbb{R})/G_x$ kanonisch mit dem $SO(3, \mathbb{R})$ -Orbit von X in \mathfrak{X} identifiziert, erhalten wir schließlich einen kanonischen Homomorphismus der binären Symmetriegruppe von X in die Fundamentalgruppe des Konfigurationsraumes \mathfrak{X} mit Basispunkt X :

$$\mu : \tilde{G}_x \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, X) .$$

Behauptung: Der Homomorphismus μ ist injektiv.

Zum Beweis genügt es offensichtlich, zu zeigen, dass die beiden im Folgenden definierten Homomorphismen λ und ν injektiv sind.

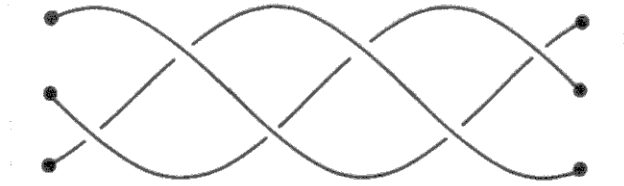
$$\begin{aligned} \lambda : \{\pm 1\} &\rightarrow \pi_1(\mathcal{Y}, X) , \\ \nu : G_x &\rightarrow \text{Sym}(X) . \end{aligned}$$

Dabei ist λ die Beschränkung von $\iota \circ \mu$ auf den Kern $\{\pm 1\}$ von $\rho : \tilde{G}_x \rightarrow G_x$, und ν ist durch $\psi \circ \mu$ induziert. Die Injektivität von ν ist trivial: Jede Drehung $g \in G_x$ ist offensichtlich durch ihre Operation als Permutation der Punktmenge $X \subset S^2$ eindeutig bestimmt. Zu λ bemerken wir allgemein folgendes. Für jedes natürliche k und jedes $x \in B_k(S^2)$ bildet der kanonische

Homomorphismus

$$\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), 1) \rightarrow \pi_1(B_k(S^2), X)$$

das erzeugende Element von $\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), 1)$ auf denjenigen sphärischen Zopf ab, der entsteht, wenn man alle Punkte von X eine Drehung von 0 bis 2π um eine beliebige Achse ausführen lässt. Das folgende Bild illustriert den Fall $k = 3$:



Bei geeigneter Wahl der Erzeugenden $\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}$ ist dieser Zopf das folgende Element:

$$(\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^k .$$

Für $k = 2$ ist dieses Element, wie wir sahen, trivial. Für $k \geq 3$ ist es jedoch nicht trivial, und man weiß darüber hinaus, dass es gerade das Zentrum $\{\pm 1\}$ der sphärischen Zopfgruppe erzeugt (siehe z.B. [27, Lemma 4.23]) Also ist λ injektiv.

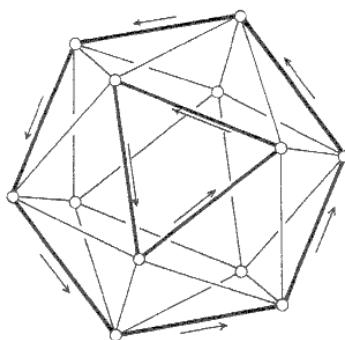
Damit ist also die Injektivität von μ bewiesen. Insbesondere finden wir in $\pi_1(\mathfrak{X}, X)$ als kanonische endliche Untergruppe die binäre Symmetriegruppe von X :

$$\tilde{G}_x \cong \mu(\tilde{G}_x) \subset \pi_1(\mathfrak{X}, X) .$$

Wir wählen im folgenden eine ikosaedrische Konfiguration X_0 als Basispunkt. Dann haben wir also in $\pi_1(\mathfrak{X}, X_0)$ die **binäre Ikosaedergruppe** der Ordnung 120 als eine kanonische Untergruppe. In der Gruppe $\pi_1(\mathfrak{X}, X_0)$ finden wir aber auch die binären Symmetriegruppen anderer Polyeder, allerdings nicht in kanonischer Weise. Beispielsweise können wir X_0 mit einer kubisch dichtesten Konfiguration X_1 durch einen stetigen Weg verbinden. Dieser Weg liefert eine Identifikation der Fundamentalgruppen $\pi_1(\mathfrak{X}, X_1)$ und $\pi_1(\mathfrak{X}, X_0)$. Dadurch geht die in $\pi_1(\mathfrak{X}, X_1)$ enthaltene **binäre Hexa-**

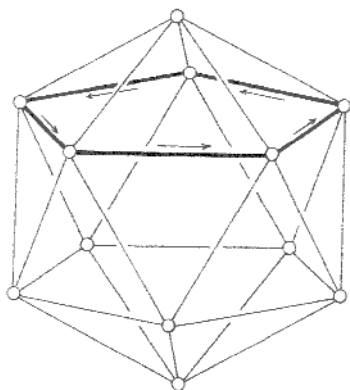
edergruppe $\mu(\tilde{G}_{x_1})$ von der Ordnung 48 in eine Untergruppe der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathfrak{X}, X_0)$ zu dem ikosaedrischen Basispunkt X_0 über. Damit ist unsere erste, sehr einfache Methode zur Konstruktion von Elementen in $\pi_1(\mathfrak{X}, X_0)$ beschrieben.

Eine zweite Konstruktion benutzt die Wege vom Ikosaeder zum Disheptaeder, die wir weiter oben konstruiert haben. Wählen wir für das reguläre Ikosaeder P_0 mit Eckenmenge X_0 ein diskeptaedrisches Teilnetz, dann liefert die Konstruktion zwei Wege X^+ und X^- . Deren Endpunkte $X^+(1)$ und $X^-(1)$ sind die Eckenmengen von zwei Disheptaedern. Diese beiden Disheptaeder sind kongruent. Sie haben die gleiche dreizählige Symmetrieachse und gehen durch eine Drehung von 60° um diese Achse ineinander über. Wir wählen eine Orientierung der Achse. X_0 sei dann der Weg in \mathfrak{X} , der $X^+(1)$ durch eine gleichmäßig zunehmende Familie von Drehungen von 0° bis 60° in $X^-(1)$ überführt. Dann ist $X = X^+ \cdot X^0 \cdot (X^-)^{-1}$ ein geschlossener Weg in \mathfrak{X} mit Anfangs- und Endpunkt X_0 . Als Weg in \mathscr{S} , ist X homotop zu dem im folgenden beschriebenen Weg Y . Wir betrachten ein Dreieck Δ des Ikosaeders P_0 und dazu die Vereinigung aller Dreiecke, die nichtleeren Durchschnitt mit Δ haben. Der Rand von $\overline{\Delta}$ ist ein Zyklus Z von 3 Ecken und 3 Kanten. Der Rand von $\overline{\Delta}$ ist ein Zyklus \overline{Z} von 6 Ecken und 6 Kanten, nämlich das "zackige Hexagon" unserer früheren Konstruktion. Der Weg Y lässt nun die Ecken der beiden Zyklen Z und \overline{Z} zyklisch auf den Kanten gleichmäßig zur jeweils nächsten Ecke wandern, wobei Z und \overline{Z} als Ränder von $\Delta \subset \overline{\Delta}$ gleichsinnig orientiert sind. Die drei Punkte von X_0 , die nicht auf Z oder \overline{Z} liegen, bleiben beim Durchlaufen des Weges Y fest.



Für später halten wir als Bemerkung fest, dass die zu diesem Weg gehörige Permutation von X_0 ungerade ist. Natürlich kann man ungerade Permutationen auch mit der ersten Methode erhalten. Zum Beispiel erhält man durch eine 90° -Drehung eines Kuboktaeders um eine 4-zählige Achse eine Permutation von X_0 mit 3 Zyklen der Länge 4.

Bei unserer letzten Konstruktion greifen wir schließlich auf die Wege in \mathfrak{X} zurück, durch die wir das Ikosaeder in gewisse Polyeder mit der Symmetriegruppe D_5 überführt hatten. Sie liefern uns einen geschlossenen Weg in \mathfrak{X} mit Anfangs- und Endpunkt X_0 , der in \mathscr{B} homotop zu dem im folgenden beschriebenen Weg ist: Die Vereinigung der 5 Dreiecke, die in einem Eckpunkt $x \in X_0$ zusammenstoßen, hat als Rand einen Zyklus Z_x von 5 Ecken und 5 Kanten. Der fragliche Weg lässt nun die Ecken eines solchen Zyklus zyklisch auf den Kanten zur jeweils nächsten Ecke wandern, während alle nicht auf diesem Zyklus liegenden Ecken während der Durchlaufung des Weges fest bleiben.



Alle 12 Zyklen Z_x sind gleichsinnig orientiert. Die Orientierung ist in der Figur angegeben, und spätere Figuren nehmen hierauf Bezug.

Auf die beschriebene Weise erhalten wir ein System von 12 Permutationen τ_x in der symmetrischen Gruppe $\text{Sym}(X_0)$ der $12!$ Permutationen der 12 Ikosaederecken $x \in X_0$. Die Permutation τ_x ist ein Zyklus der Ordnung 5, liegt also insbesondere in der alternierenden Gruppe $\text{Sym}(X_0)^+$ der geraden Permutationen. Auf Grund der Konstruktion ist klar, dass die τ_x im Bilde

des von uns untersuchten Homomorphismus

$$\pi_1(\mathfrak{X}, X_0) \rightarrow \text{Sym}(X_0)$$

liegen. In diesem Bilde liegen aber auch ungerade Permutationen, zum Beispiel die oben konstruierte Permutation, die aus einem 3-Zykel und einem 6-Zykel besteht. Daher ist klar, dass die behauptete Surjektivität dieses Homomorphismus bewiesen sein wird, sobald die folgende präzisere Aussage bewiesen ist.

Die 12 Permutationen τ_x der Ordnung 5 erzeugen die alternierende Gruppe $\text{Sym}(X_0)^+$, also:

$$\langle \tau_x | x \in X_0 \rangle = \text{Sym}(X_0)^+ .$$

Wir wollen diese Aussage beweisen. Den Beweis, den ich hier gebe, fand ich in dem schönen Buch “Sphere Packings, Lattices and Groups” von J.H. Conway und N.J.A. Sloane [84].

Die Idee des Beweises ist folgende. Die alternierende Gruppe $\text{Sym}(X_0)^+$ wird natürlich von dem System aller 5-Zykel erzeugt, denn die von diesem System erzeugte Untergruppe ist normal und nichttrivial und muss daher die ganze Gruppe $\text{Sym}(X_0)^+$ sein, da die alternierenden Gruppen A_k für $k \geq 5$ einfach sind. Man kann das auch ohne Benutzung der Einfachheit direkt beweisen. Die symmetrische Gruppe S_k wird nämlich von den Transpositionen $(12), (13), \dots, (1k)$ erzeugt. Also wird die alternierende Gruppe A_k von den Produkten $(1a) \cdot (1b) = (1ba)$ erzeugt. Diese 3-Zyklen lassen sich aber für $k \geq 5$ als Produkte von 5-Zyklen darstellen. Zum Beispiel gilt: $(123) = (21345) \cdot (54321)$. Also wird die alternierende Gruppe $\text{Sym}(X_0)^+$ tatsächlich von ihren 5-Zyklen erzeugt. – Die zu beweisende Behauptung besagt nun, dass zur Erzeugung schon ein viel kleineres Teilsystem von 5-Zyklen genügt, nämlich die zwölf $\tau_x, x \in X_0$. Wir müssen also zeigen, dass jeder 5-Zykel zu der von den τ_x erzeugten Gruppe $\langle \tau_x \rangle$ gehört, und das impliziert dann, dass alle 5 Zyklen zu einem festen τ_x in $\langle \tau_x \rangle$ konjugiert sind. Anders gesagt: Es ist zu zeigen, dass die Gruppe $\langle \tau_x \rangle$ auf der Menge X_0 von 12 Elementen **5-fach transitiv** operiert. Das heißt: Jedes geordnete

5-Tupel von verschiedenen Elementen aus X_0 kann in jedes andere derartige 5-Tupel überführt werden.

Die symmetrische und die alternierende Gruppe $\text{Sym}(X_0)$ und $\text{Sym}(X_0)^+$ haben natürlich diese Eigenschaft. Allgemein operiert S_k auf $\{1, \dots, k\}$ für jedes $m \leq k$ natürlich m -fach transitiv, und A_{k+2} operiert m -fach transitiv auf $\{1, \dots, k+2\}$ für $m \leq k$.

Hierbei besteht ein Unterschied zwischen den Fällen $m = k$ oder $m = k - 1$ einerseits und den übrigen Fällen andererseits. Die Operation von S_k ist nämlich offensichtlich für $m = k$ und $m = k - 1$ scharf m -fach transitiv. Eine Gruppe operiert **scharf m-fach transitiv** auf einer Menge, wenn je zwei geordnete m -Tupel von verschiedenen Elementen durch genau eine Gruppenoperation ineinander überführt werden. Für $m < k - 1$ ist die Operation von S_k hingegen offensichtlich nicht mehr scharf m -fach transitiv. Für A_{k+2} ist die Operation auf $\{1, \dots, k+2\}$ für $m = k$ scharf transitiv, für $m < k$ nicht. Damit stellt sich „natürlich“ die Frage, ob es in S_k scharf m -fach transitive Untergruppen für kleineres m gibt, und, wenn ja, welche. Fragen dieser Art sind zum ersten Mal vor mehr als 100 Jahren systematisch untersucht worden, und die Antworten sind bekannt. Insbesondere weiß man, dass es für größere Werte von m nur die scharf m -fach transitiven Gruppen gibt, die wir schon kennen. Es gilt:

Für $m \geq 6$ sind S_m, S_{m+1} und A_{m+2} die einzigen scharf m -fach transitiven Gruppen.

Einen Beweis findet man z.B. in dem Buch von B. Huppert und N. Blackburn "Finite Groups III" [201, Kap. XII, Satz 3.5].

Für $m = 5$ hingegen gibt es noch eine andere, scharf 5-fach transitive Gruppe. Diese wurde 1861 von E. Mathieu entdeckt [246]. Die von Mathieu gefundene Gruppe ist eine einfache Gruppe der Ordnung $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 12 \cdot 11 \cdot 6! = 95040$, die auf einer Menge von 12 Elementen scharf 5-fach transitiv operiert. Sie wird heute als die **Mathieugruppe** M_{12} vom Grad 12 bezeichnet. Mathieu fand außerdem noch eine einfache 5-fach transitive, aber nicht scharf 5-fach transitive Permutationsgruppe von 24 Elementen, M_{24} . In diesen beiden Gruppen findet man noch gewisse wichtige Untergruppen M_{11}, M_{22} und M_{23} , die ebenfalls einfach sind. Man erhält $M_{11} \subset M_{12}$

und $M_{23} \subset M_{24}$ sowie schließlich $M_{22} \subset M_{23}$ jeweils als Isotropiegruppe eines Elementes der Menge, auf der die jeweilige Obergruppe M_{12} bzw. M_{24} bzw. M_{23} transitiv operiert. M_{11} ist scharf 4-fach transitiv, M_{23} ist 4-fach transitiv aber nicht scharf 4-fach transitiv. Insgesamt erhält man so die fünf **Mathieugruppen**

$$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24} .$$

Diese Gruppen sind in vielen Zusammenhängen von Interesse, und es existiert über sie eine umfangreiche Literatur, für die auf die zitierten Bücher von Huppert und von Conway verwiesen sei. Kurz erwähnen muss ich die Rolle der Mathieugruppen in der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. Als Resultat von vielen hunderten von Arbeiten der Gruppentheoretiker besitzt man nämlich heute eine vollständige Klassifikation der **endlichen einfachen Gruppen**. Es sind die endlichen abelschen Gruppen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p prim, die alternierenden Gruppen A_k vom Grad $k \geq 5$, die endlichen einfachen Gruppen vom Lie-Typ wie z.B. $\text{PSL}(n, \mathbb{F}_q)$, $n \geq 3$, und 26 „sporadische Gruppen“. Die fünf Mathieugruppen waren historisch die zuerst entdeckten sporadischen Gruppen.

Uns interessiert hier vor allem der Aspekt der mehrfachen Transitivität. Besonders ausgezeichnet sind in dieser Hinsicht M_{11} und M_{12} . Im Jahre 1872 bewies C. Jordan den folgenden Satz:

Die einzigen scharf 5-fach transitiven Gruppen
sind S_5, S_6, A_7 und M_{12} .

Die einzigen scharf 4-fach transitiven Gruppen
sind S_4, S_5, A_6 und M_{11} .

(C. Jordan: “Recherches sur les substitutions” [209]. Angesichts dieser Charakterisierung der M_{12} als der einzigen scharf 5-fach transitiven Untergruppen von S_{12} ist es sehr natürlich, zu versuchen, in der Gruppe $\langle \tau_x \rangle$, die von den zwölf 5-Zyklen τ_x erzeugt wird, eine Mathieugruppe M_{12} zu finden. Denn dann sind wir, wie die einleitenden Bemerkungen zeigen, fertig.

Die wunderschöne Idee von Conway und Sloane ist nun, dass sich eine solche M_{12} in sehr natürlicher Weise durch Erzeugende angeben lässt, die

auf einfache Weise aus den Erzeugenden τ_x gewonnen werden:

$$M := \langle \tau_x \tau_y^{-1} \mid x, y \in X_0 \rangle.$$

Das Schöne an dieser Idee ist, dass sie in natürlicher Weise die Symmetrie des Ikosaeders ins Spiel bringt. Denn die eigentliche Isometriegruppe $I(X_0)^+$ des Ikosaeders ist isomorph zur alternierenden Gruppe A_5 , wird also, wie wir gerade gesehen haben, von den 5-Zyklen, d.h. geometrisch von den Drehungen um die 5-zähligen Achsen, erzeugt. Die polarisierten Drehungen um $2\pi/5$ sind aber gerade die Permutationen $\tau_x \tau_{-x}^{-1}$, wo $-x$ die x gegenüberliegende Ecke des Ikosaeders ist. Die Gruppe M enthält also die Ikosaedergruppe:

$$I(X_0) = \langle \tau_x \tau_{-x}^{-1} \mid x \in x_0 \rangle \subset M.$$

Wir wollen diese Idee von Conway und Sloane ausführlicher entwickeln, indem wir die Gruppe M zunächst auf andere Weise charakterisieren, um so zu erkennen, dass die Definition von Conway und Sloane nicht nur schön ist, sondern auch – fast – kanonisch. Diese andere Charakterisierung geht auf eine grundlegende Arbeit von *Ernst Witt* zurück [375]. In dieser Arbeit charakterisiert Witt die Mathieugruppen M_{12} und M_{24} als Automorphismengruppen gewisser kombinatorischer Konfigurationen, die er **Steinersche Systeme** nennt, und die er in einer direkt anschließenden Arbeit genauer untersucht [376].

Definition:

Ein **Steinersches System** vom Typ $S(t, k, v)$, wo t, k und v gewisse natürliche Zahlen bezeichnen, ist eine Menge X zusammen mit einer Menge \mathcal{B} von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\text{Card}(X) = v$
- (ii) $\text{Card}(B) = k$ für alle $B \in \mathcal{B}$.
- (iii) Für jede Teilmenge $Y \subset X$ mit $\text{Card}(Y) = t$ existiert genau ein $B \in \mathcal{B}$ mit $Y \subset B$.

Die Mengen $B \in \mathcal{B}$ heißen die **Blöcke** des Systems.

Diese abstrakte Definition ist formal für jeden Mathematiker unserer Zeit verständlich. Um jedoch ihren Sinn zu verstehen, muss man Beispiele kennenlernen und auch etwas von den historischen Ursprüngen wissen. Es handelt sich dabei um eine reiche geometrische Tradition, die sich im 19. Jahrhundert zu einer schönen Wechselwirkung von Kombinatorik und Gruppentheorie entwickelt hat. Es wäre ein Jammer, hierüber nichts zu sagen, und so nehmen wir uns die Zeit für einen weiteren Exkurs, diesmal über **geometrische Konfigurationen**. Aus einer reichen Vielfalt wähle ich einige mir schön oder wichtig erscheinende Dinge aus. Für einen Überblick verweise ich auf einen Artikel von E. Steinitz [342].

Für einige wichtige Klassen von Konfigurationen findet man eine ausführliche und leicht lesbare Darstellung in allen Einzelheiten in dem Buch von F. Levi “Geometrische Konfigurationen” [237].

1.9 Exkurs: Klassische geometrische Konfigurationen

Unsere Erzählung beginnt im Jahre 1648. In diesem Jahr erschien in Paris ein Buch mit dem Titel: “Manière universelle de M^r Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le géométral” [32]. Der Verfasser war **Abraham Bosse**, ein Kupferstecher aus Paris und ein Schüler von **Desargues**. Zu Desargues zitiere ich Dirk Struik, “A Source Book in Mathematics, 1200-1800” [345].

Girard Desargues (1593 – 1662) war Architekt und Festungsbaumeister. Er lebte in Lyon und einige Zeit auch in Paris, wo er mit anderen Mathematikern zusammentraf, unter ihnen Descartes. Seine Arbeit über perspektivische Darstellung, in der er Methoden von umfassender Allgemeinheit entwickelte, fand zu seiner Zeit wenig Anerkennung, wozu insbesondere beitrug, dass er eigentümliche, aus der Botanik entlehnte Fachausdrücke benutzte. Dies war die Zeit, in der unter dem Einfluss von Descartes

und Fermat Algebra und infinitesimale Methoden auf die Geometrie angewendet wurden – die breite Anerkennung rein geometrischer Methoden sollte sich erst einstellen, als sich im 19. Jahrhundert die projektive Geometrie entwickelte. Viele dieser projektiven Begriffsbildungen finden sich schon in dem “*Brouillon Projet d’une atteinte aux événements des rencontres du Cone avec un Plan, par L.S.G.D.L*”, (Entwurf eines Projektes für eine treffende Beschreibung dessen, was beim Schnitt eines Kegels mit einer Ebene geschieht, von L.S.G.D.L), die “Le Sieur Girard Desargues Lyonnais” 1639 in 50 Exemplaren veröffentlichte. Sie gingen alle verloren, bis 1845 Professor Michel Chasles eine Abschrift entdeckte, die 1679 von dem Mathematiker Philippe de La Hire gemacht worden war, einem Schüler von Desargues.... Um 1950 wurde eines der Original Exemplare in der Bibliothèque Nationale in Paris entdeckt ... [345, p.157f.]

Angesichts dieser Wirkungsgeschichte und Quellenlage ist das Buch von Bosse umso interessanter, insbesondere da Desargues selbst in einem Vorwort die Übereinstimmung mit seinen eigenen Ideen bestätigt:

J’Ay sous-signé confesse, avoir veu ce que M. Bosse a mis dans ce volume de la pratique de la Perspective; reconnois que tout y est conforme, à ce qu’il a voulu prendre la patience d’en ouir & concevoir de mes pensées; ...

Am interessantesten für uns ist ein kleiner Anhang mit 3 geometrischen Propositionen, die ohne Zweifel von Desargues selbst stammen müssen. Davon interessiert uns die erste am meisten. Auf den folgenden Seiten reproduzieren wir den Text und die zugehörige Zeichnung aus einer kürzlich erschienenen Facsimile-Ausgabe von [32] (Abraham Bosse: “Manière universelle de Monsieur Desargues“, Archival Facsimiles Limited, Alburgh 1987).

Wir wollen die Figuren aus diesem alten Buch sorgfältig ansehen, denn es handelt sich bei ihnen um die ersten neuen Konfigurationen von Punkten und Geraden, die über das hinausgehen, was aus der Antike bekannt war.

PROPOSITION GEOMETRIQUE.

Quant des droites HDa, HEb, cED, lga, lfb, HlK, DgK, EfK, soit en diuers plans soit en un mesme, s'entrecourent par quelconque ordre ou biais que ce puisse estre, en de semblables points; les points c, f, g, sont en vne droite cfg. Car de quelque forme que la figure vienne, & en tous les cas; ces droites estants en diuers plans, celles abc, lga, lfb, sont en vn; celles DEc, DgK, KfE, en vn autre; & ces points c, f, g, sont en chacun de ces deux plans; consequemment ils sont en vne droite cfg. Et les mesmes droites estants en un mesme plan,

$$\begin{array}{l}
 gD-gK \left\{ \begin{array}{l} aD-aH \\ H-lK \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} cD-cE \\ bE-bH \end{array} \right\} \\
 fK-fE \left\{ \begin{array}{l} lK-lH \\ bH-bE \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} bH-bE \\ bH-bE \end{array} \right\}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l} cD-cE \\ cD-cE \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{Consequem-} \\ \text{ment } c, f, g \\ \text{font en vne} \\ \text{droite.} \end{array} \right.$$

Et par conuerse les droites abc, HDa, HEb, DEc, HK, DKg, KEf, venants à se rencontrer par quelconque biais & forme, en des semblables points, & soit en diuers plans soit en un mesme; toujours les droites agl, bfl, tenaient ensemble à un mesme bus l, en celle HK. Car ces droites estants en diuers plans, celui HKgDag, en est l'un; celui HKfEbfb, vn autre; & celui cbagf, vn autre: & les droites HlK, bfl, agl, sont les entrecouures de ces trois plans là; consequemment elles tendent ensemble à un mesme bus l. Et les mesmes droites estants en vn seul plan; ayant mené du point a, iusques à la droite HK, celle agl, & puis menant celle lb, il vient d'estre démontré qu'elle tend avec celle EK, à vn point qui comme f, est en vne droite avec ceux c, & g, qui est à dire qu'elle passe à f, & consequemment que les deux ag, bf, tendent ensemble à vn bus l, en celle HK. Et les mesmes droites encore estants en des plans diuers, si par leurs points H, D, E, K, passent d'autres droites Hh, Dd, Ee, Kk, tendantes ensemble à vn bus à distance interminée, autrement paralelles entr'elles; & qui rencontrent l'un de ces plans cbagfl, comme aux points hdek; ceux h, l, k, sont en vne droite; ceux h, d, a, en vne; ceux h, e, b, en vne; ceux k, g, d, en vne; ceux k, f, e, en vne; & ceux c, e, d, en vne. Car de cette construction là, les droites Hh, Kk, HlK, sont en vn plan; celles abc, bfl, klh, en vn autre; & les points h, l, k, sont en chacun de ces deux plans; consequemment ils sont en vne droite; & ainsi de chaque autre ternaire: Et toutes ces droites-là sont en vn mesme plan cbagfl, diuisées à cause de ces paralelles venants des points H, D, E, K, chacune semblablement à sa correspondante en la figure de diuers plans. Ainsi la figure que les paralelles ont fait acheuer de faire en vn seul plan h d a b c e d g f k l, correspond droite à droite; point à point; & raison à raison; à celle abcEHLkfgf, de diuers plans; Et lon peut discourir de leurs proprietes sur l'une comme sur l'autre, & par ce moyen se passer de celle d'un lieu en luy substituant celle d'un seul plan.

Abbildung 1.77: Facsimilie Bosse, p. 340

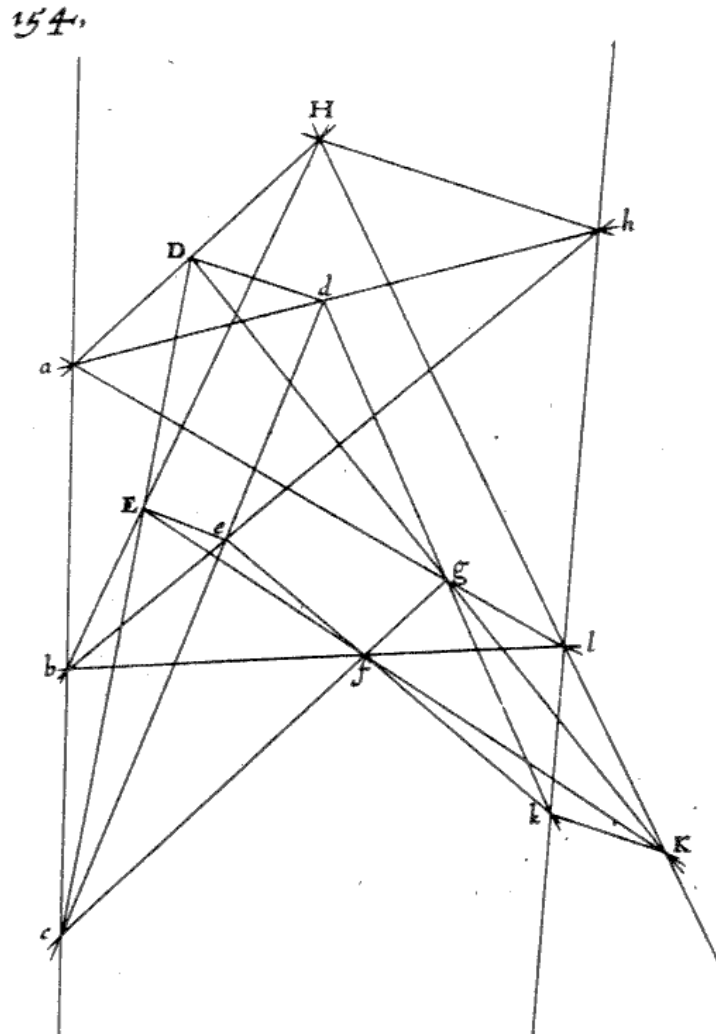
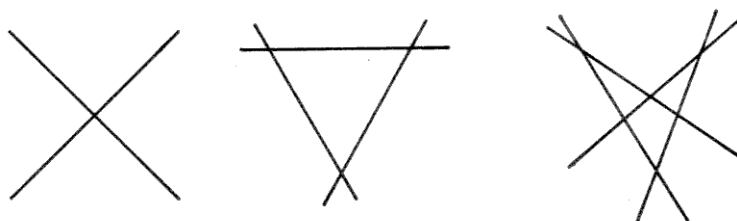


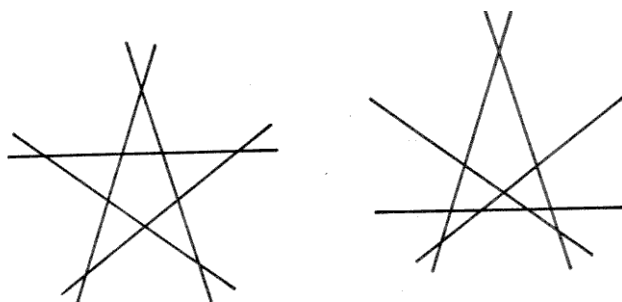
Abbildung 1.78: Bosse: Desargues Konfiguration

Unter einer Konfiguration wollen wir hier vorläufig eine endliche Menge von Punkten und eine endliche Menge von Geraden verstehen. Wenn ein Punkt auf einer Geraden liegt, sagen wir auch, dass der Punkt und die Gerade inzidieren. Zwischen der Menge von Punkten und der Menge von Geraden besteht also eine **Inzidenzrelation**.

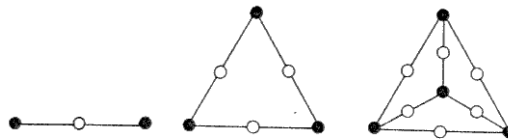
Eine besonders einfache Art von Konfiguration stellen die **vollständigen Vielseite** dar. Ein vollständiges n -Seit ist eine Konfiguration von n Geraden und $\binom{n}{2}$ Punkten, so dass jeder Punkt der Schnittpunkt eines Geradenpaares ist. Ein vollständiges 2-Seit ist einfach ein Paar von Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, und ein vollständiges Dreiseit ist im Rahmen der Konfigurationen das Analogon zu einem Dreieck in der euklidischen Geometrie. Die nächste Konfiguration ist das **vollständige Viereit**, und damit wollen wir uns ausführlicher befassen.



Wir wollen von vornherein einen sehr abstrakten Begriff der Gleichartigkeit von Konfigurationen einnehmen: Konfigurationen sind isomorph, wenn es bijektive Abbildungen zwischen ihren jeweiligen Punktmengen und Geradenmengen gibt, so dass die Inzidenzrelationen erhalten bleiben. In diesem Sinne sind alle vollständigen n -Seite für ein bestimmtes n isomorph.



Der letzte Abstraktionsschritt, ein Schritt, den man erst im 19. Jahrhundert tat, besteht dann darin, von der geometrischen Natur der Elemente ganz abzusehen und einfach irgend zwei Mengen von Objekten zu betrachten mit einer Relation, die man unter analogen Gesichtspunkten untersucht wie eine geometrische Inzidenzrelation. Im Sinne dieser Abstraktion ist es konsequent, auch geometrische Konfigurationen durch entsprechende abstrakte Relationen zu beschreiben und graphisch durch entsprechende Schemata darzustellen. Beispielsweise können wir eine Konfiguration von Punkten und Geraden durch einen Graphen mit gefärbten Eckpunkten darstellen. Weiße Eckpunkte entsprechen Punkten der geometrischen Konfiguration, schwarze Eckpunkte entsprechen Geraden; weiße und schwarze Ecken sind durch eine Kante des Graphen verbunden, wenn die entsprechenden Punkte und Geraden der Konfiguration inzidieren. Hier sind die Graphen für das vollständige 2-, 3- und 4-Seit.



Ein Vorteil einer solchen abstrakten Darstellung von Konfigurationen ist, dass eine richtig gewählte abstrakte Darstellung die Symmetrie der Konfiguration deutlicher hervortreten lässt als die geometrische Darstellung, bei deren Betrachtung man unwillkürlich zusätzliche geometrische Momente miteinbezieht, die unter dem Gesichtspunkt der Beschränkung auf die pure Inzidenzbeziehung als unwesentlich gelten. Denn von diesem Standpunkt aus definiert man die **Symmetriegruppe einer Konfiguration** als die Gruppe derjenigen Paare von bijektiven Selbstabbildungen der Punktmenge und der Geradenmenge, welche die Inzidenzrelation erhalten, gleichgültig, ob diese durch projektiv-lineare Abbildungen realisierbar sind oder nicht.

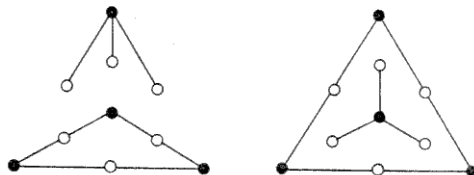
In diesem Sinne hat ein vollständiges Dreieck offensichtlich die gleiche Symmetriegruppe wie ein reguläres Dreieck, nämlich die symmetrische Gruppe S_3 , und ein vollständiges Viereck hat die gleiche Symmetriegruppe wie ein reguläres Tetraeder, nämlich die symmetrische Gruppe S_4 . Allge-

mein hat ein vollständiges $(n+1)$ -Seit die gleiche Symmetriegruppe wie das **n-dimensionale Standardsimplex** Δ_n , das n -dimensionale Analogon des Tetraeders. Δ_n ist das n -dimensionale konvexe Polyeder im \mathbb{R}^{n+1} mit den Standard-Basisvektoren e_1, \dots, e_{n+1} als Ecken.

Man kann auf verschiedene Weise einen Isomorphismus zwischen der Konfiguration eines vollständigen n -Seits und einer abstrakten Konfiguration von Ecken, Kanten oder Seiten von Δ_{n-1} hersteilen. Die naheliegendste Lösung ist folgende: Man ordnet den n Geraden die n Ecken von Δ_{n-1} zu und den $\binom{n}{2}$ Punkten die $\binom{n}{2}$ Kanten, so dass dem Schnittpunkt von zwei Geraden genau die Kante entspricht, welche die entsprechenden beiden Eckpunkte verbindet. Noch abstrakter: Den Geraden entsprechen die Zahlen $i = 1, \dots, n$, den Punkten die Paare verschiedener Zahlen $\{i, j\}$.

Eine zunächst weniger naheliegende Lösung ist die folgende, die zur vorigen dual ist. Man ordnet den n Geraden die n höchstdimensionalen Seiten von Δ_{n-1} zu und den $\binom{n}{2}$ Punkten die $\binom{n}{2}$ Seiten von der zweithöchsten Dimension. Noch abstrakter: Den Geraden entsprechen die Mengen $\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ und den Punkten die Mengen $\{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$. Die Operation der Symmetriegruppe der Konfiguration geht dabei in die kanonische Operation der symmetrischen Gruppe S_n über. Diese zweite Darstellung erweist sich im Falle des vollständigen Vierseits als günstiger, wenn es darum geht, die Beziehung des vollständigen Vierseits zu der Konfiguration von Desargues zu verstehen. Es entsprechen also jetzt die 6 Punkte des Vierseits den 6 Kanten des Tetraeders mit den Ecken e_1, \dots, e_4 oder auch den 6 Mengen $\{i, j\}$ mit $1 \leq i < j \leq 4$, und die 4 Geraden des Vierseits entsprechen den 4 Dreiecksflächen des Tetraeders oder auch den 4 Mengen $\{i, j, k\}$ mit $1 \leq i < j < k \leq 4$. Was entspricht nun den 4 Ecken des Tetraeders bzw. den vier Zahlen 1, 2, 3, 4? Ihnen entsprechen vier Zerlegungen des vollständigen Vierseits in zwei Teilkonfigurationen. Die eine der beiden Teilkonfigurationen ist ein vollständiges Dreiseit, und die andere ist eine **Transversale** zu diesem Dreiseit, d.h. eine Gerade zusammen mit den drei Schnittpunkten dieser Geraden mit den drei Seiten des Dreiseits. Diese 4 Zerlegungen in ein Dreiseit und eine Transversale sind bezüglich der Symmetriegruppe der Konfiguration alle zueinander äquivalent. Die folgende Abbildung zeigt ent-

sprechende Zerlegungen des Graphen.



Die symmetrische Gruppe S_4 der Konfiguration identifiziert sich kanonisch mit der symmetrischen Gruppe der Permutationen dieser 4 Zerlegungen. Damit kommt man schließlich zu noch einer anderen Sicht der Konfiguration des vollständigen Vierseits. Die Konfiguration besteht aus einer Menge von 10 Elementen mit einer zusätzlichen Struktur, nämlich 4 Zerlegungen in zwei Teilmengen von 4 bzw. 6 Elementen wie oben. Dann ist die Symmetriegruppe der Konfiguration diejenige Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_{10} , welche diese 4 Zerlegungen ineinander überführt. Alternativ könnte man natürlich statt der 4 Zerlegungen die 4 sechselementigen Mengen geben, welche den 4 vollständigen Dreiseiten entsprechen, oder die 4 komplementären vierelementigen Mengen, welche den 4 Transversalen entsprechen.

Zwischen den vollständigen Vierseiten und den vollständigen Dreiseiten, aufgefasst als Konfigurationen der projektiven Ebene, besteht ein wesentlicher Unterschied. Je zwei vollständige Dreiseite lassen sich durch eine projektiv-lineare Transformation ineinander überführen. Anders gesagt: Jedes Dreiseit lässt sich in das Standard-Dreiseit mit den Punkten $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ und den Geraden $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ überführen. Für die Vierseite hingegen gilt keine analoge Aussage. Sie bilden eine mehrparametrische Familie von projektiv inäquivalenten Konfigurationen, die nur kombinatorisch alle zueinander isomorph sind. Die Parameter dieser Familie wollen wir im Rahmen der euklidischen Geometrie behandeln.

Wir betrachten ein vollständiges Vierseit in der affin-euklidischen Ebene. Da auf jeder der vier Geraden drei Punkte liegen, enthält jede der drei Geraden drei Strecken, deren Endpunkte Punkte der Konfiguration sind. Insgesamt erhält man so 12 Strecken, und deren Längen sind Parameter, durch

welche die Konfiguration offensichtlich bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist. Die kombinatorische Symmetriegruppe S_4 operiert auf der Menge der 12 Strecken, und wir wollen erst einmal auf verschiedene Weise anschaulich darstellen, wie diese Operation aussieht. Dazu numerieren wir wie vorher die sechs Punkte der Konfiguration durch Zahlenpaare $\{i, j\}$ mit $1 \leq i < j \leq 4$. Die 12 Strecken sind dann durch die Paare ihrer Endpunkte numeriert, d.h. durch Paare $\{\{i, j\}, \{j, k\}\}$. Weniger umständlich numerieren wir solche Mengen durch die geordneten Paare (l, j) , wo $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Die Operation von S_4 auf der Menge der 12 Strecken ist die gleiche wie die kanonische Operation von S_4 auf der Menge der 12 Paare $(1, j)$ mit $1 \neq j$. Wir geben drei geometrische Darstellungen dieser Operation an.

1. Darstellung: Die 12 Strecken entsprechen den 12 orientierten Kanten des Tetraeders mit den Ecken 1, 2, 3, 4. Die Strecke (l, j) entspricht der Kante mit Anfangspunkt 1 und Endpunkt j .

2. Darstellung: Die 12 Strecken entsprechen den 12 Ecken des Kuboktaeders, das dem gleichen Würfel einbeschrieben ist wie das Tetraeder mit den Ecken 1, 2, 3, 4. Identifiziert man diese Ecken mit den Ecken e_1, e_2, e_3, e_4 des Standardtetraeders, dann entspricht die Strecke (l, j) der Kuboktaederecke $(e_j - e_l)/2$. Die 12 Vektoren $e_j - e_l$ mit $j, l = 1, \dots, 4$ und $j \neq l$ bilden, wie wir schon wissen, das Wurzelsystem vom Typ A_3 . Die Symmetriegruppe des vollständigen Vierseits operiert also auf den 12 Strecken wie die Weylgruppe auf dem System der 12 Wurzeln vom Typ A_3 .

3. Darstellung: Die 12 Strecken entsprechen den 12 Ecken des archimedischen Polyeders vom Typ $(3, 6, 6)$, also des gestutzten Tetraeders, das durch Stutzen des Tetraeders mit den Ecken 1, 2, 3, 4 entsteht. Bei Identifikation dieses Tetraeders mit dem Standardtetraeder entspricht der Strecke (l, j) die Polyederecke $(e_l + 2e_j)/3$.

Die nächste Zeichnung zeigt diese drei geometrischen Darstellungen für die Operation der Symmetriegruppe des vollständigen Vierseits auf der Menge der 12 Strecken. Um die Betrachtung der Figuren zu erleichtern, habe ich eine Zerlegung in ein Dreiseit und eine Transversale ausgezeichnet. Die Punkte auf der Transversalen sind $\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}$.

Dementsprechend habe ich die Strecken wie folgt bezeichnet:

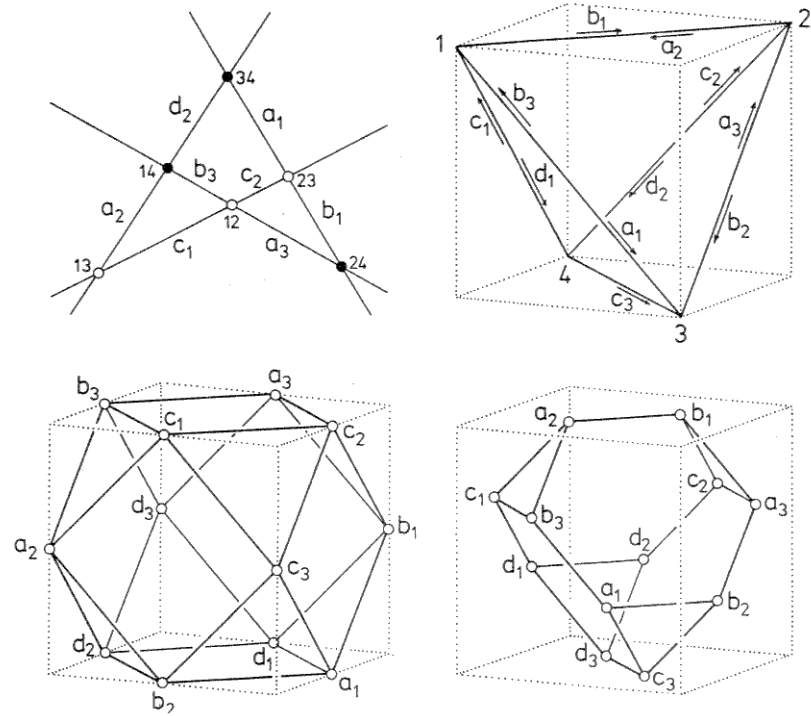
$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 3) & b_1 &= (1, 2) & c_1 &= (4, 1) & d_1 &= (1, 4) \\ a_2 &= (2, 1) & b_2 &= (2, 3) & c_2 &= (4, 2) & d_2 &= (2, 4) \\ a_3 &= (3, 2) & b_3 &= (3, 1) & c_3 &= (4, 3) & d_3 &= (3, 4). \end{aligned}$$

Wie man sieht, entsprechen beim gestutzten Tetraeder für jedes der 4 Dreiecke die drei Ecken den drei Strecken eines vollständigen Dreiseits. Beispielsweise entsprechen d_1, d_2, d_3 dem Dreiseit, das ich ausgezeichnet hatte. Eine analoge Aussage gilt für 4 der 8 Dreiecksflächen des Kuboktaeders. Für jedes der übrigen 4 Dreiecke entsprechen die drei Ecken den drei Strecken einer Transversale. Beispielsweise sind c_1, c_2, c_3 die drei Strecken auf der Transversale, die ich ausgezeichnet hatte. Für diese drei Strecken auf einer Transversalen besteht natürlich eine lineare Relation zwischen den Längen der drei Strecken: Eine ist die Summe der beiden anderen. Beispiel: $c_1 + c_2 = c_3$, wobei wir hier und im folgenden die Strecken und ihre Längen mit den gleichen Buchstaben bezeichnen.

Diese trivialen, linearen Relationen sind aber nicht die einzigen. Schon in der Antike entdeckte man eine interessante nicht-lineare Relation zwischen denjenigen sechs Größen, die man als Längen der 6 Strecken erhält, welche auf den Geraden des Dreiseits liegen und als Endpunkte einen Punkt der Transversalen und einen Punkt des Dreiseits haben. In unserer Notation sind das für die oben gewählte Zerlegung des Vierseits in Transversale und Dreiseit die Größen $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Für jede der vier Zerlegungen erhält man so sechs Größen. Beim gestutzten Tetraeder sind das jeweils die 6 Ecken einer der 4 Sechseckflächen, und beim Kuboktaeder sind es die 6 Ecken eines hexagonalen Äquators, oder, anders gesagt, die 6 Wurzeln eines Unter-Wurzelsystems vom Typ A_2 im Wurzelsystem vom Typ A_3 . Die Beziehung zwischen diesen 6 Größen war im Mittelalter als **regula sex quantitatum** bekannt. Sie lässt sich mit unseren Bezeichnungen wie folgt formulieren:

$$\boxed{a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3}$$

Manchmal wird diese Aussage auch fälschlicherweise als „Satz von Menelaus in der Ebene“ bezeichnet. *Menelaus von Alexandria* lebte etwa um 100 n.Chr. Er schrieb eine *Sphaerica* genannte Abhandlung, in der er eine



analoge Aussage über sphärische Dreiecke, den sogenannten „Satz von Menelaus“, bewies, indem er ihn auf die obige Beziehung zurückführte. Sätze über den Schnitt von Transversalen mit anderen Figuren finden sich auch in der *Collectio* von Pappus [278]. Dort findet man in Buch VII unter den 38 Lemmata zu den Porismen von Euklid auch eine Aussage, die zum Beweis der regula sex quantitatum führt: Haben zwei Dreiecke einen Winkel gemeinsam, so verhalten sich ihre Flächen wie die Produkte der anliegenden Seiten. Analoges gilt, wenn ein Winkel des einen Dreiecks zu einem des anderen komplementär ist. Die Fläche des Dreiecks mit den Ecken $\{i, j\}$, $\{i, k\}$, $\{i, l\}$ sei Δ_i . Dann haben die Dreiecke Δ_i und Δ_j im Punkt i, j gemeinsame oder komplementäre Winkel. Daher ergibt das zitierte Lemma von Pappus:

$$\Delta_i : \Delta_j = [(k, i) \cdot (l, i)] : [(k, j) \cdot (l, j)]$$

Bildet man zyklisch die drei Quotienten Δ_i/Δ_j und Δ_j/Δ_k und Δ_k/Δ_i und multipliziert, so erhält man die Relation:

$$1 = \frac{(i, j) \cdot (j, k) \cdot (k, i)}{(i, k) \cdot (j, i) \cdot (k, j)}.$$

Das ist eine Relation zwischen den 6 Strecken, die auf den Geraden des Dreiseits mit den Ecken $\{i, l\}$, $\{j, l\}$, $\{k, l\}$ liegen und als Endpunkte jeweils einen dieser Punkte und einen Punkt auf der Transversalen haben. Insbesondere ergibt sich mit den früheren Bezeichnungen für $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ die Relation

$$1 = \frac{b_1 b_2 b_3}{a_1 a_2 a_3}.$$

In der Antike und auch noch zur Zeit von Desargues sprach man die regula sex quantitatum allerdings in etwas anderer Form aus, z.B. in der folgenden Art:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3}.$$

Derartige Produkte von solchen Verhältniszahlen nennen die Mathe-

matikhistoriker „gemischte Verhältnisse“. Das Rechnen mit gemischten Verhältnissen, das Bilden von Ketten, Multiplizieren und Kürzen von solchen Verhältnissen war eine operationale Methode zur Herleitung von neuen Relationen aus schon bewiesenen. Um das zu verdeutlichen, bleiben wir bei der obigen Situation. Ein Vierseit sei in ein Dreiseit mit den Ecken $\{i, l\}$, $\{j, l\}$, $\{k, l\}$ und eine Transversale mit den Punkten $\{i, j\}$, $\{j, k\}$, $\{k, i\}$ zerlegt.

Dann bilden wir die folgenden 6 Verhältnisse:

$$\langle u, v \rangle := \frac{(u, v)}{(u, w)}, \quad \{u, v, w\} = \{i, j, k\}.$$

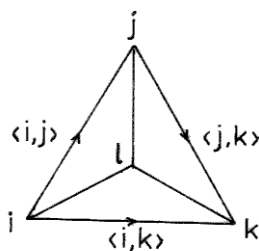
Dann kann man die regula sex quantitatum auch wie folgt formulieren:

$$\langle i, j \rangle \langle j, k \rangle \langle k, i \rangle = 1.$$

Die Formulierung im Geiste der antiken Mathematiker wäre dann die folgende:

$$\langle i, k \rangle = \langle i, j \rangle \langle j, k \rangle$$

Der operationale Charakter dieser Formulierung tritt deutlich hervor, wenn wir sie wie folgt geometrisch interpretieren. In dem Tetraeder mit den Ecken i, j, k, l ordnen wir $\langle u, v \rangle$ die gerichtete Kante mit Anfangspunkt u und Endpunkt v zu. Der Produktbildung entspricht das Aneinanderfügen von Kanten. Die Relationen von der obigen Art bedeuten dann, dass man die Komposition von zwei Kanten des Dreiecks mit den Ecken i, j, k durch die dritte, richtig orientierte Kante ersetzen kann.



Die obige Notation habe ich nur eingeführt, um den Charakter der Operationen möglichst deutlich hervortreten zu lassen. Desargues hat eine etwas schwerfälligere Notation. Die Gleichung $a_1/b_1 = (b_2/a_2) \cdot (b_3/a_3)$ schreibt er als Formel von folgender Gestalt:

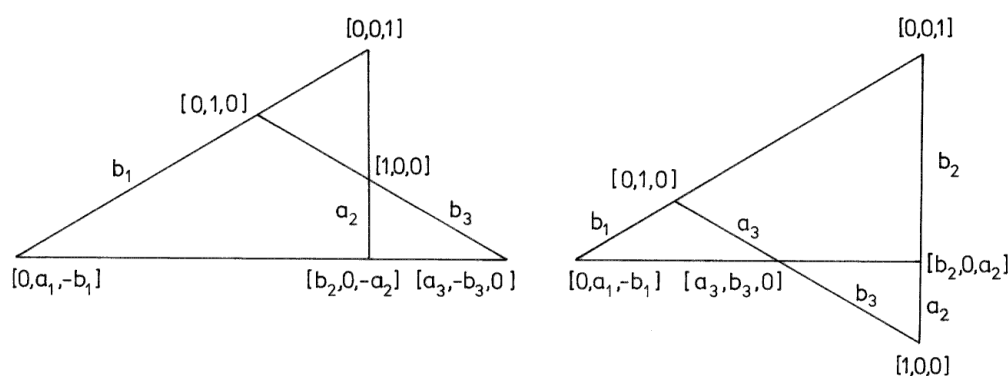
$$a_1 - b_1 \left\{ \begin{array}{l} b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{array} \right. .$$

Dabei bezeichnet er außerdem die Längen a_i, b_i der Strecken durch die entsprechenden Paare von Endpunkten. So entstehen schließlich Formeln wie zum Beispiel die folgende:

$$gD - gK \left\{ \begin{array}{l} aD - aH \\ lH - lK \end{array} \right. .$$

Vom heutigen Standpunkt der linearen Algebra aus gesehen ist die regula sex quantitatum eine Determinantenbedingung für die Kollinearität von drei Punkten. Im euklidischen Standardraum \mathbb{R}^3 sei E die affine Ebene durch die drei Standardvektoren e_1, e_2, e_3 . In E seien ein vollständiges Dreieck und eine Transversale gegeben. Die Transversale zerlegt E in zwei Halbebenen. Affin hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Fall A: Die drei Punkte des Dreiecks liegen alle in der gleichen Halbebene. Fall B: Sie liegen nicht alle in der gleichen Halbebene. Wie früher indizieren wir die Punkte des Vierseits durch Zahlenpaare $\{i, j\}$ mit $1 \leq i < j \leq 4$, und zwar so, dass $\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ die Punkte des Dreiecks sind und $\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}$ die Punkte auf der Transversalen. Wir können zusätzlich noch die Indizierung so wählen, dass sich eine bestimmte Reihenfolge für die Punkte auf der Transversalen ergibt. Wir verlangen, dass im Fall A der Punkt $\{1, 3\}$ und im Fall B der Punkt $\{1, 2\}$ in der Mitte liegt. Außerdem mögen im Fall B ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Punkte $\{2, 4\}$ und $\{3, 4\}$ in der gleichen Halbebene liegen. Die 6 Größen $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ sind dann wie früher bestimmt. Es sei $A \in \text{GL}(3, \mathbb{R})$ die eindeutig bestimmte lineare Transformation, welche $\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ in dieser Reihenfolge in e_1, e_2, e_3 überführt. A überführt die Ebene E in sich und die Transversale in eine Gerade, welche die Geraden in E mit den Gleichungen $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ bzw. $x_3 = 0$ in den

Bildern der Punkte $\{2, 3\}$ bzw. $\{1, 3\}$ bzw. $\{1, 2\}$ trifft. Die Koordinaten dieser Punkte sind bis auf ein gemeinsames skalares Vielfaches durch die Zahlenpaare (a_i, b_i) bestimmt. Die homogenen Koordinaten $[x_1, x_2, x_3]$ sind also eindeutig bestimmt. Zum Beispiel hat das Bild von $\{2, 3\}$ die homogenen Koordinaten $[0, a_1, -b_1]$. Die folgenden Figuren zeigen die homogenen Koordinaten aller Punkte in beiden Fällen.



Damit ergibt sich als Bedingung für die Kollinearität der drei Transversalenpunkte zum Beispiel im Fall B die Bedingung

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & b_3 \\ -b_1 & a_2 & 0 \end{pmatrix} = a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 b_3 = 0 .$$

Die regula sex quantitatum ist also in der Tat genau eine Determinantenbedingung für die Kollinearität der Transversalenpunkte.

Nachdem wir die sehr einfache klassische Konfiguration des vollständigen Vierseits außerordentlich gründlich studiert haben, wird es uns nun sehr leicht fallen, die Konfiguration von Desargues zu verstehen. Sie wird in den ersten vier Zeilen des Textes beschrieben, den wir oben reproduzierten. Die Konfiguration besteht aus 10 Punkten und 10 Geraden. Auf jeder Geraden

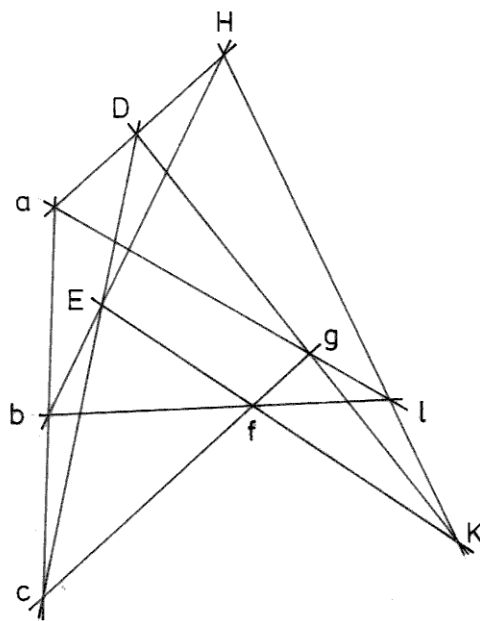
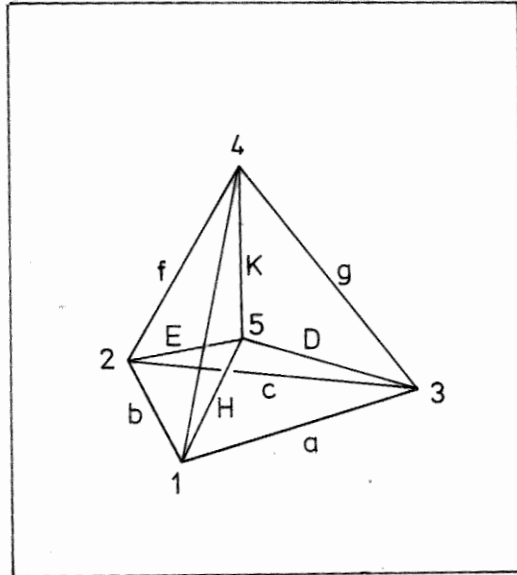


Abbildung 1.79: Die Desarguessche Konfiguration

liegen 3 Punkte, und durch jeden Punkt gehen 3 Geraden. Desargues bezeichnet die Punkte durch die Buchstaben $a, b, c, D, E, f, g, H, K, l$ und gibt die Inzidenzrelationen an, indem er für neun der 10 Geraden die Tripel der Punkte auf der Geraden angibt: $HDa, HEb, cED, lga, lfb, HlK, DgK, EfK, cfg$. Das zehnte Tripel ist abc .

Abstrakt-kombinatorisch ist die Konfiguration von Desargues isomorph zur Konfiguration der 10 Kanten und der 10 zweidimensionalen Seiten eines 4-dimensionalen Simplex. Noch abstrakter: Die Desarguesche Konfiguration von 10 Punkten und 10 Geraden ist isomorph zur abstrakten Konfiguration der 10 Paare $\{i, j\}$ und der 10 Tripel $\{i, j, k\}$ von paarweise verschiedenen Zahlen $1 \leq i, j, k \leq 5$. Die nächste Bildseite (Abbildung 1.79) illustriert auf mehrfache Weise die verschiedenen geometrischen und abstrakten Darstellungen der Desargueschen Konfiguration. Diese Darstellungen erleichtern es, die Eleganz von Desargues Beweis für die Existenz der geometrischen Konfiguration zu begreifen. Der Beweis für die Existenz einer räumlichen Konfiguration von 10 Punkten und 10 Geraden mit den angegebenen Inzidenzrelationen ist sehr einfach. Man lese dazu Bosses Text. Es geht also um den Beweis der Existenz der Desargueschen Konfiguration in der Ebene. Man sieht sehr leicht, dass solche ebenen Konfigurationen von 10 Punkten und 9 Geraden mit der entsprechenden Inzidenzrelation existieren, die durch Fortlassen einer Geraden der Desargueschen Konfiguration entstehen. Der Existenzbeweis für die Desarguesche Konfiguration besteht darin, zu zeigen, dass in jeder derartigen unvollständigen Konfiguration die drei Punkte, die nur auf zwei der 9 Geraden liegen, kollinear sind, so dass durch Hinzunahme der Geraden durch diese drei Punkte tatsächlich eine Desarguesche Konfiguration entsteht. Desargues wählt für diesen Nachweis die Gerade durch die Punkte c, f, g . Wir wollen diesen Beweis nachvollziehen. Wir numerieren die Ecken des 4-dimensionalen Simplex wie in unserer Figur mit den Zahlen $1, \dots, 5$. Daraus ergibt sich folgende Numerierung der 10 Punkte:

$$\begin{array}{lll}
a = \{3, 1\} & f = \{2, 4\} & D = \{3, 5\} \\
b = \{1, 2\} & g = \{3, 4\} & E = \{2, 5\} \\
c = \{2, 3\} & l = \{1, 4\} & H = \{1, 5\} \\
& & K = \{4, 5\}
\end{array}$$

Die Bezeichnungen von Desargues lassen erkennen, dass er seine Figur als Vereinigung von 4 vollständigen Vierseiten auffasst. In der Tat enthält die Desarguesche Konfiguration 5 vollständige Vierseite. Sie entsprechen den 5 Tetraedern, welche die 5 dreidimensionalen Seiten des 4-dimensionalen Simplex bilden. Das fünfte Tetraeder ist dasjenige, dessen Kanten nur mit Kleinbuchstaben bezeichnet sind. Ferner ist in jedem der 4 vollständigen Vierseite eine Zerlegung in ein Dreiseit und eine Transversale ausgewählt: Die 4 Transversalen entsprechen im 4-Simplex den 4 Dreiecken, deren Kanten nur mit Kleinbuchstaben bezeichnet sind: abc, ahg, hbf, gfc . Zu jedem der 4 Paare aus einem Dreiseit und einer Transversale gehören 6 Größen, die wir entsprechend unseren früheren Konventionen mit $\langle i, j \rangle$ bezeichnen, wo $i, j = 1, \dots, 4, i \neq j$, also

$$\langle i, j \rangle = \frac{\{(i, j), \{i, 5\}\}}{\{(i, j), \{j, 5\}\}}.$$

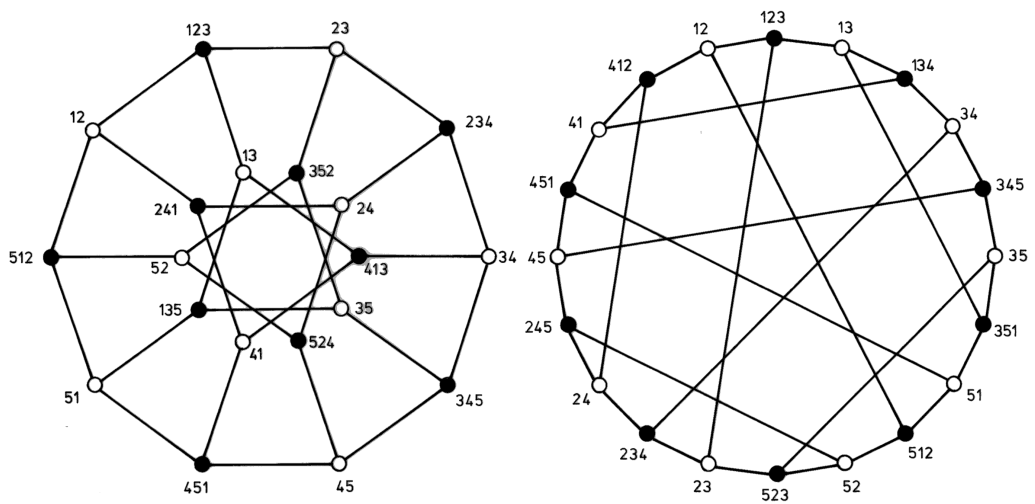
Dann lautet Desargues Beweis für die Existenz seiner Konfiguration wie folgt:

$$\left. \begin{array}{l}
\langle 3, 4 \rangle = \langle 3, 1 \rangle \langle 1, 4 \rangle \\
\langle 4, 2 \rangle = \langle 4, 1 \rangle \langle 1, 4 \rangle \\
\langle 3, 2 \rangle = \langle 3, 1 \rangle \langle 1, 2 \rangle
\end{array} \right\} \implies \langle 3, 4 \rangle \langle 4, 2 \rangle = \langle 3, 2 \rangle.$$

Für jeden, der den antiken Satz von der regula sex quantitatum kennt, ist dies ein Beweis, der an Kürze und Einfachheit nicht mehr zu überbieten ist. Zum Vergleich führe man einen Beweis mit Vektoralgebra (LA I, Aufgabe 49).

Die Symmetriegruppe der Desargueschen Konfiguration ergibt sich aus der obigen Analyse. Es ist die symmetrische Gruppe S_5 . Sie ist identisch mit der Gruppe der Permutationen der 5 vollständigen Vierseite, die in der Desargueschen Konfiguration enthalten sind.

Die geometrische Proposition aus Bosses Buch, deren Text und Figur wir oben reproduzierten (p. 411f.), enthält nicht nur die Beschreibung der Konfiguration von Desargues, sondern sie bettet diese Konfiguration auch noch in eine komplexere Konfiguration aus 15 Punkten und 20 Geraden ein. Diese hat abstrakte Darstellungen, welche denen des vollständigen Vierseits und der Desargueschen Konfiguration völlig analog sind. Die 15 Punkte entsprechen den 15 Paaren $\{i, j\}$ und die 20 Geraden den 20 Tripeln $\{i, j, k\}$ von paarweise verschiedenen Zahlen $i, j, k \in \{1, \dots, 6\}$, oder auch den 15 Kanten und 20 Dreiecken in einem 6-dimensionalen Simplex. Die Konfiguration enthält 6 Desarguesche Konfigurationen. In der Figur von Bosse ist eine weitere derartige Teilkonfiguration neben der eingangs beschriebenen z.B. diejenige, deren Punkte gerade sämtliche Punkte mit kleinen Buchstaben sind, also $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l$. Die Symmetriegruppe der Konfiguration ist die symmetrische Gruppe S_6 . Sie permutiert die 6 Desargueschen Teilkonfigurationen. Das folgende Bild zeigt einen Graphen der erweiterten Desargueschen Konfiguration.



Ich habe in dem, was ich über die Desarguesche Konfiguration gesagt habe, vielleicht zu sehr die Kontinuität, die Verbindung mit der antiken Tradition betont. Darum sei hier noch einmal an das erinnert, was Struik dazu sagt. Desargues' Denken enthielt etwas völlig Neues in der Art, wie das Unendliche in die Geometrie eingeführt wurde, und wie, zum Beispiel bei der Behandlung von Kegelschnitten oder eben von Konfigurationen, ganze Klassen von Figuren, einer einheitlichen Betrachtungsweise unterworfen wurden. Gegenstand der klassischen euklidischen Geometrie waren die metrischen Proportionen solcher Figuren. Diese Proportionen bilden, so könnten wir es heute sagen, Parametersysteme, welche solche Klassen von unendlich vielen Figuren parametrisieren, und die Räume, in denen diese Parameter variieren, die „Modulräume“, sind selber außerordentlich interessante Gegenstände der mathematischen Forschung. Durch die projektive Betrachtungsweise von Desargues wurde es möglich, sowohl die Figuren als auch die Parameterräume durch Hinzunahme „idealer“ Elemente im Unendlichen zu ergänzen, sie zu kompaktifizieren. Gleichzeitig enthielt dies neue Denken eine systematische Methode zur Behandlung der Analogien von Figuren, die man – wie etwa Kreis und Ellipse – im Sinne der euklidischen Geometrie als verschieden betrachten musste.

Einer der ganz wenigen, die dieses neue Denken von Desargues verstanden und sich zu eigen machten, war *Blaise Pascal*. Er wurde am 19. Juni 1623 in Clermont in der Auvergne geboren. Als er drei Jahre alt war, starb seine Mutter. Von da ab wurde er von seinem Vater erzogen, Etienne Pascal, einem gebildeten Beamten, der nach seiner Übersiedelung nach Paris 1631 in einem Gelehrtenkreis um den Pater Mersenne verkehrte, zu dem auch Desargues und Descartes gehörten. Pascals Schwester Gilberte berichtet, dass der Vater den Sohn vor allem in den Sprachen unterrichten wollte. Etienne Pascal – so erzählt sie – verstand genug von der Mathematik und kannte genug Leute, die sich damit befassten, um zu wissen, dass „die Mathematik eine Sache ist, die den Geist ganz ausfüllt und sehr befriedigt“. Er ließ das Kind auf dessen inständiges Fragen also nur wissen, dass die Mathematik ein Weg wäre, um vollkommen gesetzmäßige Figuren zu bilden und ihre Proportionen zu untersuchen. Als das Kind daraufhin anfang,

sich in seinen Mußestunden seine eigene Geometrie der Figuren zu erfinden, und vielleicht auch heimlich und verbotener Weise die Elemente Euklids las, erkannte der Vater seine ganz außergewöhnliche mathematische Begabung, gestattete ihm, die Elemente zu lesen, und ließ es an den Gesprächen im Gelehrtenkreise teilnehmen.

1639, im Alter von 16 Jahren, schrieb Blaise Pascal einen Aufsatz über Kegelschnitte, in dem er einen sehr schönen Satz mitteilte, den er nach eigenem Zeugnis gefunden hat, indem er die Methoden von Desargues weiter verfolgte. Dieser Aufsatz wurde im folgenden Jahr als kurze Ankündigung auf einem einzelnen Blatt gedruckt („Essay pour les coniques. Par B.P.” [280]).

Das dritte Lemma in diesem Aufsatz von Pascal beschreibt eine Konfiguration, die wir heute die **Konfiguration von Pascal** nennen. Leibniz, der Pascals nachgelassene Schriften bei seinem Aufenthalt in Paris (1672-1676) einsehen konnte, nannte die Konfiguration das „**hexagramma mysticum**“.

Die Konfiguration von Pascal besteht aus 9 Punkten und 7 Geraden zusammen mit einem Kegelschnitt. 6 von den Punkten und 6 von den Geraden bilden zusammen die Ecken und Seiten eines 6-Seits, welches mit seinen Ecken dem Kegelschnitt einbeschrieben ist. Die 3 Paare gegenüberliegender Seiten treffen sich in den übrigen drei Punkten. Diese drei Punkte – das ist der Satz von Pascal – liegen auf einer Geraden, und das ist die Gerade, durch welche die Konfiguration vervollständigt wird. Wenn z.B. der Kegelschnitt ein Kreis ist und das Sechseck ein regelmäßiges Sechseck, ist es die unendlich ferne Gerade. Allgemeiner ist das natürlich genau dann der Fall, wenn die Seiten des Sechsecks in der affinen Ebene parallel sind. Ein interessanter Spezialfall der Konfiguration von Pascal entsteht, wenn der Kegelschnitt in ein Paar von Geraden zerfällt. In diesem Fall stammt der Satz von Pappus [278, Buch VII, Lemma 12,13,15,17]. **Die Konfiguration von Pappus** besteht aus 9 Geraden und 9 Punkten. Auf jeder Geraden liegen 3 Punkte, durch jeden Punkt gehen 3 Geraden. Die folgende Abbildung zeigt die Konfiguration von Pascal und Pappus und für die letztere eine abstrakte Darstellung durch einen Graphen. Die Buchstaben zur Bezeichnung der Punkte sind die

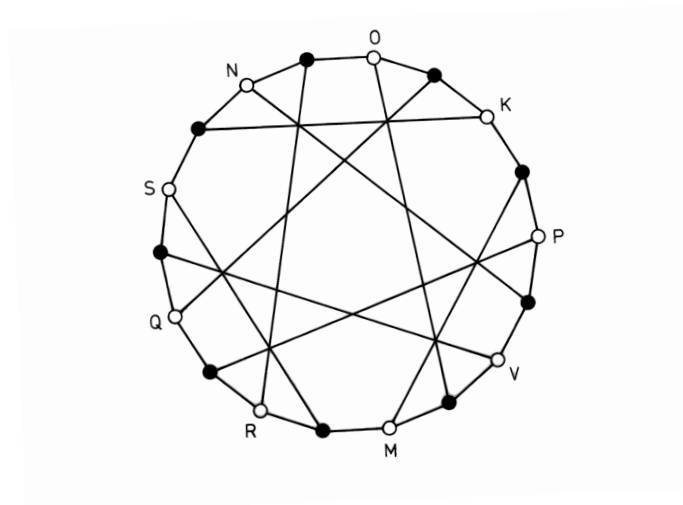
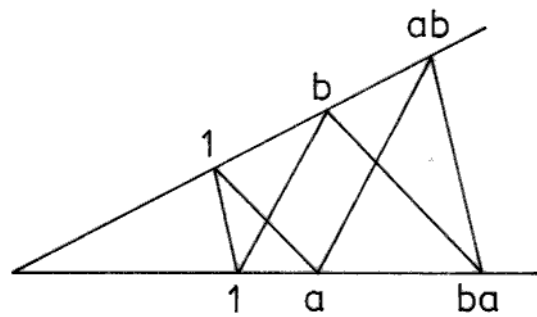
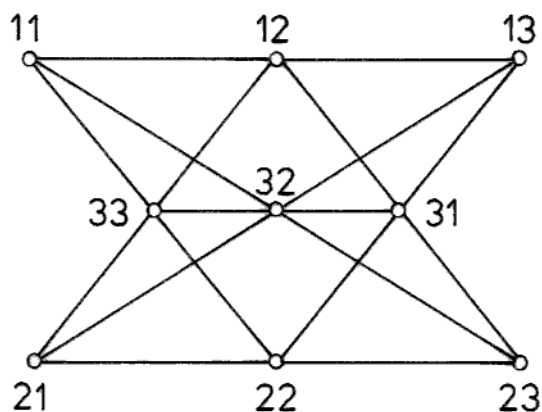


Abbildung 1.81: Graph der Konfiguration von Pascal und Pappus



Die Konfiguration von Pappus enthält genau 18 vollständige Dreiecke. Um sie aufzuzählen, wollen wir die 9 Punkte systematisch numerieren, und zwar so wie in der folgenden Figur.



Wir bezeichnen mit i, j, k, l, m irgendwelche Zahlen von 1 bis 3, so dass $i \neq j$ und $\{k, l, m\} = \{1, 2, 3\}$. Dann sei $\Delta(i, k; j)$ das Dreiseit mit den drei Eckpunkten $(i, k), (j, m), (j, l)$. Diese 18 Dreiseite sind gerade alle die Dreiseite, die als Unterkonfiguration in der Konfiguration von Pappus enthalten sind. Die Konfiguration von Pappus lässt sich auf genau 6 verschiedene Arten disjunkt in 3 Dreiseite zerlegen, d.h. so, dass die 3 Dreiseite einer Zerlegung keinen Punkt und keine Gerade gemeinsam haben. Wir bezeichnen diese 6 Zerlegungen wie folgt:

$$\begin{aligned} D(i, 1) &:= \{\Delta(1, i; 2), \Delta(2, i; 3), \Delta(3, i; 1)\} \\ D(i, 2) &:= \{\Delta(1, i; 3), \Delta(3, i; 2), \Delta(2, i; 1)\} \end{aligned}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Diese Zerlegungen haben übrigens die folgende bemerkenswerte Eigenschaft: Bei zyklischer Anordnung liegen die Ecken jedes Dreiseits auf den Seiten des vorhergehenden – sie sind „**einander zyklisch ein- und umbeschriebene Dreiecke**“.

Die Symmetriegruppe G der Konfiguration von Pappus operiert auf der Menge $\{D(i, j)\}$ dieser 6 Zerlegungen, und mit Hilfe dieser Operation bestimmen wir die Struktur von G wie folgt. Wir werden drei kurze exakte

Sequenzen definieren.

$$1 \rightarrow G' \rightarrow G \xrightarrow{\rho} S_2 \rightarrow 1 \quad (1)$$

$$1 \rightarrow G'' \rightarrow G' \xrightarrow{\rho'} \{\pm 1\} \rightarrow 1 \quad (2)$$

$$1 \rightarrow G''' \rightarrow G'' \xrightarrow{\rho''} A_3 \times A_3 \rightarrow 1 \quad (3) .$$

Die Gruppe G''' ist die folgende zyklische Gruppe der Ordnung 3 von Permutationen der 9 Punkte der Konfiguration:

$$G''' = \langle (11, 12, 13) \cdot (21, 22, 23) \cdot (31, 32, 33) \rangle$$

Die Gruppen G' und G'' sind die Kerne von ρ und ρ' , und die Homomorphismen ρ, ρ', ρ'' sind wie folgt definiert.

$$(1) \quad g D(i, j) = D(i, \rho(g)(j)) \quad \text{für } g \in G .$$

$$(2) \quad g' D(i, j) = D(\sigma_j(g')(i), j) \quad \text{für } g' \in G' .$$

Die Abbildungen $\sigma_j : G' \rightarrow S_3$, $j = 1, 2$ haben die folgenden Eigenschaften:

$$\text{Für jedes } g' \in G' \text{ gilt } \text{sign } \sigma_1(g') = \text{sign } \sigma_2(g') .$$

Daher ist folgende Definition sinnvoll: $\sigma'(g') = \text{sign } \sigma_j(g')$.

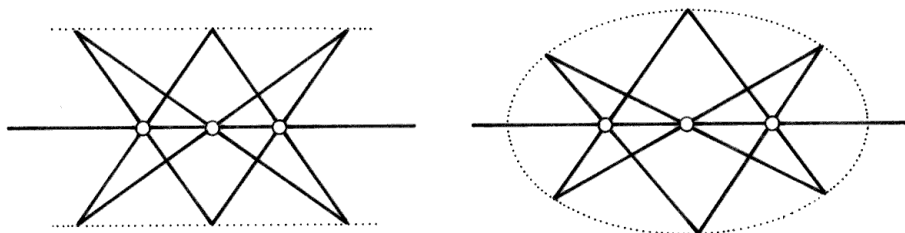
$$(3) \quad \rho''(g'') = (\sigma_1(g''), \sigma_2(g'')) \quad \text{für } g'' \in G'' .$$

Man prüft leicht nach, dass die obigen drei Sequenzen in der Tat exakt sind. Damit haben wir hinsichtlich der Struktur von G das folgende Ergebnis:

Die Symmetriegruppe der Konfiguration von Pappus ist eine auflösbare Gruppe der Ordnung $3^3 \cdot 2^2 = 108$.

Ich darf nicht versäumen, darauf hinzuweisen, dass die eben skizzierte Auffassung der Konfiguration von Pappus nicht die einzig sinnvolle ist. Denn diese Interpretation hat zwar den Vorteil, dass durch jeden der 9 Punkte 3 Geraden gehen und auf jeder der 9 Geraden 3 Punkte liegen und somit die für eine Konfiguration charakteristischen Bedingungen, die später noch genauer zu besprechen sein werden, erfüllt sind. Aber diese Auffassung hat den Nachteil, dass sie sich nicht unmittelbar auf die Situation des Satzes von Pascal

verallgemeinern lässt, von dem der Satz von Pappus doch einen Spezialfall darstellt, nämlich den, bei dem der Kegelschnitt in ein Paar von Geraden zerfällt. Diesen Mangel beheben wir durch eine zweite Interpretation. Wir lassen einfach das störende Geradenpaar und die 6 Punkte darauf fort. Entsprechend lassen wir in der Figur des Satzes von Pascal den Kegelschnitt und die darauf liegenden 6 Punkte fort. Dann erhalten wir in beiden Fällen eine Konfiguration von 7 Geraden und 3 Punkten. Von diesen 7 Geraden sind 6 die „**Grundgeraden**“, die zusammen mit den fortgelassenen Punkten das gegebene Sechseck bildeten. Die 7. Gerade ist die **Pappus-Gerade** bzw. die **Pascalgerade**, auf der die drei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten liegen. Diese Punkte wollen wir auch **Pappus-Punkte** bzw. **Pascal-Punkte** nennen.



Bei dieser Interpretation der Sätze von Pappus und Pascal führen der reduzible und der irreduzible Fall zu kombinatorisch isomorphen Konfigurationen. Die gewünschte Einheitlichkeit der Auffassung beider Sätze ist damit erreicht. Jedoch haben die so gewonnenen Konfigurationen nicht den wünschenswerten Grad von Regelmäßigkeit. Aber dieser Mangel lässt sich beheben, indem man die Figuren in geeigneter Weise vervollständigt, und zwar wie folgt.

Gegeben seien 6 Grundpunkte auf einem Kegelschnitt, der zerfallend oder nicht zerfallend sein kann. Wenn der Kegelschnitt in zwei Geraden zerfällt, sollen auf jeder von beiden drei Grundpunkte liegen. Wir betrachten dann die Menge aller Geraden, welche den Kegelschnitt in genau zwei von

den 6 Grundpunkten treffen. Im irreduziblen Fall sind das **15 Grundgeraden**, und im reduziblen Fall sind es **9 Grundgeraden**. Diese Grundgeraden schneiden sich außer in den Grundpunkten noch in weiteren Punkten der projektiven Ebene. Wenn die Grundpunkte in hinreichend allgemeiner Lage waren, schneiden sich in jedem dieser weiteren Schnittpunkte nur jeweils zwei Grundgeraden. Die Zahl dieser Schnittpunkte ist dann im irreduziblen Fall 45, und im reduziblen Fall 18. Im irreduziblen Fall wollen wir diese Punkte die **45 Pascalpunkte** nennen. Aus den Grundpunkten und Grundgeraden kann man nun viele 6-Ecke mit den Grundpunkten als Ecken und den Grundgeraden als Seiten bilden. Dabei sehen wir 6-Ecke, die sich nur durch zyklische Vertauschung der Ecken und Seiten oder durch Umkehrung von deren Reihenfolge unterscheiden, als gleich an. Dann gibt es im irreduziblen Fall **60 Sechsecke**, und im reduziblen Fall gibt es **6 Sechsecke**. Dazu gehören im irreduziblen Fall nach dem Satz von Pascal **60 Pascalgeraden**, und im reduziblen Fall nach dem Satz von Pappus **6 Pappusgeraden**.

Diese Betrachtungsweise geht m.W. im reduziblen Fall auf *Julius Plücker* zurück. Man findet sie im 2. Band seiner „analytisch-geometrischen Entwicklungen“, Nr. 666, Figur 31 (Julius Plückers „Analytisch-geometrische Entwicklungen“ [290, Bd. 2])

Wir betrachten weiter den reduziblen Fall. Jedes der 6 Sechsecke legt eine Reihenfolge der 6 Grundpunkte fest, die allerdings nur bis auf zyklische Permutation und Umkehrung der Reihenfolge bestimmt ist. Wir können die Unbestimmtheit beseitigen, indem wir für die 3 Grundpunkte auf einer der beiden Geraden eine Reihenfolge fest vorgeben. Dann bestimmt jedes Sechseck für die dazwischenliegenden anderen drei Grundpunkte eine bestimmte Reihenfolge. Dadurch zerfallen die 6 Sechsecke in zwei Tripel von Sechsecken: Für Sechsecke im gleichen Tripel unterscheiden sich die Reihenfolgen durch eine gerade und für Sechsecke in verschiedenen Tripeln durch eine ungerade Permutation. Entsprechend zerfallen die 6 Pappusgeraden in zwei Tripel. Der Mathematiker *Jacob Steiner* hat nun bemerkt, dass die drei Pappusgeraden jeweils eines Tripels durch einen gemeinsamen Punkt gehen [340, Bd. 1, p.451f.]. Man erhält so zusätzlich zu den schon konstruierten 18 Punkten zwei weitere Punkte, die „Steinerpunkte“. Damit hat man insgesamt eine

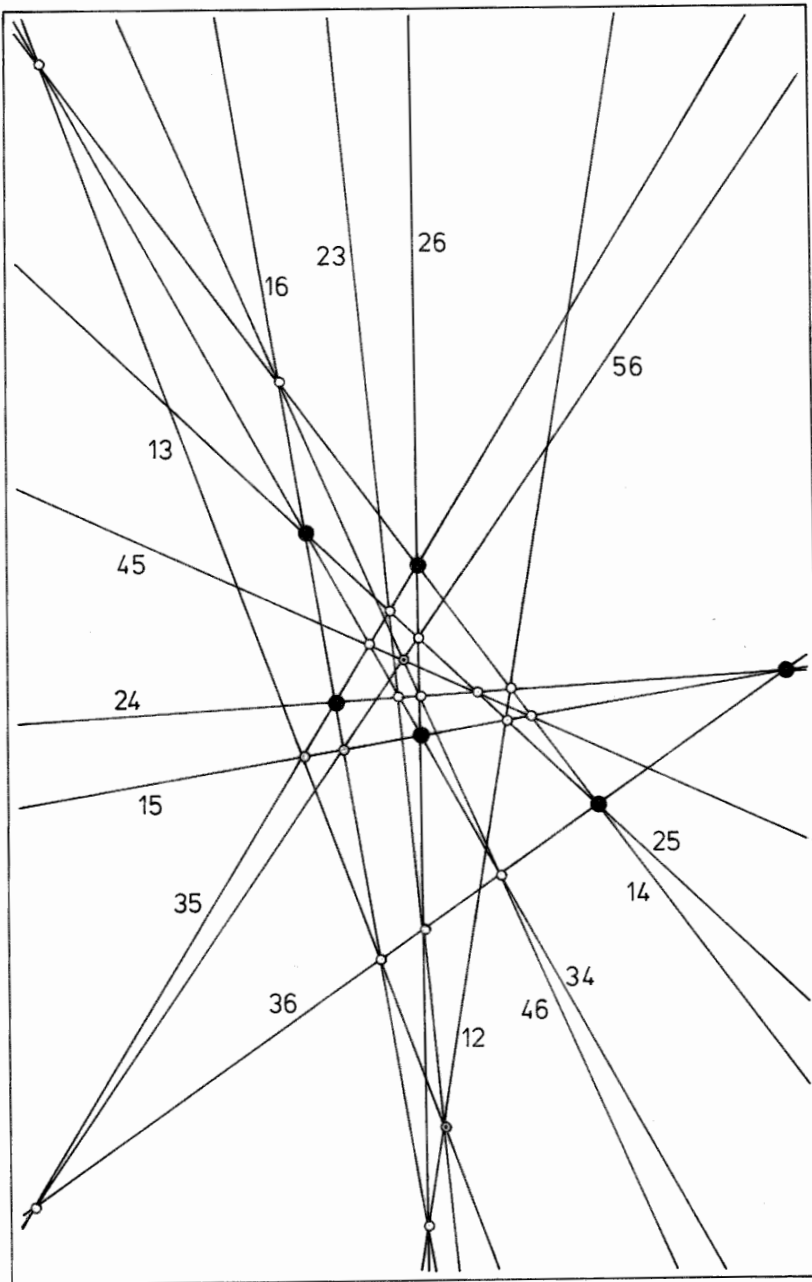


Abbildung 1.82: Vollständige Pappus-Konfiguration

Konfiguration von 20 Punkten und von 15 Geraden, nämlich 9 Grundgeraden und 6 Pappusgeraden. Auf jeder der 15 Geraden liegen 4 Punkte, und durch jeden der 20 Punkte gehen drei Geraden. Diese Konfiguration nennt man die **vollständige Konfiguration** von Pappus. Abbildung 1.82 zeigt diese Figur.

Man sieht, dass man die 15 Geraden durch ungeordnete Zahlenpaare $\{i, j\}$ und die 20 Punkte durch ungeordnete Tripel $\{i, j, k\}$ von paarweise verschiedenen Zahlen $i, j, k \in \{1, \dots, 6\}$ so numerieren kann, dass die Inzidenzrelation der Teilmengenrelation entspricht. Damit erkennen wir: Die vollständige Konfiguration von Pappus ist dual zu der erweiterten Konfiguration von Desargues – die Geraden der einen Konfiguration entsprechen den Punkten der anderen und umgekehrt.

Außerdem sehen wir: Die Symmetriegruppe der vollständigen Konfiguration von Pappus ist die symmetrische Gruppe S_6 . Die Konfiguration enthält 60 Teilkonfigurationen vom kombinatorischen Typ der einfachen Pappusfigur aus 7 Geraden und drei Punkten. Jede der 15 Geraden kann so auf vierfache Weise als eine kombinatorische „Pappusgerade“ aufgefasst werden, indem man einen ihrer vier Punkte weglässt.

Wir wenden uns nun dem irreduziblen Fall zu, also der Konfiguration von Pascal. Auch in diesem Fall besteht ein enger Zusammenhang mit der Konfiguration von Desargues. Wir wählen in der einfachen Konfiguration von Desargues einen der 10 Punkte als Perspektivitätszentrum aus. Dadurch werden als Teilkonfigurationen eindeutig zwei vollständige Dreiseite ausgezeichnet, die bezüglich des gewählten Zentrums in perspektivischer Lage sind. Die drei Paare entsprechender Seiten schneiden sich nach dem Satz von Desargues in drei Punkten auf einer Geraden der Konfiguration, der „Desarguesgeraden“ zu dem gewählten Zentrum. Außerdem schneiden sich aber die Seiten der beiden Dreiseite paarweise noch in 6 weiteren Punkten. Man kann beweisen, dass diese 6 Punkte auf einem Kegelschnitt liegen. Die 6 Seiten der beiden Dreiseite bilden zusammen mit diesen 6 Punkten ein Sechseck, das dem Kegelschnitt einbeschrieben ist. Damit ist aber die Situation des Satzes von Pascal hergestellt, und man sieht leicht, dass die zugehörige Pascalgerade eben die vorher konstruierte Desarguesgerade zu

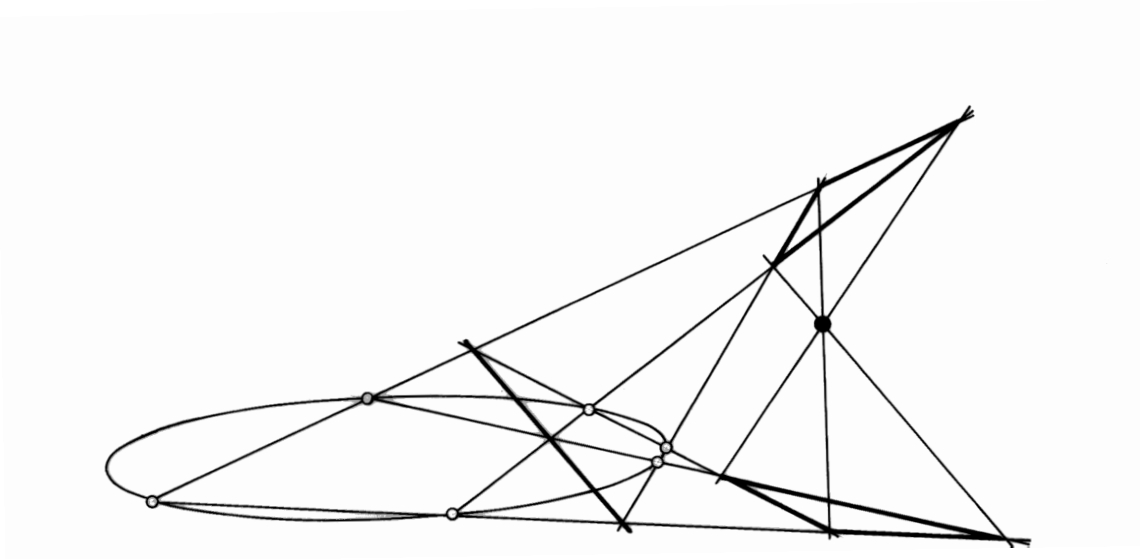


Abbildung 1.83: Die Konfigurationen von Desargues und Pascal

dem gewählten Perspektivitätszentrum ist.

Ergebnis: Zu jeder Desargueschen Konfiguration mit einem ausgezeichneten Punkt gehört eine eindeutig bestimmte Konfiguration von Pascal.

Wenigstens eine der zahlreichen Anwendungen des Satzes von Pascal sollte nicht unerwähnt bleiben:

Ein irreduzibler Kegelschnitt ist durch 5 auf ihm liegende Punkte eindeutig bestimmt und kann aus diesen punktweise konstruiert werden.

Zum Beweis betrachten wir die Pascalfigur in Abbildung 1.80. Gegeben seien die 5 Punkte P, Q, V, O, N . Jede beliebig gegebene Gerade L durch P schneidet den Kegelschnitt in einem weiteren Punkt K .

Dieser wird wie folgt konstruiert. Der Schnitt von L mit der Geraden VO liefert einen Punkt M . Der Schnitt der Geraden NO und PQ liefert einen Punkt R . Die Gerade RM wird von der Geraden QV in S geschnitten. Die Gerade SN schneidet L dann im gesuchten Punkt K .

Pascal hat von seinem Satz zahlreiche weitere Anwendungen auf die Theorie der Kegelschnitte gemacht. Er plante eine Abhandlung darüber, und Leibniz hat noch Pascals Aufzeichnungen hierzu sehen können, aber später sind diese verlorengegangen.

Ähnlich wie die Konfiguration von Pappus lässt sich auch die von Pascal zu einer **vollständigen Pascalfigur** erweitern. Den Ansatz dazu haben wir oben schon angedeutet. Diese erweiterte Pascalfigur ist Gegenstand zahlreicher Arbeiten bedeutender Mathematiker im 19. und auch noch im 20. Jahrhundert gewesen. Wir werden sehen, dass diese Untersuchungen eng mit dem Steinerschen System $S(5, 6, 12)$ zusammenhängen. Bevor ich darauf näher eingehe, will ich wenigstens ein paar Sätze über Pascals Beiträge zu anderen Gebieten der Mathematik und auch über seine Gedanken über die Religion und über einige andere Gegenstände, denn diese bedeuten mir mindestens ebensoviel wie seine Mathematik.

Pascals Arbeit über die Kegelschnitte hatte zum ersten Mal sein mathematisches Genie aufscheinen lassen. Er und Desargues waren „französische Geometer ersten Ranges, welche weit über allen, welche außerhalb Griechenlands mit reiner, nicht rechnender Geometrie sich beschäftigt haben, stehen, so dass man versucht sein möchte, sie unmittelbar an die großen Alexandriner anzuknüpfen“ – so Moritz Cantor in seinen Vorlesungen [75, Bd. 2, p. 163]. Über seine geometrischen Arbeiten hinaus hat Pascal aber zu verschiedenen wichtigen Gebieten der Mathematik bedeutende Beiträge geliefert und andere Mathematiker in ihrem Denken beeinflusst. 1642, mit 19 Jahren, konstruierte er eine Rechenmaschine zur Ausführung aller Operationen der Grundrechenarten, und Leibniz hat später die Kühnheit seiner Konstruktion gelobt, trotz der mechanischen Mängel in der Realisierung, die durch die Unvollkommenheit der handwerklichen Technik seiner Zeit bedingt waren. Pascal entdeckte die **Methode der vollständigen Induktion** – wahrscheinlich vor 1654 – und er wandte sie in seinem „Traité du triangle arithmétique“ an, um eine Eigenschaft der Binomialkoeffizienten zu beweisen, nämlich, in moderner Notation, die folgende Aussage (Corollar 12

du traité):

$$\binom{n}{k+1} : \binom{n}{k} = \frac{n-k}{k+1}$$

Induktionsanfang und Induktionsschluss von n auf $n+1$ sind dabei ganz klar als Lemma 1 und Lemma 2 formuliert. Der Text Pascals zeigt, dass er sich dessen bewusst ist, hier eine Methode zur mathematischen Erfassung des Unendlichen zu haben. Pascals „arithmetisches Dreieck“ sieht übrigens etwas anders aus als das, was wir heute **Pascalsches** Dreieck nennen. In den leeren Feldern stehen bei Pascal noch Buchstaben, auf die er sich bei seinen Beweisen bezieht. Pascal hat sein Dreieck in mannigfacher Weise angewendet. Eine Anwendung ist der binomische Lehrsatz: Das arithmetische Dreieck liefert die **Binomialkoeffizienten**, d.h. die Koeffizienten der Potenzen von a in $(1+a)^n$. Eine weitere Anwendung bringt die ersten Anfänge der Kombinatorik: Die Zahlen des arithmetischen Dreiecks sind auch die **Combinationszahlen** $C_{n,k} = \binom{n}{k}$, das heißt die Anzahlen der verschiedenen Arten, auf die man unter n gegebenen Gegenständen k auswählen kann. Pascal nennt sie die „multitude des combinaisons de k dans n “. Diese Zahlen spielen auch eine Rolle bei der Lösung von einfachen Problemen der Wahrscheinlichkeitstheorie, zu deren Entstehen Pascal wesentlich beigetragen hat. Schließlich wandte Pascal das arithmetische Dreieck auch bei der Lösung von Problemen der Infinitesimalrechnung an, mit denen er sich später, 1658, beschäftigte.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	2								
3	1	3	6							
4	1	4	10	20						
5	1	5	15	35	70					
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Er entwickelte Methoden zur Auffindung von Quadraturen, Kubaturen, Rektifikationen und Schwerpunktbestimmungen von Körpern, von ebenen und gekrümmten Flächen und von Kurven und wendete sie insbesondere auf die Cycloide an. Wichtig wurde Pascal – nicht nur bei seinen infinitesimalen Rechnungen, sondern auch für seine philosophische Erkenntnis die Einsicht, dass es beim Übergang zum Unendlichen Größen verschiedener Art gibt, so dass beim Grenzübergang die eine im Vergleich zur anderen ohne Bedeutung ist. So spricht er in dem Aufsatz „Potestate numericarum summa“ den folgenden Satz aus:

In continua quantitate quotlibet quantitates cuius vis generis quantitati superioris generis additus nihil ei superaddere.

Übersetzung: „Bei einer kontinuierlichen Größe fügt die Addition von beliebig vielen Größen beliebiger Art zu einer Größe höherer Art dieser nichts hinzu.“

Pascal war ein wichtiger Wegbereiter für die Infinitesimalrechnung. Leibniz hat nach eigenem Zeugnis die grundlegende Idee seines charakteristischen Dreiecks beim Lesen einer Arbeit von Pascal bekommen. Es handelte sich dabei um den „Traité des sinus du quart du cercle“, vgl. [75, Bd. 3, p. 916 und Bd. 4, p. 163].

Aus allem, was hier berichtet wurde, geht klar hervor, dass Blaise Pascal ein Mathematiker ersten Ranges war, einer der besten seiner Zeit. Was jedoch die einmalige Stellung von Pascal in der europäischen Geistesgeschichte ausmacht, ist etwas anderes. Es ist die Tiefe und Leidenschaftlichkeit seines Denkens, das, weit über die Grenzen mathematischer Wissenschaft hinausgehend, versuchte, die wahre Natur des Menschen zu erkennen, bis hin zu dem letzten Schritt, der dem Denken noch möglich ist.

Die Besonderheit dieses Versuchs tritt umso deutlicher hervor, wenn man bedenkt, dass er in einer Zeit unternommen wird, in der als Antwort auf die Trennung von Glauben und Wissen Rationalismus und Empirismus, Descartes und Bacon, die Macht der menschlichen Vernunft und des von Erfahrung geleiteten praktischen Handelns begründen wollen, um so der entstehenden Naturwissenschaft ein sicheres Fundament zu legen. Es ist hier nicht der Ort, Bacon oder Descartes zu rezipieren. Ich begnüge mich mit einigen Stichworten, die ich einem Buch von W. Röd entnehme [305]. Der cartesianische Rationalismus ist der Glaube an die Möglichkeit unbedingt sicherer Wirklichkeits- und Werterkenntnis und an die Möglichkeit einer an solcher Erkenntnis orientierten Praxis. Er ist das Streben nach allseitiger und endgültiger Sicherheit des Handelns und Verhaltens, nach Beherrschung der materiellen Welt und unser selbst. Solche Wirklichkeitserkenntnis aus reiner Vernunft ist für ihn möglich und absolut zuverlässig, weil sie mit der Wirklichkeit selbst übereinstimmt. Allerdings ist Sicherheit nur möglich bei Beschränkung auf das klar und deutlich Erkennbare, auf das, was mit der gleichen Sicherheit erfassbar ist wie die Gegenstände der Mathematik. Die aus ersten Prinzipien gewonnene rationale Rekonstruktion der so eingeschränkten Wirklichkeit und das Experiment liefern dann die Möglichkeit von Erkenntnissen, durch die der Mensch zum Herrn und Meister der Natur wird.

Der cartesianische Rationalismus ist letzten Endes eine Apotheose der menschlichen Vernunft.

Pascal hat tiefer gesehen. Zwar sah er die Würde des Menschen im Denken begründet, aber er wusste, dass die Vernunft nur eine schwankende Stütze für unser Handeln ist und dass das Denken absolute Gewissheit in

den entscheidenden Fragen nicht erlangen kann. Pascal sah, dass in uns neben dem Denken eine andere, ältere Natur am Werke ist, die mit der Vernunft im Widerstreit liegen kann, und die unser Fühlen und Wollen stärker beeinflusst als rationales Denken. Und er sah auch, dass diese alten Schichten unserer Psyche von den Mächtigen bewusst angesprochen werden, und dass dies ein Weg ist, Macht über Menschen zu festigen und zu erhalten. Weit davon entfernt, den damals im Keim schon vorhandenen Allmachtsanspruch des Menschen durch Überhöhung der menschlichen Vernunft zu rechtfertigen, wie auch umgekehrt dieses widerspruchsvolle Wesen zu verdammern, bemühte sich Pascal in einer großen Anstrengung geordneten Denkens, den Standort des Menschen in dieser Welt richtig zu bestimmen. Er sah den Menschen im Elend, aber er glaubte auch, dass der Mensch eigentlich zum Guten geschaffen ist. Dieser Glaube kam für Pascal aus der christlichen Religion – nicht aus dem Glauben an den Gott der Philosophen und Gelehrten, sondern aus dem Glauben an Jesus Christus.

Pascal wollte seine Gedanken in einem großen Werk darstellen, aber dazu ist er nicht gekommen. Als er 1662 im Alter von 39 Jahren starb, existierte eine größere Zahl von ungeordneten Aufzeichnungen, von denen manche für das geplante Werk bestimmt waren, andere nicht. Sie wurden 1669 in einer ziemlich willkürlichen Anordnung und mit Änderungen, welche die Radikalität des Denkens von Pascal und den Gegensatz zu den herrschenden Meinungen mildern sollten, veröffentlicht: „Pensées de M. Pascal sur la religion et sur quelques autres sujets, qui ont esté trouvées apres sa mort parmy ses papiers“. Seit dieser Zeit sind viele Versuche unternommen worden, eine sinnvollere Anordnung der Fragmente zu finden. Die in Frankreich allgemein akzeptierte Ausgabe ist die von Brunschvicg [281]. Auf diese Edition beziehen sich auch mehrere deutsche Übersetzungen. Ich finde eine Übersetzung in Auszügen von Wilhelm Weischedel gut [364]. Aus dieser Übersetzung zitiere ich im folgenden einige Bruchstücke. Die Nummern beziehen sich auf die zitierte Ausgabe von Brunschvicg.

Der Mensch ist nur ein Schilfrohr, das Schwächste der Natur; aber er ist ein denkendes Schilfrohr. (347)

DENKEN. – Die ganze Würde des Menschen liegt im Denken. Aber was ist dieses Denken? Wie dumm ist es! ... (365)

MISSVERHÄLTNIS DES MENSCHEN ... Der Mensch betrachte also die ganze Natur in ihrer hohen und vollen Majestät, er wende seinen Blick ab von den niedrigen Dingen, die ihn umgeben. Er schaue jenes strahlende Licht an, das wie eine ewige Lampe gesetzt ist, das All zu erleuchten; die Erde erscheine ihm wie ein Punkt im Vergleich mit der weiten Bahn, die dieses Gestirn beschreibt, und er staune darüber, dass diese weite Bahn selbst nur eine sehr feine Spitze ist im Vergleich mit der, welche die Sterne umschreiben, die im Firmament kreisen. Aber wenn unser Blick da anhält, soll die Einbildungskraft weiterdringen; sie wird eher ermüden im Empfangen, als die Natur im Spenden. Diese ganze sichtbare Welt ist nur ein unmerklicher Strich im weiten Schoß der Natur. Keine Vorstellung reicht daran heran. Umsonst blähen wir unsere Fassungskraft auf, über die vorstellbaren Räume hinaus: wir gebären nur Atome, gemessen an der Wirklichkeit der Dinge. ...

Was ist ein Mensch im Unendlichen?

Aber um ihm ein anderes, ebenso erstaunliches Wunder vor Augen zu stellen: er forsche in dem, was er kennt, nach den feinsten Dingen. Eine Milbe biete ihm in der Kleinheit ihres Körpers unvergleichlich viel kleinere Teile dar, Beine mit Gelenken, Adern in diesen Beinen, Blut in diesen Adern, Säfte in diesem Blut, Tropfen in diesen Säften, Dämpfe in diesen Tropfen; wenn er auch noch diese letzten Dinge teilt, erschöpfe er seine Kraft in diesen Vorstellungen, und der letzte Gegenstand, bis zu dem hin er zu gelangen vermag, sei jetzt der unserer Abhandlung; er wird vielleicht denken, da sei die äußerste Kleinheit der Natur. Ich will darin einen neuen Abgrund schauen lassen. Ich will ihm nicht al-

lein das sichtbare All darstellen, sondern auch die Unermeßlichkeit der Natur, die man in der Umgrenzung dieses Bruchstückes eines Atomes erfassen kann. Er schaue dort eine Unendlichkeit von Welten, deren jede ihr Firmament hat, ihre Planeten, ihre Erde, im selben Verhältnis wie die sichtbare Welt; auf dieser Erde Tiere, und endlich Milben, in denen er wiederfinden wird, was jene ersten gezeigt haben; und wenn er auch in diesen andern dasselbe finden wird, ohne Ende und ohne Ruhe, dann möge er sich in diesen Wundern verlieren, die in ihrer Kleinheit ebenso erstaunlich sind wie die andern durch ihre Weite, . . .

Wer sich so betrachten wird, wird vor sich selber erschrecken, und wenn er sich in der Masse, die die Natur ihm gegeben hat, zwischen diesen beiden Abgründen des Unendlichen und des Nichts, gehalten sieht, wird er im Anblick dieser Wunder erzittern; und ich glaube, wenn seine Neugierde sich in Bewunderung wandelt, wird er eher geneigt sein, sie schweigend anzuschauen, als ihnen in Anmaßung nachzuspüren.

Denn schließlich, was ist der Mensch in der Natur? Ein Nichts im Hinblick auf das Unendliche, ein Alles im Hinblick auf das Nichts, eine Mitte zwischen Nichts und Allem. Unendlich entfernt davon, die Extreme zu begreifen, sind ihm das Ende der Dinge und ihr Ursprung unüberwindlich verborgen in einem undurchdringlichen Geheimnis; er ist gleichermaßen unfähig, das Nichts zu sehen, aus dem er gezogen ist, und das Unendliche, in das er verschlungen ist. Was bleibt ihm also zu tun, außer etwa einen Schein von der Mitte der Dinge wahrzunehmen, in einer ewigen Verzweiflung, weder ihren Ursprung noch ihr Ende zu erkennen? Alle Dinge sind hervorgegangen aus dem Nichts und getragen bis an das Unendliche. Wer wird diesen erstaunlichen Schritten folgen? Der Urheber dieser Wunder begreift sie. Kein anderer vermag es. Weil die Menschen diese Unendlichen nicht bedacht haben, haben sie sich vermessen an die Erforschung der Natur gemacht, als ob sie irgendein gleiches Maß mit ihr hätten.

...

Das ist unser wahrer Stand im Dasein; das ist es, was uns unfähig macht, sicher zu wissen und schlechthin unwissend zu sein. Wir treiben dahin auf einer unermeßlichen Mitte, immer ungewiß und schwankend, von einem Ende zum anderen gestoßen. ...

Das ist der Zustand, der uns natürlich ist und gleichwohl unserer Neigung zuhöchst widerstreitet. Wir brennen vor Begier, einen festen Stand und eine letzte, beständige Grundlage zu finden, um darauf einen Turm zu erbauen, der sich ins Unendliche erhebe; aber unser ganzes Fundament birst, und die Erde öffnet sich bis zu den Abgründen. ...

Wenn der Mensch zuerst sich selbst erforschte, würde er sehen, wie unfähig er ist, darüber hinauszugehen. Wie könnte es sein, daß ein Teil das Ganze erkannte? – Doch wird er vielleicht danach trachten, wenigstens die Teile zu erkennen, mit denen er gleiches Maß hat? – Aber die Teile der Welt haben alle untereinander einen solchen Zusammenhang und eine solche Verkettung, daß ich es für unmöglich halte, den einen ohne den andern und ohne das Ganze zu erkennen. (72)

Was für eine Chimäre ist also der Mensch? Was für eine Novität, was für ein Monstrum, was für ein Chaos, was für ein Anlass zum Widerspruch, was für ein Wunder! Richter aller Dinge, einfältiger Erdenwurm; Verwalter des Wahren, Kloake der Unge-
wissenheit und des Irrtums; Glanz und Auswurf des Alls. ... (434)

Wir rennen sorglos in den Abgrund, nachdem wir irgend etwas vor uns hingestellt haben, um uns daran zu hindern, ihn zu sehen. (183)

Der letzte Schritt der Vernunft ist es, anzuerkennen, dass es eine Unendlichkeit von Dingen gibt, die sie übersteigen; sie ist nur

schwach, wenn sie nicht soweit geht, das zu erkennen... (267)

Wir erkennen die Wahrheit nicht nur durch die Vernunft, sondern auch durch das Herz, ... (282)

... Das Herz hat seine Ordnung; der Geist hat die seine, die sich in Grundsatz und Beweis vollzieht, das Herz hat eine andere. Man beweist nicht, dass man geliebt werden muss, indem man der Ordnung nach die Ursachen der Liebe auseinander setzt: das wäre lächerlich.

Jesus Christus, der heilige Paulus, haben die Ordnung der Liebe, nicht des Geistes; denn sie wollten entzünden, nicht unterweisen, ... (283)

Aller Schimmer der irdischen Größe hat keinen Glanz für die Menschen, die in den Forschungen des Geistes stehen ...

Die großen Genies haben ihr Reich, ihren Glanz, ihre Größe, ihren Sieg, ihren Schimmer, ...

Archimedes stünde auch ohne Glanz in derselben Verehrung. Er hat keine Schlachten geschlagen, die in die Augen fallen, aber er hat allen Geistern seine Erfindungen geschenkt. Oh, wie hat er den Geistern geleuchtet! Jesus Christus, ohne Habe und ohne irgend Wissenschaft hervorzubringen, steht in seiner Ordnung der Heiligkeit. Er hat uns keine Erfindung geschenkt, er hat nicht geherrscht, aber er ist demütig gewesen, geduldig, heilig, heilig vor Gott, ...

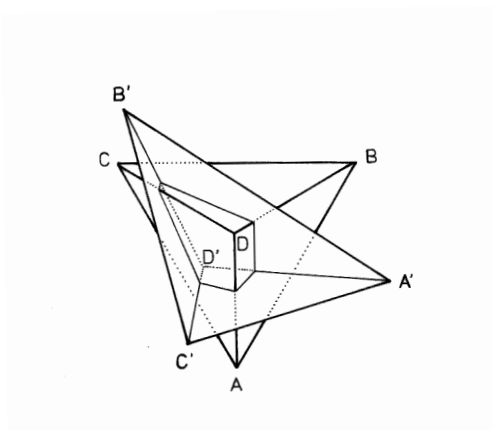
Alle Körper zusammen und alle Geister zusammen und alle ihre Leistungen wiegen nicht die geringste Regung der Liebe auf. Diese gehört einer unendlich erhabeneren Ordnung an. (793)³⁸

Wir wenden uns wieder den Konfigurationen zu. Bis zum 19. Jahrhundert wurde auf diesem Gebiet anscheinend nicht viel Neues entdeckt, aber dann begann mit der Entwicklung der projektiven Geometrie und des Gruppenbegriffs sozusagen das goldene Zeitalter der Konfigurationen. Ich kann

³⁸Zitiert nach [364].

nur äußerst wenig von dem damals Entdeckten hier erwähnen.

1828 erschien eine Arbeit von A.F. Möbius mit dem Titel: “Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und einbeschrieben zugleich heißen?” [259]. Wir hatten gesehen, dass man die Konfiguration von Pappus als ein System von 3 einander zyklisch ein- und umbeschriebenen Dreiecken auffassen kann. Es ist offensichtlich – und mit dieser Feststellung beginnt Möbius seinen Artikel – dass man zwei Dreiecke nicht gleichzeitig einander ein- und umbeschreiben kann. Hingegen findet Möbius als Anwendung seines baryzentrischen Kalküls, dass es erstaunlicherweise Paare von Tetraedern gibt, die einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben sind. Diese Forderung lässt sich noch weiter präzisieren, und zwar wie folgt. Wir bezeichnen die Ecken des ersten Tetraeders T mit A, B, C, D und die Ecken des zweiten Tetraeders T' , welche mit der A, B, C, D gegenüberliegenden Seite von T inzidieren, mit A', B', C', D' . Entsprechend bezeichnen wir die Ecken von T , welche mit der A', B', C', D' gegenüberliegenden Seite von T' inzidieren, mit A'', B'', C'', D'' . Natürlich entsteht (A'', B'', C'', D'') durch eine Permutation aus (A, B, C, D) . Selbstverständlich kommt es nur auf die Konjugationsklasse dieser Permutation an. Die symmetrische Gruppe S_4 hat 5 Konjugationsklassen, repräsentiert durch $(1), (12), (12)(34), (123), (1234)$. Möbius verlangt, dass die Permutation die Identität sein soll, und findet, dass die so bestimmte Konfiguration tatsächlich existiert.



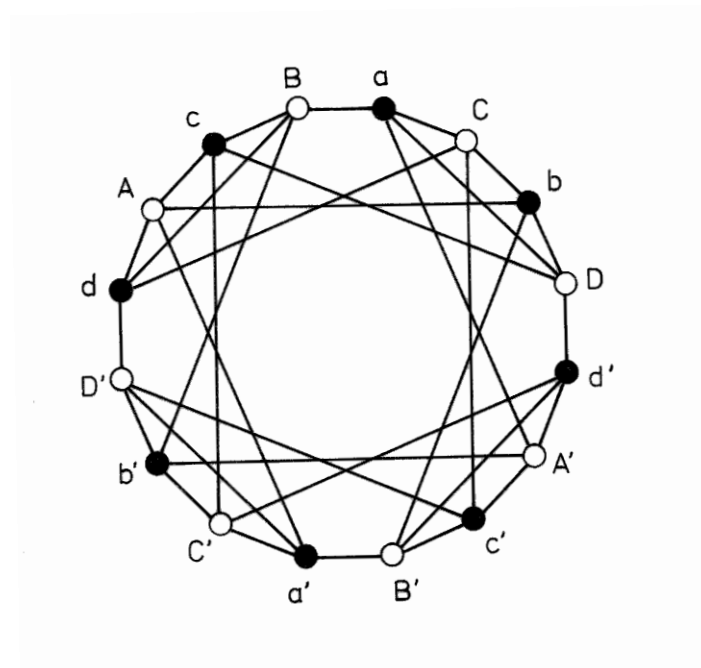


Abbildung 1.84: Möbiuskonfiguration

Ein solches Paar von **Möbiustetraedern** bildet eine Konfiguration von 8 Punkten und 8 Ebenen. Jeder Punkt inzidiert mit 4 Ebenen, jede Ebene inzidiert mit 4 Punkten. Abbildung 1.84 zeigt den Graphen dieser Konfiguration.

Die Punkte sind wie oben mit Großbuchstaben bezeichnet, und die einem Eckpunkt eines Tetraeders gegenüberliegende Seite mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben.

Später hat sich herausgestellt, dass nicht nur in dem von Möbius betrachteten Fall, sondern für alle fünf Konjugationsklassen von Permutationen aus S_4 entsprechende Konfigurationen von einander ein- und umbeschriebenen Tetraedern existieren. Eine ausführliche Darstellung davon findet man in dem schon zitierten Buch von Levi [237, Kap. III, §6].

Die **Möbiuskonfiguration** lässt sich auf genau vier Weisen als Vereinigung eines Paares von einander ein- und umbeschriebenen Tetraedern T_i, T'_i

darstellen:

i	T_i								T'_i							
1	A	B	C	D	a	b	c	d	A'	B'	C'	D'	a'	b'	c'	d'
2	A	B'	C'	D	a'	b	c	d'	A'	B	C	D'	a	b'	c'	d
3	A	B'	C	D'	a'	b	c'	d	A'	B	C'	D	a	b'	c	d'
4	A	B	C'	D'	a'	b'	c	d	A'	B'	C	D	a	b	c'	d'

Diese 4 Zerlegungen in Tetraederpaare sind der Schlüssel zu einem vertieften Verständnis der Möbiuskonfiguration. Wir betrachten zunächst die Symmetriegruppe G der Konfiguration. Die Gruppe G operiert auf der Menge der 4 Zerlegungen. Man erhält so einen Homomorphismus von G auf die symmetrische Gruppe S_4 , und man sieht leicht, dass dieser surjektiv ist. Der Kern ist eine abelsche Gruppe von 8 Elementen. Sie wird zum Beispiel minimal erzeugt von der Involution

$$\iota = (AA')(BB')(CC')(DD')(aa')(bb')(cc')(dd')$$

zusammen mit den beiden Involutionen

$$\begin{aligned} &(AB) (CD) (A'B') (C'D') (ab) (cd) (a'b') (c'd') \\ &(AC) (BD) (A'C') (B'D') (ac) (bd) (a'c') (b'd'). \end{aligned}$$

Diese Involutionen kommutieren paarweise miteinander. Der Kern ist also isomorph zu $\{\pm 1\}^3$. Man hat daher eine kurze exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \{\pm 1\}^3 \rightarrow G \rightarrow S_4 \rightarrow 1.$$

Diese Sequenz spaltet. Beispielsweise erhält man einen spaltenden Homomorphismus $S_4 \rightarrow G$ durch die folgende Zuordnung:

$$\begin{aligned} (1, 2) &\mapsto (BC')(CB')(ad')(da'), \\ (2, 3) &\mapsto (CD)(C'D')(cd)(c'd'), \\ (3, 4) &\mapsto (BC)(B'C')(bc)(b'c'). \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen: Die Symmetriegruppe der Möbiuskonfiguration ist ein semidirektes Produkt

$$G \cong \{\pm 1\}^3 \rtimes S_4 .$$

Das Zentrum von G wird von der Involution ι erzeugt. Den Kenner wird diese Beschreibung der Symmetriegruppe G sofort an eine entsprechende Beschreibung der Weylgruppe des Wurzelsystems D_4 erinnern. Und in der Tat besteht eine sehr enge Beziehung zwischen der Möbiuskonfiguration und den Wurzelsystemen vom Typ D_4 und F_4 . Dies sind Systeme von 24 bzw. 48 Vektoren im euklidischen Standardvektorraum \mathbb{R}^4 . Über die Definition und die Eigenschaften dieser Systeme werden wir nachher kurz und ohne Beweise das Wichtigste berichten. Für alle Einzelheiten und Beweise sei ein für allemal auf den Bourbaki-Band über Wurzelsysteme [33, chap. 6] verwiesen.

Zunächst einmal wollen wir jedoch sehen, wie die 4 Zerlegungen der Möbiuskonfiguration in völlig natürlicher Weise zu einem System von 16 Vektoren in \mathbb{R}^4 führen. Wir bezeichnen die Mengen der Elemente der Konfigurationen wie folgt:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^* &= \{A, B, C, D, A', B', C', D'\}, \\ \Lambda_2^* &= \{a, b, c, d, a', b', c', d'\}. \end{aligned}$$

Elemente aus Λ_1^* bezeichnen wir mit Großbuchstaben wie X, Y, Z , Elemente aus Λ_2^* bezeichnen wir mit Kleinbuchstaben wie x, y, z . Ein Element der Vereinigungsmenge $\Lambda_1^* \cup \Lambda_2^*$ bezeichne ich mit ξ . Wir definieren nun eine Abbildung

$$t : \Lambda_1^* \cup \Lambda_2^* \rightarrow \mathbb{R}^4 .$$

Der Vektor $t(\xi)$ mit den 4 Komponenten $t_i(\xi)$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} t_i(\xi) = 1 &\Leftrightarrow \xi \in T_i \\ t_i(\xi) = -1 &\Leftrightarrow \xi \in T'_i \end{aligned}$$

Die Abbildung t ist injektiv, und dadurch können wir die 16 Konfigura-

tionselemente wie folgt mit 16 Vektoren in \mathbb{R}^4 identifizieren:

$$\begin{array}{ll}
 A = (1, 1, 1, 1) & A' = (-1, -1, -1, -1) \\
 B = (1, -1, -1, 1) & B' = (-1, 1, 1, -1) \\
 C = (1, -1, 1, -1) & C' = (-1, 1, -1, 1) \\
 D = (1, 1, -1, -1) & D' = (-1, -1, 1, -1) \\
 \\
 a = (1, -1, -1, -1) & a' = (-1, 1, 1, 1) \\
 b = (1, 1, 1, -1) & b' = (-1, -1, -1, 1) \\
 c = (1, 1, -1, 1) & c' = (-1, 1, 1, -1) \\
 d = (1, 1, 1, 1) & d' = (-1, 1, -1, -1)
 \end{array}$$

Wir wollen uns diese symmetrische Konfiguration von 16 Vektoren genauer ansehen und uns klar machen, dass die Inzidenzrelation zwischen den Elementen der Möbiuskonfiguration genau durch die Skalarprodukte zwischen Vektoren $X \in \Lambda_1^*$ und $x \in \Lambda_2^*$ beschrieben wird. Für diese Skalarprodukte gilt nämlich stets $\langle X, x \rangle = \pm 2$. Und zwar gilt $\langle X, x \rangle = +2$, wenn X und x als Elemente der Möbiuskonfiguration miteinander inzidieren.

$\begin{array}{c} X \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} x \\ \bullet \end{array} \xrightarrow{\quad} \Leftrightarrow \langle X, x \rangle = 2 \Leftrightarrow \sphericalangle(X, x) = 60^\circ$
$\begin{array}{c} \circ \\ X \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ x \end{array} \xrightarrow{\quad} \Leftrightarrow \langle X, x \rangle = -2 \Leftrightarrow \sphericalangle(X, x) = 120^\circ$

Wir betrachten jetzt die Skalarprodukte $\langle X, Y \rangle$ für Vektoren $X, Y \in \Lambda_1^*$ bzw. $\langle x, y \rangle$ für $x, y \in \Lambda_2^*$. Sie können die Werte ± 4 oder 0 annehmen. Der Wert $+4$ tritt nur auf, wenn $X = Y$ bzw. $x = y$, und -4 tritt nur auf, wenn $Y = -X = \iota(X)$ bzw. $y = -x = \iota(x)$. Der Wert 0 , also die Orthogonalität, lässt sich wie folgt durch die Inzidenzrelation charakterisieren: X und Y sind orthogonal, wenn sie beide mit einem $z \in \Lambda_2^*$ inzidieren, und x, y sind orthogonal, wenn sie beide mit einem $Z \in \Lambda_2^*$ inzidieren. Also:

$$\begin{array}{l}
\exists z \quad \begin{array}{c} X \quad z \quad Y \\ \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \end{array} \Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0 \Leftrightarrow \sphericalangle(X, Y) = 90^\circ \\
\exists Z \quad \begin{array}{c} X \quad Z \quad Y \\ \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \end{array} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \sphericalangle(x, y) = 90^\circ
\end{array}$$

Damit sind alle Skalarprodukte der 16 Vektoren aus $\Lambda_1^* \cup \Lambda_2^*$ durch die Inzidenzrelation eindeutig bestimmt, und umgekehrt bestimmen diese Skalarprodukte die Inzidenzrelation nach den oben angegebenen Regeln.

Die 8 Vektoren von Λ_i^* sind alle gleichlang von der Länge 2, und sie sind einander entweder gleich, entgegengesetzt gleich oder zueinander orthogonal. Sie bilden also die auf die Länge 2 normierten Vektoren eines 4-dimensionalen orthogonalen Achsenkreuzes. Anders gesagt: Λ_1^*, Λ_2^* sind Wurzelsysteme vom Typ $A_1 + A_1 + A_1 + A_1$. Das natürlichste derartige System in besteht aus den Vektoren $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3, \pm e_4$ wobei wir mit e_1, \dots, e_4 die Standardbasisvektoren bezeichnen. Um auch hier Vektoren der Länge 2 zu haben, multiplizieren wir mit 2, führen also zusätzlich zu Λ_1^* und Λ_2^* noch ein drittes System vom Typ $A_1 + A_1 + A_1 + A_1$ wie folgt ein:

$$\Lambda_3^* = \{\pm 2e_1, \pm 2e_2, \pm 2e_3, \pm 2e_4\}$$

Es wird sich herausstellen, dass wir eine sehr symmetrische Konfiguration von Vektoren erhalten, nämlich ein Wurzelsystem vom Typ D_4 , wenn wir die Vereinigung unserer drei Systeme vom Typ $A_1 + A_1 + A_1 + A_1$ bilden:

$$\Lambda^* = \Lambda_1^* \cup \Lambda_2^* \cup \Lambda_3^*$$

Wir wollen diesen Zusammenhang mit den Wurzelsystemen vom Typ D_4 genau studieren. Das Standard-Wurzelsystem vom Typ D_4 ist das folgende System von 24 Vektoren der Länge $\sqrt{2}$ in \mathbb{R}^4 :

$$\Lambda = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}.$$

In Λ gibt es genau drei Untersysteme vom Typ $A_1 + A_1 + A_1 + A_1$, ämlich

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \{\pm e_1 \pm e_3, \pm e_2 \pm e_4\}, \\ \Lambda_2 &= \{\pm e_1 \pm e_4, \pm e_2 \pm e_3\}, \\ \Lambda_3 &= \{\pm e_1 \pm e_2, \pm e_3 \pm e_4\}.\end{aligned}$$

Offensichtlich ist Λ die disjunkte Vereinigung dieser 3 Teilsysteme von jeweils 8 Vektoren:

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3.$$

Es ist nun nicht schwer, eine Ähnlichkeitstransformation Φ von \mathbb{R}^4 anzugeben, welche Λ^* in Λ überführt. Zum Beispiel leistet die folgende Matrix das Gewünschte:

$$\Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(\Lambda^*) &= \Lambda, \\ \Phi(\Lambda_i^*) &= \Lambda_i \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Damit haben wir folgendes Ergebnis: Die Möbiuskonfiguration kann mit der Vereinigung $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ von zwei der drei Teilsysteme $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ vom Typ $A_1 + A_1 + A_1 + A_1$ eines Wurzelsystems $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$ vom Typ D_4 identifiziert werden. Die Inzidenzrelation und die Winkel zwischen den Wurzelvektoren bestimmen sich wechselseitig nach den obigen Regeln. Abb. 1.85 zeigt die Möbiuskonfiguration als Teil $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ des Systems Λ vom Typ D_4 . Wir hatten zwischen Λ^* und Λ eine Beziehung mit Hilfe der Ähnlichkeitstransformation ϕ hergestellt. Diese Beziehung ist jedoch nicht kanonisch – wir hätten auch eine andere Transformation wählen können. Es besteht jedoch zwischen Λ^* und Λ noch eine andere, kanonischere Beziehung, und diese wird wichtig, wenn wir die Beziehung zwischen der Automorphismengruppe der Möbiuskonfiguration und der Automorphismengruppe eines Wurzelsystems vom Typ D_4 verstehen wollen.

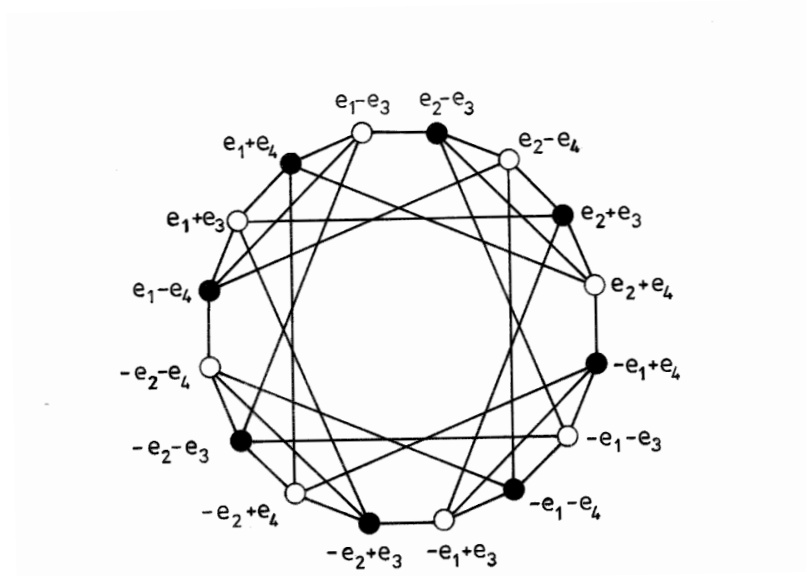
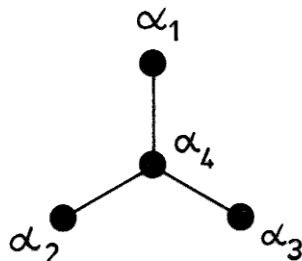


Abbildung 1.85: Die Möbiuskonfiguration als Teil des Wurzelsystems D_4

Dazu benötigen wir an sich weitere Begriffe aus der Theorie der Wurzelsysteme, nämlich den Begriff der **Wurzelbasis** und den Begriff des Systems der **fundamentalen Gewichte** zu einer Wurzelbasis. Die allgemeinen Definitionen findet man bei Bourbaki, loc. cit. VI, §1.5 und §1.10. Wir beschränken uns hier darauf, für das Wurzelsystem Λ vom Typ D_4 Wurzelbasen $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ und fundamentale Systeme von Gewichten $\{\omega_1, \dots, \omega_4\}$ explizit anzugeben. Die folgende Menge von vier Vektoren ist eine Wurzelbasis:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e_3 + e_4 = (0, 0, 1, 1) \\ \alpha_2 &= e_3 - e_4 = (0, 0, 1, -1) \\ \alpha_3 &= e_1 - e_2 = (1, -1, 0, 0) \\ \alpha_4 &= e_2 - e_3 = (0, 1, -1, 0) \end{aligned}$$

Die Skalarprodukte zwischen diesen Basisvektoren werden durch das folgende **Dynkindiagramm** – besser: **Coxeterdiagramm** – beschrieben:



Die duale Basis zu der Wurzelbasis ist durch die folgenden Bedingungen definiert:

$$\langle \alpha_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij} .$$

$\omega_1, \dots, \omega_4$ nennt man die fundamentalen Gewichte bezüglich der Wurzelbasis $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. Zu der obigen Wurzelbasis gehören offensichtlich die folgenden fundamentalen Gewichte:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}(1, 1, 1, +1) \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1) \\ \omega_3 &= (1, 0, 0, 0) \\ \omega_4 &= (1, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die **Weylgruppe** W des Wurzelsystems Λ . Das ist die Gruppe, die von den Spiegelungen s_α an den Hyperebenen senkrecht zu den $\alpha \in \Lambda$ erzeugt wird:

$$W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Lambda \rangle .$$

Man sieht sofort, dass W für das Standardsystem Λ vom Typ D_4 diejenige Gruppe ist, welche von der symmetrischen Gruppe S_4 der Permutationen der vier Koordinaten und von der abelschen Gruppe aller Vorzeichenwechsel einer geraden Anzahl von Koordinaten erzeugt wird. Man hat also eine spaltende exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \{\pm 1\}^3 \rightarrow W \twoheadrightarrow S_4 \rightarrow 1 .$$

Mit anderen Worten: Die Weylgruppe W ist ein semidirektes Produkt

$$W = \{\pm 1\}^3 \rtimes S_4 .$$

Die Weylgruppe W von Λ operiert einfach transitiv auf der Menge der Wurzelbasen von Λ [33, p. 154]. Sie überführt natürlich die fundamentalen Gewichte $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ in die fundamentalen Gewichte zu den übrigen Wurzelbasen. Die Gesamtheit aller so erhaltenen fundamentalen Gewichte zu allen Wurzelbasen zerfällt bezüglich der Operation von W offensichtlich in drei Orbits: $W\omega_1, W\omega_2, W\omega_3$ und $W\omega_4$.

Die Gewichte haben unterschiedliche Länge. Während ω_4 die Länge $\sqrt{2}$ hat, haben $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Länge 1. Der Orbit des langen Gewichts ist einfach das Wurzelsystem

$$\Lambda = W\omega_4 .$$

Die Orbits der kurzen Gewichte vereinigen wir zu einem neuen System:

$$\hat{\Lambda} = W\omega_1 \cup W\omega_2 \cup W\omega_3$$

Der Vergleich mit dem früher definierten System Λ^* zeigt, dass sich beide Systeme nur durch eine Homothetie unterscheiden:

$$\begin{aligned} \Lambda^* &= 2\hat{\Lambda} \\ \Lambda_i^* &= 2W\omega_1 . \end{aligned}$$

Ergebnis: Durch eine Homothetie werden die Elementmengen Λ_1^*, Λ_2^* der Möbiuskonfiguration mit zwei der drei W -Orbits $W\omega_1, W\omega_2, W\omega_3$ in der Menge $\hat{\Lambda}$ der kurzen Fundamentalgewichte zum Standardwurzelsystem Λ vom Typ D_4 identifiziert. Die Operation der Symmetriegruppe der Möbiuskonfiguration geht dabei in die Operation der Weylgruppe W von Λ auf der Menge $\hat{\Lambda}$ der kurzen Fundamentalgewichte bzw. auf $W\omega_1$ und $W\omega_2$ über.

Damit haben wir zwei wohl zu unterscheidende Interpretationen der Möbiuskonfiguration gefunden. Einmal haben wir die 16 Konfigurationselemente als 16 Vektoren eines Wurzelsystems vom Typ D_4 interpretiert,

das andere Mal als 16 Gewichtsvektoren zu diesem Wurzelsystem. Da Λ, Λ^* und $\hat{\Lambda}$ alle drei als Wurzelsystem vom Typ D_4 aufgefasst werden können, könnte man sich fragen, was der Sinn einer solchen Unterscheidung sein soll. Der Sinn liegt in der unterschiedlichen Rolle, welche die Weylgruppen dieser Wurzelsysteme hierbei spielen. Um dies zu verdeutlichen und diese Gruppen miteinander in Beziehung zu setzen, führen wir zusätzlich zu diesen Systemen von jeweils 24 Vektoren noch zwei Systeme von jeweils 48 Vektoren ein, nämlich die folgenden:

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda} &= \Lambda \cup \hat{\Lambda} \\ \tilde{\Lambda}^* &= \Lambda^* \cup \Lambda\end{aligned}$$

Das System $\tilde{\Lambda}$ ist das Standard-Wurzelsystem vom Typ F_4 (vgl. Bourbaki, loc. cit., VI. §4.9 und Planche VIII). Es besteht aus den 24 langen Wurzelvektoren von Λ und den 24 kurzen Wurzelvektoren von $\hat{\Lambda}$. Das System $\tilde{\Lambda}^*$ ist ebenfalls ein Wurzelsystem vom Typ F_4 . Innerhalb dieses Systems bilden die Vektoren von Λ die kurzen Wurzelvektoren und die Vektoren von Λ^* die langen. Die oben definierte Ähnlichkeitstransformation Φ liefert einen Isomorphismus

$$\Phi = \tilde{\Lambda}^* \xrightarrow{\cong} \tilde{\Lambda}$$

Für diesen gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(\Lambda^*) &= \Lambda, \\ \Phi(\Lambda) &= \hat{\Lambda}.\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Weylgruppen all dieser Systeme:

$$\begin{aligned}W &= \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Lambda \rangle \\ \hat{W} &= \langle s_\alpha \mid \alpha \in \hat{\Lambda} \rangle = W^* \\ \widetilde{W} &= \langle s_\alpha \mid \alpha \in \tilde{\Lambda} \rangle \\ \widetilde{W}^* &= \langle s_\alpha \mid \alpha \in \tilde{\Lambda}^* \rangle\end{aligned}$$

Natürlich sind die Gruppen W, \widetilde{W} und W^* zueinander isomorph. Sie sind jedoch durchaus verschieden, wenn wir sie als Untergruppen von \widetilde{W} bzw. \widetilde{W}^* auffassen;

$$\begin{aligned}W &< \widetilde{W}, & W^* &< \widetilde{W}^*, \\ \hat{W} &< \widetilde{W}, & W &< \widetilde{W}^*.\end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst \widetilde{W} ! Die Gruppe \widetilde{W} lässt natürlich das System der langen Vektoren $\Lambda \subset \widetilde{\Lambda}$ invariant, operiert also durch Automorphismen auf Λ , und man weiß, dass \widetilde{W} genau die Automorphismengruppe $A(\Lambda)$ von Λ ist:

$$\widetilde{W} = A(\Lambda)$$

(vgl. Bourbaki, loc. cit. VI. §4.9). Analog könnten wir \widetilde{W} als Automorphismengruppe von $\hat{\Lambda}$ auffassen. Nun zerfallen sowohl Λ als auch $\hat{\Lambda}$ eindeutig in jeweils drei Untersysteme $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ bzw. $\hat{\Lambda}_i = W\omega_1$ vom Typ $A_1 + A_1 + A_1 + A_1$. Wir betrachten die symmetrischen Gruppen der Permutationen dieser Mengen von Untersystemen:

$$\begin{aligned} S_3 &= \text{Sym}(\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}), \\ \hat{S}_3 &= \text{Sym}(\{\hat{\Lambda}_1, \hat{\Lambda}_2, \hat{\Lambda}_3\}). \end{aligned}$$

Die Gruppe \widetilde{W} überführt Untersysteme vom Typ $A_1 + A_1 + A_1 + A_1$ in Λ bzw. $\hat{\Lambda}$ wieder in solche, und daher hat man zwei kanonische Permutationsdarstellungen:

$$\begin{aligned} \rho &: \widetilde{W} \rightarrow S_3, \\ \hat{\rho} &: \widetilde{W} \rightarrow \hat{S}_3. \end{aligned}$$

Man sieht sehr leicht, dass diese surjektiv sind, und man sieht ferner, dass gilt:

$$\begin{aligned} \text{kern } \rho &= \hat{W}, \\ \text{kern } \hat{\rho} &= W. \end{aligned}$$

Man erhält so kanonisch zwei – übrigens spaltende – exakte Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow \\
 & & W & & S_3 \\
 & & \searrow & \nearrow \rho & \\
 & & \tilde{W} & & \\
 & \nearrow & & \searrow \hat{\rho} & \\
 & \hat{W} & & \hat{S}_3 & \\
 1 & \nearrow & & \searrow & 1 \\
 & & & &
 \end{array}$$

Entsprechende Überlegungen können wir für die Untergruppen W und W^* von \tilde{W}^* anstellen. Nur spielt dann W als Untergruppe von \tilde{W}^* gerade nicht die Rolle, die es als Untergruppe von \tilde{W} spielt. Die Transformation Φ induziert nämlich einen Isomorphismus

$$\psi : \tilde{W}^* \rightarrow \tilde{W}$$

der die fraglichen Untergruppen wie folgt ineinander überführt:

$$\begin{aligned}
 \psi(W) &= \hat{W}, \\
 \psi(W^*) &= W.
 \end{aligned}$$

Aber nun bemerken wir, dass ja wegen $W^* = \hat{W}$ die Gruppen \tilde{W}^* und \tilde{W} identisch sind. Daher ist die Abbildung ψ ein äußerer Automorphismus von \tilde{W}

$$\psi : \tilde{W} \xrightarrow{\cong} \tilde{W},$$

der W und \hat{W} vertauscht:

$$\begin{aligned}
 \psi(W) &= \hat{W}, \\
 \psi(\hat{W}) &= W.
 \end{aligned}$$

Eine Vertauschung durch innere Automorphismen kann es natürlich nicht geben, da W und \hat{W} ja verschiedene normale Untergruppen sind. ψ ist zwar induziert durch eine bijektive Selbstabbildung $\tilde{\Lambda} \rightarrow \tilde{\Lambda}$, doch diese ist kein Automorphismus des Wurzelsystems $\tilde{\Lambda}$, da sie lange und kurze Wurzeln vertauscht. Sie ist jedoch ein Automorphismus von $\tilde{\Lambda}$, wenn wir $\tilde{\Lambda}$ im Sinne meines Artikels “Automorphic sets and braids and singularities” [56] als automorphe Menge auffassen.

Damit ist schließlich alles klar: Identifizieren wir die 16 Elemente der Möbiuskonfiguration mit 16 Wurzeln im System Λ vom Typ D_4 dann identifiziert sich die Symmetriegruppe der Konfiguration mit der Gruppe $\hat{W} = \text{kern } \rho$. Identifizieren wir sie mit 16 Gewichtsvektoren in $\hat{\Lambda}$ dann identifiziert sich die Symmetriegruppe mit der Weylgruppe W von Λ .

Man sieht also, wie die Möbiuskonfiguration auf das engste mit interessanten Eigenschaften der Wurzelsysteme D_4 und F_4 zusammenhängt. Man hätte diese Zusammenhänge auch als Aussagen über die Geometrie eines bestimmten 4-dimensionalen regulären Polyeders darstellen können, welches man „**das reguläre 24-Zell**“ nennt. Die Ecken dieses Polyeders sind gerade die 24 Vektoren eines Wurzelsystems vom Typ D_4 . Da das Polyeder selbstdual ist, könnte man auch die 24 höchstdimensionalen Seiten den Wurzeln entsprechen lassen. Diese 3-dimensionalen Seiten sind reguläre Oktaeder. Der Zerlegung von Λ in zwei Teilmengen $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ und Λ_3 entspricht eine Darstellung des Polyeders als Durchschnitt des von 16 Tetraedern begrenzten 4-dimensionalen regulären Polyeders mit den 8 Ecken $\pm 2e_1, \pm 2e_2, \pm 2e_3, \pm 2e_4$ und eines von 8 Würfeln begrenzten 4-dimensionalen Hyperkubus mit den 16 Ecken $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3, \pm e_4$, vgl. [89, §8.2]. Übrigens hängen die Wurzelsysteme D_4 und F_4 auch noch mit einer anderen klassischen Konfiguration zusammen, nämlich der **Reye-schen Konfiguration**. Dazu sei auf den schon zitierten Übersichtsartikel von Steinitz verwiesen. Die Möbiussche Konfiguration wird uns wieder begegnen, wenn wir die Steinersysteme $S(5, 6, 12)$ auf der Eckenmenge eines Ikosaeders untersuchen.

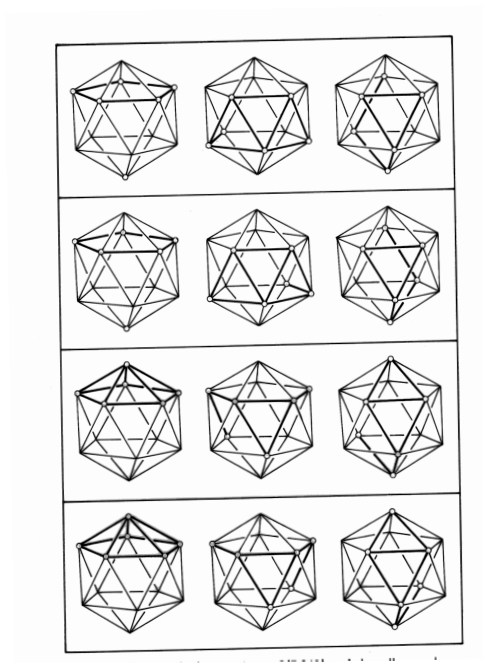


Abbildung 1.86: Die 4 invarianten Steinersysteme $S(5, 6, 12)$ auf dem Ikosaeder

Anmerkung des Autors (im Inhaltsverzeichnisses der Einleitung):

“An dieser Stelle bricht dieser Teil des Manuskriptes und des Typoskriptes ab. Hier sollte die weitere Entwicklung der Theorie der Polyeder im 18., 19. und 20. Jahrhundert angedeutet werden: Euler, Cauchy, Bricard, Conelly, Schläfli, Hessel, Bravais, Möbius, Hess, Brückner, Steinitz, Coxeter ...”

1.10 Nachtrag: Ein kleiner Exkurs zu Flächenornamenten

In einer separaten Mappe liegt ein nur teilweise getippter, im übrigen handschriftlicher Text mit einem kunsthistorischen Exkurs vor. An welcher Stelle der Exkurs erfolgen sollte, ist nicht notiert. Inhaltlich schließt er am ehesten an die Diskussion der Flächenteilungen in Abschnitt 1.2 an (etwa nach dem Unterabschnitt “Keplers Figur Aa”, S. 150). Die Einfügung des Exkurses an dieser Stelle würde jedoch mit dem dort direkt anschließenden Übergang zu den aperiodischen Flächenteilungen kollidieren. Er wird daher hier nachgestellt dokumentiert. (Anm. Hrsg.)

An dieser Stelle scheint mir ein kleiner Exkurs über flächenhafte Ornamente erlaubt zu sein. Die meisten Mathematiker, die sich überhaupt mit diesem Thema befassen, sehen Ornamente überwiegend oder ausschließlich unter dem Gesichtspunkt der im gruppentheoretischen Sinne verstandenen Symmetrie. – Dies ist natürlich selbst bei Beschränkung auf mathematische Gesichtspunkte ein sehr einseitiger Standpunkt, und Kunsthistoriker setzen sich dagegen mit Recht zur Wehr. Dies umso mehr, als auch eine noch so weit gefasste rein mathematische Betrachtungsweise der reichen Mannigfaltigkeit des Materials niemals gerecht werden kann. Einen Eindruck von der Vielfalt der möglichen Gesichtspunkte vermittelt ein anregendes Buch von Ernst H. Gombrich: “Ornament und Kunst – Schmucktrieb und Ordnungssinn in der Psychologie des dekorativen Schaffens” [154].

Aus der überreichen Fülle möglicher Themen will ich für meinen kleinen Exkurs ein einziges Thema auswählen, das mit an anderer Stelle behandelten mathematischen Themen in engem Zusammenhang steht. Allerdings würde eine adäquate Behandlung dieses Themas unter kunsthistorischen Aspekten mit Sicherheit mehrere Monographien und eine Reihe von Abhandlungen verlangen. Was folgt, ist nicht mehr als eine kleine Sammlung von Abbildungen und Hinweisen, bei deren Zusammenstellung mir einige Kunsthistorikerinnen freundlicherweise geholfen haben.

Als Thema des Exkurses wähle ich flächenhafte Ornamente, die durch Aneinanderfügen regelmäßiger Vielecke entstehen. Die entsprechenden ma-

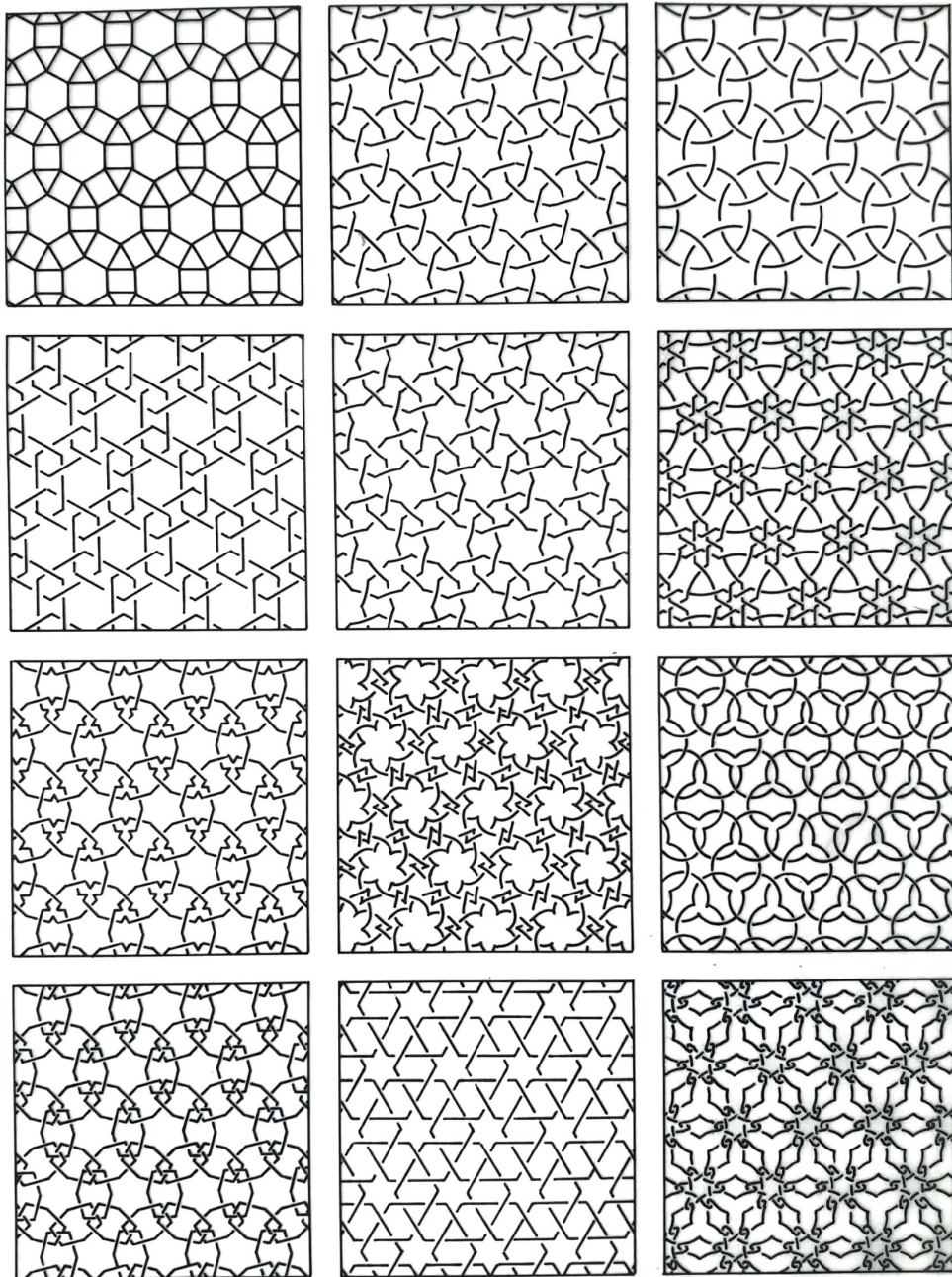


Abbildung 1.87: Schema islamischer Ornamente, Flächenteilung
(3, 4, 6, 4)

thematischen Figuren sind gewisse Flächenteilungen der euklidischen Ebene. Bei diesen wird die Ebene in reguläre Vielecke zerlegt, und zwar so, dass zwei Vielecke sich jeweils in einer gemeinsamen Kante, einer gemeinsamen Ecke oder gar nicht treffen. Ferner wird verlangt, dass alle Ecken einer solchen Flächenteilung von der gleichen Art sein sollen. Solche Flächenteilungen sind offenbar das ebene Analogon der Flächenteilungen der Oberfläche der archimedischen Polyeder durch ihre regulären Seitenflächen und der entsprechenden Flächenteilungen der Sphäre durch reguläre sphärische Vielecke. Wir gestatten uns daher, sie als **archimedische Flächenteilungen** der Ebene zu bezeichnen.

Die archimedischen Flächenteilungen der Ebene wurden zuerst von Johannes Kepler definiert und auch vollständig klassifiziert. Es gibt, bis auf Ähnlichkeit, genau 11 solche Teilungen. Sie lassen sich durch die zyklische Folge der Eckenzahlen der Vielecke, die an einer Ecke der Teilung zusammenstoßen, charakterisieren, ganz analog wie auch die archimedischen Polyeder. Hier ist die Tabelle dieser Symbole der 11 Teilungen:

(3, 3, 3, 3, 3, 3)	(3,6,3,6)
(4, 4, 4, 4)	(3.12.12)
(6, 6, 6)	(4, 8, 8)
(3, 3, 3, 3, 6)	(3, 4, 6, 4)
(3, 3, 3, 4, 4)	(4, 6, 12)
(3, 3, 4, 3, 4)	

Siehe die Abbildungen 1.48, 1.49 (S. 146f.)

Ornamente, die auf diesen Flächenteilungen beruhen, können auf verschiedene Weise realisiert sein: als Pflasterungen, Mosaike auf Schmuckfußböden und an Wänden, Stuckdecken, geschnitzte Kassettendecken, durchbrochene geschnitzte Gitter, Kachelwände, kunstvoll gemauerte Fassaden, aber auch als Schmuckornamente auf Schalen und Vasen und anderen kunstvoll gearbeiteten Gegenständen. Auch hier beschränke ich mich auf eine kleine Auswahl und lege das Schwergewicht auf Mosaike, insbesondere solche von Schmuckfußböden.

Es gibt zwei Arten von Mosaik bei den hier zu betrachtenden Orna-

menten, Plattenmosaik (*opus sectiles*) und Stiftmosaik (*opus tessellatum*). Plattenmosaik wird aus regelmäßigen Platten auf einer Mörtelbettung zusammengesetzt. Es ist seit römischer Zeit bekannt, wo es vor allem aus Naturstein zusammen gesetzt wurde, vor allem Marmor, gelegentlich aber auch schon aus Tonfliesen. Stiftmosaik wird aus verschiedenfarbigen kleinen Stiften aus Naturstein, Ton oder Glas hergestellt, die eng nebeneinander in Mörtel gedrückt werden.

Nach D. Salzman, "Untersuchungen zu den antiken Kieselmosaiken" [311] hat sich das *opus tessellatum* im Laufe des 3. und frühen 2. Jahrhunderts v. Chr. wahrscheinlich in Griechenland und im westlichen Kleinasien allmählich über verschiedene Zwischen- und Mischformen aus dem Kieselmosaik entwickelt. Jedoch sind von diesen griechischen Mosaiken nur relativ wenige geometrische Ornamente bekannt: Mäander, Wellen- und Flechtband und eine Flächenteilung durch 60°-Rhomben, die bei geeigneter Färbung oder Tönung der Rhomben als räumliches Würfelmuster wahrgenommen wird. (Es handelt sich dabei um die Laves-Teilung (3, 6, 3, 6)*, die duale Teilung zur archimedischen Teilung (3, 6, 3, 6)).

Unabhängig von der hellenistischen Entwicklung hatte sich in Italien spätestens im 2. Jahrhundert v. Chr. eine eigenständige Art der Bodendekoration herausgebildet. Im Verlauf ihrer Entwicklung setzte sie sich auch mit den hellenistischen Vorbildern auseinander und wirkte umgekehrt später in den ersten nachchristlichen Jahrhunderten als Vorbild auch für griechische Mosaiken (Gisela Hellenkemper-Salies: "Römische Mosaiken in Griechenland" [185]).

Im Unterschied zu der klassischen und hellenistischen Gestaltung der Bodenflächen ist die römische Fußbodendekoration durch eine strenge geometrische Gliederung gekennzeichnet. Die Entwicklung, die zu diesem Gliederungsprinzip führt, lässt sich an den Mosaiken in Pompeji verfolgen. Zu den Böden in Pompeji vgl. E. Pernice: "Pavimente und figürliche Mosaiken" [284]. Bei den folgenden Ausführungen über römische Mosaiken stütze ich mich auf Gisela Salies: "Untersuchungen zu den geometrischen Gliederungsschemata römischer Mosaiken" [310].

Ich verweise außerdem auf C. Balmelle et alii: "Le Décor géométrique de

la Mosaique Romaine” [15].

Während in der Zeit des 1. Stils das italienische opus signinum dominiert und dann hellenistisch beeinflusste bunte Tesselaböden aufkommen, entwickeln sich in der Zeit des 2. und 3. Stils etwa ab 100 v. Chr. schwarz-weiße Mosaiken mit geometrischen Mustern, sowohl als opus sectile als auch als opus tessellatum. Während die vornehmeren Repräsentationsräume Böden mit Plattenmosaik aus Marmor erhalten, wird auf den weniger wichtigen Böden das weniger kostbare Stiftmosaik verlegt. Die Muster sind zunächst kleinteilige, einfache und regelmäßige geometrische Flächenteilungen. Darunter findet man die archimedischen Flächenteilungen $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(4, 4, 4, 4)$, $(6, 6, 6)$, $(3, 6, 3, 6)$, $(4, 8, 8)$ und $(3, 4, 6, 4)$ und die dualen Teilungen $(3, 6, 3, 6)^*$, $(4, 8, 8)^*$, oft mit abwechselnd schwarzen und weißen Flächen. Ferner findet man ein an $(3, 3, 4, 3, 4)$ erinnerndes Muster, das aus dieser archimedischen Teilung dadurch abgeleitet werden könnte, dass alle Paare von Dreiecken mit gemeinsamer Kante zu einem Rhombus vereinigt werden, Pernice, loc. cit. [284, Tafeln 30 und 47]. Außer diesen mathematisch einfachen Schemata findet man aber auch noch viele andere Muster, auf die ich hier nicht eingehe. Als Beispiel für ein schwarz-weißes opus tessellatum ist ein Mosaik aus Ostia, Insula della muse, abgebildet. Es stammt aus der Zeit um 130 n. Chr. Das zugrundeliegende Schema ist die archimedische Flächenteilung $(3, 4, 6, 4)$. Das Bild stammt aus Giovanni Becatti: “Scavi di Ostia, IV, Mosaici e pavimenti marmorei“ [19].

ggf. Abb.

Im 1. Jahrhundert nach Chr. bleibt das schwarz-weiße Mosaik dominierend. Der Schwarz-Weiß-Stil entwickelt sich jedoch aus seiner einfachen geometrischen Anfangsphase zu einer komplexen Dekorationsform. Die verschiedenen Arten von Flächenteilungen, die vorher kleinteiligen Mustern zugrundelagen, werden jetzt als großteiliges Gliederungssystem benutzt. Die einzelnen großen 3-, 4-, 6- und 8-Eck-Flächen werden durch Schmuckbänder berandet und getrennt und im Inneren mit geometrischen oder pflanzlichen Ornamenten oder Tier- und Menschengestalten dekoriert. Die geometrischen Ornamente können dabei ihrerseits wieder kleinteilige regelmäßige Flächenteilungen sein, wie z.B. $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(4, 4, 4, 4)$ oder auch interessante Knoten, Verschlingungen und Verflechtungen. Auch die berandenden

Bänder zwischen den Flächen sind häufig mit Flechtmustern ornamentiert. Die Ornamente sind zunächst schwarz-weiß, ab dem 2. Jahrhundert n. Chr. aber auch farbig. Dieser Stil, den man “Medaillon-Stil” oder auch “style compartimenté” nennt, hat sich in Italien vermutlich unter dem Einfluss entsprechender Dekorationsformen von Stuckdecken entwickelt. Er hat sich von dort aus, wenn auch in unterschiedlicher Weise, im ganzen römischen Reich ausgebreitet, in den nördlichen Provinzen, in Afrika, in Syrien, in Griechenland, in Spanien, in Pannonien. Auf die Feinheiten in der Entwicklung dieses Stils in der Kaiserzeit in den verschiedenen Provinzen kann hier nicht eingegangen werden.

Als Gliederungssysteme des Medaillon-Stils kommen von den archimedischen Flächenteilungen nur $(4, 4, 4, 4)$, $(6, 6, 6)$, $(3, 4, 6, 4)$ und $(4, 8, 8)$ vor. Diese Systeme schöpfen aber nur rund 30 % aller Mosaiken aus, deren Gliederungssysteme geradlinig begrenzte Flächen haben. Dies sind etwa $3/4$ aller Mosaiken, bei den restlichen Viertel sind die Flächen von Kreislinien begrenzt. Es kommen also neben den archimedischen Systemen noch zahlreiche andere vor. Frau Salies unterscheidet etwa zwei Dutzend Systeme mit geradlinigen Begrenzungen und ein halbes Dutzend Kreissysteme, jeweils mit mehreren Varianten. Ich begnüge mich mit der exemplarischen Wiedergabe von zwei besonders häufig vertretenen Systemen, einem “Rautensystem” und einem “Oktogonsystem”.

Abb. Salies

Als Beispiel für ein Mosaik im “style compartimenté” bilde ich das Philosophenmosaik ab, das im Römisch-Germanischen Museum in Köln zu sehen ist. Es dürfte spätestens im 3. Viertel des 3. Jahrhunderts n. Chr. entstanden sein. Das Gliederungsschema ist die archimedische Teilung $(3, 4, 6, 4)$. Die Dreiecke, Quadrate, und Sechsecke werden durch kontinuierliches Flechtband getrennt. Die 6 Eckfelder enthalten die Philosophenbilder. Die Dreiecke sind mit der kleinteiligen Flächenteilung $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ dekoriert. “Die quadratischen Felder enthalten außer den seit antoninischer Zeit immer wieder verlegten Kompositrosetten aus Glocken und Herzmotiven auch andere, sehr entwickelte Rosettentypen. Elemente, die in die Zeit nach der Mitte des 3. Jahrhunderts weisen, finden sich allerdings nicht. Der Tesselarius bediente sich ausschließlich geometrischer und floraler Motive, die im reichen Stil der

Philosophenmosaik

spätseverischen Zeit bekannt waren” (Salies, loc. cit. p. 56). Die Umrandung wird von den beliebten römischen Peltenmuster gebildet.

Weitere schöne Beispiele für römische Mosaiken im Medaillonstil in Deutschland findet man in Trier, der ältesten Stadt Deutschlands. Trier wurde 15 v. Chr. im Gebiet der keltischen Treverer gegründet, wuchs trotz häufige germanischer Angriffe, wurde Hauptstadt der Provinz Belgica prima, in der 2. Hälfte des 3. Jahrhunderts Mittelpunkt der Grenzverteidigung gegen die Germanen, 270 Bischofssitz und 286 mit der Reichsreform Diocletians Kaiserstadt, die es bis 411 blieb. 306 – 311 residierte Konstantin d. Gr. in Trier. Der politische Bedeutung entsprach eine kulturelle Blüte mit großartigen Bauten. Ich erwähne nur zwei der schönsten Mosaiken. Das Musenmosaik in Trier aus der Zeit um die Mitte des 3. Jahrhunderts hat das Gliederungsschema (4, 4, 4, 4). Das Schema (3, 4, 6, 4) liegt einem schönen severischen Apsismosaik vom Anfang des 3. Jahrhunderts zugrunde, das sich in der luxuriösen Villa eines ehemaligen römischen Landgutes in Odrang befand, bei Fließen, 5 km nördlich Bitburg, 30 km nördlich von Trier. Abbildungen findet man bei K. Parlasca: “Die römischen Mosaiken in Deutschland” [279]. Musenmosaik und Philosophenmosaik waren die charakteristischen Mosaik der römischen Spätzeit im style compartimenté. Daneben gab es aber auch noch andere Mosaik auf den Fußböden der frühchristlichen Kirchen im 4.

Abb. Palasca Musenmosaik Trier

Abb. Palasca Mosaikboden Trier

bis 6. Jahrhundert. Als Beispiel geben wir eine Zeichnung wieder, die den Mosaikfußboden des Trierer Doms aus der römischen Periode zeigt. Datierung: um 400. Die Zeichnung ist eine Rekonstruktion von J.N. von Wilmosky nach Grabungen im 19. Jahrhundert [374]. Nach Wilmowsky bestand dieses Plattenmosaik aus weißem und schwarzem Marmor und – in Rosetten – aus grünem Porphy. Es gibt allerdings unterschiedliche Meinungen darüber, wie zuverlässig diese Angaben sind. Wie dem auch sei: Es ist charakteristisch für viele Mosaikfußböden frühchristlicher Kirchen dieser Zeit, dass der gesamte Boden in eine Reihe von rechteckigen Feldern geteilt ist, deren jedes mit einem von Feld zu Feld wechselnden kleinteiligen Mosaik mit streng geometrischem Muster geschmückt ist. Neben diesen Mosaikfußböden gibt es in frühchristlichen Basiliken auch andere, bei denen der Boden ebenfalls in rechteckige Felder geteilt ist, jedes einzelne Feld aber ein Mosaik im Me-

daillonstil hat. Die Basilica teodoriana aus Aquileia, deren Boden 314–319 datiert ist, ist ein eindrucksvolles Beispiel. In den ersten frühchristlichen Jahrhunderten wird also die Fußbdengestaltung der römischen Wohn- und Repräsentationsräume für die christlichen Kirchen übernommen und deren Architektur angepasst. Dies gilt für das ganze römische Reich.

Später, im Mittelalter, differenziert sich die Entwicklung. Es ist unmöglich, hierauf im Einzelnen einzugehen. Eine übersicht mit zahlreichen Abbildungen gibt Hiltrud Kier: “Der mittelalterliche Schmuckfußboden” [219]. Auch bei diesen mittelalterlichen Moasikfußböden findet man von den archimedischen Flächenteilungen der Ebene wieder die Systeme $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(4, 4, 4, 4)$, $(6, 6, 6)$, $(3, 6, 3, 6)$, $(4, 8, 8)$, und $(3, 4, 6, 4)$, letzteres z.B. um 1100 in der Martinikirche in Siegen. Aber auch hier gilt wieder, dass diese einfachen mathematischen Schemata allenfalls einen Bruchteil der Formenvielfalt beschreiben.

Als einziges Beispiel eines mittelalterlichen Schmuckfußbodens betrachten wir eine Abbildung des Bodens der Bibliothek des Zisterzienserklosters Eberbach aus der 2. Hälfte des 13. Jahrhunderts. Es handelt sich um eine Reproduktion einer Abbildung (Abb. 41) von C. Schäfer: “Die Abtei Eberbach im Mittelalter” [313] Der Boden, der inzwischen nicht mehr in der Bibliothek vorhanden, sondern bruchstückhaft über andere Räume des Klosters verteilt ist, hatte ein Plattenmosaik aus roten Tonfliesen, die zum Teil schwarz und gelb glasiert waren. Da Marmor in Deutschland nicht vorhanden war und der aus Italien importierte Marmor rar wurde, verwendete man für Plattenmosaiken zunächst Spolien, Natursteinreste aus älteren Bauten, und entwickelte dann als neues Material für Plattenmosaiken die Tonfliesen. Der Boden in Eberbach war wieder in Felder unterteilt. Eins hatte eine Rosette, die übrigen zeigen geometrische Muster mit Translationssymmetrie, Darunter sind einige, die schon aus der Antike bekannt sind: $(6, 6, 6)$, $(4, 4, 4, 4)$ oder die diagonal geteilten Quadrate, die schon in Pompeji vorkommen. Andere, wie das Muster aus Parallelogrammen in dem längsten Feld kommen schon 500 Jahre früher vor, z.B. im Aachener Dom. Das Muster mit 60° -Rhomben, ist eine Variation des einfachen Muster mit 60° -Rhomben, das schon in Pompeji vorkommt. In etwas anderer Variation

Schaefer Abb. 41

findet man es auch noch an einigen anderen Orten und zu verschiedenen Zeiten, z.B. im 8. Jahrhundert im Khirbat al-Mafiar, in einem Schloss aus umayyadischer Zeit. Besonders interessant finde ich das Muster im 3. Querfeld. Die Betrachtungsweise eines Mathematikers würde es nahelegen, dies Muster als Variante der Lavesteilung $(3, 3, 4, 3, 4)^*$ anzusehen, also der dualen Teilung zur archimedischen Teilung $(3, 3, 4, 3, 4)$. Die Kunsthistorikerinnen Frau Dr. Kier und Frau Dr. Hellenkemper-Salies haben mir aber übereinstimmend erklärt, dass dieses Muster als Variante eines ganz anderen Musters zu betrachten ist, nämlich desjenigen, das aus dem betrachteten entsteht, wenn man jeweils Paare von zwei krummlinig begrenzten Vielecken, die längs ihrer einzigen geraden Kante zusammenstoßen, vereinigt. Das Argument für diese Ableitung ist einleuchtend: Die Tonfliesen waren weniger zerbrechlich, wenn man sie von vornherein so zerschnitt. Das gerade besprochene Muster aus krummlinig begrenzten Vielecken lässt sich vom mathematisch-abstrakten Standpunkt, wenn man von metrischen Verhältnissen und Symmetrie absieht, mit der Quadratteilung $(4, 4, 4, 4)$ identifizieren. Das ist aber wiederum nicht die richtige kunsthistorische Ableitung. Diese führt das mindestens seit dem 5. Jahrhundert bekannte, aber auch noch im Spätmittelalter beliebte Muster nämlich auf das sehr beliebte römische Peltenmuster zurück. Die folgende Zeichnung zeigt die gerade diskutierten Muster zum Vergleich nebeneinander (Abb. 1.88).

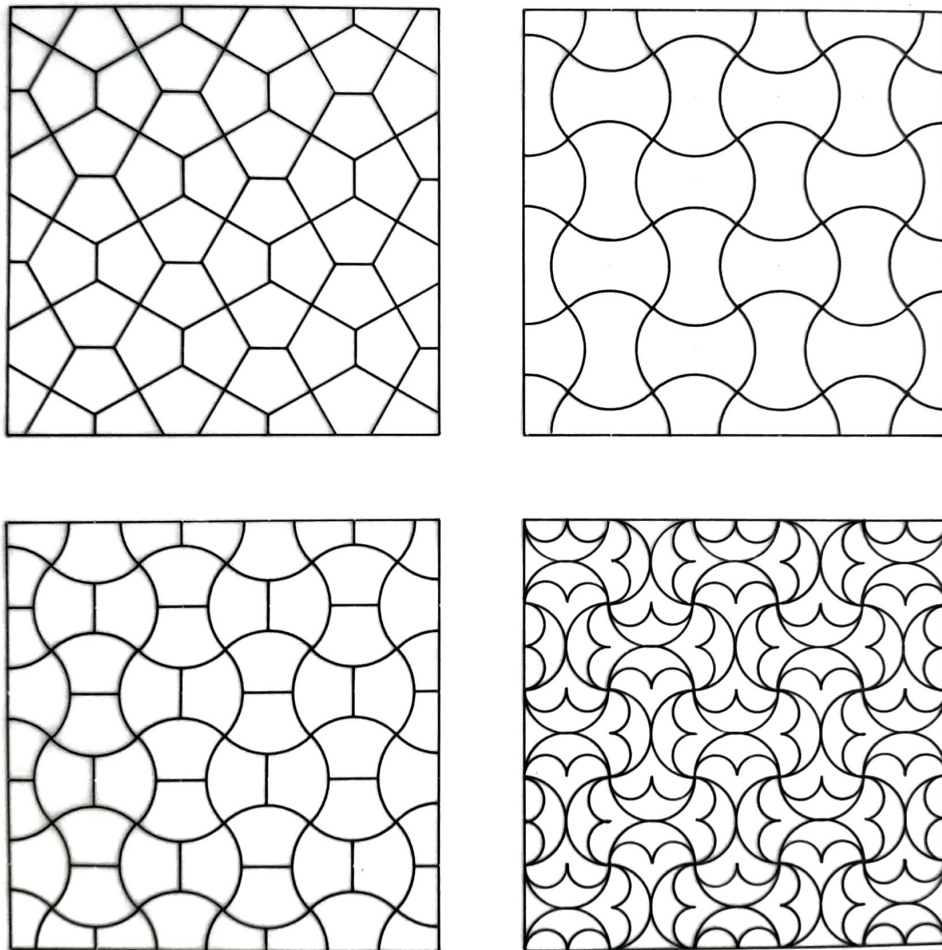


Abbildung 1.88: Oben: Lavesteilung $(3, 3, 4, 3)^*$ (links), krummlinige Vierecksteilung (rechts). Unten rechts: Variation einer Peltenteilung

2 Kombinatorische Geometrie und Topologie der Polyeder (LA III §13.7.1, Fragment)

2.1 Polytope und Polytopkomplexe

Die elementare kombinatorische Theorie der Polyeder entsteht durch die Verbindung zweier einfacher und grundlegender Ideen der reellen affinen Geometrie, die wir beide schon in Abschnitt 13.3 der LA III eingeführt hatten,³⁹ um einige besonders einfache Figuren der euklidischen Geometrie zu behandeln: die Winkel und die Dreiecke. Die eine Idee ist die, dass sich derartige und viele andere Figuren und eben auch die Polyeder durch geeignete Kombination aus einer einzigen, mehrfach wiederholten Grundfigur der reellen affinen Geometrie gewinnen lassen. Diese Grundfigur ist die des Halbraums. E sei – wie immer in diesem Abschnitt – ein endlichdimensionaler affiner insbesondere ein reeller affiner Raum, und in vielen Fällen – z.B. jetzt – werden wir nur diese Struktur benötigen. Weil wir aber schließlich doch Euklidische Geometrie entwickeln werden und es auch zwischendurch nützlich finden, beim Beweis von Aussagen der reellen affinen Geometrie eine euklidische Metrik zu benutzen, setzen wir E von vornherein als affin euklidischen Raum voraus. Ist $F \subset E$ eine affine Hyperebene, dann zerfällt $E - F$ in zwei Zusammenhangskomponenten, die zu F gehörigen offenen Halbräume. Ihre abgeschlossenen Hüllen sind die beiden zu F gehörigen abgeschlossenen Halbräume. Ist H einer dieser beiden Halbräume, dann ist sein Rand ∂H gerade die Hyperebene F (vergleiche LA III Proposition 3.1 [57]). Mit Halbräumen meinen wir im folgenden stets abgeschlossene Halbräume,

³⁹Kap. 3 der Druckfassung von [57].

außer dann, wenn wir ausdrücklich von offenen Halbräumen sprechen. Den Rand eines Halbraumes H bezeichnen wir mit ∂H , den zugehörigen offenen Halbraum $H - \partial H$ mit $\overset{\circ}{H}$ oder H° . Die abgeschlossenen Halbräume sind die Grundfiguren, durch deren Kombination wir die Polyeder gewinnen werden.

Die zweite zentrale Idee ist die Idee der Konvexität. Eine Teilmenge $X \subset E$ in dem affinen Raum E ist konvex, wenn sie mit je zwei Punkten $x, y \in X$ auch die Strecke $[x, y]$ enthält. Die fundamentale Bedeutung dieses so einfachen und natürlichen Begriffs wurde gegen Ende des vorigen Jahrhunderts, vor allem durch die Arbeiten von Hermann Minkowski über die "Geometrie der Zahlen", über die konvexen Polyeder und die konvexen Körper deutlich (vgl. die Gesammelten Abhandlungen von Hermann Minkowski insbesondere [251, 252, 256]). Diese Arbeiten wurden zum Ausgangspunkt Tausender von interessanten Untersuchungen zum Thema Konvexität, und es wären ganze Bücher nötig, um darüber einen Überblick zu geben (siehe z.B. T. Bonnesen-W. Fenchel: "Theorie der konvexen Körper" [30], V. Klee (ed.) "Convexity" [221]). Aus dieser vielfältigen differenzierten Theorie brauchen wir hier nur einige der elementaren Begriffe und Resultate.

Beide Ideen, die Konvexität und die Beschreibung von Figuren durch Halbräume, hängen eng miteinander zusammen. Wie, das werden wir noch sehen. Zunächst geht es uns darum, zu präzisieren, was mit der "Beschreibung von Figuren durch Halbräume" gemeint ist. Die Halbräume in einem affinen Raum E bilden ein System von Teilmengen von E . Allgemein bezeichnen wir für jede Menge M die Menge der Teilmengen von M , also die Potenzmenge von M , mit $\mathcal{P}(M)$. Die Menge $\mathcal{H}(E)$ der Halbräume von E ist also eine Teilmenge $\mathcal{H}(E) \subset \mathcal{P}(E)$ der Potenzmenge. Für die Elemente $X, Y \in \mathcal{P}(M)$ irgendeiner Potenzmenge haben wir zwei natürliche Operationen: die Bildung der Vereinigung $X \cup Y$, die man in Analogie zur Addition sehen kann, und die Bildung des Durchschnitts $X \cap Y$, ein Analogon der Multiplikation. Es gilt das Distributivgesetz, so dass man $\mathcal{P}(M)$ in Analogie zu einem Ring sehen kann. Dies führt in natürlicher Weise zu der folgenden Definition (vgl. Hausdorff "Mengenlehre" [175, §17]).

Definition:

Eine Teilmenge $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(M)$ einer Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist ein **Mengenring in M** , wenn für jede endliche Teilmenge $S \subset \mathcal{R}$ gilt:

$$(i) \bigcup_{X \in S} X \in \mathcal{R} \quad (ii) \bigcap_{X \in S} X \in \mathcal{R}.$$

Bemerkung: Für $S = \emptyset$ gilt definitionsgemäß $\bigcap_{X \in \emptyset} X = M$ und $\bigcup_{X \in \emptyset} X = \emptyset$.

Ein Mengenring in M ist also eine Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$, die bezüglich der endlich oft wiederholten Bildung endlicher Durchschnitte oder Vereinigungen abgeschlossen ist. Ist $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(M)$ irgendeine Teilmenge, dann kann man \mathcal{H} in eindeutiger Weise minimal zu einem Mengenring abschließen. Wir halten diese Aussage als Proposition fest. Der Beweis ist trivial.

Proposition 2.1.1

Zu jeder Teilmenge $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(M)$ einer Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ existiert ein eindeutig bestimmter kleinster Mengenring \mathcal{R} in M , der \mathcal{H} enthält. \mathcal{R} ist die Menge aller $X \subset M$ von der Form $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$, wobei k eine natürliche Zahl $k \geq 0$ ist und jedes X_i ein endlicher Durchschnitt von Mengen, die zu \mathcal{H} gehören.

Definition:

E sei ein euklidischer affiner Raum, und $\mathcal{H}(E) \subset \mathcal{P}(E)$ die Menge der abgeschlossenen Halbräume von E . Die **Polytope** in E sind die Elemente des kleinsten $\mathcal{H}(E)$ enthaltenden Mengenringes in E . Für $\dim E = 0$ ist $\mathcal{H}(E)$ leer. In diesem Fall sind die Polytope in E definitionsgemäß \emptyset und E .

Zur Terminologie ist folgendes zu bemerken:

- (1) In der Literatur wird das Wort "Polytop" häufig nur für eine speziellere Klasse von Teilmengen von E verwendet, nämlich diejenigen Polytope in unserem Sinne, die außerdem beschränkt sind. Da alle Polytope abgeschlossen sind, ist dies nach dem Satz von Heine-Borel gleichbedeutend damit, dass die Polytope kompakt sind. Entscheidet man sich für diesen restriktiven Gebrauch, dann muss man für die allgemeineren Polytope in unserem Sinne ein anderes Wort suchen, etwa

“polytopartige Menge”. Da mir dies zu schwerfällig ist, ziehe ich als allgemeinen Begriff “Polytop” und als speziellen Begriff “kompaktes Polytop” vor.

- (2) Während die kombinatorischen Geometer meist das Wort “Polytop” verwenden, gebrauchen die kombinatorischen Topologen stattdessen gern das alte Wort “Polyeder”. H.S.M. Coxeter hat dies in seinem Buch “Regular polytopes” zu Recht merkwürdig genannt [89]. Die Worte Polygon und Polyeder sind klassisch und bezeichnen 2-dimensionale bzw. 3-dimensionale Polytope. Für beliebigdimensionale derartige Figuren braucht man daher ein neues Wort. Schläfli hat dafür 1852 das sehr gut an die antike Tradition anknüpfende Wort “Polyschema” vorgeschlagen, das sich aber leider nicht durchgesetzt hat. Stattdessen brauchen wir nun das Wort “Polytop”, das nach Coxeter anscheinend 1882 von Hoppe eingeführt wurde (“Die regelmässigen linear begrenzten Figuren jeder Anzahl von Dimensionen”) [198].

Der Begriff geht in dieser beliebige Dimension zulassenden Allgemeinheit auf Schläfli zurück. Die obige Proposition zeigt, dass wir jedes Polytop als endliche Vereinigung von besonders einfachen Polytopen auffassen können. Diese besonders einfachen Polytope sind zunächst einmal genetisch dadurch charakterisiert, dass sie als Durchschnitte endlich vieler Halbräume entstehen. Solange wir noch nicht über eine Charakterisierung durch “innere” Eigenschaften verfügen, ist es zweckmässig, im Anschluß an K. Reidemeisters Buch “Topologie der Polyeder” [299] dafür ein besonderes Wort einzuführen.

Definition:

Ein **Raumstück** in einem affinen Raum E positiver Dimension ist ein Polytop in E , das sich als Durchschnitt endlich vieler Halbräume darstellen lässt. Für einen nulldimensionalen Raum E sollen die beiden Polytope E und \emptyset als Raumstücke gelten. Wir werden später beweisen, dass die Raumstücke genau die konvexen Polytope sind. Dies führt uns dazu, zunächst einmal einige allgemeine Begriffe aus der Theorie der konvexen Mengen zu entwickeln.

Definition:

E sei ein affiner Raum, $X \subset E$ eine Teilmenge, $X \neq \emptyset$. Die **affine Hülle** $A(X)$ von X ist der kleinste X enthaltende affine Teilraum von E .

Die folgenden Definitionen für konvexe Mengen wären formal auf beliebige Teilmengen eines reell affinen Raumes verallgemeinerbar, aber sie wären in dieser Allgemeinheit nicht sinnvoll.

Definition:

E sei ein affiner Raum, und $X \subset E$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge.

(i) Die **Dimension** von X ist die wie folgt definierte Zahl $\dim X$:

$$\dim X = \dim A(X), \quad \text{wenn } X \neq \emptyset.$$

$$\dim X = -1, \quad \text{wenn } X = \emptyset.$$

(ii) Das **relative Innere** von X ist die wie folgt definierte Teilmenge $\overset{\circ}{X}$ von X :

$$\overset{\circ}{X} \text{ ist das Innere von } X \text{ in } A(X), \text{ wenn } X \neq \emptyset.$$

$$\overset{\circ}{X} = \emptyset, \text{ wenn } X = \emptyset.$$

(iii) Der **relative Rand** von X ist die Menge $\partial X = X - \overset{\circ}{X}$.

Wir setzen dabei und im folgenden die einfachsten Begriffe aus der mengentheoretischen Topologie als bekannt voraus und erinnern nur daran, dass das Innere einer Teilmenge X eines topologischen Raumes Y die Menge der inneren Punkte von X ist, also derjenigen $x \in X$, so dass X eine Umgebung von x in Y enthält. Dies ist die größte in X enthaltene offene Teilmenge von Y . Die kleinste X enthaltene abgeschlossene Teilmenge von Y ist die abgeschlossene Hülle von X in Y und wird mit \overline{X} bezeichnet. Da die affine Hülle $Y = A(X)$ einer Teilmenge $X \subset E$ eines affinen Raumes abgeschlossen in E ist, ist die abgeschlossene Hülle \overline{X} von X in $A(X)$ gleichzeitig auch die abgeschlossene Hülle in E . Hingegen ist für $X \neq \emptyset$ das relative Innere X dann und nur dann gleich dem Inneren von X in E , wenn $A(X) = E$ gilt. Wenn hingegen $A(X) \neq E$ gilt, ist das Innere von X in E leer, während für $X \neq \emptyset$ das relative Innere X nicht leer ist. Diese letztere Aussage wird

häufig benutzt. Wir halten sie deswegen als Proposition fest. Der Beweis ist eine Übung.

Proposition 2.1.2

Für nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmengen X eines affinen Raumes gilt:

- (i) $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$ und $\overset{\circ}{X}$ ist konvex.
- (ii) $\overline{\overset{\circ}{X}} = X$
- (iii) $\partial X \neq \emptyset$ außer wenn $X = A(X)$.

Der Beweis der folgenden Proposition ist ebenfalls eine triviale Übung.

Proposition 2.1.3

E sei ein affiner Raum, $H \subset E$ ein Halbraum und $F \subset E$ ein affiner Unterraum. Dann ist der Durchschnitt $H \cap F$ entweder leer oder gleich F oder ein Halbraum in F . Wenn $H \cap F$ ungleich F ist, gilt $(H \cap F)^\circ = H^\circ \cap F$ und $\partial(H \cap F) = \partial H \cap F$.

Die folgende grundlegende Definition ist das Bindeglied zwischen der Idee der Konvexität und der Beschreibung von Figuren als Durchschnitt von Halbräumen. Sie geht auf Minkowski zurück (z.B. H. Minkowski: "Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder" [251, p.106] und [256, p.136]).

Definition:

X sei eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des affinen Raumes E und $F \subset E$ eine affine Hyperebene. F ist eine **Stützebene** von X , wenn gilt:

- (i) X ist ganz in einem der beiden zu F gehörigen abgeschlossenen Halbräume enthalten.
- (ii) $X \cap F$ ist nicht leer.

Eine **eigentliche Stützebene** von X ist eine Stützebene F , für die zusätzlich gilt: $X \not\subset F$. Ein Stützhalbraum von X ist ein Halbraum, der X enthält, und dessen Rand eine Stützebene von X ist. Die folgende Proposition ist eine Bemerkung von Minkowski zur Definition der Stützebenen.

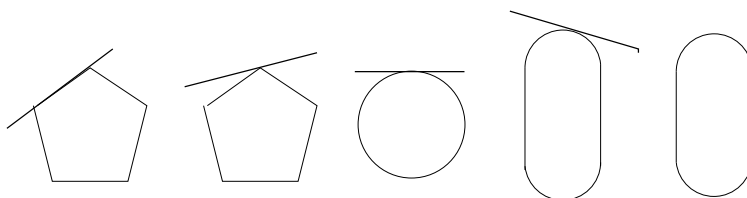
Proposition 2.1.4

X sei abgeschlossen und konvex in dem affinen Raum E , und $F \subset E$ eine affine Hyperebene. F ist genau dann eine eigentliche Stützebene von X , wenn gilt: $F \cap \overset{\circ}{X} = \emptyset$ und $F \cap \partial X \neq \emptyset$.

Beweis: Zunächst sei F eine eigentliche Stützebene von X , und H sei der zugehörige Halbraum, der X enthält. Für die affine Hülle $A = A(X)$ gilt nach Voraussetzung $A \not\subset F$, also sogar $A \not\subset H$, und deshalb $(H \cap A)^\circ = H^\circ \cap A$ nach Proposition 2.1.3. Aus $X \subset H \cap A$ folgt daher $X^\circ \subset (H \cap A)^\circ = H^\circ \cap A \subset H^\circ$, also $F \cap X^\circ = \emptyset$ und deshalb $F \cap \partial X \neq \emptyset$.

Jetzt sei umgekehrt $F \cap X^\circ = \emptyset$ und $F \cap \partial X \neq \emptyset$ vorausgesetzt. Dann ist X° nach Proposition 2.1.2 nicht leer und konvex und daher insbesondere zusammenhängend. Daher liegt X in einer der beiden Zusammenhangskomponenten von $E - F$. Ihr Abschluß sei der Halbraum H . Aus $X^\circ \subset H^\circ$ folgt dann $X = \overline{X^\circ} \subset \overline{H^\circ} = H$ und $X \not\subset F = \partial H$ wegen $X^\circ \neq \emptyset$. Schließlich gilt $F \cap X \neq \emptyset$ nach Voraussetzung. Also ist F eine eigentliche Stützebene.

In Zukunft werden wir solche einfachen Beweise nicht mehr so ausführlich darstellen oder auch einfach auf die Literatur verweisen. Zur Unterstützung der Anschauung folgen einige Bilder von konvexen Mengen mit Stützebenen.



Es ist eine grundlegende, schon von Minkowski bewiesene Tatsache, dass durch jeden Randpunkt einer abgeschlossenen konvexen Menge eine Stützebene geht. Dem Beweis dieser Aussage dienen die folgenden Definitionen und Lemmata.

Definition:

E sei ein euklidischer affiner Raum, $Y \subset E$ eine abgeschlossene nichtleere konvexe Teilmenge und $x \in E - Y$ ein Punkt im Komplement. Dann sind

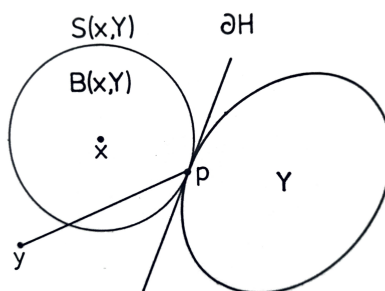
die reelle Zahl $d(x, Y)$, der **Abstand** von x und Y und die **Teilmengen** $B(x, Y)$ und $S(x, Y)$ von E wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} d(x, Y) &:= \inf\{d(x, y) \mid y \in Y\} \\ B(x, Y) &:= \{z \in E \mid d(x, z) \leq d(x, Y)\} \\ S(x, Y) &:= \partial B(x, Y) \end{aligned}$$

Lemma 2.1.5

$Y \subset E$ sei nicht leer, abgeschlossen und konvex, und $x \in E - Y$. Dann trifft die Sphäre $S(x, Y)$ die Menge Y in genau einem Punkt p , und die Tangentialebene von $S(x, Y)$ in p ist eine Stützebene von Y , die durch den Punkt p geht.

Beweis: Da Y abgeschlossen ist, ist $S(x, Y) \cap Y$ nicht leer. Es sei $p \in S(x, Y) \cap Y$, und H der Halbraum mit $B(x, Y) \subset H$ und $p \in \partial H$. Die Hyperebene ∂H ist der Tangentialraum von $S(x, Y)$ in p . Es gilt $H^\circ \cap Y = \emptyset$. Denn wäre $y \in H^\circ \cap Y$, dann wäre $[y, p] \subset Y$ wegen der Konvexität, und es wäre offensichtlich $[y, p] \cap B(x, Y)^\circ$ nicht leer, also $Y \cap B(x, Y)^\circ \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Definition von $B(x, Y)$. Insbesondere liegt Y ganz in dem zu H komplementären Halbraum, und für den Schnitt von Y mit $S(x, Y)$ gilt $Y \cap S(x, Y) \subset \partial H \cap S(x, Y) = \{p\}$. Die folgende Zeichnung illustriert den Beweis.



Definition:

$Y \subset E$ sei nicht leer, abgeschlossen und konvex. Die **Fußpunktabbildung** zu Y ist die Abbildung $\Phi : E \rightarrow Y$, die durch die folgenden Bedingungen definiert ist:

- (i) Für $x \notin Y$ gilt $\{\Phi(x)\} = Y \cap S(x, Y)$
- (ii) Für $x \in Y$ gilt $\Phi(x) = x$.

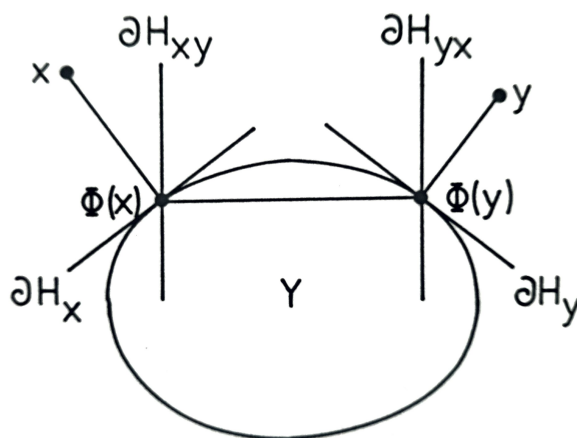
Lemma 2.1.6

Die Fußpunktabbildung vergrößert den euklidischen Abstand nicht. Insbesondere ist sie stetig.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass für alle $x, y \in E$ gilt:

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq d(x, y)$$

Für $x, y \in Y$ ist die Aussage trivial, für $x \in E - Y$ und $y \in Y$ folgt sie leicht aus dem vorigen Lemma. Wir betrachten also den Fall $x, y \in E - Y$ und setzen o.B.d.A. voraus, dass $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. Nun sei H_{xy} der Halbraum mit den folgenden Eigenschaften: ∂H_{xy} geht durch $\Phi(x)$ und ist senkrecht zu der Strecke $[\Phi(x), \Phi(y)]$, und H_{xy} enthält $\Phi(y)$. Nach Vertauschung von x und y wird auf analoge Weise der Halbraum H_{yx} definiert. Die folgende Zeichnung illustriert die Situation.



Bezeichnen wir mit H_x den $B(x, Y)$ enthaltenden Halbraum mit $\Phi(x) \in \partial H_x$ und mit H_y den analog für y definierten Halbraum, dann folgt aus dem vorigen Lemma sofort: $[\Phi(x), \Phi(y)] \cap H_x^\circ = \emptyset$ und $[\Phi(y), \Phi(x)] \cap H_y^\circ = \emptyset$.

Daraus folgt elementargeometrisch: $[x, \Phi(x)] \cap H_{xy}^\circ = \emptyset$ und $[y, \Phi(y)] \cap H_{xy}^\circ = \emptyset$. Also gilt $x, y \notin H_{xy}^\circ \cap H_{xy}^\circ$, und daher $d(x, y) \geq d(\Phi(x), \Phi(y))$.

Lemma 2.1.7

Die Fußpunktabbildung einer nichtleeren abgeschlossenen konvexen Menge $Y \subset E$ in einem euklidischen affinen Raum E , der die affine Hülle von Y ist, induziert eine surjektive Abbildung

$$\Phi : E - Y \rightarrow \partial Y.$$

Beweis: Zunächst einmal ist klar, dass für $x \in E - Y$ der Fußpunkt $\Phi(x)$ im Rand ∂Y liegt, denn aus $\Phi(x) \in Y^\circ$ würde, da Y° wegen der Voraussetzung $E = A(Y)$ offen in Y ist, folgen, dass $Y \cap B(x, Y)^\circ \neq \emptyset$, und das wäre ein Widerspruch zur Definition von $B(x, Y)$. Zu zeigen ist, dass $\Phi : E - Y \rightarrow \partial Y$ surjektiv ist. Der Beweis benutzt wesentlich Kompaktheitsargumente. Deswegen nehmen wir zunächst zur Vereinfachung an, Y sei kompakt.

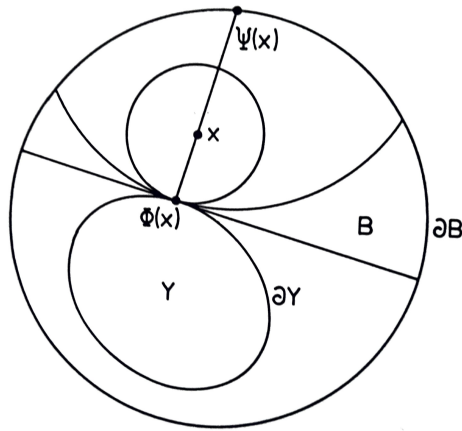
Wir wählen eine hinreichend große abgeschlossene Kugel B in E so, dass sie die kompakte Menge Y im Inneren enthält. Der Rand der Kugel ist eine Sphäre $S = \partial B$ und ist ebenfalls kompakt. Die Fußpunktabbildung definiert eine Abbildung

$$\Phi : B - Y \rightarrow \partial Y.$$

Wir definieren nun eine weitere Abbildung

$$\Psi : B - Y \rightarrow \partial B.$$

Für $x \in B - Y$ ist $\Psi(x)$ definiert als Schnittpunkt von S mit dem von $\Phi(x)$ ausgehenden Strahl durch x . Aus Lemma 2.1.5 folgert man leicht, dass gilt: $\Phi(\Psi(x)) = \Phi(x)$. Die folgende Zeichnung illustriert die Situation.



Nun sei ein Punkt $p \in \partial Y$ gegeben. Gesucht ist ein Punkt $q \in E - Y$ mit $\Phi(q) = p$. Wir zeigen die Existenz eines solchen $q \in S$ wie folgt. Es sei x_n eine Folge von Punkten $x_n \in B - Y$ mit $\lim x_n = p$. Die Folge $\Psi(x_n) \in S$ hat wegen der Kompaktheit von S einen Häufungspunkt q . Da wir zu einer konvergenten Teilfolge übergehen können, nehmen wir o.B.d.A. an: $q = \lim \Psi(x_n)$. Aus der im vorigen Lemma festgestellten Stetigkeit von Φ folgt dann:

$$\Phi(q) = \lim \Phi(\Psi(x_n)) = \lim \Phi(x_n) = p.$$

Damit ist die Surjektivität von Φ für kompaktes Y bewiesen. Für nicht kompaktes Y reduzieren wir wie folgt auf die kompakte Situation. Es sei $p \in \partial Y$ gegeben. Y' sei der Durchschnitt von Y mit irgendeiner abgeschlossenen Kugel mit Mittelpunkt p . Dann ist Y' eine nichtleere kompakte konvexe Menge mit affiner Hülle E , und p liegt im Rand $\partial Y'$. Also existiert ein $x \in E - Y'$ mit $\Phi(x) = p$. Aus der Konvexität von Y folgt sofort $x \in E - Y$ und $d(x, Y) = d(x, Y')$, so dass p auch Fußpunkt von x bezüglich der Fußpunktabbildung zu Y ist. Damit ist die Surjektivität von $\Phi : E - Y \rightarrow \partial Y$ ganz allgemein bewiesen.

Aus Lemma 2.1.5 und Lemma 2.1.7 folgt unmittelbar der folgende schon angekündigte grundlegende Satz.

Satz 2.1.8

Durch jeden Punkt des relativen Randes einer abgeschlossenen konvexen Menge geht mindestens eine Stützebene.

Aus Lemma 2.1.5 folgt auch unmittelbar der folgende Satz.

Satz 2.1.9

Jede nichtleere abgeschlossene konvexe Menge in einem affinen Raum ist der Durchschnitt ihrer Stützhalbräume.

Korollar 2.1.10

Die abgeschlossenen konvexen Teilmengen der affinen Räume sind - mit der trivialen Ausnahme der leeren Menge als Teilmenge eines 0-dimensionalen Raumes - genau diejenigen Teilmengen, die sich als Durchschnitt einer Menge von Halbräumen darstellen lassen.

Mit diesen Sätzen ist der grundlegende Zusammenhang zwischen der Konvexität von Mengen und ihrer Beschreibung durch Schnitt von Halbräumen geklärt. Außerdem eröffnen diese Sätze den Weg zu einer Beschreibung der Struktur des Randes von konvexen Mengen. Diese Struktur wird besonders übersichtlich, wenn wir uns auf die einfachsten abgeschlossenen konvexen Mengen beschränken, nämlich diejenigen, welche sich als Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen darstellen lassen, also die Raumstücke.

Definition:

X sei eine abgeschlossene konvexe Menge in einem affinen Raum E . Für $X \neq \emptyset$ sei $A = A(X)$ die affine Hülle. Eine **eigentliche Seite** von X ist ein Durchschnitt $X \cap F$ von X mit einer eigentlichen Stützebene von F in A . Die Teilmengen \emptyset und X sind **uneigentliche Seiten** von X . Eine **Seite** von X ist entweder eine eigentliche oder eine uneigentliche Seite von X .

Wir führen folgende Mengen von Seiten von X ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X) : &= \{Y \mid Y \text{ Seite von } X\} \\ \mathcal{F}[X] : &= \{Y \in \mathcal{F}(X) \mid Y \neq X\} \\ \mathcal{F} < X > : &= \{Y \in \mathcal{F}(X) \mid Y \neq X, \emptyset\} \\ \mathcal{F}_i(X) : &= \{Y \in \mathcal{F}(X) \mid \dim Y = i\} \end{aligned}$$

Ist $n = \dim X$, dann gilt natürlich

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(X) &= \bigcup_{-1 \leq i \leq n} \mathcal{F}_i(X) \\ \mathcal{F}[X] &= \bigcup_{-1 \leq i < n} \mathcal{F}_i(X) \\ \mathcal{F} \langle X \rangle &= \bigcup_{0 \leq i < n} \mathcal{F}_i(X)\end{aligned}$$

Im Folgenden fassen wir $\mathcal{F}(X)$ und die oben definierten Teilmengen stets als partialgeordnete Mengen auf, die durch die mengentheoretische Inklusionsrelation partial geordnet sind. In den folgenden Sätzen stellen wir grundlegende ordnungstheoretische Eigenschaften dieser Mengen zusammen, die zum Teil für beliebige abgeschlossene konvexe Mengen gelten, z.T. aber nur für Raumstücke. Diese Partialordnung von $\mathcal{F}(X)$ bzw. $\mathcal{F}[X]$, die ja die Inzidenzrelation der Seiten beschreibt, ist eine für die Geometrie der konvexen Menge und ihres Randes wesentliche Struktur, denn aus Satz 2.1.8 und Proposition 2.1.4 ergibt sich sofort der folgende Satz.

Satz 2.1.11

Für jede abgeschlossene konvexe Menge X gilt:

$$\begin{array}{l} X = \bigcup_{Y \in \mathcal{F}(X)} Y \\ \partial X = \bigcup_{Y \in \mathcal{F}[X]} Y \end{array}$$

Bevor wir ordnungstheoretische Eigenschaften von $\mathcal{F}(X)$ formulieren, erinnern wir an einige Grundbegriffe aus der Theorie der partialgeordneten Mengen.

Definition:

Eine partial geordnete Menge (\mathcal{X}, \leq) heißt ein **Verband**, wenn zu je zwei Elementen $X, Y \in \mathcal{X}$ das **Supremum** $X \vee Y$ und das **Infimum** $X \wedge Y$ existiert. Sie heißt ein **vollständiger Verband**, wenn zu jeder nichtleeren Teilmenge von \mathcal{X} das Supremum und das Infimum existiert.

Proposition 2.1.12

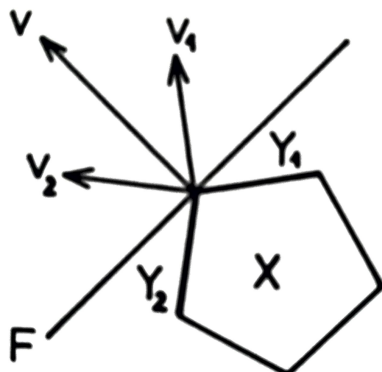
Für jede abgeschlossene konvexe Menge X ist die Seitenmenge $\mathcal{F}(X)$ ein vollständiger Verband. Für jede nichtleere Teilmenge $\mathcal{Y} \subset \mathcal{F}(X)$ gilt:

$$\inf \mathcal{Y} = \bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} Y.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass es für jede nichtleere Teilmenge $\mathcal{Y} \subset \mathcal{F}(X)$ ein Infimum gibt, und dass dieses der Durchschnitt Z aller Seiten $Y \in \mathcal{Y}$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass dieser Durchschnitt eine Seite ist. o.B.d.A. sei der Durchschnitt verschieden von \emptyset und X . Wir wählen für jedes $Y \in \mathcal{Y}$ eine eigentliche Stützebene F_Y , so dass $Y = X \cap F_Y$. Der Durchschnitt aller F sei der affine Unterraum F . Dann gilt $Z = X \cap F$. Natürlich ist F schon als Durchschnitt endlich vieler F darstellbar, da in einem endlich-dimensionalen affinen Raum jede Fahne von affinen Unterräumen endlich ist. Es gibt also eine endliche Teilmenge $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}$, so dass Z der Durchschnitt der $Y \in \mathcal{Y}'$ ist. Also können wir uns o.B.d.A. auf endliche \mathcal{Y} beschränken. Aber dann genügt es sogar zu zeigen: Für alle $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}(X)$ gilt $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{F}(X)$. Dazu wählen wir ein $x_0 \in Y_1 \cap Y_2$. Wir identifizieren $A(X)$ mit dem euklidischen Standardraum \mathbb{R}^n so, dass $x_0 = 0$. Wir wählen Stützebenen F_i , so dass $Y_i = X \cap F_i$. Die zugehörigen Stützhalbräume seien $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v_i \rangle \leq 0\}$, wo v_i ein Einheitsnormalenvektor zu F_i ist. Wir setzen $v = v_1 + v_2$ und $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle \leq 0\}$. Dann ist H offensichtlich ein Stützhalbraum von X und für seinen Rand $F = \partial H$ gilt:

$$F \cap X = \{x \in X \mid \langle x, v_1 \rangle + \langle x, v_2 \rangle = 0\} = X \cap F_1 \cap F_2 = Y_1 \cap Y_2.$$

Die folgende Zeichnung illustriert den Beweis.



Es ist nun einfach, für jede nichtleere Teilmenge $Y \subset \mathcal{F}(X)$ die Existenz des Supremums zu zeigen. Es sei $\mathcal{Z} \subset \mathcal{F}(X)$ die Menge aller $Z \in \mathcal{F}(X)$, so dass $Z \supset Y$ für alle $Y \in Y$. Dann ist \mathcal{Z} nicht leer, weil $X \in \mathcal{Z}$, und daher existiert $\inf \mathcal{Z} = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}} Z$. Offenbar gilt $\inf \mathcal{Z} \in \mathcal{Z}$, und daraus folgt $\inf \mathcal{Z} = \sup \mathcal{J}$.

Es ist naheliegend zu fragen, welche konvexen Mengen nur endlich viele Seiten haben. Um diese Frage zu beantworten, benutzen wir die folgende Verschärfung von Satz 2.1.9.

Lemma 2.1.13

X sei eine nichtleere abgeschlossene konvexe Menge in $E = A(X)$. Für jede eigentliche Seite $Y \in \mathcal{F} \langle x \rangle$ sei ein Stützhalbraum H von X mit $Y = X \cap \partial H_Y$ gewählt. Dann gilt:

$$X = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}(X)} H_Y$$

Beweis: X' sei der Durchschnitt der H_y . Trivialerweise gilt $X \subset X'$. Wir führen die Annahme, dass es ein $z \in X' - X$ gibt, zum Widerspruch. Wir wählen ein $x \in X^\circ$. Die Strecke $[x, z]$ schneidet dann ∂X in genau einem Punkt $y \in \partial X$, und y liegt im Inneren der Strecke $[x, z]$. Durch y geht eine Seite Y . Es gilt $y \in \partial H_Y$ und $x \in H_Y^\circ$. Daraus folgt $z \notin H_y$ im Widerspruch zu $z \in X'$.

Aus dem gerade bewiesenen Lemma folgt, dass eine abgeschlossene konvexe Menge mit nur endlich vielen Seiten ein Raumstück sein muss. Natürlich vermuten wir, dass umgekehrt jedes Raumstück nur endlich viele Seiten hat. Das ist in der Tat richtig. Die folgende Definition dient dem Beweis.

Definition:

In einem affinen Raum E sei ein endliches System von Halbräumen $(H_i)_{i \in I}$ gegeben. Das zugehörige Raumstück ist

$$P = \bigcap_{i \in I} H_i$$

und das System heißt eine **Darstellung** von P . Die Darstellung von P heißt minimal, wenn jedes echte Untersystem $(H_i)_{i \in J}$, wo $J \subsetneq I$, ein von P verschiedenes Raumstück darstellt.

Jeder Teilmenge $J \subset I$ ist durch das System von Halbräumen ein Durchschnitt von affinen Unterräumen F_J und ein Raumstück P_J zugeordnet:

$$\begin{aligned} F_J &:= \bigcap_{j \in J} \partial H_j \\ P_J &:= P \cap F_J . \end{aligned}$$

Die Raumstücke P_J nennen wir die **Seiten von P bezüglich der gegebenen Darstellung von P** . Es gilt $P = P_\emptyset$. Wir setzen $F_i := F_{\{i\}}$ und $P_i := P_{\{i\}}$.

Proposition 2.1.14

Für jedes Raumstück P gilt $\mathcal{F}(P) = \{P_J \mid J \subset I\} \cup \{\emptyset\}$ bezüglich jeder Darstellung $P = \bigcap_{i \in I} H_i$.

Beweis: Wir zeigen zunächst $P_J \in \mathcal{F}(P)$. Für $J = \{i\}$ ist dies klar, denn entweder gilt $P_i = \emptyset$ oder $P_i = P$, oder F_i ist eine eigentliche Stützebene, und daher gilt in jedem Fall $P_i \in \mathcal{F}(P)$. Dann folgt aber auch für beliebige $J \subset I$, dass $P_J \in \mathcal{F}(P)$. Denn für $J = \emptyset$ gilt $P_\emptyset = P$ und für $J \neq \emptyset$ kann man Proposition 2.1.12 anwenden, denn es gilt

$$P_J = \bigcap_{j \in J} P_j .$$

Nun sei umgekehrt $Y \in \mathcal{F}(P)$ eine eigentliche Seite von P . Es sei $J = \{j \in I \mid Y \subset F_j\}$. Trivialerweise gilt $Y \subset P_J$. Wir zeigen $Y = P_J$. Dazu genügt es zu zeigen: $Y \cap P_J^\circ \neq \emptyset$. Denn wenn F eine Stützebene von P mit $Y = P \cap F$ ist, folgt aus $P_J^\circ \cap F \neq \emptyset$ schon $P_J \subset F$, also $P_J \subset Y$. Wir konstruieren einen Punkt $x \in Y \cap P_J^\circ$ wie folgt. Es sei $K = I - J$. Wenn $K = \emptyset$, ist $P_J = P_I$ ein affiner Raum und daher $P_J^\circ = P_J$. Also sei $K \neq \emptyset$. Für jedes $k \in K$ wählen wir ein $x_k \in Y \cap H_k^\circ$. Dann ist die konvexe Linearkombination

$$x = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} x_k$$

ein Punkt aus $Y \cap F_J \cap \left(\bigcap_{k \in K} H_k^\circ\right) = Y \cap P_J^\circ$.

Bemerkung: Es gilt keine zu Proposition 2.1.14 analoge Aussage für die Darstellung beliebiger abgeschlossener konvexer Mengen als Durchschnitt unendlicher Familien von Halbräumen. Ein einfaches Gegenbeispiel erhalten wir wie folgt: X sei eine abgeschlossene Kreisscheibe in der Ebene. Für jedes $x \in \partial X$ sei H_x der X enthaltende abgeschlossene Halbraum mit $\partial H_x \in x$. Wir wählen ein $p \in \partial X$ und setzen $I = \partial X - \{p\}$. Dann gilt $X = \bigcap_{i \in I} H_i$ und $\{p\} \in \mathcal{F}(x)$, aber es gibt kein $J \subset I$, so dass $\{p\} = X \cap \left(\bigcap_{j \in J} \partial H_j\right)$.

Aus Lemma 2.1.13 und Proposition 2.1.14 ergibt sich unmittelbar die folgende Antwort auf die oben gestellte Frage.

Korollar 2.1.15

Die Raumstücke sind genau die abgeschlossenen konvexen Mengen mit endlich vielen Seiten.

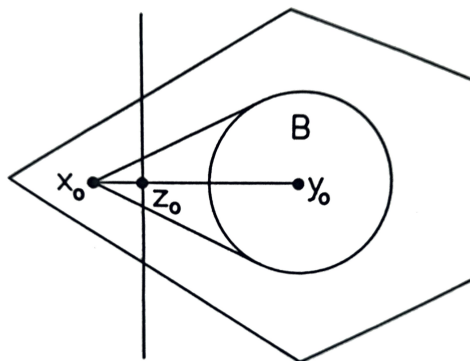
Satz 2.1.16

$P \subset E$ sei ein n -dimensionales Raumstück im n -dimensionalen affinen Raum E . Dann besitzt P eine minimale Darstellung als Durchschnitt von Halbräumen $P = \bigcap_{i \in I} H_i$. Diese minimale Darstellung ist bis auf die Indizierung eindeutig durch P bestimmt. Die H_i sind diejenigen P enthaltenden Halbräume, deren Rand die affine Hülle einer $(n-1)$ -dimensionalen eigentlichen Seite von P ist. Diese Seiten sind gerade die maximalen eigentlichen Seiten von P .

Beweis: Es sei $P = \bigcap_{i \in I} H_i$ eine minimale Darstellung, und für $J \subset I$ sei P_J die zugehörige Seite von P . Behauptung: $\dim P_i = n - 1$ für alle $i \in I$. Beweis: Zu $i \in I$ existiert wegen der Minimalität der Darstellung ein Punkt x_0 , so dass gilt:

$$x_0 \in \bigcap_{j \neq i} H_j \setminus H_i .$$

Wir wählen einen Punkt $y_0 \in P^\circ$. Die Strecke $[x_0, y_0]$ schneidet ∂H_i in einem eindeutig bestimmten Punkt z_0 , und es gilt $z_0 \in P_i$. Behauptung: z_0 ist ein innerer Punkt von P_i in ∂H_i . Beweis: $B \subset P^\circ$ sei eine kleine offene Kugel mit Mittelpunkt y_0 . Für $y \in B$ sei $z(y)$ der Schnittpunkt von $[x_0, y]$ mit ∂H_i . Dann ist die Menge der $z(y)$ eine in P_i enthaltene offene Menge von z_0 in ∂H_i . Daraus folgt natürlich $A(P_i) = \partial H_i$.



Für $J \subset I$ mit mehr als zwei Elementen gilt selbstverständlich $\dim P_J < n - 1$, da die H_i wegen der Minimalität paarweise verschieden sind. Außerdem sind diese P_J nicht maximal, weil $P_J \subset P_j$ für $j \in J$ gilt, während die P_i offensichtlich maximale eigentliche Seiten der Darstellung sind. Wegen Proposition 2.1.14 ist damit alles bewiesen.

Definition:

$P \subset E$ sei ein Raumstück, $\dim X = \dim E$. Für jedes $Y \in \mathcal{F}_{n-1}(P)$ sei H_Y der Halbraum mit Rand $\partial H_Y = A(Y)$, der P enthält. Dann ist

$$P = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}_{n-1}(P)} H_Y$$

die **kanonische minimale Darstellung** von P .

Wir hatten schon im Satz 2.1.11 festgestellt, dass der Rand einer abgeschlossenen konvexen Menge X die Vereinigungsmenge aller eigentlichen Seiten ist. Wenn X ein Raumstück P ist, ist die Zahl dieser Seiten endlich. Ihre Dimension liegt zwischen 0 und $n - 1$, wenn n die Dimension von P ist. Die maximalen Seiten sind die $(n - 1)$ -dimensionalen, und sie sind stets vorhanden außer wenn P ein affiner Raum ist. Die 0-dimensionalen Seiten heißen die Ecken von P , die 1-dimensionalen die Kanten. Wenn $n = 3$ ist, sind die 2-dimensionalen Seiten das, was man klassisch die Seiten des Polyeders genannt hat. Es wäre schön, wenn man im Fall beliebiger Dimension das Wort "Seite" nur für die maximalen Seiten verwenden könnte, aber dann hätten wir in der deutschen Sprache kein passendes Wort zur Bezeichnung der übrigen Seiten. Im Französischen hat man zwei Worte, die beide vom lateinischen "facies" kommen: "facette" für beliebige Seiten und "face" für maximale.

Satz 2.1.16 impliziert insbesondere, dass der Rand eines Raumstückes P schon als Vereinigungsmenge der maximalen Seiten dargestellt werden kann. Offensichtlich spielen diese Seiten eine besonders wichtige Rolle. Trotzdem ist es richtig, nicht nur diese, sondern alle Seiten von P zu betrachten. Für die Ecken war das schon den antiken Mathematikern klar, und für die Kanten wurde diese Erkenntnis von Euler explizit formuliert. Alle diese Seiten sind ja Raumstücke, die ihrerseits Seiten haben, und es wird sich herausstellen, dass diese Seiten der Seiten auch Seiten von P sind. Wie alle diese Seiten miteinander inzidieren, wird durch die Partialordnung der endlichen Menge $\mathcal{F}[P]$ beschrieben, und diese endliche partial geordnete Menge ist gerade die Struktur, durch die wir die kombinatorische Geometrie des Raumstückes P erfassen.

Eine der ältesten Einsichten in die Geometrie der Polyeder, die schon bei Pappos und dann wieder bei Descartes und Euler auftaucht, ist die, dass jede Kante eines Polyeders zu genau zwei Seitenflächen als gemeinsame Kante gehört. Die folgende Proposition verallgemeinert dies auf Polytope beliebiger Dimension.

Proposition 2.1.17

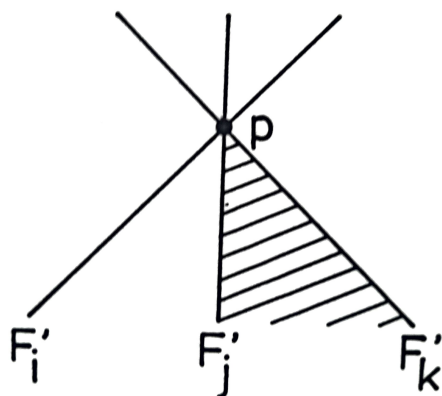
P sei ein Raumstück der Dimension $n \geq 2$, und $Y' \in \mathcal{F}_{n-1}(P)$ eine maximale eigentliche Seite von P . Dann gibt es zu jeder maximalen eigentlichen Seite $Y \in \mathcal{F}_{n-2}(Y')$ von Y' genau eine maximale eigentliche Seite $Y'' \in \mathcal{F}_{n-1}(P)$ von P , so dass gilt: $Y = Y' \cap Y''$.

Beweis: Wir beweisen zunächst die Existenz. Es sei $P = \bigcap_{i \in I} H_i$ die kanonische minimale Darstellung und $Y' = P_i$. Dann gilt:

$$Y' = \partial H_i \cap P = \partial H_i \cap \left(\bigcap_{j \neq i} H_j \right) = \bigcap_{j \neq i} (\partial H_i \cap H_j) .$$

Dies ist eine Darstellung des $(n-1)$ -dimensionalen Raumstücks Y' in dem $(n-1)$ -dimensionalen Raum ∂H_i . Nach Weglassen überflüssiger Halbräume erhält man eine minimale Darstellung, und Anwendung von Satz 2.1.16 auf diese ergibt die Existenz eines $j \neq i$ mit $Y = Y' \cap \partial(\partial H_i \cap H_j)$, also $Y = P_i \cap P_j$. Mit $Y'' = P_j$ ist die gesuchte maximale Seite von P gefunden.

Wir beweisen jetzt die Eindeutigkeit. Angenommen, es gäbe drei verschiedene $i, j, k \in I$ mit $Y \subset P_i \cap P_j \cap P_k$. Die affinen Hüllen der maximalen Seiten P_i, P_j, P_k sind Hyperebenen F_i, F_j, F_k , welche die affine Hülle F von Y enthalten. Wir betrachten den Schnitt dieser Konfiguration mit einer Ebene E' senkrecht zu F . Die Hyperebenen schneiden E' in drei Geraden F'_i, F'_j, F'_k , die durch den Schnittpunkt p von F und E' gehen.

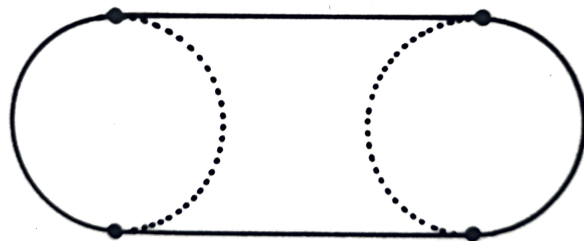


Offenbar gibt es stets einen Index, etwa i , so dass die Gerade F'_i den zu den beiden anderen Indices j, k gehörigen Sektor $E' \cap H_j \cap H_k$ nur im Punkt P schneidet. Daraus folgt $P_i = P \cap F_i \subset F$ im Widerspruch zu $\dim P_i = n - 1$.

Der aufmerksame Leser wird bei der Lektüre der Voraussetzungen der gerade bewiesenen Proposition gestutzt haben. Statt der naheliegenden Voraussetzung $Y \in \mathcal{F}_{n-2}(P)$ und $Y \subset Y'$ haben wir nur die a priori schwächere Voraussetzung $Y \in \mathcal{F}_{n-2}(Y')$ gemacht. Für ein Raumstück P sind beide Voraussetzungen a posteriori äquivalent, wie der nachher noch zu beweisende Satz 2.1.19 zeigt. Dieser Satz ist aber nicht ganz trivial, und bei seinem Beweis brauchen wir Proposition 2.1.17 in der oben bewiesenen Form. Es gilt kein Analogon von Satz 2.1.19 für beliebige abgeschlossene konvexe Mengen. Dies zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel:

B_1 und B_2 seien zwei verschiedene abgeschlossene Kreisscheiben von gleichem Radius in der euklidischen Ebene E , und X sei die kleinste abgeschlossene konvexe Menge in E , die B_1 und B_2 enthält. X hat die Dimension $n = 2$.



Der Rand von X ist die disjunkte Vereinigung von zwei offenen Halbkreisen und zwei abgeschlossenen Strecken. Die 0-dimensionalen Seiten von X sind die Punkte der beiden offenen Halbkreise. Die 1-dimensionalen Seiten sind die beiden Strecken. Ist Y eine dieser Strecken und z einer ihrer Endpunkte, dann gilt für $Z = \{z\}$ zwar $Z \in \mathcal{F}_0(Y)$, aber $Z \notin \mathcal{F}_0(X)$.

Satz 2.1.19

P sei ein Raumstück und Q eine Seite von P . Dann gilt:

$$\mathcal{F}(Q) = \{Y \in \mathcal{F}(P) \mid Y \subset Q\} .$$

Beweis: Wir zeigen zunächst $\{Y \in \mathcal{F}(P) \mid Y \subset Q\} \subset \mathcal{F}(Q)$. Diese Inklusion gilt allgemeiner, wenn P eine abgeschlossene konvexe Menge ist und Q eine Seite von P . Für $Y = \emptyset$ und $Y = Q$ gilt trivialerweise $Y \in \mathcal{F}(Q)$. Es sei also $Y \in \mathcal{F}(P)$ und $\emptyset \neq Y \subsetneq Q$. Es sei H ein Stützhalbraum von P , so dass $Y = P \cap \partial H$. Dann gilt auch $Y = Q \cap \partial H$ und $Q \subset H$, sowie $Q \not\subset \partial H$. Also ist H auch Stützhalbraum von Q und Y ist eine Seite von Q .

Wir zeigen jetzt die Inklusion $\mathcal{F}(Q) \subset \{y \in \mathcal{F}(P) \mid Y \subset Q\}$ durch Induktion über $n = \dim P$. Der Induktionsanfang ist trivial. Beim Induktionsschluß von $n - 1$ auf n unterscheiden wir zwei Fälle:

- (a) $\dim Q = n - 1$. Für eine eigentliche Seite $Y \in \mathcal{F}_{n-2}(Q)$ existiert nach Prop. 2.1.17 ein $Q' \in \mathcal{F}_{n-1}(P)$ mit $Y = Q \cap Q'$, so dass $Y \in \mathcal{F}(P)$ nach Prop. 2.1.12. Also gilt $\mathcal{F}_{n-2}(Q) \subset \mathcal{F}_{n-2}(P)$. Nach Prop. 2.1.14 und Satz 2.1.16 ist aber jede eigentliche Seite von Q ein Durchschnitt von maximalen Seiten aus $\mathcal{F}_{n-2}(Q)$. Daher folgt wegen Proposition 2.1.12 auch $\mathcal{F}(Q) \subset \mathcal{F}(P)$.
- (b) $\dim Q < n - 1$. Nach Satz 2.1.16 existiert ein $Q' \in \mathcal{F}_{n-1}(P)$ mit $Q \subset Q'$. Wegen der zuerst gezeigten Inklusion gilt $Q \in \mathcal{F}(Q')$. Daraus folgt $\mathcal{F}(Q) \subset \mathcal{F}(Q') \subset \mathcal{F}(P)$ wegen der Induktionsannahme und wegen (a). Damit ist der Satz bewiesen.

Zusammengenommen sagen uns die bisher bewiesenen Sätze über Raumstücke unter anderem folgendes über die Struktur des Randes ∂P eines Raumstücks P : Der Rand ∂P ist eine endliche Vereinigung von Raumstücken – nämlich der von P verschiedenen Seiten von P , der Elemente der partial geordneten Menge $\mathcal{F}[P]$. Mit je zwei Raumstücken dieser Menge gehört auch ihr Durchschnitt wieder dazu und ist eine gemeinsame Seite. Weiterhin enthält die Menge mit jedem Raumstück auch alle seine Seiten.

Wir haben ganz am Anfang bei der Einführung der Begriffe Polytop

und Raumstück schon bemerkt, dass die Raumstücke besonders einfache Polytope sind, und dass wir beliebige Polytope als endliche Vereinigungen von Raumstücken darstellen können. Im Fall der Polytope von der Form ∂P haben wir aber jetzt eine Darstellung als Vereinigung solcher einfachen Raumstücke gefunden, die nicht nur eine bloße mengentheoretische Vereinigung ist, sondern zusätzliche einfache und natürliche Eigenschaften hat, die sich auf die Seiten der Raumstücke beziehen.

Es liegt daher nahe, diese Eigenschaften zu axiomatisieren und zu definieren, wann eine Menge von solchen einfachen Bausteinen einen Komplex bildet. Das Wort "Komplex" steht natürlich für den Gegenbegriff zu "simplex", das heißt: "einfach". Da sich herausstellen wird, dass die einfachen Bausteine, die Raumstücke, gerade die konvexen Polytope sind, werden wir die zu definierenden Komplexe **Polytopkomplexe** nennen. Wenn die Bausteine, die konvexen Polytope, zusätzlich kompakt sind - was in der Literatur meist vorausgesetzt wird - sind sie homöomorph zu abgeschlossenen Kugeln. Die Topologen nennen sie **Zellen**, genauer: "**konvexe lineare Zellen**", und die Komplexe nennen sie "**konvexe-lineare-Zellenkomplexe**" oder auch "**Zellenkomplexe**" oder "**polyedrische Komplexe**" oder "**konvexe Komplexe**" oder "**geometrische Zellenkomplexe**".

Definition:

Ein **endlicher Polytopkomplex** in einem affinen Raum E ist eine endliche Menge \mathcal{K} von Raumstücken in E mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Für alle $P, Q \in \mathcal{K}$ gilt $P \cap Q \in \mathcal{F}(P) \cap \mathcal{F}(Q)$.
- (2) Für alle $P \in \mathcal{K}$ gilt $\mathcal{F}(P) \subset \mathcal{K}$.

Definition:

Die kanonische **Partialordnung auf einem Polytopkomplex** ist die Partialordnung durch die Inklusionsrelation.

Definition:

Die einem endlichen Polytopkomplex \mathcal{K} zugrunde liegende Menge ist das Polytop $|\mathcal{K}| = \bigcap_{P \in \mathcal{K}} P$. Ich nenne $|\mathcal{K}|$ auch den **Träger** von \mathcal{K} .

Aus Satz 2.1.11, Proposition 2.1.12, Korollar 2.1.15 und Satz 2.1.19 folgt, wie schon gesagt, der nächste Satz.

Satz 2.1.20

P sei ein Raumstück. Dann ist die Menge $\mathcal{F}(P)$ aller Seiten ein endlicher Polytopkomplex mit Träger $|\mathcal{F}(P)| = P$. Die Menge aller von P verschiedenen Seiten $\mathcal{F}[P]$ ist ein endlicher Polytopkomplex mit Träger $|\mathcal{F}[P]| = \partial P$.

Definition:

$\mathcal{F}(P)$ nenne ich den **zu P gehörigen Polytopkomplex**. $\mathcal{F}[P]$ nenne ich den **Randkomplex** von P .

Zur Definition von Komplexen ist noch einiges zu bemerken. Wenn \mathcal{K} ein endlicher Polytopkomplex in einem affinen Raum E ist, dann ist der Träger $|\mathcal{K}|$ als Teilmenge von E kompakt genau dann, wenn er beschränkt ist, denn $|\mathcal{K}|$ ist als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen natürlich abgeschlossen. $|\mathcal{K}|$ ist also genau dann kompakt, wenn alle Raumstücke $P \in \mathcal{K}$ kompakt sind. Wie schon gesagt, verstehen die Topologen unter polyedrischen Komplexen meist nur endliche Komplexe mit dieser zusätzlichen Eigenschaft. Bei unserer Terminologie müssten wir sie, um genau zu sein, als "endliche Komplexe von kompakten konvexen Polytopen" oder als "Polytopkomplexe mit kompaktem Träger" bezeichnen. Stattdessen werde ich sie – sprachlich nicht ganz genau – manchmal **kompakte Polytopkomplexe** nennen. Wenn man auch nichtkompakte Teilmengen eines affinen Raumes E aus einer Menge \mathcal{K} von kompakten konvexen Polytopen mit Komplex-Eigenschaften aufbauen will, muss man selbstverständlich zulassen, dass die Menge \mathcal{K} unendlich ist. Andererseits sieht man leicht, dass die Zulassung beliebiger unendlicher Komplexe von Polytopen zu vielen Komplikationen führen muss. So kommt man zu der folgenden Definition lokal endlicher Komplexe.

Definition:

Ein **lokal endlicher Polytopkomplex** in einem affinen Raum E ist eine Menge \mathcal{K} von Raumstücken in E mit folgenden Eigenschaften.

- (0) \mathcal{K} ist lokal endlich. Das heißt: Zu jedem Punkt p des **Trägers** $|\mathcal{K}| =$

$\bigcup_{p \in \mathcal{K}} P$ gibt es eine Umgebung U von p in E , so dass nur endlich viele $P \in \mathcal{K}$ mit U nicht leeren Durchschnitt haben.

- (1) Für alle $P, Q \in \mathcal{K}$ gilt $P \cap Q \in \mathcal{F}(P) \cap \mathcal{F}(Q)$.
- (2) Für alle $P \in \mathcal{K}$ gilt $\mathcal{F}(P) \subset \mathcal{K}$.

Beispiel:

E sei der 1-dimensionale affine Standardraum \mathbb{R} , und

$$\mathcal{K} = \left\{ \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \mid n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Dann ist \mathcal{K} ein lokal endlicher Komplex von kompakten konvexen Polytopen mit dem halboffenen Intervall $(0, 1]$ als Trägermenge.

Definition:

\mathcal{K} sei ein Polytopkomplex in E .

- (i) Ein **Unterkomplex** von \mathcal{K} ist eine Teilmenge $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$, die ein Polytopkomplex ist.
- (ii) Für jede natürliche Zahl $q \geq 0$ ist das **q-Gerüst** von \mathcal{K} der Unterkomplex $\mathcal{K}^q := \{P \in \mathcal{K} \mid \dim P \leq q\}$.
- (iii) $\mathcal{K}_0 := \{P \in \mathcal{K} \mid \dim P = 0\}$ ist die **Eckenmenge** von \mathcal{K} .

Das Wort “Gerüst” scheint mir gut gewählt, besonders, wenn ich an die schönen Darstellungen der 1-Gerüste von Polyedern durch die Künstler der Renaissance denke, von denen in der historischen Einleitung zwei Beispiele zu sehen waren. Ein anderes Wort wird in der Literatur in der gleichen Bedeutung verwendet: “**Skelett**”.

Eine besonders einfache und natürliche Art der Erzeugung von Polytopkomplexen in einem affinen Raum E geht von einer Anordnung von Hyperebenen in E aus.

Definition:

E sei ein affiner Raum. Eine **Anordnung** in E ist eine endliche Menge A von Hyperebenen in E .

In der Literatur wird statt des Wortes “Anordnung” heute meist das Wort ”**Arrangement**” verwendet, das mir aber nicht so gut gefällt. Der Begriff wird dem Leser vielleicht als sehr einfach und natürlich erscheinen, vielleicht als zu einfach, um eine formale Definition wert zu sein. Er ist nicht neu - systematische Untersuchungen über die durch solche Anordnungen gegebenen Raumteilungen führte schon der aus der Schweiz stammende bedeutende Geometer Jakob Steiner aus (“Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes”) [339]. Endliche Anordnungen von Hyperebenen in reellen und komplexen affinen oder projektiven Räumen finden noch und gerade heute wieder großes Interesse. Man lese dazu z.B. den Vortrag von P. Cartier im Séminaire Bourbaki 1980 “Les arrangements d’hyperplans: un chapitre de géométrie combinatoire” [79].

Wer glaubt, das Thema sei für ihn zu einfach, kann ja einmal versuchen, die verschiedenen kombinatorischen Typen von 6 Geraden in der euklidischen Ebene zu bestimmen. (Bevor man es mit 7 Geraden versucht, sollte man einen Blick in den Bericht über dieses Thema werfen, den B. Grünbaum in Kapitel 18 seines Buches “Convex Polytopes” gibt). Die beigelegte Zeichnung zeigt die kombinatorischen Typen derjenigen Anordnungen von 5 Geraden, die einfach sind, d.h. keine parallelen Geraden und keine Tripelpunkte enthalten.



Wir konstruieren nun zu jeder Anordnung \mathcal{A} in E einen endlichen Polytopkomplex $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ mit Träger E . Wir beginnen mit einer vorläufigen, sehr anschaulichen Definition, und geben dann eine formale, unserem Kontext besser angepasste Definition, die zu der anschaulichen äquivalent und im Grunde genauso einfach ist.

Die anschauliche Definition: Die endliche Menge \mathcal{A} von Hyperebenen $F \in \mathcal{A}$ zerlegt den n -dimensionalen Raum E in die Zusammenhangskomponenten von $E - \bigcup_{F \in \mathcal{A}} F$. Die abgeschlossene Hülle jeder Komponente ist ein Raumstück und $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ besteht aus allen diesen Raumstücken zusammen mit allen ihren Seiten. Jetzt kommt die formale Definition.

Definition:

E sei ein affiner Raum, $\mathcal{H}(E)$ die Menge seiner Halbräume und \mathcal{A} eine Anordnung von endlich vielen Hyperebenen in E . Dann ist $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ wie folgt definiert:

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) := \{H \in \mathcal{H}(E) \mid \partial H \in \mathcal{A}\}$$

$$\partial : \mathcal{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A} \text{ mit } \partial(H) = \partial H$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) := \{\mathcal{H} \subset \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid \partial \mathcal{H} = \mathcal{A}\}$$

$$P_{\mathcal{H}} := \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \text{ für } \mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{K}(\mathcal{A}) := \{P_{\mathcal{H}} \mid \mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})\} \cup \{\emptyset\} .$$

Proposition 2.1.22

Für jede endliche Menge \mathcal{A} von Hyperebenen in dem affinen Raum E ist $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ ein endlicher Polytopkomplex in E mit Träger $|\mathcal{K}(\mathcal{A})| = E$

Beweis: $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ ist endlich, weil \mathcal{A} , also auch $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ endlich sind. Die Elemente von $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ sind nach Definition Raumstücke. Die beiden Bedingungen für einen Komplex sind erfüllt, denn es gilt:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{H}} \cap P_{\mathcal{H}'} &= P_{\mathcal{H} \cup \mathcal{H}'} \\ \mathcal{F}(P_{\mathcal{H}}) &= \{P_{\mathcal{H}'} \mid \mathcal{H}' \supset \mathcal{H}\} \cup \{\emptyset\} . \end{aligned}$$

Schließlich gilt auch $|\mathcal{K}(\mathcal{A})| = E$, denn wir können das kleinste Element P_x von $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, das einen gegebenen Punkt $x \in E$ enthält, sofort angeben: Es

sei $\mathcal{H}_x = \{H \in \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid x \in H\} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Dann gilt $P_x = P_{\mathcal{H}_x}$

Proposition 2.1.23

Für jedes Polytop P in einem affinen Raum E gibt es eine endliche Menge \mathcal{A} von Hyperebenen in E und einen Unterkomplex \mathcal{K} des zu \mathcal{A} gehörigen Polytopkomplexes $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, so dass P der Träger von \mathcal{K} ist, also $P = |\mathcal{K}|$.

Beweis: P sei als endliche Vereinigung $P = \bigcap_{i \in I} P_i$ von Raumstücken P_i dargestellt. Jedes P_i sei als endlicher Durchschnitt

$$P_i = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_i} H$$

von Halbräumen H einer endlichen Menge $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}(E)$ von Halbräumen dargestellt. $\mathcal{H} = \bigcup \mathcal{H}_i$ sei ihre Vereinigung. Wir definieren die gesuchte Anordnung \mathcal{A} durch

$$\mathcal{A} = \{\partial H \mid H \in \mathcal{H}\}$$

und wir definieren den gesuchten Unterkomplex $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$ wie folgt:

$$\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{K}(\mathcal{A}) \mid X \subset P\}.$$

Die beiden Komplexbedingungen sind offensichtlich erfüllt. Es bleibt nur $|\mathcal{K}| = P$ zu zeigen. $|\mathcal{K}| \subset P$ gilt nach Definition. Bleibt also, $P \subset |\mathcal{K}|$ zu zeigen. Es sei $x \in P$ und wieder $\mathcal{H}_x = \{H \in \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid x \in H\}$ und $P_x = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_x} H$ das kleinste x enthaltende Element in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Es sei $i \in I$ ein Element, so dass $x \in P_i$. Dann gilt $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}_x$, also $P_x \subset P_i$, also $P_x \in \mathcal{K}$ und daher $x \in |\mathcal{K}|$. Damit ist alles bewiesen. Das folgende Bild illustriert die Proposition.



Zusatz:

Ist P als endliche Vereinigung von Raumstücken $P = \bigcap_{i \in I} P_i$ dargestellt, dann können \mathcal{A} und \mathcal{K} so gewählt werden, dass jedes P_i Träger $P_i = |\mathcal{K}_i|$ eines Unterkomplexes \mathcal{K}_i von \mathcal{K} ist und $\mathcal{K} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{K}_i$.

Beweis: Der obige Beweis zeigt, dass für das wie folgt definierte \mathcal{K}_i , die Aussage des Zusatzes gilt:

$$\mathcal{K}_i := \{X \in \mathcal{K}(\mathcal{A}) \mid X \subset P_i\}$$

Wir wollen nun die Darstellung von Polytopen als Träger von Unterkomplexen $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$ benutzen, um zu zeigen, dass die Raumstücke mit den konvexen Polytopen identisch sind. Diesen Beweisansatz habe ich in Reide-meisters Buch *“Topologie der Polyeder”* gefunden [299, p. 75].

Definition:

Eine Hyperebene $F \subset E$ in einem affinen Raum E **zerlegt** eine Teilmenge $X \subset E$, wenn der Durchschnitt von X mit beiden Zusammenhangskomponenten von $E - F$ nicht leer ist.

Definition:

Eine Anordnung \mathcal{A} von Hyperebenen in E zerlegt einen Unterkomplex \mathcal{K} von $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, wenn es ein $F \in \mathcal{A}$ gibt, welches den Träger $|\mathcal{K}|$ zerlegt.

Lemma 2.1.24

\mathcal{A} sei eine Anordnung in E und $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ der zugehörige Polytopkomplex. Die von \mathcal{A} nicht zerlegten Unterkomplexe $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$ mit konvexem Träger $|\mathcal{K}|$ sind genau die Komplexe $\mathcal{K} = \mathcal{F}(P)$, die zu den Raumstücken $P \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ gehören.

Beweis: Die Unterkomplexe $\mathcal{F}(P)$ haben natürlich den konvexen Träger $|\mathcal{F}(P)| = P$, und sie werden nach Konstruktion durch \mathcal{A} nicht zerlegt. Es sei also umgekehrt $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$ ein durch \mathcal{A} nicht zerlegter Unterkomplex mit konvexem Träger. O.B.d.A. sei dieser Träger nicht leer. Wir wählen einen Punkt $x \in |\mathcal{K}|^\circ$ im relativen Inneren der konvexen Menge $|\mathcal{K}|$. Wie oben sei $\mathcal{H}_x = \{H \in \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid x \in H\}$ und $P_x = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_x} H$ das kleinste x enthaltende Element von $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Wir behaupten: $\mathcal{K} = \mathcal{F}(P_x)$. Beweis: Weil \mathcal{K} durch \mathcal{A} nicht zerlegt wird, gilt für jedes $F \in \mathcal{A}$, dass $F \cap |\mathcal{K}| \in \mathcal{F}(|\mathcal{K}|)$, also entweder $F \cap |\mathcal{K}| = |\mathcal{K}|$ oder $F \cap |\mathcal{K}|^\circ = \emptyset$. Für die $H \in \mathcal{H}_x$ ergibt sich daraus: Wenn $x \in \partial H$, gilt $|\mathcal{K}| \subset \partial H$, und wenn $x \notin \partial H$, gilt $|\mathcal{K}| \subset H$, weil ∂H nicht zerlegt. Also gilt in jedem Fall $|\mathcal{K}| \subset H$ für alle $H \in \mathcal{H}_x$ mithin $|\mathcal{K}| \subset P_x$, und da natürlich $P_x \in \mathcal{K}$ gilt, folgt $|\mathcal{K}| = P_x$, also $\mathcal{K} = \mathcal{F}(P_x)$.

Definition:

Die **Dimension** eines Polytopkomplexes K ist

$$\dim \mathcal{K} = \max\{\dim P \mid P \in \mathcal{K}\} .$$

Ein Polytopkomplex \mathcal{K} heißt **homogen**, wenn für alle maximalen Elemente $P \subset \mathcal{K}$ gilt: $\dim P = \dim \mathcal{K}$.

Proposition 2.1.25

Ein Polytopkomplex K mit konvexem Träger $|\mathcal{K}|$ ist homogen, und es gilt $\dim \mathcal{K} = \dim |\mathcal{K}|$.

Beweis: Die Behauptung ist äquivalent zu der Aussage, dass für jedes maximale $P \in \mathcal{K}$ der Träger $|\mathcal{K}|$ in der affinen Hülle $A(P)$ enthalten ist. Dies folgt aber in der Tat aus der Konvexität. Beweis: Wir wählen ein $p \in P^\circ$. Gäbe es ein $q \in |\mathcal{K}| - A(P)$, dann gäbe es wegen der Konvexität von $|\mathcal{K}|$ auf der Strecke $[p, q]$ beliebig dicht bei p Punkte aus $|\mathcal{K}| - P$. Also gäbe es ein $P \neq Q \in \mathcal{K}$ mit $p \in Q \cap P^\circ$. Aber dann folgt wegen der Komplexbedingungen $P \subsetneq Q$ im Widerspruch zur Maximalität von P .

Proposition 2.1.26

A sei eine Anordnung von Hyperebenen in E , und $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}(A)$ ein Unterkomplex mit konvexem Träger. $F \in A$ sei eine Hyperebene, die $|\mathcal{K}|$ zerlegt. \mathcal{A}' sei die Anordnung $\mathcal{A} - \{F\}$. Dann gibt es einen Unterkomplex $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}(\mathcal{A}')$ mit Träger $|\mathcal{K}'| = |\mathcal{K}|$.

Beweis: Man sieht leicht, dass wir o.B.d.A. annehmen können, dass E die affine Hülle von $|\mathcal{K}|$ ist. Die Ebene F zerlegt E in die Halbräume H^+ und H^- . Wir definieren zwei Unterkomplexe $\mathcal{K}^+ \cup \mathcal{K}^-$ von \mathcal{K} durch $\mathcal{K}^\pm =$

$\{x \in \mathcal{K} \mid X \subset H^\pm\}$. Dann gilt $\mathcal{K}^+ \cup \mathcal{K}^- = \mathcal{K}$, und $|\mathcal{K}^\pm| = |\mathcal{K} \cap H^\pm|$ ist konvex mit $\dim |\mathcal{K}^\pm| = n = \dim E$, weil $|\mathcal{K}|$ von F zerlegt wird.

Den Komplex $|\mathcal{K}'|$ definieren wir als $\mathcal{K}' = \{Y \in \mathcal{K}(\mathcal{A}') \mid Y \subset |\mathcal{K}|\}$. Es ist klar, dass dies ein Unterkomplex von $\mathcal{K}(\mathcal{A}')$ ist, und dass gilt:

$|\mathcal{K}'| \subset |\mathcal{K}|$. Zu zeigen ist $|\mathcal{K}| \subset |\mathcal{K}'|$. Es genügt, dies für die maximalen $P \in \mathcal{K}$ zu zeigen. Nach Proposition 2.1.25 sind dies wegen der Konvexität von $|\mathcal{K}|$ die P mit $\dim P = n$. Es sei o.B.d.A. angenommen, dass $P \in \mathcal{K}^+$. Nun sei P' das kleinste Element von $\mathcal{K}(\mathcal{A}')$, das P enthält. Es ist der Durchschnitt der $H \in \mathcal{H}(\mathcal{A}')$ mit $P \subset H$, und es gilt $P = P' \cap H^+$. Es genügt, $P' \in \mathcal{K}'$ zu zeigen, d.h. $P' \subset |\mathcal{K}|$.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall (1): $\dim P \cap F < n - 1$. Dann ist $P \cap F$ keine maximale Seite von P , und mit Hilfe von Satz 2.1.16 folgert man leicht: $P' = P$.

Fall (2): $\dim P \cap F = n - 1$. Dann schließen wir wie folgt: $P \cap F$ gehört auch zu \mathcal{K}^- . Da \mathcal{K}^- homogen ist, existiert in \mathcal{K}^- ein n -dimensionales Element P mit dieser Seite, also $P^- \cap F = P^+ \cap F$. Andererseits ist $P' \cap H^-$ ein n -dimensionales Element in $\mathcal{K}(\mathcal{A}')$, das ebenfalls in H^- liegt und F ebenfalls in dieser $(n-1)$ -dimensionalen Seite schneidet. Daraus folgt offenbar $P' \cap H^- = P^-$, also $P' = P^+ \cup P^- \subset |\mathcal{K}|$. q.e.d.

Satz 2.1.27

Die Raumstücke sind genau die konvexen Polytope. Sie sind die Durchschnitte derjenigen sie enthaltenden Halbräume, welche von den affinen Hüllen der endlich vielen maximalen eigentlichen Seiten des Polytops berandet werden.

Beweis: Dass Raumstücke konvexe Polytope sind, ist trivial. Ist umgekehrt P ein konvexes Polytop in E , dann kann man nach Prop. 2.1.23 eine Anordnung \mathcal{A} in E finden, so dass P der Träger $|\mathcal{K}|$ eines Unterkomplexes $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$ ist. Wegen Prop. 2.1.26 kann man sukzessive alle eventuell vorhandenen P zerlegenden Hyperebenen von \mathcal{A} fortlassen, so dass man also annehmen kann, dass \mathcal{A} den Komplex \mathcal{K} nicht zerlegt. Aber dann folgt aus Lemma 2.1.24, dass P ein Raumstück ist. Der zweite Teil des Satzes folgt daher aus Satz 2.1.16.

Die konvexen Polytope können, das wissen wir jetzt, mit Hilfe ihrer maximalen Seiten beschrieben werden. Das war der Ausgangspunkt für die Behandlung der 3-dimensionalen Polytope in der Antike, der in ihrem Namen "Polyeder" aufgehoben ist. Euklid, Buch XI, Definition 2: "*Die Begrenzung eines Körpers ist seine Oberfläche*". Definition 9: "*Ähnlich sind Körper, die von ähnlichen ebenen Flächen in gleicher Anzahl umfasst werden*", eine Definition, die für kompakte konvexe Polytope durch den Satz von Cauchy gerechtfertigt wurde. Kompakte konvexe Polytope sind zweifellos das, was Euklid hier mit Körpern meint, und in diesem Sinn wird das Wort "Körper" z.B. auch von H. Minkowski verwendet, wenn er von Polytopen spricht. (Allgemeiner versteht Minkowski unter einem *konvexen Körper* in einem affinen Raum E eine kompakte konvexe Teilmenge mit affiner Hülle E .)

Wer zu reduktionistischem Denken neigt, wird sich fragen, ob die konvexen Polytope nicht auch mit Hilfe ihrer minimalen Seiten charakterisiert werden können. Für beliebige konvexe Polytope ist das natürlich nicht der Fall. Beispielsweise haben alle Winkelsektoren in der euklidischen Ebene mit Winkelmaß $0 < \alpha < \pi$ als einzige minimale Seite die aus ihrem Scheitelpunkt bestehende Menge, und aus dieser Ecke allein lässt sich natürlich der Winkelsektor nicht rekonstruieren.

Für kompakte konvexe Polytope sind die minimalen eigentlichen Seiten gerade die Ecken. Es ist eine ganz grundlegende Tatsache, dass die kompakten konvexen Polytope auch mit Hilfe ihrer minimalen Seiten beschrieben werden können. Wir werden zeigen: Die kompakten konvexen Polytope sind die konvexen Hüllen ihrer Eckpunkte.

Was ist die konvexe Hülle einer Teilmenge $X \in E$ in einem affinen Raum E ? Da der Durchschnitt einer beliebigen Menge von konvexen Mengen in E wieder eine konvexe Menge in E ist, ist der Durchschnitt aller konvexen Mengen, die X enthalten, eine konvexe Menge, die X enthält und in allen konvexen Mengen enthalten ist, welche X enthalten. Es existiert also zu jedem $X \in E$ eine eindeutig bestimmte kleinste konvexe Menge in E die X enthält.

Definition:

X sei eine Teilmenge eines affinen Raumes E . Die **konvexe Hülle** von X ist die kleinste konvexe Menge $C(X)$ in E , die X enthält.

Ein wenig expliziter als diese kategorische Definition der konvexen Hülle ist ihre Beschreibung durch konvexe Linearkombinationen. Wir erinnern an die diesbezüglichen Definitionen in §8 aus Band I und in den zugehörigen Aufgaben. E sei ein reeller affiner Raum, von $x_0, \dots, x_n \in E$ Punkte von E und $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit Summe $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$. Identifiziert man E durch Auszeichnung eines Ursprungspunktes $0 \in E$ mit seinem Translationsvektorraum, dann werden die Punkte x_0, \dots, x_n zu Vektoren, und man kann die Linearkombination $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n$ bilden. Diese Linearkombination hängt aber wegen der Bedingung $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ offenbar nicht von der Wahl des Punktes $0 \in E$ ab, sondern ist $x_0, \dots, x_n \in E$ und $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ durch die affine Struktur von E eindeutig zugeordnet. $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n$ heißt deswegen die **affine Linearkombination** zu $(x_0, \dots, x_n) \in E^n$ und $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Die Menge aller dieser affinen Linearkombinationen zu festem (x_0, \dots, x_n) hängt nur von $\{x_0, \dots, x_n\}$ ab. Sie ist gerade die affine Hülle von $\{x_0, \dots, x_n\}$.

Definition:

Die **konvexen Linearkombinationen** von $\{x_0, \dots, x_n\} \subset E$ sind die affinen Linearkombinationen mit nichtnegativen Koeffizienten, d.h. die Linearkombinationen

$$\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n$$

mit $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ und $\lambda_0, \dots, \lambda_n \geq 0$.

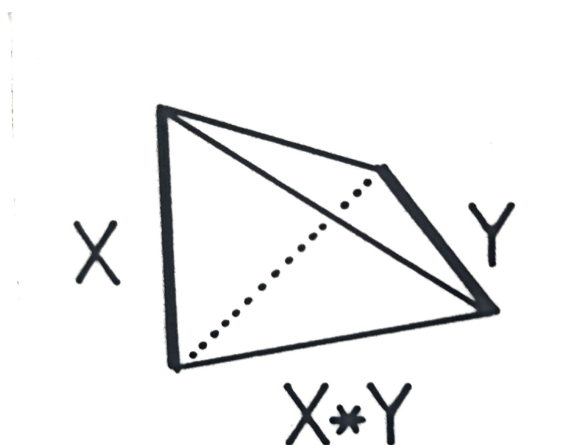
Die Strecke $[x, y]$ zwischen zwei Punkten $x, y \in E$ in einem affinen Raum ist nach Definition gerade die Menge aller konvexen Linearkombinationen. Dementsprechend wollen wir wenigstens für den Moment die Menge aller konvexen Linearkombinationen von $\{x_0, \dots, x_n\}$ mit $[x_0, \dots, x_n]$ bezeichnen. Ein zu diesem und vielen anderen Zusammenhängen wichtiger Begriff ist der Begriff der konvexen Verbindung von zwei Mengen (in der englischen Literatur "join" genannt).

Definition:

Die **konvexe Verbindung** von zwei nichtleeren Teilmengen $X, Y \subset E$ eines affinen Raumes E ist die folgende Teilmenge von E :

$$X * Y := \bigcup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} [x, y].$$

Wir setzen $X * \emptyset = X$ und $\emptyset * Y = Y$. Die Verbindung $X * Y$ entsteht also dadurch, dass man jeden Punkt $x \in X$ mit jedem Punkt $y \in Y$ durch die Strecke $[x, y]$ verbindet.



Die Verbindung von zwei zueinander windschiefen Strecken, die nicht einpunktig sind, ist ein Tetraeder. Liegen die Strecken in einer Ebene, und lässt man auch einpunktige Strecken zu, dann ergibt sich je nach Lage ein Punkt oder eine Strecke oder ein Dreieck oder ein Viereck. In jedem Fall ist $[a, b] * [c, d]$ konvex. Daraus ergibt sich sofort die folgende Aussage, die man natürlich auch analytisch beweisen kann.

Proposition 2.1.28

Die konvexe Verbindung $X * Y$ konvexer Mengen X, Y ist konvex.

Die Beweise der folgenden Aussagen sind so leichte Übungen, dass wir sie wohl übergehen dürfen.

Proposition 2.1.29

Für $x_0, \dots, x_n \in E$ und $k < n$ gilt:

$$[x_0, \dots, x_k] * [x_{k+1}, \dots, x_n] = [x_0, \dots, x_n]$$

Proposition 2.1.30

$$C(\{x_0, \dots, x_n\}) = [x_0, \dots, x_n]$$

Proposition 2.1.31

Für eine beliebige Menge $X \subset E$ in einem affinen Raum E ist die konvexe Hülle $C(X)$ die Menge aller konvexen Linearkombinationen von endlich vielen Punkten aus X . Also:

$$C(X) = \bigcup_{\substack{Y \subset X \\ \text{card}(Y) < \infty}} C(Y)$$

Bemerkung: C. Carathéodory hat 1911 die folgende wichtige Verschärfung von Proposition 2.1.31 bewiesen [78].

$$C(X) = \bigcup_{\substack{Y \subset X \\ \text{card}(Y) \leq \dim E + 1}} C(Y)$$

Korollar 2.1.32

Die konvexe Hülle einer endlichen Menge ist kompakt.

Bemerkung: Aus Carathéodory Satz folgt leicht die folgende schon vorher von Carathéodory bewiesene wesentliche Verallgemeinerung von Korollar 2.1.32: Die konvexe Hülle einer kompakten Menge ist kompakt.

Proposition 2.1.33

In dem affinen Raum E sei H ein Halbraum und $X \subset H$ eine Teilmenge von H . Dann gilt:

$$C(X) \cap \partial H = C(X \cap \partial H)$$

Beweis: Die Inklusion $C(X \cap \partial H) \subset C(X) \cap \partial H$ ist trivial. Wir zeigen die umgekehrte Inklusion. Es sei $p \in C(X) \cap \partial H$. Dann liegt p in der konvexen Hülle einer endlichen Teilmenge $X' \subset X$. Man zerlegt X' in $Y = X' \cap H^\circ$

und $Z = X' \cap \partial H$. Wenn Y leer ist, ist man fertig. Ist Y nicht leer, so findet man Punkte $y \in C(Y) \subset H^\circ$ und $z \in C(Z) \subset \partial H$, so dass $p \in [y, z]$. Aus $p \neq z$ würde $p \in H^\circ$ folgen. Also gilt $p = z \in C(X \cap \partial H)$.

Korollar 2.1.34

E sei ein affiner Raum und $x \subset E$ eine endliche Teilmenge mit affiner Hülle E . Dann gilt

$$\mathcal{F}[C(X)] = \{C(Y) \mid Y = X \cap \partial H, X \subset H, H \in \mathcal{H}(E)\}$$

Korollar 2.1.34 besagt insbesondere, dass die konvexe Hülle einer endlichen Menge nur endlich viele Seiten hat. Sie ist also eine kompakte und daher insbesondere abgeschlossene konvexe Menge mit nur endlich vielen Seiten. Die konvexen Mengen mit nur endlich vielen Seiten sind aber nach Korollar 2.1.15 die Raumstücke.

Satz 2.1.35

Die konvexe Hülle jeder endlichen Punktmenge ist ein kompaktes Raumstück.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt auch.

Satz 2.1.36

Jedes kompakte Raumstück P ist die konvexe Hülle einer endlichen Menge, nämlich seiner Eckenmenge $\mathcal{F}_0(P)$.

Bemerkung: Wir gestatten uns, die Menge $\mathcal{F}_0(p)$ der Ecken $\{p\}$ mit der Menge der Eckpunkte p zu identifizieren.

Beweis: Trivialerweise gilt $C(\mathcal{F}_0(P)) \subset P$. Die umgekehrte Inklusion zeigen wir durch Induktion über $\dim P$. Der Induktionsanfang ist trivial. Wir schließen wie folgt von der Dimension $\leq n - 1$ auf die Dimension n . Nach Satz 2.1.11 ist der Rand ∂P die Vereinigung der eigentlichen Seiten $Q \in \mathcal{F}[P]$. Für sie gilt $\mathcal{F}_0(Q) \subset \mathcal{F}_0(P)$ nach Satz 2.1.19. Daraus und aus der Induktionshypothese folgt $Q = C(\mathcal{F}_0(Q)) \subset C(\mathcal{F}_0(P))$, also $\partial P \subset C(\mathcal{F}_0(p))$. Es genügt also, $P^\circ \subset C(\partial P)$ zu zeigen. Es sei $p \in P^\circ$ irgendein Punkt im Inneren. Wir wählen eine affine Gerade L durch p . Dann ist der Schnitt von

L mit der kompakten konvexen Menge P ein kompaktes Intervall mit p als inneren Punkt. Der Rand $\partial(L \cap P)$ besteht also aus zwei Punkten $a, b \in \partial P$, und es folgt $p \in [a, b] \subset C(\partial P)$.

Zusatz:

Aus $P = C(X)$ folgt $X \supset \mathcal{F}_0(P)$.

Beweis: p sei eine Ecke von P , und H sei ein Stützhalbraum mit $\partial H \cap P = \{p\}$. Aus Prop. 2.1.33 folgt $\{p\} = P \cap \partial H = C(X) \cap \partial H = C(X \cap \partial H)$, also $X \cap \partial H = \{p\}$.

Wir fassen unsere Ergebnisse in einem Theorem zusammen, das wir in Anlehnung an Hermann Weyl als **Hauptsatz der elementaren Polyedertheorie** bezeichnen wollen [372].

Theorem 2.1.37

Die folgenden Aussagen über eine Teilmenge P eines affinen Raumes E sind äquivalent:

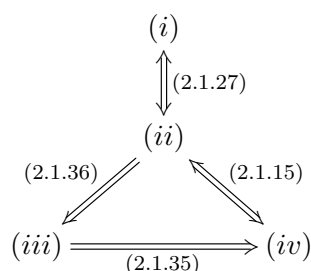
- (i) P ist ein kompaktes konvexes Polytop.
- (ii) P ist ein kompaktes Raumstück, d.h. ein kompakter Durchschnitt endlich vieler Halbräume.
- (iii) P ist die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge.
- (iv) P ist eine kompakte konvexe Menge mit endlich vielen Seiten.

Für ein n -dimensionales kompaktes konvexes Polytop P sind die maximalen von P verschiedenen Seiten genau die Seiten der Dimension $n - 1$, und die minimalen von 0 verschiedenen Seiten sind die Ecken, d.h. die Seiten der Dimension 0. Zu diesen Seiten aus $\mathcal{F}_{n-1}(P)$ bzw. $\mathcal{F}_0(P)$ gehören kanonisch minimale Darstellungen von P als Raumstück bzw. als konvexe Hülle, nämlich

- (a) $P = \bigcap_{Q \in \mathcal{F}_{n-1}(P)} H_Q$
- (b) $P = C(\mathcal{F}_0(P))$

Dabei ist in (a) $\dim P = \dim E$ vorausgesetzt, und H_Q ist der P enthaltende Halbraum mit $\partial H_Q = A(Q)$.

Beweis: Alle Aussagen wurden bereits bewiesen. Die Darstellung (a) in Satz 2.1.16 und (b) in Proposition 2.1.36. Das folgende Diagramm von Implikationspfeilen gibt die Nummern der Sätze an, in denen die fragliche Implikation bewiesen wurde:



Bisher haben wir aus der Gesamtheit aller Polytope die konvexen Polytope besonders hervorgehoben als die einfachen Elemente, aus denen jedes Polytop als Träger eines Komplexes solcher einfachen Elemente erzeugt werden kann. Nun ist die Struktur eines solchen einfachen Elementes, also eines konvexen Polytops P , die wir wenigstens im kompakten Fall sehr adäquat durch die endliche partial geordnete Menge $\mathcal{F}(P)$, d.h. den Komplex der Seiten, beschreiben können, zwar gewiß einfacher als die Struktur allgemeiner Polytopkomplexe. Sie ist indessen, wenn man die Gesamtheit aller konvexen Polytope in Betracht zieht, immer noch von unüberschaubarer Komplexität, so dass beispielsweise eine sinnvolle Klassifikation aller konvexen Polytope kaum denkbar ist. Es stellt sich also die Frage, ob es unter den konvexen Polytopen nicht besonders einfache gibt, aus denen sich alle anderen durch Komplexbildung aufbauen lassen. Wir werden sehen, dass dies in der Tat der Fall ist, wenn wir uns auf kompakte konvexe Polytope beschränken. Dabei legt es der Hauptsatz der elementaren Polyedertheorie nahe, die Einfachheit oder Komplexität entweder mit Hilfe der maximalen oder mit Hilfe der minimalen eigentlichen Seiten zu erfassen. Beide Ansätze können wir auch auf nichtkompakte konvexe Polytope anwenden.

Wenn ein konvexes Polytop gar keine eigentlichen Seiten hat, ist es leer oder ein affiner Raum. Dieser Fall ist nicht interessant. Also betrachten wir konvexe Polytope P mit nichtleerer eigentlicher Seitenmenge $\mathcal{F} < P >$. Dann enthält $\mathcal{F} < P >$ maximale und minimale Elemente. Die maximalen Elemente sind die $(n - 1)$ -dimensionalen, wenn $n = \dim P$. Die minimalen können, solange wir nicht kompakte P zulassen, irgendeine Dimension zwischen 0 und $n - 1$ haben. Für kompaktes P sind sie 0-dimensional, also Ecken. Eine ziemlich einfache Situation liegt offenbar dann vor, wenn nur eine maximale Seite oder nur eine minimale eigentliche Seite vorhanden ist. Ein konvexes Polytop mit genau einer maximalen eigentlichen Seite ist nach Satz 2.1.16 ein Halbraum. Diese Polytope sind die einfachsten Polytope überhaupt. Ein konvexes Polytop P mit genau einer minimalen eigentlichen Seite Q_0 hat offensichtlich die folgende Eigenschaft: Q_0 ist in allen eigentlichen Seiten enthalten. Insbesondere ist Q_0 in den maximalen eigentlichen Seiten enthalten, und da 0 nicht leer ist, haben die affinen Hüllen dieser maximalen Seiten mindestens einen Punkt gemeinsam. Dies führt zu der folgenden Definition.

Definition:

Ein **polyedrischer konvexer Kegel** in einem affinen Raum E ist ein endlicher Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} H_i$, so dass $\bigcap_{i \in I} \partial H_i$ nicht leer ist.

Insbesondere ist $I = \emptyset$ zugelassen, wobei dann definitionsgemäß der Durchschnitt gleich E ist.

Die folgende, schon oben gemachte Aussage ist trivial,

Proposition 2.1.38

Die polyedrischen konvexen Kegel in einem affinen Raum E sind genau die nichtleeren konvexen Polytope mit höchstens einer minimalen eigentlichen Seite.

Die Eindeutigkeit der maximalen Seite führt also auf die Halbräume, die Eindeutigkeit der minimalen Seite auf die polyedrischen konvexen Kegel. Gehen wir von den Halbräumen aus, dann kommen wir zu Darstellung der konvexen Polytope als Raumstücke, als Durchschnitt endlich vieler Halbräume.

Umgekehrt liefern die polyedrischen Kegel auch eine Darstellung der konvexen Polytope.

Definition:

P sei ein konvexes Polytop in $E = A(P)$, und $P = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ seine kanonische minimale Darstellung als Durchschnitt von Halbräumen. $Q \in \mathcal{F} < P >$ sei eine eigentliche Seite. Der **Kegel** K_Q zu Q ist der folgende polyedrische konvexe Kegel:

$$K_Q = \bigcap_{\substack{H \in \mathcal{H} \\ Q \subset \partial H}} H$$

Ist Q eine Ecke, dann nennen wir K_Q den **Eckenkegel** zu Q .

Selbstverständlich ist ein konvexes Polytop P , wenn es überhaupt eigentliche Seiten hat, der Durchschnitt aller zu den Seiten Q gehörigen Kegel K_Q , denn für die maximalen Q gibt es ja genau ein $H \in \mathcal{H}$ mit $Q \subset \partial H$, so dass $K_Q = H$ gilt. Diese K_Q sind maximal unter den zu den Seiten gehörigen Kegeln. Bei einer Darstellung von P als Durchschnitt von Kegeln K_Q ist es aber ökonomischer, von minimalen Kegeln K_Q auszugehen. Diese gehören natürlich gerade zu den minimalen Seiten. Dann kommt man trivialerweise zu dem folgenden Ergebnis.

Proposition 2.1.39

Jedes konvexe Polytop P in einem affinen Raum $E = A(P)$ ist der Durchschnitt der zu seinen minimalen eigentlichen Seiten gehörigen Kegel K_Q . Insbesondere ist jedes nichtleere kompakte konvexe Polytop P in $A(P)$ Durchschnitt seiner Eckenkegel.

Was sind die einfachsten Ecken?

Proposition 2.1.40

In jeder Ecke eines n -dimensionalen konvexen Polytops P treffen sich mindestens n maximale eigentliche Seiten von P .

Beweis: Aus Proposition 2.1.14 und Satz 2.1.16 folgt für jeden Eckpunkt p von P

$$\{p\} = \bigcap_{p \in Q \in \mathcal{F}_{n-1}(P)} A(Q) .$$

Daraus folgt sofort, dass es mindestens n Seiten $Q \in \mathcal{F}_{n-1}(P)$ mit $p \in Q$ gibt.

Definition:

Ein n -dimensionaler **simplizialer Kegel** ist ein n -dimensionaler polyedrischer konvexer Kegel mit n maximalen eigentlichen Seiten.

Der **n -dimensionale simpliziale Standardkegel** ist

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \geq 0\} .$$

Für $n \leq 3$ haben diese Standardkegel im euklidischen Standardraum \mathbb{R}^n klassische Namen:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^1 & \text{ ist die } \mathbf{positive\ Halbgerade}, \\ \mathbb{R}_+^2 & \text{ ist der } \mathbf{positive\ Quadrant}, \\ \mathbb{R}_+^3 & \text{ ist der } \mathbf{positive\ Oktant} . \end{aligned}$$

Alle n -dimensionalen simplizialen Kegel sind vom gleichen kombinatorischen Typ wie der n -dimensionale simpliziale Standardkegel, denn die partial geordnete Menge ihrer nichtleeren Seiten ist ordnungstreu isomorph zur Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$. Es ist nämlich eine einfache Übung, das Folgende zu beweisen.

Proposition 2.1.41

P sei ein n -dimensionaler simplizialer Kegel, und $\mathcal{P}(\mathcal{F}_{n-1}(P))$ die durch Inklusion geordnete Potenzmenge der Menge $\mathcal{F}_{n-1}(P)$ der maximalen Seiten. Dann definiert für $Q \in \mathcal{F}(P) - \{\emptyset\}$ die Zuordnung $Q \mapsto \{X \in \mathcal{F}_{n-1}(P) \mid Q \subset X\}$ ein ordnungsumkehrende bijektive Abbildung

$$\mathcal{F}(P) - \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}_{n-1}(P)) .$$

Die simplizialen Kegel sind in gewissem Sinne die einfachsten Kegel. Man kann zeigen, dass jeder konvexe polyedrische Kegel sich als Träger eines Komplexes von simplizialen Kegeln darstellen lässt. Diese Tatsache ist nicht nur an sich interessant, sondern hat auch interessante Anwendungen in anderen Gebieten der Mathematik, u.a. in der algebraischen Geometrie

bei der Auflösung gewisser Singularitäten mit der Methode der toroidalen Einbettungen (vgl. D. Mumford et al. [269] und T. Oda [277]).

2.2 Simplices und simpliziale Komplexe

Wir stellen uns jetzt die Frage: Was sind die einfachsten kompakten konvexen Polytope? Zwei Antworten bieten sich an: die mit der minimal möglichen Eckenzahl, oder die mit der minimal möglichen Anzahl maximaler Seiten. Es stellt sich heraus, dass beide Antworten die gleichen Polytope beschreiben.

Proposition 2.1.42

Für n -dimensionale kompakte konvexe Polytope gilt:

- (i) $\text{card } \mathcal{F}_0(P) \geq n + 1$,
- (ii) $\text{card } \mathcal{F}_{n-1}(P) \geq n + 1$,
- (iii) $\text{card } \mathcal{F}_0(P) = n + 1 \Leftrightarrow \text{card } \mathcal{F}_{n-1}(P) = n + 1$.

Beweis: Aus $P = C(\mathcal{F}_0(P))$ folgt $\dim P = \dim A(\mathcal{F}_0(P)) \leq \text{card } \mathcal{F}_0(P) - 1$, also (i). Aus der Gleichheit $\dim A(\mathcal{F}_0(P)) = \text{card } \mathcal{F}_0(P) - 1$ folgt für alle $Y \subset \mathcal{F}_0(P)$ offenbar $\dim A(Y) = \text{card } Y - 1$. Insbesondere folgt dann $\text{card } \mathcal{F}_{n-1}(P) = n + 1$ wegen Korollar 2.1.34, und das beweist die Implikation “ \Rightarrow ” von (iii). Die Implikation “ \Leftarrow ” und (ii) folgen aus Prop. 2.1.40.

Definition:

Ein **n -dimensionales Simplex** in einem affinen Raum E ist ein n -dimensionales kompaktes konvexes Polytop in E mit $n + 1$ Ecken.

Das **n -dimensionale Standardsimplex** ist das Simplex Δ_n in \mathbb{R}^{n+1} mit den Eckpunkten $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$.

$$\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 1\} .$$

Alle n -dimensionalen Simplices sind vom gleichen kombinatorischen Typ wie das Standardsimplex Δ_n . Ihr Seitenkomplex ist ordnungstreu isomorph zur

Potenzmenge $\mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$. Denn aus Korollar 2.1.34 ergibt sich leicht die folgende Aussage.

Proposition 2.1.43

P sei ein n -dimensionales Simplex, X die Menge der $n + 1$ Eckpunkte von P und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge. Dann definiert für $Y \in \mathcal{P}(X)$ die Zuordnung $Y \mapsto C(Y)$ eine ordnungserhaltende bijektive Abbildung

$$\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{F}(P) .$$

Insbesondere sind die Seiten von P Simplices der Dimension $\dim C(Y) = \text{card } Y - 1$. Die Simplices sind die einfachsten kompakten konvexen Polyeder überhaupt. Diejenigen von der Dimension $n \leq 3$ haben besondere Namen:

$$\begin{aligned} n &= -1 && \text{leere Menge,} \\ n &= 0 && \text{Punkt,} \\ n &= 1 && \text{Strecke,} \\ n &= 2 && \text{Dreieck,} \\ n &= 3 && \text{Tetraeder.} \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt mit einigen Definitionen und Sätzen darlegen, dass und wie man jedes Polytop als Träger eines Komplexes von Simplices darstellen und solchermaßen aus diesen einfachsten Elementen erzeugen kann.

Definition:

Ein lokalendlicher Polytopkomplex \mathcal{K} in einem affinen Raum E heißt **simplicialer Komplex** in E , wenn alle Elemente von \mathcal{K} Simplices in E sind. Auf der Menge aller lokalendlichen Komplexe in E definieren wir wie folgt eine Partialordnung.

Definition:

\mathcal{K} und \mathcal{L} seien lokalendliche Polytopkomplexe in E . Dann heißt \mathcal{K} **feiner** als \mathcal{L} bzw. \mathcal{L} **gröber** als \mathcal{K} , wenn jedes $P \in \mathcal{K}$ in einem $Q \in \mathcal{L}$ enthalten ist. Wir schreiben bei Bestehen dieser Relation: $\mathcal{K} \leq \mathcal{L}$.

Proposition 2.1.44

Die Relation \leq ist eine Partialordnung auf der Menge aller lokalendlichen Polytopkomplexe in einem gegebenen affinen Raum E .

Beweis: Die Transitivität ist trivial. Zu zeigen ist nur, dass aus $\mathcal{K} \leq \mathcal{L} \leq \mathcal{K}$ schon $\mathcal{K} = \mathcal{L}$ folgt. Die Elemente eines Polytopkomplexes sind genau die Seiten seiner maximalen Elemente. Es genügt daher, zu zeigen, dass \mathcal{K} und \mathcal{L} die gleichen maximalen Elemente haben. Es sei also $P \in \mathcal{K}$ maximal. Wegen $\mathcal{K} \leq \mathcal{L}$ existiert ein $Q \in \mathcal{L}$ mit $P \subset Q$, und wegen $\mathcal{L} \leq \mathcal{K}$ existiert ein $P' \in \mathcal{K}$ mit $Q \subset P'$. Daraus folgt aber $P \subset P'$, also $P = P'$ wegen der Maximalität von P , also $P = Q$.

Natürlich impliziert $\mathcal{K} \leq \mathcal{L}$ für die Träger $|\mathcal{K}| \subset |\mathcal{L}|$, aber die umgekehrte Implikation gilt natürlich im allgemeinen nicht.

Definition:

\mathcal{K} und \mathcal{L} seien lokalendliche Polytopkomplexe in E . Der Komplex \mathcal{K} heißt eine **Unterteilung** von \mathcal{L} , wenn $\mathcal{K} = \mathcal{L}$ und $\mathcal{K} \leq \mathcal{L}$.

Proposition 2.1.45

Zu je zwei lokalendlichen Polytopkomplexen \mathcal{K} und \mathcal{L} in E existiert ein grösster Komplex $\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}$, der feiner als \mathcal{K} und \mathcal{L} ist, nämlich

$$\mathcal{K} \wedge \mathcal{L} = \{P \cap Q \mid P \in \mathcal{K}, Q \in \mathcal{L}\} .$$

Sein Träger ist $|\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}| = |\mathcal{K}| \cap |\mathcal{L}|$. Insbesondere haben zwei Komplexe mit gleichem Träger stets eine grösste gemeinsame Unterteilung.

Beweis: Zu zeigen ist nur, dass $\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}$ wieder ein lokalendlicher Polytopkomplex ist. Alles andere ist trivial, und die lokale Endlichkeit auch. Wir zeigen zunächst, dass für $P \in \mathcal{K}$ und $Q \in \mathcal{L}$ gilt: $\mathcal{F}(P \cap Q) \subset \mathcal{K} \wedge \mathcal{L}$. Aber das ist klar, denn aus Proposition 2.1.14 folgt:

$$\mathcal{F}(P \cap Q) = \mathcal{F}(P) \wedge \mathcal{F}(Q) .$$

Nun zeigen wir, dass für $P, P' \in \mathcal{K}$ und $Q, Q' \in \mathcal{L}$ gilt:

$(P \cap Q) \cap (P' \cap Q') \in \mathcal{F}(P \cap Q) \cap \mathcal{F}(P' \cap Q')$. Dies ist aber wieder klar, denn es gilt $(P \cap Q) \cap (P' \cap Q') = (P \cap P') \cap (Q \cap Q')$. Wegen $P \cap P' \in \mathcal{F}(P)$ und $Q \cap Q' \in \mathcal{F}(Q)$ ist dies ein Element von $\mathcal{F}(P) \wedge \mathcal{F}(Q) = \mathcal{F}(P \cap Q)$, und ebenso von $\mathcal{F}(P' \cap Q')$.

Bemerkung: Der Leser sollte sich durch die formalen Analogien in den Aussagen über endliche und lokalendliche Polytopkomplexe nicht darüber hinwegtäuschen lassen, dass zwischen den beiden Arten von Komplexen ein fundamentaler Unterschied besteht. Die folgenden Bemerkungen sollen dies bewusst machen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf Komplexe von kompakten konvexen Polytopen in einem affinen Raum E .

Die Träger der endlichen Komplexe sind dann einfach die kompakten Polytope, also Teilmengen von E , die durch endliche Daten gegeben werden und deren Struktur durch endliche partialgeordnete Mengen gut beschrieben wird. Hingegen sind die Träger der lokalendlichen Komplexe eben nur Teilmengen von E , die als Vereinigungsmengen eines lokalendlichen Systems kompakter Polytope darstellbar sind. Sie sehen lokal wie Polytope aus, aber nicht global. Beispielsweise kann man zeigen, dass jede offene Teilmenge $U \subset E$ als Träger eines lokalendlichen Komplexes dargestellt werden kann. Die Träger der lokalendlichen Komplexe in E stellen also eine sehr viel größere Klasse von Teilmengen von E dar als die kompakten Polytope. Alle diese Mengen auch "Polyeder" zu nennen, wie einige Topologen das tun, wäre eine Vergewaltigung der Sprache. Das tun wir nicht.

Nun ist die Frage, ob und wann es angebracht ist, den großen Vorteil der Endlichkeit der zu untersuchenden Strukturen aufzugeben und zu unendlichen, nur noch lokalendlichen Komplexen überzugehen, um auf diese Weise ein weites Feld mit neuen reichen Möglichkeiten zu betreten.

Auf diese Frage gibt es keine einfache Antwort. Die Antwort hängt vielmehr davon ab, was für eine Art von Problemen man untersuchen will. Klar ist, dass unendliche Komplexe überflüssig sind und wegen der lokalen Endlichkeit auch gar nicht auftreten, solange man sich auf kompakte Träger beschränkt. Interessant wird die Frage erst, wenn es um nicht-kompakte Trägermengen geht, z.B. den affinen Raum E selbst oder offene Teilmengen $U \subset E$.

Wir erinnern uns an das, was wir in der historischen Einleitung über die Flächenteilungen der euklidischen Ebene und über die Raunteilungen des 3-dimensionalen euklidischen Raumes gehört haben. Die regulären Teilungen der Ebene in reguläre Dreiecke, bzw. Vierecke oder 6-Ecke waren schon

den Pythagoräern bekannt, und sie stellen sicher die natürlichste überhaupt denkbare Art und Weise dar, die unendliche Ebene aus endlichen Elementen kombinatorisch-geometrisch zu erzeugen. Wenn es um kombinatorisch-geometrische Fragen dieser Art geht, also z.B. um die Raumteilungen nicht-kompakter Mannigfaltigkeiten, wobei die Raumteilungen nicht etwa ein Mittel zur Untersuchung dieser Mannigfaltigkeiten sind, das man je nach Zweck modifiziert, sondern selbst Gegenstand des Interesses sind, und wenn die unendliche Vielfalt der möglichen Raumteilungen durch starke Bedingungen eingeschränkt wird – etwa durch Symmetriebedingungen – dann sind unendliche Komplexe ein natürliches Mittel zur Untersuchung solcher Probleme.

Ein anderer Bereich, in dem unendliche Komplexe, vor allem unendliche simpliziale Komplexe, sehr sinnvoll eingesetzt werden, ist die algebraische Topologie. Davon kann man sich durch einen Blick in irgendein Lehrbuch der algebraischen Topologie überzeugen.

Problematisch wird das Arbeiten mit unendlichen Komplexen in der kombinatorischen Topologie. Die kombinatorischen Topologen sehen Polytopkomplexe nicht als Selbstzweck an, sondern als Mittel zur Untersuchung der sogenannten stückweise linearen Mannigfaltigkeiten. Was das ist, werden wir später noch definieren. Für den Moment genügt es, an eine offene Menge $U \subset E$ im affinen Raum zu denken. Diese Menge $U \subset E$ erbt vom affinen Raum irgendwie eine lineare Struktur. Die Frage ist, wie man das in den Griff kriegen und präzisieren kann. Eine Möglichkeit, die auf den ersten Blick sehr nahe liegt, ist die, U als Träger eines unendlichen Polytopkomplexes zu beschreiben. Dafür gibt es aber unendlich viele Möglichkeiten, und da der kombinatorische Topologe ja die Komplexe nur als Mittel zum Zweck betrachtet, sie je nach Bedarf wählt, unterteilt oder sonstwie modifiziert, führt dieser Ansatz zur Erfassung der stückweise linearen Struktur von U leicht ins Uferlose. Dies ist jedenfalls die Meinung von E.C. Zeeman, der großen Einfluss auf die Entwicklung der Grundlagen der kombinatorischen Topologie gehabt hat. In einer Arbeit mit dem Titel “Polyhedral n-Manifolds: I. Foundations” [391] schreibt er:

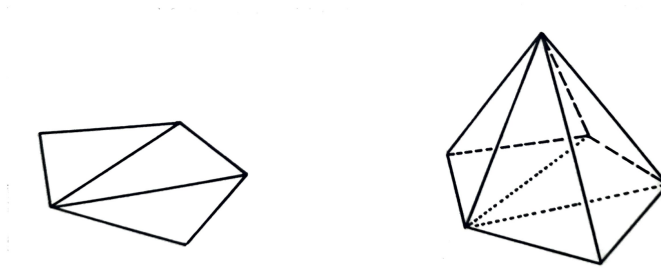
Infinite triangulations are a great mistake, even for an open subset U of Euclidean space E^n In algebraic topology, however, infinite complexes are natural and are supremely rich tools.

Was ist denn nun stattdessen Zeemans Ansatz zur Beschreibung der stückweise linearen Struktur nichtkompakter Mannigfaltigkeiten? Ich kann dies hier nur grob und kurz andeuten. Zur Vereinfachung sei die Mannigfaltigkeit einfach eine offene Menge $U \subset E$. Zeemans Ansatz ist, nicht unendliche Komplexe \mathcal{K} mit Träger $|\mathcal{K}| = U$ zu betrachten, sondern endliche Komplexe \mathcal{K} mit Träger $|\mathcal{K}| \subset U$. Die Träger dieser Komplexe sind natürlich genau die kompakten in U enthaltenen Polytope $P \subset U$. Die Gesamtheit der Polytope bildet einen Verband mit $\inf\{P, Q\} = P \cap Q$ und $\sup\{P, Q\} = P \cup Q$. Auf der Ebene der Komplexe selbst hat man zwar keinen Verband, aber immerhin existiert, wie wir in Proposition 2.1.45 gesehen haben, zu zwei Komplexen \mathcal{K} und \mathcal{L} das Infimum. Sie bilden also einen unteren Halbverband. Dieser Halbverband besteht zwar auch aus unendlich vielen Komplexen, aber jeder einzelne Komplex ist eine endliche Menge von kompakten Polytopen, und dadurch bekommen die Konstruktionen und Beweise bei diesem Ansatz einen stärker konstruktiven Charakter.

Damit haben wir einen guten übergeordneten Grund, uns zunächst einmal den endlichen Komplexen von kompakten konvexen Polytopen und den endlichen simplizialen Komplexen zuzuwenden. Wir stellen uns die Frage, ob ein Komplex von kompakten konvexen Polyedern stets eine Unterteilung durch einen simplizialen Komplex besitzt. Die Antwort wird "ja" lauten. Wir stellen uns dann die Aufgabe, ein Verfahren anzugeben, das für jeden gegebenen Komplex eine simpliziale Unterteilung liefert. Dieses Problem kann auf verschiedene Weise gelöst werden.

Wir versuchen zunächst, kompakte konvexe Polytope simplizial zu unterteilen, und zwar so, dass dabei keine neuen Ecken entstehen. Für 2- und 3-dimensionale Polytope findet man ein Verfahren dafür schon in den Elementen des Euklid, in Satz 20 von Buch VI und Satz 6 von Buch XII. Dort geht es um die Bestimmung des Flächeninhalts ebener Polygone bzw. des Rauminhalts von Pyramiden durch Zerlegung der Polygone in Dreiecke und durch Zerlegung der Pyramiden in dreiseitige Pyramiden, also Tetraeder.

Die folgenden Zeichnungen erklären Euklids Konstruktion ohne Worte.

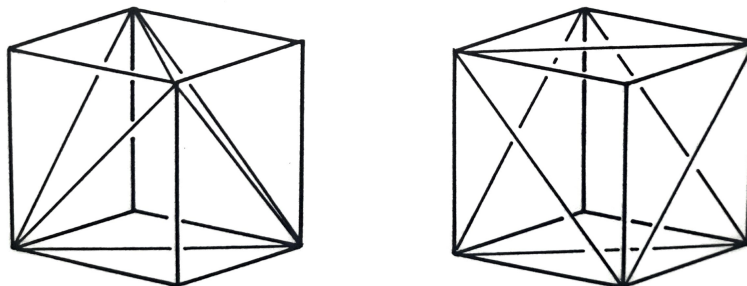


In diesen beiden Sätzen von Euklid steckt der Anfang eines induktiven Verfahrens zur simplizialen Unterteilung beliebiger kompakter konvexer Polyeder und sogar beliebiger Komplexe von solchen Polyedern. Die Teilung der Pyramide ist schon ein solcher Induktionsschritt: Man fasst die Pyramide als Kegel, d.h. als Verbindung $P = \{p\} * Q$ ihrer Spitze - mit ihrer gegenüberliegenden maximalen eigentlichen Seite Q auf, und diese Seite ist ein ebenes Polygon, das schon vorher in Dreiecke zerlegt wurde. Die trigonalen Pyramiden der gesuchten Zerlegung von P sind die Kegel mit der Spitze p und diesen Dreiecken als Basis. Damit zeichnet sich das folgende induktive Verfahren zur Unterteilung von konvexen Polytopen ab. Um ein solches Polytop P zu unterteilen, wählen wir eine Ecke $\{p\}$ in P aus. Dann können wir P als eine Vereinigung von Pyramiden mit der Spitze p auffassen. Die Basen dieser Pyramiden sind die p gegenüberliegenden, d.h. p nicht enthaltenden maximalen eigentlichen Seiten. Also, wenn P die Dimension n hat:

$$P = \bigcup_{p \notin Q \in \mathcal{F}_{n-1}(P)} \{p\} * Q$$

Diese Seiten Q sind nun schon vorher induktiv simplizial unterteilt worden, und die Kegel mit der Spitze p und den Simplexes der Unterteilungen der Q sind die Simplexes der Unterteilung von P . Die Unterteilung eines ganzen Komplexes \mathcal{K} von Polyedern geschieht, indem man in jedem Polyeder $P \in \mathcal{K}$ eine Ecke $\varepsilon(P)$ auszeichnet, und dann die Polyeder einzeln unterteilt. Dabei geht man induktiv mit Induktion über die Dimension vor. Dabei gibt es allerdings ein Problem: Die Induktion muss sicherstellen, dass die Unterteilung des q -Gerüsts \mathcal{K}^q sich auch zu einer Unterteilung des $(q+1)$ -Gerüsts fort-

setzen läßt. Die beiden folgenden Zeichnungen zeigen zwei Unterteilungen des 2-Gerüsts eines Hexaeders. Die linke lässt sich auf das 3-Gerüst forsetzen, die rechte nicht.



Da der Teilungsprozess, wenn er überhaupt induktiv durchführbar ist, vollkommen durch die Wahl der ausgezeichneten Ecken $\varepsilon(P)$ in den Polytopen $P \in \mathcal{K}$ bestimmt ist, muss die Fortsetzbarkeit des Teilungsprozesses durch eine Bedingung für die Eckenauswahlfunktion ε garantiert werden. Die folgende Definition formuliert diese Bedingung.

Definition:

\mathcal{K} sei ein Komplex von kompakten konvexen Polytopen. Eine **Eckenauswahlfunktion** für \mathcal{K} ist eine Abbildung

$$\varepsilon : \mathcal{K} - \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{K}_0$$

so dass für alle $P \in \mathcal{K} - \{\emptyset\}$ gilt: $\varepsilon(P) \in \mathcal{F}_0(P)$. Eine solche Eckenauswahlfunktion heißt **zulässig**, wenn für alle Seiten $Q \in \mathcal{F}(P)$, welche die Ecke $\varepsilon(P)$ enthalten, $\varepsilon(Q) = \varepsilon(P)$ gilt.

Die Existenz zulässiger Eckenauswahlfunktionen beweist man wie folgt. Man wähle eine Totalordnung auf der Eckenmenge \mathcal{K}_0 des Komplexes \mathcal{K} . Bezüglich dieser Totalordnung definiert man

$$\varepsilon(P) = \max \mathcal{F}_0(P) .$$

Diese Auswahl ist in der Tat zulässig, denn aus $\emptyset \neq Q \in \mathcal{F}(P)$ folgt $\varepsilon(Q) \leq$

$\varepsilon(P)$, da $\mathcal{F}_0(Q) \subset \mathcal{F}_0(P)$ gilt, und aus $\varepsilon(P) \in Q$ folgt $\varepsilon(Q) \geq \varepsilon(P)$.

Proposition 2.1.46

\mathcal{K} sei ein Komplex von kompakten konvexen Polytopen, und ε eine zulässige Eckenauswahlfunktion für \mathcal{K} . Eine ε -Fahne von \mathcal{K} ist eine Fahne

$$P_0 \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} P_q$$

von Polytopen $P_k \in \mathcal{K} - \emptyset$, so dass gilt: $\varepsilon(P_k) \notin P_{k-1}$ für $k = 1, \dots, q$. Dann ist die wie folgt definierte Menge \mathcal{K}' von Polytopen eine simpliziale Unterteilung von \mathcal{K} mit der gleichen Eckenmenge $\mathcal{K}'_0 = \mathcal{K}_0$.

$$\mathcal{K}' = \{C(\{\varepsilon(P_0), \dots, \varepsilon(P_q)\}) \mid P_0 \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} P_q \text{ } \varepsilon\text{-Fahne von } \mathcal{K}\}$$

Bemerkung: Hier und im folgenden ist bei Fahnen $P_0 \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} P_q$ der Fall $q = -1$, also die leere Fahne, zugelassen.

Beweis: Durch Induktion über q folgt, dass $C(\{\varepsilon(P_0), \dots, \varepsilon(P_q)\})$ ein q -Simplex ist. Dazu braucht man nur zu zeigen, dass $\varepsilon(P_q)$ nicht in der affinen Hülle A von $C(\{\varepsilon(P_0), \dots, \varepsilon(P_{q-1})\})$ liegt. Aber aus $\varepsilon(P_q) \in A$ würde folgen: $\varepsilon(P_q) \in P_q \cap A \subset P_q \cap A(P_{q-1}) = P_{q-1}$, und das ist ein Widerspruch zur Definition der ε -Fahnen. Da man durch Fortlassen von Polytopen einer ε -Fahne wieder eine ε -Fahne erhält, ist klar, dass mit einem Simplex von \mathcal{K}' auch alle Seiten des Simplex zu \mathcal{K}' gehören. Dass der Durchschnitt von zwei Simplexes von \mathcal{K}' eine gemeinsame Seite ist, nämlich $C(\{\varepsilon(P_0), \dots, \varepsilon(P_q)\}) \cap C(\{\varepsilon(Q_0), \dots, \varepsilon(Q_r)\}) = C(\{\varepsilon(P_0), \dots, \varepsilon(P_q)\} \cap \{\varepsilon(Q_0), \dots, \varepsilon(Q_r)\})$, beweist man durch Induktion über $\max\{\dim P_q, \dim Q_r\}$. Das soll hier nicht ausgeführt werden. Auch $|\mathcal{K}^m| \subset |\mathcal{K}'|$ beweist man durch Induktion über die Dimension m des Gerüsts. Da umgekehrt offensichtlich $|\mathcal{K}'| \subset |\mathcal{K}|$ gilt und sogar $C(\{\varepsilon(P_0), \dots, \varepsilon(P_q)\}) \subset P_q$ ist dann alles bewiesen.

Wir wollen jetzt eine zweite Methode zur simplizialen Unterteilung von Komplexen entwickeln. Diese Methode hat mit der vorigen gemeinsam, dass in jedem Polytop P des zu unterteilenden Komplexes \mathcal{K} ein Punkt $p \in P$ ausgezeichnet wird. Die Methoden unterscheiden sich jedoch diametral hin-

sichtlich der Lage des ausgezeichneten Punktes p in P . Bei der alten Methode war $\{p\}$ eine Ecke, also ein minimales nichtleeres Element von $\mathcal{F}(P)$. Bei der neuen Methode verlangen wir, dass p im Inneren P° von P liegt. Das kleinste p enthaltende Element von $\mathcal{F}(P)$ ist also jetzt das maximale Element P selbst. Während bei der alten Methode keine neuen Eckpunkte eingeführt wurden, werden jetzt viele neue Eckpunkte eingeführt, nämlich für jedes Polytop P des Komplexes genau einer, der ausgezeichnete Punkt $p \in P^\circ$, und nur für $\dim P = 0$ ist dies ein Eckpunkt des ursprünglichen Komplexes \mathcal{K} . Die Eckpunkte der zu konstruierenden simplizialen Unterteilung \mathcal{K}' von \mathcal{K} werden also bijektiv den Elementen $\emptyset \neq P$ von \mathcal{K} entsprechen.

Definition:

\mathcal{K} sei ein Komplex von kompakten konvexen Polytopen in dem affinen Raum E . Eine **Zentrierung** von \mathcal{K} ist eine Abbildung

$$\zeta : \mathcal{K} - \{\emptyset\} \rightarrow |\mathcal{K}| .$$

so dass für alle $P \in \mathcal{K} - \{\emptyset\}$ gilt: $\zeta(P) \in P^\circ$. Die Existenz von Zentrierungen ist natürlich wegen $P^\circ \neq \emptyset$ eine unmittelbare Folge des Auswahlaxioms. Es gibt jedoch eine ganz konstruktive Methode, eine bestimmte Zentrierung explizit anzugeben. Dies ist die baryzentrische Zentrierung. Das Baryzentrum eines kompakten konvexen Polytops P ist der Schwerpunkt des Systems seiner Ecken, wenn man allen Ecken gleiches Gewicht gibt. Man kann dieses Baryzentrum sofort als konvexe Linearkombination der Ecken hinschreiben.

Definition:

Das **Baryzentrum** eines kompakten konvexen Polytops $P \neq \emptyset$ ist die folgende konvexe Linearkombination $\zeta(P)$ seiner Ecken:

$$\zeta(P) = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{F}_0(P))} \sum_{\{p\} \in \mathcal{F}_0(P)} p$$

Die **baryzentrische Zentrierung** eines Komplexes \mathcal{K} von kompakten konvexen Polytopen ordnet jedem $P \neq \emptyset$ sein Baryzentrum $\zeta(P)$ zu.

Eine Motivation dafür, mit Hilfe einer solchen Zentrierung simpliziale Unterteilungen zu definieren, findet man in den Werken von Archimedes,

und zwar in seiner Abhandlung “Über das Gleichgewicht ebener Flächen oder über den Schwerpunkt ebener Flächen” [2]. Archimedes leitet dort aus Axiomen über die Lage des Schwerpunktes ebener Figuren geometrische Konstruktionen für den Schwerpunkt einer Reihe spezieller ebener Figuren ab, unter anderem für zwei besonders einfache, die Strecke und das Dreieck. Die diesbezüglichen Sätze 4 und 14 lauten:

Wenn zwei gleiche Größen nicht den selben Schwerpunkt haben, so wird der Schwerpunkt der aus ihnen zusammengesetzten Größe der Mittelpunkt der die Schwerpunkte verbindenden Strecke sein.

Der Schwerpunkt jedes Dreiecks ist der Punkt, in dem sich die drei Mitteltransversalen schneiden.



Hierin steckt im Keim das folgende induktive Verfahren zur simplizialen Unterteilung der kompakten konvexen Polytope P eines Komplexes \mathcal{K} . Es werden induktiv die Gerüste \mathcal{K}^q unterteilt. Ist \mathcal{K}^{q-1} bereits unterteilt, dann erhält man die simpliziale Unterteilung von \mathcal{K}^q wie folgt. Man nimmt zu den Simplices in \mathcal{K}^{q-1} noch für jedes q -dimensionale Polytop $P \in \mathcal{K}^q$ alle Simplices $\zeta(P) * Q'$ hinzu, wo $Q' \subset p$ eins der bereits konstruierten Simplices in \mathcal{K}^{q-1} ist. Die folgende Definition und der folgende Satz formalisieren die gleiche Idee in etwas anderer Weise mit dem Ziel, uns von der gerüstweisen Konstruktion zu lösen.

Definition:

\mathcal{K} sei ein Komplex von kompakten konvexen Polytopen, ζ eine Zentrierung von \mathcal{K} und \mathcal{K}' eine Unterteilung von \mathcal{K} . Dann gehört \mathcal{K}' zu ζ , wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall P \in \mathcal{K} \quad \forall P' \in \mathcal{K}' \quad P' \subset P = C(P' \cup \{\zeta(P)\}) \in \mathcal{K}' .$$

Satz 2.1.47

Zu jeder Zentrierung C eines Komplexes \mathcal{K} von kompakten konvexen Polytopen gehört genau eine Unterteilung \mathcal{K}' von \mathcal{K} . Diese ist simplizial, und es gilt:

$$\mathcal{K}' = \{C(\{\zeta(P_0), \dots, \zeta(P_k)\}) \mid P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_k, P_i \in \mathcal{K} - \{\emptyset\}\}$$

Beweis: \mathcal{K}' sei die Menge der $C(\{\zeta(P_0), \dots, \zeta(P_k)\})$ zu Fahnen von Polytopen von \mathcal{K} . Die Polytope $\{\zeta(P_0), \dots, \zeta(P_k)\}$ sind k -dimensionale Simplexes. Das folgt durch Induktion über k . Zum Beweis genügt es, zu zeigen, dass $\zeta(P_k)$ nicht in der affinen Hülle von $\{\zeta(P_0), \dots, \zeta(P_{k-1})\}$ liegt. Deren Durchschnitt mit P_k liegt aber in $P_{k-1} \subset \partial P_k$ während $\zeta(P_k) \in P_k^\circ$ im Inneren liegt. Da man durch Fortlassen von Polytopen aus einer Fahne wieder eine Fahne erhält, ist wegen Proposition 2.1.43 klar, dass die Seiten jedes Simplex von \mathcal{K}' auch zu \mathcal{K}' gehören. dass der Durchschnitt von $C(\{\zeta(P_0), \dots, \zeta(P_j)\})$ und $C(\{\zeta(Q_0), \dots, \zeta(Q_k)\})$ eine gemeinsame Seite ist, beweist man wieder durch Induktion über $\max\{\dim P_j, \dim Q_k\}$. Ferner folgt aus $P = \{\zeta(P)\} * \partial P$ induktiv $\mathcal{K}^q \subset |\mathcal{K}'|$, also $|\mathcal{K}| = |\mathcal{K}'|$. Also ist \mathcal{K}' eine simpliziale Unterteilung von \mathcal{K} , die zu ζ gehört.

Um die Eindeutigkeit von \mathcal{K}' zu zeigen, nehmen wir an, dass \mathcal{K}'' irgendeine zu ζ gehörige Unterteilung von \mathcal{K} sei. Dann beweist man sofort, durch Induktion über k , dass alle k -Simplexes von \mathcal{K}' auch zu \mathcal{K}'' gehören, so dass also $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}''$ gilt. Aber dann folgt aus $\mathcal{K}' = \mathcal{K}''$ auch $\mathcal{K}' = \mathcal{K}''$, denn es gilt allgemein: Ein Unterkomplex $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}''$ eines Komplexes \mathcal{K}'' mit dem gleichen Träger $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}''$ ist der ganze Komplex. Beweis: Es sei $p \in K''$ irgendein Element, $P \neq \emptyset$. Wir wählen ein $x \in P^\circ$. Wegen $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}''$ existiert ein $P' \in \mathcal{K}'$ mit $x \in P'$. Da $P, P' \in \mathcal{K}''$, ist $P \cap P'$ eine gemeinsame Seite. Aber $x \in P \cap P'$ und $x \in P^\circ$, also $P \cap P' = P$, d.h. $P \subset P'$ Also ist P eine Seite von $P' \in \mathcal{K}'$, und daher $P \in \mathcal{K}'$.

Definition:

\mathcal{K} sei ein Komplex von kompakten konvexen Polytopen. Die **baryzentrische Unterteilung** von \mathcal{K} ist die Unterteilung von \mathcal{K} , die zur baryzentrischen Zentrierung gehört. Sie wird mit $\delta(\mathcal{K})$ bezeichnet und auch **1. derivi-**

vierter Komplex zu \mathcal{K} genannt. Der **n-te derivierte Komplex** $\delta^n(\mathcal{K})$ ist induktiv durch $\delta^n(\mathcal{K}) = \delta(\delta^{n-1}(\mathcal{K}))$ definiert.

Definition:

X sei eine Teilmenge eines affinen Raumes E . Eine **lineare Triangulierung** von X in E ist ein lokal endlicher simplizialer Komplex \mathcal{K} in E mit Träger $|\mathcal{K}| = X$. Eine endliche lineare Triangulierung ist eine lineare Triangulierung durch einen endlichen simplizialen Komplex.

Proposition 2.1.48

Jedes Polytop in einem affinen Raum E lässt sich linear triangulieren. Die kompakten Polytope sind genau die Teilmengen von E , die endliche lineare Triangulierungen besitzen.

Beweis: E ist Träger eines lokal endlichen Komplexes \mathcal{L} von kompakten konvexen Polytopen. Man erhält ein solches \mathcal{L} beispielsweise, indem man E mit \mathbb{R}^n identifiziert und dieses durch alle Hyperebenen der Form $x_i = n$ mit ganzzahligen n in kongruente achsenparallele Hyperkuben zerlegt. Nun sei $P \subset E$ ein Polytop. Nach Proposition 2.1.23 ist P Träger eines Polytopkomplexes \mathcal{K} . Wegen Proposition 2.1.45 ist dann $\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}$ sogar ein Komplex von kompakten konvexen Polytopen mit Träger $|\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}| = P$. Dann ist schließlich wegen Proposition 2.1.46 die baryzentrische Unterteilung $\delta(\mathcal{K} \wedge \mathcal{L})$ eine lineare Triangulierung des Polytops P . Sie ist endlich genau, wenn P kompakt ist. Umgekehrt ist natürlich der Träger jedes endlichen simplizialen Komplexes ein kompaktes Polytop, und damit ist alles bewiesen. Auf die Problematik unendlicher Triangulierungen wurde früher bereits hingewiesen.

Die bis jetzt erzielten Ergebnisse über Polytope beschreiben auf verschiedene Weise die Extension dieser Klasse von Objekten und eröffnen den Zugang zur genaueren Untersuchung ihrer inneren Struktur. Was uns aber noch fehlt, sind Begriffe, die den Vergleich zwischen verschiedenen Objekten ermöglichen, die festlegen, wann und in welchem Sinne zwei Polytope als gleichartig anzusehen sind, oder die allgemeiner gestatten, verschiedene Polytope in systematischer Weise zueinander in Beziehung zu setzen. Ganz allgemein gesehen ist bekanntlich ein Weg zur Lösung

derartiger Probleme beim Studium einer Klasse von mathematischen Objekten, zu dieser Klasse eine Kategorie zu definieren, d.h. für alle geordneten Paare von Objekten X, Y zu definieren, was die Morphismen $X \rightarrow Y$ sind. Die einzigen formalen Bedingungen, die dabei zu erfüllen sind, sind die folgenden: Für je zwei Morphismen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ ist eine Komposition erklärt, d.h. ein Morphismus $g \circ f : X \rightarrow Z$, und zwar so, dass das Assoziativgesetz für diese Komposition erfüllt ist. Und für jedes Objekt Y gibt es einen identischen Morphismus id_Y , derart, dass $g \circ id_Y = g$ für alle Morphismen $g : Y \rightarrow Z$ und $id_Y \circ f = f$ für alle Morphismen $f : X \rightarrow Y$. Natürlich kann es zu einer gegebenen Klasse von Objekten mehrere mathematisch sinnvolle Möglichkeiten zur Definition einer Kategorie geben. Für welche man sich entscheidet, hängt von der Art der Fragestellung ab, die man für interessant hält. So ist es auch hier. Um der methodischen Klarheit willen, und um den Leser nicht einseitig auf eine bestimmte Richtung der Forschung festzulegen, wollen wir mehrere Möglichkeiten zur Definition von Kategorien von Polytopen diskutieren.

2.3 Kategorien von Polytopkomplexen

Isometrische Kategorien von Polytopen

Derjenige kategoriale Standpunkt, den wir als ersten einnehmen wollen, liegt wohl von allen möglichen dem der klassischen antiken Geometrie am nächsten.

Definition:

Ein **metrisches Polytop** ist ein Paar (P, d) , wo P ein Polytop in einem euklidischen affinen Raum E ist und d die von E auf P induzierte Metrik. Ein **metrischer Isomorphismus** metrischer Polytope ist eine Isometrie, d.h. eine bijektive distanzerhaltende Abbildung dieser metrischen Räume. Die **Isometriegruppe** von (P, d) ist die Gruppe $\Gamma_e(P)$ der isometrischen Abbildungen von (P, d) auf sich selbst.)

Die metrischen Polytope als Objekte und die metrischen Isomorphismen als Morphismen bilden offensichtlich eine Kategorie. In dieser Kategorie ha-

ben wir zwei wichtige Unterkategorien. Die erste ist die der konvexen Polytope, wobei die Morphismen die gleichen sind wie vorher. Man sagt, dass eine Unterkategorie einer Kategorie eine volle Unterkategorie ist, wenn die Morphismen zwischen je zwei Objekten der Unterkategorie die gleichen sind wie die Morphismen zwischen diesen Objekten als Objekte der umfassenden Oberkategorie. Die konvexen metrischen Polytope bilden also eine volle Unterkategorie. Für die konvexen Polytope P haben wir als kombinatorische Struktur die endliche partialgeordnete Menge $\mathcal{F}(P)$ der Seiten eingeführt. Es ist klar, dass jeder metrische Isomorphismus $P \rightarrow Q$ eine bijektive ordnungstreue Abbildung $\mathcal{F}(P)$ induziert. Denn die metrischen Isomorphismen von nicht leeren metrischen Polytopen $P \rightarrow Q$ sind genau diejenigen bijektiven Abbildungen $P \rightarrow Q$, welche durch eine Isometrie der euklidischen affinen Hüllen $A(P) \rightarrow A(Q)$ induziert werden. Dies folgt sofort aus der grundlegenden Tatsache, dass für die euklidischen affinen Räume das Axiom der freien Beweglichkeit gilt (LA III, Satz 13.1.18) [57].

Die zweite wichtige Unterkategorie ist die volle Unterkategorie der kompakten konvexen metrischen Polytope. Mit dieser Kategorie kommen wir wirklich sehr dicht an die Gegenstände der klassischen antiken Geometrie heran. Wir würden genau diese Gegenstände erhalten, d.h. die Polygone und Polyeder der antiken Geometer, wenn wir uns auf die vollen Unterkategorien der kompakten konvexen metrischen Polytope der Dimensionen 2 bzw. 3 beschränken würden. Wir fühlen uns dadurch zu der folgenden Definition berechtigt.

Definition:

Ein **euklidisches Polytop** ist ein kompaktes konvexes metrisches Polytop. Isometrien solcher Polytope heißen **euklidische Isomorphismen**. Die euklidischen Polytope und euklidischen Isomorphismen bilden die **Kategorie der euklidischen Polytope**. Die Isometriegruppe $\Gamma_e(P)$ eines euklidischen Polytops nennen wir seine **euklidische Symmetriegruppe**.

Proposition 2.1.49

P sei ein nicht leeres euklidisches Polytop, $\zeta(P)$ sein Baryzentrum und $\Gamma_e(P)$ seine euklidische Symmetriegruppe. E sei die euklidische affine Hülle

von P und V der zugehörige euklidische Translationsvektorraum. $I(E)$ sei die Isometriegruppe von E und $O(V)$ die orthogonale Gruppe von V . Ferner sei $I(E)_{\zeta(P)}$ die Isotropiegruppe des Baryzentrums in $I(E)$ und es sei $\lambda : I(E)_{\zeta(P)} \rightarrow O(V)$ der Isomorphismus, der jeder Isometrie ihren linearen Anteil zuordnet. Schließlich sei $\varkappa : \Gamma_e(P) \rightarrow I(E)$ der injektive Homomorphismus, der jeder Isometrie von P die eindeutig bestimmte Isometrie von E zuordnet, welche die Isometrie von P induziert. Dann gilt:

- (i) Das Baryzentrum $\zeta(P)$ des euklidischen Polytops P ist ein Fixpunkt seiner euklidischen Symmetriegruppe.
- (ii) Daher ist \varkappa ein injektiver Homomorphismus $\varkappa : \Gamma_e(P) \rightarrow I(E)_{\zeta(P)}$.
- (iii) Daher ist $\lambda \circ \varkappa$ ein injektiver Homomorphismus $\lambda \circ \varkappa : \Gamma_e(P) \rightarrow O(V)$.
- (iv) $\Gamma_e(P)$ ist eine endliche Gruppe.
- (v) Die euklidische Symmetriegruppe $\Gamma_e(P)$ des Polytops P ist daher kanonisch isomorph zu einer endlichen Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(V)$.

Beweis: $\varphi \in \Gamma_e(P)$ sei eine Isometrie von P . Die zugehörige Isometrie $\varkappa(\varphi) \in I(E)$ induziert eine Permutation auf der Menge $\mathcal{F}_0(P)$ der Ecken von P . Da $\zeta(P)$ eine - und zwar die einzige - symmetrische konvexe Linearkombination der Ecken ist, gilt $\varkappa(\varphi)(\zeta(P)) = \zeta(P)$. Daraus folgen die Aussagen (i)-(iii). Weil P ein kompaktes konvexes Polytop ist, ist es die konvexe Hülle seiner Eckenmenge. Daher ist E die konvexe Hülle von $\mathcal{F}_0(P)$, und daher ist $\varkappa(\varphi)$ durch die induzierte Permutation von $\mathcal{F}_0(P)$ eindeutig bestimmt. Wegen der Endlichkeit von $\mathcal{F}_0(P)$ folgt dann (iv) und (v).

Bemerkung: Die gerade bewiesene Proposition zeigt, dass die Untersuchung von Symmetrieeigenschaften euklidischer Polytope notwendigerweise zum Studium der endlichen Untergruppen der orthogonalen Gruppen führt. So werden wir, da wir besonders an den euklidischen Polyedern interessiert sind, im Abschnitt 13.7.2 alle endlichen Untergruppen der orthogonalen

Gruppe $O(3, \mathbb{R})$ klassifizieren. Der gruppentheoretische Ansatz hat zweifellos zu einer bedeutenden Vertiefung des Verständnisses der Symmetrieeigenschaften von Polyedern beigetragen. Es wäre aber nicht adäquat, die Theorie der Symmetrieeigenschaften euklidischer Polyeder einfach als ein Teilgebiet der Gruppentheorie anzusehen. Die kombinatorische Struktur der Polyeder P , beschrieben z.B. durch die endliche partial geordnete Menge $\mathcal{F}(P)$ der Seiten, ist eine Struktur sui generis, und sie war, historisch gesehen, eine der Wurzeln der gruppentheoretischen Struktur, und ist nicht etwa umgekehrt aus ihr hervorgegangen. Darum stellen wir auch die kombinatorische Theorie der Polyeder an den Anfang, und nicht die endlichen orthogonalen Gruppen.

Eine Möglichkeit der Erweiterung der Kategorie der euklidischen Polytope durch Zulassung größerer Mengen von Morphismen wurde bereits von den Geometern der Antike wahrgenommen: der Übergang von der Kongruenz zur Ähnlichkeit von Figuren.

Definition:

(P, d) und (P', d') seien metrische Polytope. Eine **Ähnlichkeitstransformation** $(P, d) \rightarrow (P', d')$ ist eine bijektive Abbildung $\varphi : P \rightarrow P'$, für die es eine positive reelle Zahl c gibt, so dass für alle $x, y \in P$ gilt

$$d'(\varphi(x), \varphi(y)) = c d(x, y) .$$

Wenn es eine solche Transformation gibt, heißen (P, d) und (P', d') **ähnlich**.

Es ist klar, dass die Ähnlichkeitstransformationen $P \rightarrow P'$ durch entsprechende Ähnlichkeitstransformationen der euklidischen affinen Hüllen $E \rightarrow E'$ induziert werden, und diese lassen sich nach Satz 13.1.23 als Produkt einer Isometrie und einer Homothetie auffassen. Im allgemeinen gibt es für zwei gegebene Polytope P und P' natürlich mehr Ähnlichkeitstransformationen als Isometrien. Die metrischen Polytope als Objekte mit den Ähnlichkeitstransformationen als Morphismen sind also eine Kategorie, die in diesem Sinne die vorher definierte isometrische Kategorie erweitert. Für kompakte Polytope P ist jedoch die Gruppe der Automorphismen in dieser neuen Kategorie offensichtlich identisch mit der Isometriegruppe $\Gamma_e(P)$,

da bei seiner Ähnlichkeitstransformation von P mit Ähnlichkeitsverhältnis c der Durchmesser von P mit c multipliziert wird.

Lineare Kategorien von Polytopen Der nächste Schritt zur Erweiterung der Klasse der zulässigen Morphismen von Polytopen wäre wohl der Übergang zu affin-linearen Isomorphismen.

Definition:

Ein **affin-linearer Isomorphismus** $P \rightarrow Q$ von Polytopen ist eine bijektive Abbildung, die, wenn P, Q nicht leer sind, von einem Isomorphismus $A(P) \rightarrow A(Q)$ der affinen Hüllen induziert ist. Die **affine Symmetriegruppe** des Polytops P ist die Gruppe $\Gamma_a(P)$ aller affin-linearen Automorphismen von P .

Die Polytope als Objekte und die affin-linearen Isomorphismen bilden eine Kategorie. Natürlich kann man wieder die vollen Unterkategorien der konvexen Polytope bzw. der kompakten konvexen Polytope betrachten. Affin-lineare Isomorphie von Polytopen ist fühlbar eine gröbere Äquivalenzrelation als Kongruenz oder Ähnlichkeit. Beispielsweise beweist man ganz leicht das Folgende.

Proposition 2.1.50

Alle Simplices gleicher Dimension sind affin-isomorph.

So sind beispielsweise alle Dreiecke affin-isomorph, während ihre Klassifikation bis auf Kongruenz oder Ähnlichkeit ja interessanter ist (vgl. LA III Satz 13.3.24 [57]). Auch ist die affine Symmetriegruppe im allgemeinen verschieden von der euklidischen Symmetriegruppe. Sie enthält diese als Untergruppe, und zwar im allgemeinen als echte Untergruppe. Ist beispielsweise P ein Dreieck mit drei verschiedenen Seiten, dann ist $\Gamma_e(P) = \{1\}$ und $\Gamma_a(P) \cong S_3$.

Allgemein gilt offensichtlich folgendes.

Proposition 2.1.51

Die affine Symmetriegruppe $\Gamma_a(P)$ eines konvexen Polytops P operiert auf der partialgeordneten Menge $\mathcal{F}(P)$ der Seiten. Für kompakte konvexe P ist diese Operation effektiv, und es ist sogar die Operation von $\Gamma_a(P)$ auf der Menge $\mathcal{F}_0(P)$ der Ecken effektiv. Wenn P ein Simplex ist, operiert $\Gamma_a(P)$ als volle symmetrische Gruppe von $\mathcal{F}_0(P)$. Für ein n -dimensionales Simplex P gilt also $\Gamma_a(P) \cong S_{n+1}$.

Man kann sich zu Recht die Frage stellen, ob man nicht eine Kategorie von Polytopen definieren sollte, bei der die Morphismen von affinen Abbildungen induziert sein dürften, die keine affinen Isomorphismen sind. Es spricht einiges dafür, und einiges dagegen. Dafür spricht zum Beispiel die folgende Proposition.

Proposition 2.1.52

Das Bild $P' = \varphi(P)$ eines Polytops $P \subset E$ in einem affinen Raum E bezüglich einer affinen Abbildung $\varphi : E \rightarrow E'$ ist ein Polytop in E' .

Beweis: Da jedes Polytop eine endliche Vereinigung von konvexen Polytopen ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass P konvex ist. Ferner können wir o.B.d.A. annehmen, dass $E = A(P)$ sowie $E' = A(P')$ und dass φ surjektiv ist.

φ ist also eine Projektion, deren Fasern $L_y = \varphi^{-1}(y), y \in E'$, parallele affine Unterräume der Dimension $k = \dim E - \dim E'$ sind. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass die L_y affine Geraden sind, denn die allgemeine Projektion lässt sich als Komposition von k Projektionen mit Geraden als Fasern auffassen. Soweit die trivialen Reduktionen des Problems. Wir zeigen jetzt, dass $\varphi(P) = P'$ ein konvexes Polytop ist. Dazu genügt es nach Korollar 2.1.15 zu zeigen, dass P' eine abgeschlossene konvexe Menge mit endlich vielen Seiten ist. Die Konvexität ist trivial, da das Bild jeder Strecke unter einer affinen Abbildung q eine Strecke ist. Wir zeigen jetzt, dass $E' - P'$ offen ist. Es sei $P = \bigcap_{i \in I} H_i$ die minimale Darstellung von P als Durchschnitt von Halbräumen. Für $x \in E$ sei $f_i(x)$ der Abstand von x zu H_i und $f(x) = \max\{f_i(x) \mid i \in I\}$. Dann gilt: $f(x) \geq d(x, P)$ und $f(x) = 0$ genau wenn $x \in P$. Jetzt sei $y \in E' - P'$, also $L_y \cap P = \emptyset$. Dann ist $f|_{L_y}$ überall

positiv. Da $f|_{L_y}$ aber eine stückweise lineare Funktion auf der Geraden L_y ist, und zwar derart, dass L_y eine Zerlegung in endlich viele Intervalle hat, auf denen f linear ist, hat $f|_{L_y}$ ein positives absolutes Minimum. L_y hat also einen positiven Abstand von P , und daher existiert ein $\delta > 0$, so dass für $d(y, z) < \delta$ auch $L_z \cap P = \emptyset$ gilt. Also ist $E' - P'$ offen. Schließlich zeigen wir, dass P' nur endlich viele Seiten hat. Ist F' eine Stützebene von P' , dann ist $F = \varphi^{-1}(F')$ eine Stützebene von P . Der Seite $F' \cap P'$ entspricht dadurch die Seite $\varphi^{-1}(F' \cap P') = F \cap P$, und es gilt $F' \cap P' = \varphi(F \cap P)$. Da P nur endlich viele Seiten hat, folgt, dass auch P' nur endlich viele hat.

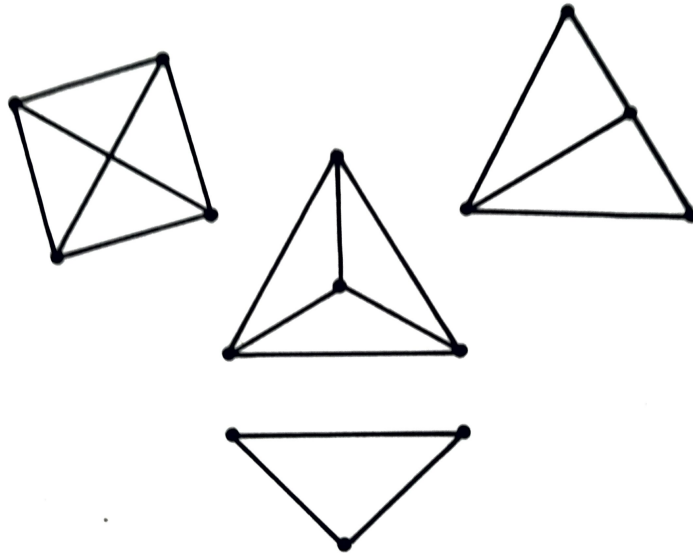
Bemerkung: Für kompakte Polyeder ist der Beweis wegen des Hauptsatzes der elementaren Polyedertheorie sehr viel kürzer, denn wenn P kompakt und konvex ist, gilt: $\varphi(P) = C(\varphi(\mathcal{F}_0(P)))$.

Durch den gerade bewiesenen Satz ermutigt, definieren wir affin-lineare Abbildungen von Polytopen wie folgt.

Definition:

Eine Abbildung von nichtleeren Polytopen $P \rightarrow Q$ heißt **affin-linear**, wenn sie eine Beschränkung einer affinen Abbildung $A(P) \rightarrow A(Q)$ der affinen Hüllen ist. Die Abbildung $\emptyset \rightarrow Q$ ist per definitionem affin-linear.

Die Polytope als Objekte und die affin-linearen Abbildungen bilden natürlich eine Kategorie. So weit, so gut. Wir bemerken aber gleich, dass die Morphismen dieser Kategorie nicht mehr die kombinatorische Struktur der konvexen Polytope respektieren, die uns doch so wichtig ist. Betrachten wir etwa als Beispiel die affinen Parallelprojektionen eines Tetraeders auf eine Ebene. Die folgende Zeichnung zeigt die verschiedenen Typen möglicher Bilder des Tetraeders, seiner Ecken und Kanten.



Wie man sieht, werden die Seiten des Tetraeders im allgemeinen nicht auf Seiten seines Bildes abgebildet. Dieses ist vielmehr nur dann der Fall, wenn das Tetraeder eine sehr spezielle Lage relativ zur Projektionsrichtung hat, nämlich eine solche, für die zwei seiner Eckpunkte das gleiche Bild haben.

Allgemeiner überführt eine affin-lineare Abbildung $P \rightarrow Q$ von Simplices offenbar genau dann jede Seite von P in eine Seite von Q , wenn jede Ecke von P auf eine Ecke von Q abgebildet wird.

Wir sehen also, dass die Klasse der affin-linearen Abbildungen in gewissem Sinne "zu groß" ist, weil sie mit den kanonischen kombinatorischen Strukturen konvexer Polytope nicht völlig verträglich ist: Eine affin-lineare Abbildung $P \rightarrow Q$ solcher Polytope induziert im allgemeinen keine ordnungserhaltende Abbildung der Komplexe $\mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(Q)$. Andererseits ist die Klasse der affin-linearen Abbildungen vom kombinatorischen Standpunkt aus auch wieder "zu klein". So haben z.B. alle ebenen konvexen Vierecke die gleiche kombinatorische Struktur. Aber ein Trapez lässt sich nicht durch eine affin-lineare Abbildung in ein Parallelogramm überführen, da affine Abbildungen die Parallelität bzw. Nicht-Parallelität von Seiten erhalten.

Man kann nun aus diesen Beobachtungen ganz verschiedene Schlussfolgerungen ziehen. Man kann die Klasse der zulässigen affin-linearen Abbildungen einerseits auf diejenigen einschränken, welche die jeweiligen kombinatorischen Strukturen respektieren. Man kann andererseits die Klasse der zulässigen Abbildungen über die affin-linearen hinaus erweitern, aber dabei nur solche zulassen, welche mit den kombinatorischen Strukturen verträglich sind. Man kann schließlich den entgegengesetzten Weg gehen, den Weg der Topologen, und eine geeignete Klasse von “stückweise linearen” Abbildungen einführen, die zwar nicht die jeweils gegebenen kombinatorischen Strukturen respektieren, dies aber dann tun, wenn man die gegebenen Strukturen in geeigneter Weise durch Unterteilung ändert. In jedem Fall ist es nötig, dass wir den Begriff der “Verträglichkeit mit der kombinatorischen Struktur” genauer fassen. Um der nötigen Allgemeinheit willen betrachten wir dabei nicht nur die Seitenkomplexe $\mathcal{F}(P)$ konvexer Polytope P , sondern allgemeine Polytopkomplexe.

Zur kombinatorischen Struktur eines Komplexes \mathcal{K} gehört auf jeden Fall seine Partialordnung durch die Inklusionsrelation. Bei oberflächlicher Betrachtungsweise könnte man daher darauf verfallen, als Morphismen von Komplexen $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$, einfach die ordnungserhaltenden Abbildungen zu definieren.

Man macht sich jedoch an einfachen Beispielen leicht klar, dass ein so weit gefasster Begriff kombinatorischer Morphismen für beliebige Polytopkomplexe geometrisch bedeutungslos wäre. Polytopkomplexe sind nicht irgendwelche partial geordneten Mengen, sondern in ihre Definition geht die Struktur ihrer Elemente, der konvexen Polytope, ein. Diese haben eine Dimension, und daher hat ein Polytopkomplex \mathcal{K} eine Filtration durch die Gerüste \mathcal{K}^q . Ferner haben die konvexen Polytope P einen Seitenkomplex $\mathcal{F}(P)$, und auf Grund der Definition eines Polytopkomplexes \mathcal{K} ist für jedes $P \in \mathcal{K}$ der Seitenkomplex ein Unterkomplex von \mathcal{K} , nämlich $\mathcal{F}(P) = \{Q \in \mathcal{K} \mid Q \leq P\}$. Schließlich spielt für kompakte P die Eckenmenge $\mathcal{F}_0(P)$ eine besonders wichtige Rolle. All dies motiviert die Einführung zusätzlicher Bedingungen für Morphismen von Polytopkomplexen.

Definition:

$\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ sei eine Abbildung von Polytopkomplexen.

- (0) Ψ ist **nulltreu**, wenn gilt: $\Psi(P) = \emptyset \Leftrightarrow P = \emptyset$.
- (1) Ψ ist **ordnungserhaltend**, wenn gilt:
 $\forall P, Q \in \mathcal{K} \ P \leq Q \Rightarrow \Psi(P) \leq \Psi(Q)$.
- (2) Ψ ist **gerüsterhaltend**, wenn gilt: $\Psi(\mathcal{K}^q) \subset \mathcal{L}^q$ für alle q .
- (3) Ψ ist **seitentreu**, wenn gilt: $\mathcal{F}(\Psi(P)) = \Psi(\mathcal{F}(P))$ für alle $P \in \mathcal{K}$.
- (4) Ψ ist **eckentreu**, wenn gilt: $\mathcal{F}_0(\Psi(P)) = \Psi(\mathcal{F}_0(P))$ für alle $P \in \mathcal{K}$.

Bemerkungen:

- (a) Wenn man sich auf Komplexe von kompakten konvexen Polytopen beschränkt, implizieren die Eigenschaften (0) bis (3) zusammen (4), und umgekehrt implizieren (1) und (4) zusammen (0) und (2), jedoch nicht (3).
- (b) Alle Eigenschaften bleiben bei der Komposition von Abbildungen erhalten, so dass man durch ihre Kombination Kategorien definieren kann.

Definition:

Eine Abbildung $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ von Polytopkomplexen heiße ein **kombinatorischer Morphismus**, wenn Ψ nulltreu, ordnungserhaltend und gerüsterhaltend ist. Ist Ψ außerdem seitentreu bzw. eckentreu, so heiße Ψ ein **seitentreuer** bzw. **eckentreuer kombinatorischer Morphismus**.

Bemerkung:

Durch diese drei Arten von Morphismen sind drei Kategorien von Polytopkomplexen definiert. Sie führen jedoch offensichtlich alle zum gleichen Isomorphiebegriff von Komplexen. Komplexe \mathcal{K} und \mathcal{L} , die im Sinne dieses Isomorphiebegriffs isomorph sind, nennen wir **kombinatorisch isomorph**. Der für uns wichtigste Fall ist der, dass \mathcal{K} und \mathcal{L} einfach die Seitenkomplexe kompakter konvexer Polytope sind. Da die Dimension eines kompakten konvexen Polytops P gleich der Länge der maximalen Fahnen in $\mathcal{F}(P)$ ist, folgen in diesem Fall alle Eigenschaften (0)-(4) bereits daraus, dass $\Psi : \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(Q)$ ein ordnungstreuer Isomorphismus ist.

Definition: (i) P und Q seien kompakte konvexe Polytope. Eine ordnungserhaltende bijektive Abbildung $\Psi : \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(Q)$ der Seitenkomplexe heißt ein kombinatorischer Isomorphismus von P mit Q .

(ii) Die **kombinatorische Symmetriegruppe** eines kompakten konvexen Polytops P ist die Gruppe $\Gamma_C(P)$ aller ordnungserhaltenden bijektiven Abbildungen von $\mathcal{F}(P)$ auf sich selbst.

Der in den vorstehenden Definitionen zum Ausdruck kommende abstrakte und radikal kombinatorische Ansatz bedarf einer geometrischen Rechtfertigung. Sie muss zeigen, dass einem kombinatorischen Morphismus $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ von Polytopkomplexen unter geeigneten Voraussetzungen - z.B. Kompaktheit und Seitentreue - eine geometrisch relevante Abbildung ihrer Träger entspricht, also eine Abbildung $\Psi : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ der Polytope $|\mathcal{K}|$ und $|\mathcal{L}|$. "Entsprechen" können wir dabei wie folgt fassen.

Definition:

\mathcal{K} und \mathcal{L} seien Polytopkomplexe mit den Trägern $|\mathcal{K}|$ bzw. $|\mathcal{L}|$. Eine Abbildung $\varphi : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ **induziert** eine Abbildung $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$, wenn für alle $P \in \mathcal{K}$ gilt: $\varphi(P) = \Psi(P)$.

Für jedes Polytop $P \in \mathcal{K}$ des Komplexes \mathcal{K} muss also die Bildmenge $\Psi(P) \subset |\mathcal{L}|$ von $P \subset |\mathcal{K}|$ ein Polytop des Komplexes \mathcal{L} sein, und zwar gerade $\Psi(P) \in \mathcal{L}$. Schwieriger wird es, wenn wir versuchen, zu sagen, welche Abbildungen Ψ "geometrisch bedeutungsvoll" sein sollen. Geometrisch bedeutungsvoll sind für einzelne konvexe Polytope zweifellos diejenigen affin-linearen Abbildungen $\Psi : P \rightarrow Q$, welche eine Abbildung $\Psi : \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(Q)$ induzieren. Für Abbildungen $\varphi : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ der Träger von Komplexen von Polytopen werden wir verlangen, dass ihre Beschränkungen auf die einzelnen Polytope des Komplexes von dieser Art sind. Das führt zu der folgenden Definition.

Definition:

\mathcal{K} und \mathcal{L} seien Polytopkomplexe mit den Trägern $|\mathcal{K}|$ bzw. $|\mathcal{L}|$. Eine Abbildung $\varphi : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ ist **\mathcal{K} - \mathcal{L} -linear**, wenn sie eine Abbildung $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ der Komplexe induziert, stetig ist und ihre Beschränkung $\varphi|_P : P \rightarrow \varphi(P)$ für jedes Polytop $P \in \mathcal{K}$ affin-linear ist.

Die Polytopkomplexe als Objekte mit den gerade definierten \mathcal{K} - \mathcal{L} -**linearen** Abbildungen als Morphismen $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ bilden eine Kategorie. Besonders interessant und nützlich ist die volle Unterkategorie der simplizialen Komplexe.

Definition:

Sind \mathcal{K} und \mathcal{L} simpliziale Komplexe, dann nennt man die \mathcal{K} - \mathcal{L} -linearen Abbildungen $|\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ ihrer Träger **simpliziale Abbildungen**.

Die gerade definierten Kategorien sind zwar auf natürliche und naheliegende Weise definiert, aber sie sind zur geometrischen Rechtfertigung der rein kombinatorischen Ansätze nicht ausreichend, wenn wir die kombinatorischen Strukturen als das primär Gegebene betrachten. Das zeigt das schon erwähnte Beispiel: Für ein Parallelogramm P und ein Trapez Q sind $\mathcal{F}(P)$ und $\mathcal{F}(Q)$ kombinatorisch isomorph, aber es gibt keine affin-lineare Abbildung $P \rightarrow Q$, die einen kombinatorischen Isomorphismus $\mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(Q)$ induziert. Eine Erweiterung der Klasse der geometrisch sinnvollen Abbildungen $\varphi : P \rightarrow Q$ von Polytopen erscheint so unumgänglich. Eine außerordentlich großzügige Lösung besteht darin, von φ nur das absolute Minimum des geometrisch Sinnvollen zu verlangen, nämlich Stetigkeit.

Definition:

\mathcal{K} und \mathcal{L} seien Polytopkomplexe mit den Trägern $|\mathcal{K}|$ bzw. $|\mathcal{L}|$. Eine **stetige \mathcal{K} - \mathcal{L} -Abbildung** ist eine stetige Abbildung $\varphi : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ die eine Abbildung $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ der Komplexe induziert.

Wir haben also einfach auf die Linearität verzichtet und auf diese Weise eine Kategorie mit den gleichen Objekten, aber einer viel größeren Klasse von Morphismen definiert. In der Tat ist diese Klasse ganz außerordentlich groß. Die Automorphismen des Einheitsintervalls $[0, 1]$ in dieser Kategorie sind alle stetigen streng monotonen Funktionen mit Definitionsbereich und Wertebereich $[0, 1]$. Trotzdem führt diese Kategorie zumindest für kompakte konvexe Polytope zu einem sinnvollen Isomorphiebegriff.

Definition:

Ein **topologischer Isomorphismus** von kompakten konvexen Polytopen P, Q ist ein Homöomorphismus $\varphi : P \rightarrow Q$, der eine bijektive Abbildung $\Psi : \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(Q)$ der Seitenkomplexe induziert. Wenn ein solches φ existiert, heißen P und Q **topologisch isomorph** oder auch topologisch äquivalent. Die **topologische Symmetriegruppe** eines kompakten Polytops P ist die Untergruppe $\Gamma_t(P) \subset \Gamma_C(P)$ der kombinatorischen Automorphismen von P , die von topologischen Automorphismen $P \rightarrow P$ induziert werden.

Da kompakte Polytope endliche Komplexe von kompakten Raumstücken sind, welche ihrerseits mit Hilfe der affin-linearen Struktur des umgebenden Raumes als konvexe Hüllen ihrer endlich vielen Ecken oder als Durchschnitt endlich vieler Stützhalbräume beschrieben werden können, mag es unangemessen erscheinen, als Isomorphismen solcher Objekte alle topologischen Isomorphismen zuzulassen. Sachgemäßer scheint es, eine Klasse von Morphismen einzuführen, die zwar weiter ist als die der affin-linearen, die aber doch noch auf enge Weise mit der linearen Struktur der affinen Räume verknüpft ist. Eine solche Klasse von Morphismen sind die stückweise linearen Abbildungen. Mit ihrer Hilfe werden die grundlegenden Kategorien der modernen kombinatorischen Topologie definiert.

Stückweise lineare Kategorien Wir wollen die stückweise linearen Abbildungen durch verschiedene zueinander äquivalente Bedingungen charakterisieren. Zur Vorbereitung beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.1.53

\mathcal{K} und \mathcal{L} seien endliche simpliziale Komplexe in den affinen Räumen E bzw. F . Es sei $\varphi : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ eine stetige Abbildung der Träger, so dass die Beschränkung $\varphi|_P$ für jedes Simplex $P \in \mathcal{K}$ sich zu einer affin-linearen Abbildung $A(P) \rightarrow F$ fortsetzen lässt. Dann existieren simpliziale Unterteilungen \mathcal{K}' und \mathcal{L}' von \mathcal{K} bzw. \mathcal{L} , so dass φ simplizial ist, d.h. \mathcal{K} - \mathcal{L} -linear.

Beweis: $\tilde{\mathcal{L}}$ sei eine Unterteilung von \mathcal{L} derart, dass für jedes $P \in \mathcal{K}$ das kompakte Raumstück $\varphi(P)$ der Träger eines Unterkomplexes von $\tilde{\mathcal{L}}$

ist. Die Existenz eines solchen Komplexes $\tilde{\mathcal{L}}$ folgt durch Anwendung des Zusatzes zu Proposition 2.1.23 auf den Träger $|\mathcal{L}|$, dargestellt als Vereinigung der Raumstücke $Q \in \mathcal{L}$ und der Raumstücke $\varphi(P)$, wo $P \in \mathcal{K}$. Weiter sei nun \mathcal{L}' eine simpliziale Unterteilung von $\tilde{\mathcal{L}}$. Eine solche existiert nach Proposition 2.1.46 oder Satz 2.1.47. Nun sei $\tilde{\mathcal{K}} := \{P \cap \varphi^{-1}(Q) \mid P \in \mathcal{K}, Q \in \mathcal{L}'\}$. Die Elemente $P \cap \varphi^{-1}(Q)$ sind kompakte konvexe Polytope, und es gilt $\mathcal{F}(P) \cap \varphi^{-1}(Q) = \{(P' \cap \varphi^{-1}(Q') \mid P' \in \mathcal{F}(P), Q' \in \mathcal{F}(Q))\}$. Daraus folgt, dass $\tilde{\mathcal{K}}$ ein endlicher Komplex von kompakten konvexen Polytopen ist, der \mathcal{K} unterteilt. Schließlich sei \mathcal{K}' eine simpliziale Unterteilung von $\tilde{\mathcal{K}}$ ohne neue Ecken gemäß Proposition 2.1.46. Man sieht leicht, dass φ die Ecken von $\tilde{\mathcal{K}}$, also von \mathcal{K}' , auf die Ecken von \mathcal{L}' abbildet. Da φ außerdem nach Voraussetzung linear auf den $P \in \mathcal{K}$ ist, also auch linear auf den $P \cap \varphi^{-1}(Q) \in \tilde{\mathcal{K}}$ und daher erst recht auf den Simplices von \mathcal{K}' , ist φ simplizial bezüglich \mathcal{K}' und \mathcal{L}' .

Satz 2.1.54

P und Q seien kompakte Polytope in den affinen Räumen E bzw. F und $\varphi : P \rightarrow Q$ eine stetige Abbildung. Dann sind die folgenden vier Aussagen paarweise äquivalent.

- (i) Es gibt endliche simpliziale Komplexe \mathcal{K} und \mathcal{L} in E bzw. F mit Träger $|\mathcal{K}| = P$ bzw. $|\mathcal{L}| = Q$, so dass φ simplizial bezüglich \mathcal{K} und \mathcal{L} ist.
- (ii) Es gibt endliche Komplexe \mathcal{K} und \mathcal{L} von kompakten konvexen Polytopen in E bzw. F mit Träger $|\mathcal{K}| = P$ bzw. $|\mathcal{L}| = Q$, so dass φ eine $\mathcal{K} - \mathcal{L}$ -lineare Abbildung ist.
- (iii) Es gibt einen endlichen Komplex \mathcal{K} von kompakten konvexen Polytopen in E mit Träger $|\mathcal{K}| = P$, so dass sich für alle $P' \in \mathcal{K}$ die Beschränkung $\varphi|_{P'}$ zu einer affin-linearen Abbildung $A(P') \rightarrow F$ fortsetzt.
- (iv) Der Graph von φ ist ein kompaktes Polytop in $E \times F$.

Beweis: Die Implikationen (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) sind trivial. Wir beweisen nur die Implikation (iv) \Rightarrow (i). Der Graph $G \subset E \times F$ ist nach Vor-

aussetzung ein kompaktes Polytop, besitzt also nach Proposition 2.1.48 eine lineare Triangulierung durch einen endlichen simplizialen Komplex \mathcal{M} . Die Projektionen von $E \times F$ auf die Faktoren induzieren Abbildungen $\pi_1 : G \rightarrow P$ und $\pi_2 : G \rightarrow Q$. Die Abbildung π_1 ist ein Homöomorphismus, und $\mathcal{K} = \{\pi_1(X) \mid X \in \mathcal{M}\}$ ist eine lineare Triangulierung von P derart, dass die Beschränkung von $\varphi = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ auf jedes Simplex $Y \in \mathcal{K}$ sich zu einer linearen Abbildung $A(Y) \rightarrow F$ fortsetzt. Wählen wir für Q eine beliebige lineare Triangulierung durch einen endlichen simplizialen Komplex \mathcal{L} , dann sind die Voraussetzungen von Lemma 2.1.53

Definition:

Eine stetige Abbildung von kompakten Polytopen $\varphi : P \rightarrow Q$ ist **stückweise linear**, wenn sie die äquivalenten Bedingungen von Satz 2.1.54 erfüllt.

Bemerkung: In der angelsächsischen Literatur heißen die stückweise linearen Abbildungen “*piecewise linear*”, und statt “piecewise linear” wird abgekürzt “pl” geschrieben. Da sehr viele wichtige Arbeiten in diesem Bereich in der englischen Sprache verfasst sind, soll die Abkürzung “pl” im Folgenden übernommen werden, obwohl ich Amerikanismen als Ausdruck kultureller Domination eigentlich ablehne. Ich tröste mich damit, da “pl” ja auch “partiell linear” heißen könnte.

Proposition 2.1.55

Die kompakten Polytope in affinen Räumen als Objekte und die stückweise linearen Abbildungen als Morphismen bilden eine Kategorie.

Beweis: $f : P \rightarrow Q$ und $g : Q \rightarrow R$ seien stückweise lineare Abbildungen kompakter Polytope. Es ist zu zeigen, dass die Komposition $h : g \circ f$ eine stückweise lineare Abbildung $h : P \rightarrow R$ ist. Wir bezeichnen die Graphen dieser Abbildungen mit G_f bzw. G_g bzw. G_h . Es sei π die Projektion $\pi : P \times Q \times R \rightarrow P \times R$. Trivialerweise gilt:

$$G_h = \pi(G_f \times R \cap P \times G_g) .$$

G_f und G_g sind nach Voraussetzung kompakte Polytope, ebenso R und P .

Also sind auch $G_f \times R$ und $P \times G_g$ kompakte Polytope, denn ganz allgemein ist das cartesische Produkt kompakter Polytope ein kompaktes Polytop. Es genügt, dies für zwei kompakte konvexe Polytope zu beweisen. Haben diese die endlichen Eckenmengen X bzw. Y , dann gilt $C(X) \times C(Y) = C(X \times Y)$ wegen Prop. 2.1.30, und daher folgt die Aussage aus dem Hauptsatz der elementaren Polyedertheorie. Weil also $G_f \times R$ und $P \times G_g$ kompakte Polytope sind, ist auch ihr Durchschnitt ein solches, und daher ist schließlich auch das Bild desselben bezüglich der Projektion π , also G_h , ein kompaktes Polytop. Also ist h stückweise linear.

Wir sind in Satz 2.1.54 von den Polytopen P, Q als dem primär Gegebenen ausgegangen. Denkt man sich aber P und Q als Träger von Polytopkomplexen gegeben, dann gelangt man zu der folgenden trivialen Charakterisierung von pl-Abbildungen.

Zusatz zu 2.1.54 \mathcal{K} und \mathcal{L} seien endliche Komplexe von kompakten konvexen Polytopen, und $P = |\mathcal{K}|$ sowie $Q = |\mathcal{L}|$ ihre Träger. Eine Abbildung $\varphi : P \rightarrow Q$ ist genau dann stückweise linear, wenn es Unterteilungen \mathcal{K}' von \mathcal{K} und \mathcal{L}' von \mathcal{L} gibt, für die φ eine \mathcal{K}' - \mathcal{L}' -lineare Abbildung ist. - Insbesondere ist ein pl-Isomorphismus ein Homöomorphismus $\varphi : P \rightarrow Q$, der bezüglich geeigneter Unterteilungen \mathcal{K}' von \mathcal{K} und \mathcal{L}' von \mathcal{L} ein \mathcal{K} - \mathcal{L} -linearer Isomorphismus ist.

Beweis: Wenn es solche Unterteilungen gibt, ist φ trivialerweise ein pl-Morphismus bzw. pl-Isomorphismus. Umgekehrt beweist man die Existenz solcher Unterteilungen wie folgt. Nach Voraussetzung existiert ein Komplex $\tilde{\mathcal{K}}$ mit Träger P , so dass die Beschränkung von φ auf alle Polytope von $\tilde{\mathcal{K}}$ linear ist. \mathcal{K} sei irgendeine gemeinsame simpliziale Verfeinerung von \mathcal{K} und $\tilde{\mathcal{K}}$, z.B. $\delta(\mathcal{K} \wedge \tilde{\mathcal{K}})$, und $\hat{\mathcal{L}}$ sei irgendeine simpliziale Unterteilung von \mathcal{L} . Anwendung von Lemma 2.1.53 auf $\varphi : |\hat{\mathcal{K}}| \rightarrow |\hat{\mathcal{L}}|$ liefert Unterteilungen \mathcal{K}' von \mathcal{K} und \mathcal{L}' von \mathcal{L} , bezüglich deren φ simplizial ist. q.e.d.

Die folgende Proposition ist eine geometrische Rechtfertigung des abstrakt kombinatorischen Ansatzes.

Proposition 2.1.56

\mathcal{K} und \mathcal{L} seien endliche Komplexe von kompakten konvexen Polytopen und $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ ein seitentreuer kombinatorischer Morphismus. Dann existiert eine stückweise lineare Abbildung $\varphi : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ der zugrunde liegenden Polytope, welche Ψ induziert. Ist Ψ ein kombinatorischer Isomorphismus, dann kann φ als pl-Isomorphismus gewählt werden.

Beweis: Wir wählen zunächst eine Totalordnung auf der Eckenmenge \mathcal{L}_0 und danach eine Totalordnung auf der Eckenmenge \mathcal{K}_0 , derart, dass für alle Ecken $X, Y \in \mathcal{K}_0$ gilt: $\Psi(X) < \Psi(Y) \Rightarrow X < Y$. Dann definieren wir zulässige Eckenauswahlfunktionen $\varepsilon : \mathcal{K} - \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{K}_0$ und $\eta : \mathcal{L} - \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{L}_0$ durch $\varepsilon(P) = \max \mathcal{F}_0(P)$ für $P \in \mathcal{K} - \{\emptyset\}$ bzw. $\eta(Q) = \max \mathcal{F}_0(Q)$ für $Q \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$. Hierzu gehören nach Proposition 2.1.46 simpliziale Unterteilungen \mathcal{K}' von \mathcal{K} und \mathcal{L}' von \mathcal{L} , die mit Hilfe der ε -Fahnen von \mathcal{K} bzw. der η -Fahnen von \mathcal{L} definiert sind. Weil für alle $P \in \mathcal{K} - \{\emptyset\}$ wegen der Seitentreue $\Psi(\mathcal{F}_0(P)) = \mathcal{F}_0(\Psi(P))$ gilt, folgt sofort: $\eta(\Psi(P)) = \Psi(\varepsilon(P))$. Daraus folgt: Ist $P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_q$ eine ε -Fahne, und wählt man aus $\Psi(P_0) \subseteq \dots \subseteq \Psi(P_q)$ irgendeine maximale η -Fahne aus, dann hat das zugehörige Simplex $Q' \in \mathcal{L}$ die Eckenmenge $\{\eta(\Psi(P_0)), \dots, \eta(\Psi(P_q))\} = \{\Psi(\varepsilon(P_0)), \dots, \Psi(\varepsilon(P_q))\}$. Wenn also $P' \in \mathcal{K}'$ das Simplex zu der ε -Fahne $P_0 \subseteq \dots \subseteq P_q$ ist, dann gilt $\Psi(\mathcal{F}_0(P')) = \mathcal{F}_0(Q')$. Die Abbildung $\Psi : \mathcal{F}_0(P') \rightarrow \mathcal{F}_0(Q')$ setzt sich eindeutig zu einer surjektiven linearen Abbildung $\varphi_{P'} : P' \rightarrow Q'$ des Simplex $P' \in \mathcal{K}'$ auf das Simplex $Q' \in \mathcal{L}$ fort. Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung gilt für je zwei derartige Abbildungen $\varphi_{P'}$, und $\varphi_{P''}$, wo $P', P'' \in \mathcal{K}'$, dass $\varphi_{P'} | P' \cap P'' = \varphi_{P''} | P' \cap P''$. Das System der Abbildungen $\varphi_{P'}$, $P' \in \mathcal{K}'$, definiert also eindeutig eine stetige Abbildung $\varphi : |\mathcal{K}'| \rightarrow |\mathcal{L}'|$, und diese ist nach Konstruktion simplizial bezüglich \mathcal{K}' und \mathcal{L}' . Es ist klar, dass nach Konstruktion für alle $P \in \mathcal{K}$ gilt: $\varphi(P) \subset \Psi(P)$. Behauptung: $\varphi(P) = \Psi(P)$. Beweis: $\Psi(P)$ ist die Vereinigung der Simplexes $Q' = C(\{\eta(Q_0), \dots, \eta(Q_q)\})$ zu den η -Fahnen $Q_0 \subseteq \dots \subseteq Q_q$ mit $Q_q \subset \Psi(P)$. Wegen der Seitentreue von Ψ existiert eine Fahne $P_0 \subseteq \dots \subseteq P_q$ in \mathcal{K} mit $P_q \subset P$ und $\Psi(P_i) = Q_i$. Wegen $\Psi(\varepsilon(P_i)) = \eta(Q_i)$ ist dies eine ε -Fahne. Sie definiert ein Simplex $P' = C(\{\varepsilon(P_0), \dots, \varepsilon(P_q)\}) \subset P$, und es gilt $\varphi(P') = Q'$. Also folgt $\varphi(P) = \Psi(P)$. Die pl-Abbildung $\varphi : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ in-

duziert also $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$. Schließlich ist klar, dass die obige Konstruktion von φ für einen kombinatorischen Isomorphismus Ψ ein φ liefert, welches einen kombinatorischen Isomorphismus $\Psi' : \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{L}'$ von simplizialen Komplexen liefert. φ ist also ein simplizialer Isomorphismus $|\mathcal{K}'| \rightarrow |\mathcal{L}'|$ und insbesondere ein pl-Isomorphismus. Damit ist die Proposition bewiesen, und außerdem der folgende Zusatz.

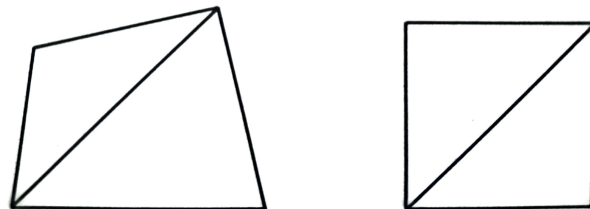
Zusatz zu Proposition 2.1.56 Die $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ induzierende pl-Abbildung $\varphi : |\mathcal{K}'| \rightarrow |\mathcal{L}'|$ kann simplizial bezüglich simplizialer Unterteilungen \mathcal{K}' und \mathcal{L}' von \mathcal{K} bzw. \mathcal{L} ohne neue Ecken gewählt werden.

Korollar 2.1.57

Jeder kombinatorische Isomorphismus $\Psi : \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(Q)$ von kompakten konvexen Polytopen P, Q kann durch einen pl-Isomorphismus $\varphi : P \rightarrow Q$ induziert werden. Insbesondere sind kombinatorisch isomorphe kompakte konvexe Polytope auch topologisch isomorph, und die topologische Symmetriegruppe $\Gamma_t(P)$ eines kompakten konvexen Polytops P ist identisch mit der kombinatorischen Symmetriegruppe $\Gamma_c(P)$. Identifiziert man die euklidische Symmetriegruppe $\Gamma_e(P)$ und die affine Symmetriegruppe $\Gamma_a(P)$ kanonisch mit ihrem Bild in $\Gamma_c(P)$, dann gilt also:

$$\Gamma_e(P) \subseteq \Gamma_a(P) \subseteq \Gamma_t(P) = \Gamma_c(P).$$

Bemerkung: Am Beispiel der konvexen ebenen Vielecke sieht man, dass für die beiden Inklusionen $\Gamma_e(P) \subseteq \Gamma_a(P)$ und $\Gamma_a(P) \subseteq \Gamma_c(P)$ alle 4 Kombinationen von $=$ und \subsetneq möglich sind. Die diagonale Unterteilung eines Trapezes in zwei Dreiecke und die diagonale Unterteilung eines Quadrats liefern auch das vielleicht einfachste Beispiel für einen nicht-affinen pl-Isomorphismus von Polytopen.

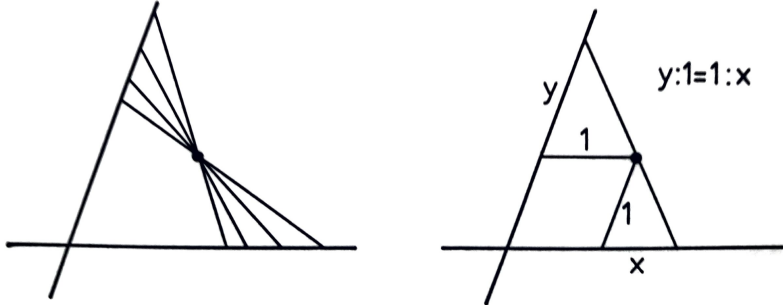


Jeder kombinatorische Isomorphismus $\mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(Q)$ von kompakten konvexen Polytopen P, Q ist also durch einen pl-Isomorphismus $P \rightarrow Q$ induziert. Aber es ist keineswegs auch umgekehrt so, dass jeder pl-Isomorphismus $P \rightarrow Q$ einen kombinatorischen Isomorphismus induziert. Vielmehr zeigt der folgende, auch an sich interessante Satz, dass pl-Isomorphie eine sehr viel gröbere Äquivalenzrelation für kompakte konvexe Polytope ist als kombinatorische Isomorphie.

Proposition 2.1.58

Jedes n -dimensionale kompakte konvexe Polytop P ist pl-isomorph zum n -dimensionalen Standardsimplex Δ_n , und sein Rand ∂P ist pl-isomorph zu dessen Rand $\partial\Delta_n$.

Beweis: $P \subset E$ sei ein n -dimensionales kompaktes konvexes Polytop in dem n -dimensionalen affinen Raum E . Wir wählen ein n -dimensionales Simplex $\Delta \subset E$, das P im Inneren enthält: $P \subset \Delta^\circ$. Wir wählen einen Punkt $p \in P^\circ$ im Inneren von P . Es sei $\pi : \partial P \rightarrow \partial\Delta$ die radiale Projektion mit Zentrum p . Die Abbildung π ist - wie man leicht sieht - ein Homöomorphismus. Man muss sich aber hüten, zu glauben, π sei stückweise linear. Projiziert man beispielsweise ein Dreieck aus einer Spitze auf die gegenüberliegende Seite, so ist dies keine stückweise lineare Abbildung. Trotzdem ist die gegenteilige falsche Behauptung schon so oftgemacht worden, dass man sie inzwischen als den **“Standardfehler”** bezeichnet. Um sich von der Fehlerhaftigkeit der Behauptung zu überzeugen, betrachte man in der affinen euklidischen Ebene die Zentralprojektion einer Geraden L auf eine zu ihr nicht parallele Gerade L' von einem Projektionszentrum p aus, das weder auf L noch auf L' liegt. Der Graph dieser Abbildung $L \rightarrow L'$ ist eine Hyperbel in $L \times L'$, und die Abbildung ist also keineswegs stückweise linear. Die folgenden Zeichnungen machen dies klar.

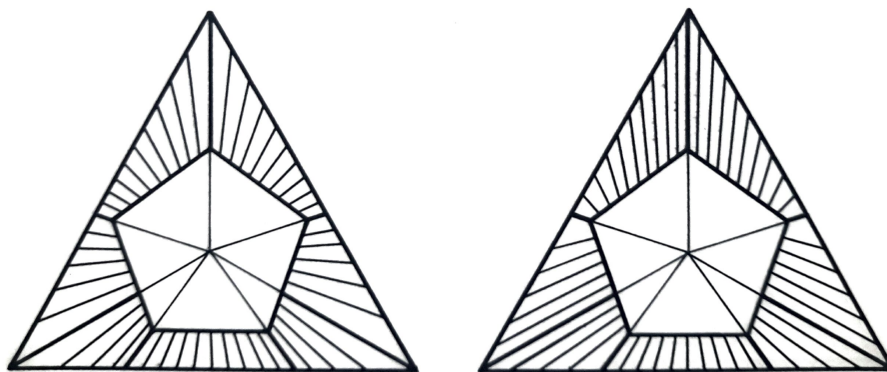


Die radiale Projektion $\pi : \partial P \rightarrow \partial \Delta$ ist also zwar ein Homöomorphismus, aber nicht stückweise linear. Sie hat aber immerhin eine nützliche Eigenschaft, die wir benutzen können, um einen pl-Isomorphismus $\varphi : \partial P \rightarrow \partial \Delta$ zu konstruieren. Es gilt nämlich folgendes. Fassen wir ∂P als Träger des Komplexes $\mathcal{F}[P]$ auf und $\partial \Delta$ als Träger von $\mathcal{F}[\Delta]$, dann gilt: Für alle $X \in \mathcal{F}[P]$ ist das Bild $\pi(X) \subset \partial \Delta$, ein kompaktes Polytop in $\partial \Delta$, und für alle $Y \in \mathcal{F}[\Delta]$ ist $\pi^{-1}(Y)$ ein kompaktes Polytop in ∂P . Für Y ist das klar, denn es ist $\pi^{-1}(Y) = (\{p\} * Y) \cap \partial P$, und für X sieht man es ähnlich. Die Polytope $\pi(X)$ bzw. $\pi^{-1}(Y)$ sind nicht notwendig konvex, aber ihre Schnitte mit den Polyedern von $\mathcal{F}[\Delta]$ bzw. $\mathcal{F}[P]$ sind offensichtlich kompakte konvexe Polytope, und sie bilden, wie man leicht sieht, endliche Komplexe \mathcal{L} und \mathcal{K} von kompakten konvexen Polytopen:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{X \cap \pi^{-1}(Y) \mid X \in \mathcal{F}[P] ; X, Y \in \mathcal{F}[\Delta]\} . \\ \mathcal{L} &= \{\pi(X) \cap Y \mid X \in \mathcal{F}[P] ; X, Y \in \mathcal{F}[\Delta]\} . \end{aligned}$$

Diese Komplexe \mathcal{K} und \mathcal{L} sind Unterteilungen von $\mathcal{F}[P]$ bzw. $\mathcal{F}[\Delta]$. Insbesondere sind ihre Träger $|\mathcal{K}| = \partial P$ und $|\mathcal{L}| = \partial \Delta$. Der Homöomorphismus $\pi : \partial P \rightarrow \partial \Delta$ induziert offenbar einen kombinatorischen Isomorphismus $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$, nämlich $\Psi(X \cap \pi^{-1}(Y)) = \pi(X \cap \pi^{-1}(Y)) = \pi(X) \cap Y$. Dieser kombinatorische Isomorphismus wird aber nun nach Proposition 2.1.56 durch einen pl-Isomorphismus φ der Träger induziert, und damit ist die Existenz eines pl-Isomorphismus $\varphi : \partial P \rightarrow \partial \Delta$ bewiesen. Man nennt ein so konstruiertes $\varphi : \partial P \rightarrow \partial \Delta$ eine **“pseudoradiale Projektion”**.

Die folgende Zeichnung illustriert den Unterschied zwischen radialer und pseudoradialer Projektion.



Die Existenz eines pl-Isomorphismus $P \rightarrow \Delta$ folgt ebenfalls aus Proposition 2.1.56, da man wie folgt kombinatorisch isomorphe Unterteilungen $\tilde{\mathcal{K}}$ von $\mathcal{F}(P)$ und $\tilde{\mathcal{L}}$ von $\mathcal{F}(\Delta)$ definieren kann:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{K}} &= \mathcal{K} \cup \{\{p\} * x \mid X \in \mathcal{K}\} \\ \tilde{\mathcal{L}} &= \mathcal{L} \cup \{\{p\} * Y \mid Y \in \mathcal{L}\}.\end{aligned}$$

Definition:

Ein zu Δ_n pl-isomorphes Polytop heißt n -dimensionale **pl-Kugel**.

Ein zu $\partial\Delta_n$ pl-isomorphes Polytop heißt $(n - 1)$ -dimensionale **pl-Sphäre**.

Eine k -dimensionale pl-Sphäre ist natürlich homöomorph zur k -dimensionalen Sphäre S^k . Die Umkehrung gilt aber nicht: Für jedes $k \geq 5$ gibt es k -dimensionale kompakte Polytope, die homöomorph zu S^k sind und die doch keine pl-Sphären sind. Anders gesagt: Sie sind homöomorph zu $\partial\Delta_{k+1}$, aber nicht pl-isomorph zu $\partial\Delta_{k+1}$. Diese Aussage ist ein tief liegendes Ergebnis, dessen Beweis über den Rahmen dieses Buches hinausgeht. Wir wollen aber doch andeuten, wie man solche Polytope konstruiert. Die Konstruktion geschieht durch doppelte Suspension von Homologiesphären. Dies müssen wir erklären. Die Suspensionsoperation ist leicht zu erklären,

während die Konstruktion der einfachsten Homologiesphäre, des sogenannten sphärischen Dodekaederraumes, uns eine ganze Weile beschäftigen wird. Wir lernen dabei aber auch wichtige klassische Ergebnisse kennen, die in vielen anderen Zusammenhängen von Bedeutung sind. Wir beginnen mit einer Konstruktion des sphärischen Dodekaederraumes und leiten dann später mehrere andere Beschreibungen ab, von denen jede neue Beziehungen sichtbar macht. D sei ein reguläres Dodekaeder in einem orientierten affin-euklidischen Raum E . Die Menge $\mathcal{F}_2(D)$ der maximalen eigentlichen Seiten besteht aus 12 regulären Pentagonen. Sie bilden 6 Paare von je zwei gegenüberliegenden Seiten. Die Vereinigung dieser 12 Seiten ist der Rand ∂D . Wir definieren wie folgt eine Äquivalenzrelation R auf D . Punkte im Inneren D sind nur zu sich selbst äquivalent. Punkte im Rand ∂D auf gegenüberliegenden Seiten Q, Q' sind jedenfalls dann äquivalent, wenn sie durch eine gewisse Schraubung ineinander überführt werden, nämlich die Rechts-Schraubung von E mit Schraubungswinkel $\pi/5$, die Q in Q' überführt. Es sei R die von diesen Äquivalenzen erzeugte Äquivalenzrelation auf D .

2.4 Sphärischer Dodekaederraum und Ikosaedersingularität

Definition:

Der Quotientenraum $M = D/R$ des Dodekaeders D bezüglich der oben erklärten Äquivalenzrelation R heißt der zu D gehörige **sphärische Dodekaederraum**.

M ist zunächst einmal mit der Quotiententopologie versehen und damit ein kompakter topologischer Raum. Wir werden aber bald auf Grund einer anderen Beschreibung von M sehen, dass M eine kompakte 3-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist und sogar in natürlicher Weise mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und mit weiteren Strukturen versehen werden kann.

Die Mannigfaltigkeit M wurde 1904 von H. Poincaré entdeckt (H. Poincaré: “Cinquième complément à l’analysis situs” [292]). Poincaré gab al-

lerdings eine andere Konstruktion von M an. Die Äquivalenz mit der obigen Konstruktion wurde 1933 von C. Weber und H. Seifert bewiesen. Literatur zu den verschiedenen Beschreibungen von M : (1) H. Seifert-W. Threlfall: “Lehrbuch der Topologie” [330, p. 216], (2) R.C. Kirby, M.G. Siebenmann: “Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere” [220], und (3) P. Du Val: “Homographies, Quaternions and Rotations” [106] sowie (4) K. Lamotke: “Regular Solids and Isolated Singularities” [235]. Poincaré konstruierte die 3-Mannigfaltigkeit M , um an ihr die relative Stärke der von ihm definierten algebraisch-topologischen Invarianten zu demonstrieren. Diese Invarianten waren die Homologiegruppen H_* und die Fundamentalgruppe π_1 .

Poincaré zeigte, dass M die gleiche ganzzahlige Homologie hat wie die 3-Sphäre: $H_*(M) \cong H_*(S^3)$. Man sagt: M ist eine 3-dimensionale **Homologiesphäre**. Die Invariante H_* unterscheidet also nicht zwischen M und S^3 .

Demgegenüber kann Poincaré zeigen, dass die Fundamentalgruppen von M und S^3 verschieden sind. S^3 ist nämlich, wie wir schon in Abschnitt LA III 13.5 [57] ausführten, einfach zusammenhängend. Die Fundamentalgruppe ist also trivial: $\pi_1(S^3) = 1$. Hingegen ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ nicht trivial. Sie ist isomorph zu einer bestimmten endlichen Gruppe mit 120 Elementen, der binären Ikosaedergruppe. Diese Gruppe werden wir später genau beschreiben, wenn wir die Symmetriegruppen der regulären Polyeder ausführlich behandeln und wenn wir die endlichen Untergruppen der orthogonalen Gruppe bestimmen. Für den Moment sei nur so viel gesagt, wie zum Verständnis des folgenden unbedingt notwendig ist. Die euklidische Symmetriegruppe eines regulären Dodekaeders oder Ikosaeders im orientierten euklidischen Standardraum \mathbb{R}^3 mit 0 als Baryzentrum ist eine Untergruppe $I^* \subset O(3, \mathbb{R})$ der Ordnung 120. Die Untergruppe der Orientierungserhaltenden Symmetrien ist eine Gruppe $I \subset SO(3, \mathbb{R})$ der Ordnung 60, die **“Ikosaedergruppe”**. Sie ist isomorph zur alternierenden Gruppe A_5 und insbesondere einfach, und I^* ist isomorph zu $I \times \{\pm 1\}$, wo $\{\pm 1\}$ das Zentrum von I^* ist (vgl. LA I, §1, Aufgaben 20, 25, 27 [55, Bd. 1]). Die **binäre Ikosaedergruppe** \tilde{I} ist das Urbild von I bezüglich der universellen Überlagerung von $SO(3, \mathbb{R})$, die wir im Zusatz zu LA III 13.4.27

[57] als einen Homomorphismus $\rho'_{03} : S^3(\mathbb{H}) \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$ der Gruppe der Einheitsquaternionen auf $SO(3, \mathbb{R})$ mit Kern $\{\pm 1\}$ beschrieben haben. Jetzt bezeichnet -1 die Einheitsquaternion $-1 \in S^3(\mathbb{H})$, die nicht zu verwechseln ist mit $-1 \in O(3, \mathbb{R})$. Man hat also eine kanonische exakte Sequenz.

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \tilde{I} \rightarrow I \rightarrow 1 .$$

von der man leicht sieht, dass sie nicht spaltet, weil $\tilde{I} \subset S^3(\mathbb{H})$ im Gegensatz zu I nur ein Element der Ordnung 2 enthält, nämlich -1 . Die von ± 1 verschiedenen Elemente von \tilde{I} kann man als die zu den Drehungen von I gehörigen polarisierten Drehungen auffassen, und damit gestattet der 2. Zusatz zu LA III 13.04.27 die 120 Quaternionen von \tilde{I} ganz explizit hinzuschreiben. Das werden wir später auch tun. Im Vorgriff auf diese späteren Ergebnisse bemerken wir jetzt schon das Folgende.

Der Raum \mathbb{H} der Quaternionen ist kanonisch ein 4-dimensionaler euklidischer Vektorraum, und $S^3(\mathbb{H})$ ist die 3-dimensionale Einheitssphäre in diesem Raum. Die Gruppe $S^3(\mathbb{H})$ operiert auf zwei Weisen kanonisch auf \mathbb{H} : durch Linksmultiplikation und durch Rechtsmultiplikation. Beide Arten von Transformationen sind natürlich orthogonal (Proposition LA III 13.4.24 (iv) und Satz 13.1.2). Die Gruppe \tilde{I} operiert auf der Menge $\tilde{I} \subset S^3(\mathbb{H})$ von 120 Punkten in der 3-Sphäre auf zwei Weisen isometrisch transitiv: durch Linksmultiplikation und durch Rechtsmultiplikation. Diese Menge von 120 Punkten bildet also eine sehr symmetrische Konfiguration von Punkten auf der 3-Sphäre bzw. im 4-dimensionalen Raum. Es liegt daher nahe, mit Hilfe dieser Punkte 4-dimensionale Polytope mit besonderen Symmetrieeigenschaften zu konstruieren.

Für eine solche Konstruktion bieten sich zwei zueinander duale Möglichkeiten an. Die eine besteht darin, I als Eckenmenge eines 4-dimensionalen konvexen Polytops aufzufassen. Das so entstehende Polytop ist ein 4-dimensionales Analogon des regulären Ikosaeders, das wir später bei der Klassifikation der höherdimensionalen regulären Polytope noch genauer beschreiben werden. Die zweite Konstruktion ist zur ersten dual und liefert ein Polytop, das ein 4-dimensionales Analogon des regulären Dodekaeders

ist. Hier ist die Konstruktion. Für jedes $q \in I$ sei $H_q \subset \mathbb{H}$ der Stützhalbraum der Einheitskugel, so dass ∂H_q durch den Randpunkt $q \in S^3(\mathbb{H})$ geht. Es sei P das 4-dimensionale konvexe Polytop

$$P = \bigcap_{q \in \tilde{I}} H_q .$$

Diese Darstellung von P als Durchschnitt von Halbräumen ist offensichtlich die minimale Darstellung, und daher sind die 3-dimensionalen Polytope $P_q = P \cap \partial H_q$ die maximalen Seiten. Die Gruppe \tilde{I} operiert durch Linksmultiplikation einfach transitiv auf der Menge $\mathcal{F}_3(P) = \{P_q \mid q \in \tilde{I}\}$. Insbesondere sind die Polytope P alle zueinander kongruent. Um zu bestimmen, welcher Art diese Polytope sind, genügt es also, eines von ihnen zu betrachten, nämlich P_1 . Auf Grund des 2. Zusatzes zu LA III 13.4.27 ist folgendes klar: In \tilde{I} gibt es genau 12 von 1 verschiedene Quaternionen q_1, \dots, q_{12} mit minimalem sphärischen Abstand von 1. Sie entsprechen den 12 polarisierten Rechtsdrehungen, die zu den 12 Drehungen der Ikosaedergruppe mit Drehwinkel $2\pi/5$ gehören. Das sind die 12 polarisierten Rechtsdrehungen mit Drehwinkel $2\pi/5$, deren Polarisierungen durch die äußeren Normalen in den 12 Flächenmittelpunkten des regulären Dodekaeders gegeben sind. Daraus folgt offensichtlich: Das Polyeder

$$\partial H_1 \cap H_{q_1} \cap \dots \cap H_{q_{12}}$$

ist ein reguläres Dodekaeder. Der Radius r der diesem Dodekaeder eingeschriebenen Kugel ist offenbar $r = \sin \pi/10$. Daher ist der Radius R der umbeschriebenen Kugel nach Pappos $R = \tan \frac{\pi}{5} \cdot \tan \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{10}$. Für die übrigen Quaternionen $q \in \tilde{I}$ ist der sphärische Abstand von 1 größer gleich $\pi/3$, der Abstand des Durchschnitts $\partial H_1 \cap \partial H_q$ von 1 also größer gleich $\sin \pi/6 = 1/2 > R$. Daraus folgt:

$$\partial H_1 \cap H_{q_1} \cap \dots \cap H_{q_{12}} = P_1 .$$

Die maximalen eigentlichen Seiten P_q von P sind also reguläre Pentagondodekaeder, und die binäre Ikosaedergruppe I operiert durch Linksmultipli-

kation einfach transitiv auf der Menge $\mathcal{F}_3(P)$ dieser 120 Dodekaeder, deren Vereinigung der Rand ∂P ist. Auf ∂P operiert I entsprechend als eine fixpunktfreie Gruppe von Isometrien, und wegen der Transitivität auf $\mathcal{F}_3(P)$ kann man den Quotientenraum $\partial P/\tilde{I}$ mit dem Quotientenraum P_1/R_1 von P_1 bezüglich der in $P_1 \subset \partial P$ durch die Operation von \tilde{I} auf ∂P induzierten Äquivalenzrelation identifizieren. Punkte im Inneren P_1 sind bezüglich dieser Äquivalenzrelation nur zu sich selbst äquivalent. Wie steht es mit Punkten auf dem Rande ∂P_1 ? Der Rand ist die Vereinigung der 12 Pentagone $P_1 \cap P_{q_i}, i = 1, \dots, 12$. Ferner zeigt die obige Abschätzung für den Umkugelradius R von P_1 , dass $P_1 \cap P_q \neq \emptyset$ gilt. Aus $x \in P_1$ und $q \in \tilde{I}$ und $qx \in P_1$ folgt also $x \in P_1 \cap P_{q^{-1}}$ und $q = q_i$ für einen Index i . Die Äquivalenzrelation R_1 auf P_1 wird also erzeugt durch die 12 Identifikationen der pentagonalen Seiten $P_1 \cap P_{q_i^{-1}}$ mit den jeweiligen gegenüberliegenden Seiten $P_1 \cap P_{q_i}$ durch die Linksmultiplikationen mit $q_i, i = 1, \dots, 12$. Eine einfache explizite Rechnung zeigt: Die Linksmultiplikation mit q_i bildet das Pentagon $P_1 \cap P_{q_i^{-1}}$ genau so auf das Pentagon $P_1 \cap P_{q_i}$ ab wie eine Rechtschraubung in $\mathcal{P}(\mathbb{H})$ mit Schraubungswinkel $\pi/5$. Damit ist der Quotientenraum $\partial P/\tilde{I} \approx P_1/R_1$ mit dem sphärischen Dodekaederraum $M = D/R$ identifiziert. Da man andererseits durch radiale Projektion $\partial P/\tilde{I}$ kanonisch mit dem Quotientenraum $S^3(\mathbb{H})/\tilde{I}$ identifizieren kann, haben wir folgendes bewiesen.

Proposition 2.1.59

Der sphärische Dodekaederraum kann in natürlicher Weise mit dem Quotienten $S^3(\mathbb{H})/\tilde{I}$ identifiziert werden. Dabei ist $S^3(\mathbb{H})$ die 3-Sphäre der Einheitsquaternionen und $\tilde{I} \subset S^3(\mathbb{H})$ die binäre Ikosaedergruppe, die durch Linksmultiplikation auf $S^3(\mathbb{H})$ operiert.

Bemerkungen: (1) Zusätzlich zu der Operation von \tilde{I} auf $S^3(\mathbb{H})$ durch Linksmultiplikation haben wir eine zweite Operation von \tilde{I} auf $S^3(\mathbb{H})$ von links, bei der $q \in \tilde{I}$ durch $q(x) = xq^{-1}$ wirkt. Diese führt zu einem zweiten Quotientenraum $\tilde{I} \backslash S^3(\mathbb{H})$, und dieser kann in analoger Weise mit einem zweiten Dodekaederraum D/R' identifiziert werden,

bei dessen Definition an die Stelle der Rechtsschraubungen nun Linksschraubungen mit Schraubungswinkel $\pi/5$ treten. Die beiden Quotientenräume $S^3(\mathbb{H})/\tilde{I}$ und $\tilde{I} \backslash S^3(\mathbb{H})$ sind aber nicht wesentlich verschieden, denn sie werden durch die Abbildung identifiziert, welche von der Involution $S^3(\mathbb{H}) \rightarrow S^3(\mathbb{H})$ induziert wird, die q auf q^{-1} abbildet. Entsprechend werden D/R und D/R' durch die Abbildung identifiziert, die durch die Symmetrie $\sigma_0 : D \rightarrow D$ bezüglich des Mittelpunktes $0 \in D$ induziert wird.

- (2) Die folgende Bemerkung ist nur für die Leser gedacht, die ein wenig algebraische Topologie kennen. Aus der Beschreibung des sphärischen Dodekaederraumes M als Quotientenraum $S^3(\mathbb{H})/\tilde{I}$ folgt sofort, dass M eine kompakte orientierbare topologische Mannigfaltigkeit ist. Darüber hinaus ist $S^3(\mathbb{H})/\tilde{I}$ sogar in kanonischer Weise eine C^∞ -differenzierbare Mannigfaltigkeit. Erinnern wir uns ferner an die früheren Bemerkungen in Abschnitt LA III 13.5 [57] über universelle Überlagerungen, dann ist klar, dass $S^3(\mathbb{H}) \rightarrow S^3(\mathbb{H})/\tilde{I}$ die universelle Überlagerung ist, und dass die Fundamentalgruppe von M isomorph zu \tilde{I} ist. Nun ist aber die Gruppe I einfach und nicht abelsch, also gleich ihrer Kommutatoruntergruppe: $[I, I] = I$. Daraus folgt, weil die exakte Sequenz $1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \tilde{I} \rightarrow I \rightarrow 1$ nicht spaltet, dass auch \tilde{I} gleich seiner Kommutatoruntergruppe ist. Nun ist aber bekanntlich die erste Homologiegruppe $H_1(M) = \pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ die abelsch gemachte Fundamentalgruppe (siehe z.B. Spanier [337, p. 398, Thm. 5]). Also gilt $H_1(M) = 0$ für den sphärischen Dodekaederraum. Daraus folgt $H^1(M) = 0$ nach dem universellen Koeffiziententheorem (siehe z.B. [337, p. 243, Thm. 3]). Da M eine zusammenhängende kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit ist, kann man darauf den Poincaréschen Dualitätssatz anwenden (siehe z.B. [337, p. 297, Thm. 18]). Insbesondere folgt $H_2(M) \cong H^1(M) = 0$. Wir haben also $H_1(M) = 0$ und $H_2(M) = 0$. Die übrigen Homologiegruppen sind aber für alle 3-dimensionalen kompakten orientierbaren Mannigfaltigkeiten ohne Rand die gleichen, nämlich $H_0(M) = \mathbb{Z}$ und $H_3(M) = \mathbb{Z}$ und $H_i(M) = 0$ für $i > 3$. Also hat M die gleiche Homologie wie eine

3-Sphäre, d.h. wir haben bewiesen: **Der sphärische Dodekaeder-
raum ist eine 3-dimensionale Homologiesphäre.**

Ich möchte noch eine dritte Beschreibung des sphärischen Dodekaeder-
raumes skizzieren, die für meine eigene mathematische Arbeit wichtig
gewesen ist und ihren Ursprung in Arbeiten von Hermann Amandus
Schwarz und Felix Klein hat, welche noch vor Poincarés “Cinquième
complément” entstanden sind. Die 3-Sphäre $S^3(\mathbb{H})$ ist ja in den re-
ell 4-dimensionalen Raum \mathbb{H} der Quaternionen eingebettet, und die
binäre Ikosaedergruppe $\tilde{I} \subset S^3(\mathbb{H})$ operiert nicht nur auf $S^3(\mathbb{H})$, son-
dern auch auf \mathbb{H} durch Multiplikation von links. Wir haben deswegen
eine Inklusion von Quotientenräumen $S^3(\mathbb{H})/\tilde{I} \subset \mathbb{H}/\tilde{I}$. Der sphärische
Dodekaederraum M ist also ein Unterraum des Quotientenraumes ,
und wir können hoffen, aus einer expliziten Beschreibung von \mathbb{H}/\tilde{I}
auch eine solche von M zu gewinnen.

Um \mathbb{H}/\tilde{I} zu beschreiben, identifizieren wir \mathbb{H} mit \mathbb{C}^2 , und zwar durch
die Zuordnung $w + xi + yj + zk \mapsto (w + iz, y + ix)$. Wir erinnern
daran, dass wir in den Zusätzen zu LA III 3.4.26, 13.4.27 und 13.4.28
unter anderem das folgende kommutative Diagramm von Gruppenho-
morphismen definiert haben.

$$\begin{array}{ccc}
 S^3(\mathbb{H}) & \xrightarrow[\cong]{\sigma'_{03}} & SU(2, \mathbb{C}) \\
 \rho'_{03} \downarrow & & \downarrow \pi' \\
 SO(3, \mathbb{R}) & \xrightarrow[\cong]{\hat{\sigma}_{03}} & PSU(2, \mathbb{C}) \\
 \swarrow \kappa^1 & & \swarrow \lambda' \\
 & & I(S^2)^+
 \end{array}$$

Das Bild \hat{I} von \tilde{I} unter σ'_{03} ist eine Gruppe von 120 unitären 2×2 -
Matrizen, die auf \mathbb{C}^2 wie üblich operiert, und die Operation von \tilde{I}
auf \mathbb{H} durch Linksmultiplikation geht durch σ'_{03} und die Identifikati-
on $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ gerade in die Operation von \tilde{I} auf \mathbb{C}^2 über. Also haben
wir $\mathbb{H}/\tilde{I} = \mathbb{C}^2/\hat{I}$. Wegen der Kommutivität des obigen Diagramms
gilt $\pi'(\hat{I}) = \hat{\sigma}_{03}(\rho'_{03}(\tilde{I})) = \hat{\sigma}_{03}(\tilde{I})$, und $\hat{I}/\{\pm 1\} = \pi'(\hat{I})$ operiert auf

$P_1(\mathbb{C})$ “wie” die Ikosaedergruppe auf der 2-Sphäre S^2 , wenn wir S^2 durch stereographische Projektion mit $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und dies mit $P_1(\mathbb{C})$ identifizieren (vgl. die Formeln nach LA III 13.3.36). Die Operation von I auf S^2 hat drei spezielle Orbits, nämlich die Mengen der Pole der Drehungen der Ordnung 2 bzw. 3 und 5. Die Kardinalität dieser Orbits ist 30 bzw. 20 und 12. Zu jedem dieser drei Orbits gibt es ein homogenes Polynom in zwei Variablen u, v , das genau in den Punkten des Orbits Nullstellen hat, und zwar einfache Nullstellen. Diese Polynome sind vom Grade 30 bzw. 20 bzw. 12, und sie sind bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmt durch die Ikosaedergruppe $I \subset SO(3, \mathbb{R})$. Wenn man für das Dodekaeder bzw. Ikosaeder mit Symmetriegruppe I eine geeignete Lage in \mathbb{R}^3 annimmt, kann man die speziellen Orbits in $S^2 = P_1(\mathbb{C})$ leicht explizit angeben und die Polynome explizit hinschreiben, was wir hier aber nicht tun wollen. Man findet diese Polynome schon in zwei klassischen Arbeiten von Schwarz und Klein (H.A. Schwarz: “Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt” [325, p. 253] sowie F. Klein: “Vorlesungen über das Ikosaeder” [225, p. 56–57]). Beide Autoren bemerken, dass zwischen den drei Polynomen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ vom Grad 30 bzw. 20 bzw. 12 eine einfache algebraische Relation besteht. Wenn man die multiplikativen Konstanten in der Definition der φ_i geeignet wählt, lautet diese Relation:

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^3 + \varphi_3^5 = 0 .$$

Dies veranlaßt uns, in \mathbb{C}^3 die Varietät V der Punkte (z_1, z_2, z_3) zu betrachten, die der folgenden Gleichung genügen:

$$z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0 .$$

Da die partiellen Ableitungen von $z_1^2 + z_2^3 + z_3^5$ nur im Punkt $0 \in V$ sämtlich verschwinden, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass $V - \{0\}$ eine zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist, während der Punkt $0 \in V$ ein singulärer Punkt ist.

Die binäre Ikosaedergruppe f operiert auf dem Vektorraum der Polynome in zwei Variablen $\mathbb{C}[u, v]$ in der üblichen Weise: Fassen wir $\varphi \in \mathbb{C}[u, v]$ als komplexwertige Funktion auf \mathbb{C}^2 auf und $g \in \widehat{I}$ als Abbildung von \mathbb{C}^2 auf sich, dann gilt nach Definition: $g(\varphi) := \varphi \circ g^{-1}$. Ein Polynom φ heißt **invariant** bezüglich \widehat{I} , wenn $g(\varphi) = \varphi$ gilt. Die invarianten Polynome bilden eine \mathbb{C} -Unteralgebra $\mathbb{C}[u, v]^{\widehat{I}} \subset \mathbb{C}[u, v]$.

Behauptung: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind invariant.

Beweis: Folgendes ist klar. Für jedes $g \in \widehat{I}$ existiert eine nichtverschwindende komplexe Zahl $c_i(g) \in \mathbb{C}^*$, so dass gilt: $g(\varphi) = c_i(g)\varphi$. Offenbar gilt $c_i(gh) = c_i(g)c_i(h)$. Also ist $c_i : \widehat{I} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein Homomorphismus der binären Ikosaedergruppe \widehat{I} in die abelsche Gruppe \mathbb{C}^* . Aber wir haben bereits gesehen, dass der größte abelsche Quotient $\widehat{I}/[\widehat{I}, \widehat{I}] = \{1\}$, also trivial ist. Daraus folgt $c_i \equiv 1$, also $g(\varphi) = \varphi$.

Wir definieren eine Abbildung $\Phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow V$ durch

$$\Phi(u, v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v)) .$$

Da $(\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v))$ invariant bezüglich \widetilde{I} sind, induziert Φ eine Abbildung

$$\Psi : \mathbb{C}^2/\widetilde{I} \rightarrow V .$$

Proposition 2.1.60

Die oben definierte Abbildung $\Psi : \mathbb{C}^2/\widehat{I} \rightarrow V$ des Orbitraumes der Operation der binären Ikosaedergruppe \widehat{I} auf \mathbb{C}^2 in die Varietät $V \subset \mathbb{C}^3$ mit der Gleichung $z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0$ ist bijektiv.

Beweis: Der im folgenden skizzierte Beweis ist eine Mischung aus einfach zu verifizierenden, aber nicht im Detail ausgeführten algebraischen Argumenten und elementaren algebraisch-geometrischen Argumenten. Letztere gehen zwar ein wenig über den Rahmen dieses Buches hinaus, sind aber unter Zuhilfenahme eines jeden elementaren Lehrbuchs über algebraische Kurven oder algebraische Geometrie leicht nachzuvollziehen (z.B. E. Brieskorn-H. Knörrer: "Ebene algebraische Kurven" [58], auf das ich mich im folgenden beziehe).

Wir gehen von der folgenden algebraischen Tatsache aus, die man schon in Felix Kleins Vorlesungen über das Ikosaeder findet. Es gibt eine komplexe Konstante $c \neq 0$, so dass gilt:

$$\varphi_1(u, v) = c \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Dass dies so sein muss, sehen wir ohne Rechnung wie folgt ein. Aus der Kettenregel und aus $\widehat{I} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ folgt leicht, dass die Funktionaldeterminante der Invarianten φ_2, φ_3 ebenfalls eine Invariante ist. Sie ist ein homogenes Polynom vom Grade $(20 - 1) + (12 - 1) = 30$. Ihre Nullstellen in $P_1(\mathbb{C}) = S^2$ besteht also, wenn man die Nullstellen mit Multiplizität zählt, aus 30 Punkten. Wegen der Invarianz ist diese Nullstellenmenge eine Vereinigung von Orbits der Ikosaedergruppe I . Diese hat je einen Orbit der Kardinalität 12, 20 und 30. Alle übrigen Orbits bestehen aus 60 Punkten. Es folgt, dass die Nullstellenmenge der Funktionaldeterminante der Orbit der Kardinalität 30 ist. Das ist aber die Nullstellenmenge von φ_1 , und daher ist φ_1 bis auf eine multiplikative Konstante die Funktionaldeterminante.

Die zweite algebraische Tatsache, die wir uns zunutze machen, ist folgende. Wir haben auf \mathbb{C}^2 eine besondere Operation, nämlich die skalare Multiplikation mit der imaginären Einheit i . Sie entspricht übrigens bei der von uns gewählten Identifikation von \mathbb{C}^2 mit \mathbb{H} der Rechtsmultiplikation mit der Einheitsquaternion k . Diese Operation kommutiert mit der Operation der binären Ikosaedergruppe \widehat{I} und induziert daher eine Operation auf \mathbb{C}^2/\widehat{I} , die wir ebenfalls mit i bezeichnen. Wichtig ist nun die Wirkung dieser Operation auf die Invarianten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Da diese homogene Polynome vom Grad $d_1 = 30$ bzw. $d_2 = 20$ und $d_3 = 12$ sind, gilt $\varphi_k(iu, iv) = i^{d_k} \varphi_k(u, v)$. Also haben wir:

$$\Psi(i(u, v)) = (-\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) \quad (2.2)$$

Um die Bijektivität der Abbildung $\Psi : \mathbb{C}^2/\widehat{I} \rightarrow V$ zu beweisen, betrachten wir die Komposition θ dieser Abbildung mit der Projektion π von V auf die Ebene $z_1 = 0$. Wir fassen also v als verzweigte zweifache Überlagerung der (z_2, z_3) -Ebene \mathbb{C}^2 auf. Die Überlagerungsabbildung π ist die Zuordnung

$(z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_2, z_3)$. Für $(b, c) \in \mathbb{C}$ besteht die Faser $\pi^{-1}(b, c)$ aus zwei Punkten, wenn $b^3 + c^5 \neq 0$, nämlich $(\pm a, b, c)$, wo $a^2 + b^3 + c^5 = 0$. Für $b^3 + c^5 = 0$ besteht die Faser $\pi^{-1}(b, c)$ aus einem Punkt, nämlich $(0, b, c)$. Aus (2) folgt: wenn es ein $(u, v) \in \mathbb{C}^2/\widehat{I}$ mit $\Psi(u, v) = (a, b, c)$ gibt, dann gibt es auch ein (u', v') mit $\Psi(u', v') = (-a, b, c)$, nämlich $(u', v') = (iu, iv)$. Daher ist die Bijektivität von Ψ äquivalent zu der folgenden Aussage über $\theta = \pi \circ \Psi$: Die Fasern $\theta^{-1}(b, c)$ sind zweipunktig für $b^3 + c^5 \neq 0$ und einpunktig für $b^3 + c^5 = 0$.

Diese Bedingung für die Bijektivität von Ψ formen wir wie folgt um. Wir betrachten die Abbildung $\chi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, die durch Komposition von $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/\widehat{I}$ mit $\theta/\widehat{I} \rightarrow \mathbb{C}^2$ entsteht. Es gilt also $\chi(u, v) = (\varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$. Wegen der Invarianz von φ_2, φ_3 sind die Fasern von χ Vereinigungen von Orbits von \widehat{I} . Für $(u, v) \neq (0, 0)$ besteht der \widehat{I} -Orbit von (u, v) aus 120 Punkten, denn er entspricht ja einer \widetilde{I} -Nebenklasse in $\mathbb{H} - \{0\}$. Da die Fasern von π, θ und χ über $(b, c) = (0, 0)$ offensichtlich einpunktig sind, ergibt sich nunmehr folgende Aussage: Die Bijektivität von Ψ ist äquivalent zu der folgenden Bedingung (*) für die Kardinalität der Fasern von $\chi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$:

$$(*) \quad |\chi^{-1}(b, c)| = \begin{cases} 240 & \text{wenn } b^3 + c^5 \neq 0 \\ 120 & \text{wenn } b^3 + c^5 = 0 \end{cases} .$$

Um die Faser $\chi^{-1}(b, c)$ zu beschreiben, definieren wir zwei ebene affin-algebraische komplexe Kurven C_b und D_c in der (u, v) -Ebene \mathbb{C}^2 wie folgt:

$$\begin{aligned} C_b &= \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid \varphi_2(u, v) = b\} . \\ D_c &= \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid \varphi_3(u, v) = c\} . \end{aligned}$$

Dann gilt offensichtlich:

$$\chi^{-1}(b, c) = C_b \cap D_c \tag{2.3}$$

Die Berechnung der Anzahl der Schnittpunkte der affinen Kurven C_b und D_c reduzieren wir auf ein entsprechendes Problem für projektive Kurven. Wir definieren zwei projektive ebene Kurven \overline{C}_b und \overline{D}_c in der projektiven

Ebene $P_2(\mathbb{C})$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\overline{C}_b &= \{[u, v, w] \in P_2(\mathbb{C}) \mid \varphi_2(u, v) = bw^{20}\}, \\ \overline{D}_c &= \{[u, v, w] \in P_2(\mathbb{C}) \mid \varphi_3(uv) = cw^{12}\}.\end{aligned}$$

Die Kurve \overline{C}_b schneidet die “unendliche ferne Gerade” $P_1(\mathbb{C}) \subset P_2(\mathbb{C})$ mit der Gleichung $w = 0$ in den Punkten, wo $\varphi_2(u, v) = 0$, d.h. in den 20 Polen von $P_1(\mathbb{C}) = S^2$, die den Dodekaederecken entsprechen. Entsprechend schneidet \overline{D}_c die Gerade in den 12 Polen, die den Ecken des dualen Ikosaeders entsprechen. Daraus folgt: $\overline{C}_b \cap \overline{D}_c \cap P_1(\mathbb{C}) = \emptyset$. Der Durchschnitt $\overline{C}_b \cap \overline{D}_c$ liegt also ganz in $P_2(\mathbb{C}) - P_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2$. Daraus folgt

$$\overline{C}_b \cap \overline{D}_c = C_b \cap D_c. \quad (2.4)$$

Es kommt also darauf an, die Anzahl der Schnittpunkte der komplexen projektiven ebenen algebraischen Kurven \overline{C}_b und \overline{D}_c zu berechnen. Nun gibt es in der Theorie dieser Kurven einen Satz, der genau das leistet, den Satz von Bézout (von Bézout 1779 gefunden, aber, nach darauf hinführenden Bemerkungen von Newton und Mc. Laurin, schon von Euler 1748 und von Cramer 1750 bewiesen). Der Satz berechnet die Zahl der Schnittpunkte von zwei komplexen projektiven Kurven $C, D \subset P_2(\mathbb{C})$. Diese Kurven sind definiert als die Nullstellenmengen von homogenen Polynomen $F(u, v, w)$ bzw. $G(u, v, w)$. Die Grade dieser Polynome seien c bzw. d . Sie sind die “Ordnungen” von C bzw. D . Es wird vorausgesetzt, dass C und D keine gemeinsame Komponente haben, d.h. F und G keinen gemeinsamen nichtkonstanten Faktor. Die Schnittpunkte von C und D werden nicht naiv gezählt, sondern jeder Schnittpunkt p wird mit einer gewissen Multiplizität $\nu_p(C, D) = 1$ gezählt. Dies ist eine natürliche Zahl $\nu_p(C, D) \geq 1$, und es gilt $\nu(C, D) = 1$ genau dann, wenn die Kurven C und D sich in p transversal schneiden. Geht man zu affinen Gleichungen $f(u, v) = 0$ bzw. $g(u, v) = 0$ über, dann lautet diese Bedingung: $\nu_p(C, D) = 1$ genau wenn die Funktionaldeterminante von f und g in p nicht verschwindet. **Die Schnittzahl** $C \cdot D$ wird nun als die Summe $\sum \nu_p(C, D)$ definiert, wo über alle $p \in C \cap D$ summiert wird,

und der Satz von Bézout lautet dann: $C \cdot D = cd$ (siehe z.B. [58, p. 296, Satz 2]). In unserem Fall erhalten wir:

$$\overline{C}_b \cdot \overline{D}_c = 20 \cdot 12 = 240 \quad (2.5)$$

Ferner folgt aus der Bedingung für $\nu_p = 1$ zusammen mit der Aussage (1) und der Identität $\varphi_1^2 + \varphi_2^3 + \varphi_3^5 = 0$:

$$b^3 + c^5 \neq 0 = \overline{C}_b \cdot \overline{D}_c = |\overline{C}_b \cap \overline{D}_c| \quad (2.6)$$

Im Falle $b^3 + c^5 = 0$ haben alle Schnittpunkte p eine Multiplizität $\nu_p \geq 2$. Also folgt $\overline{C}_b \cdot \overline{D}_c \geq 2|\overline{C}_b \cap \overline{D}_c|$ und daher $0 < \overline{C}_b \cap \overline{D}_c \leq 120$ wegen (5). Andererseits ist $\overline{C}_b \cap \overline{D}_c$ wegen (3), (4) eine Vereinigung von \tilde{I} -Orbits, und für $(b, c) \neq (0, 0)$ ist $|\overline{C}_b \cap \overline{D}_c|$ daher ein positives Vielfaches von 120. Also folgt:

$$b^3 + c^5 = 0 \text{ und } (b, c) \neq (0, 0) = \overline{C}_b \cdot \overline{D}_c = 2|\overline{C}_b \cap \overline{D}_c| \quad (2.7)$$

Aus (3), (4), (5), (6), (7) folgt:

$$|\chi^{-1}(b, c)| = |C_b \cap D_c| = |\overline{C}_b \cap \overline{D}_c| = \begin{cases} \overline{C}_b \cdot \overline{D}_c = 240 & \text{für } b^3 + c^5 \neq 0 \\ \frac{1}{2}\overline{C}_b \cdot \overline{D}_c = 120 & \text{für } b^3 + c^5 = 0 \end{cases}$$

Das ist genau die Bedingung (*), und damit ist die Bijektivität von Ψ bewiesen.

Bemerkung: Wir haben bisher den Quotienten \mathbb{C}^2/\tilde{I} und die Hyperfläche $V \subset \mathbb{C}^3$ einfach als Mengen betrachtet und gezeigt, dass die Abbildung $\Psi : \mathbb{C}^2/\hat{I} \rightarrow v$ bijektiv ist. In Wahrheit kann man aber beide Mengen in natürlicher Weise mit einer schönen zusätzlichen Struktur versehen, nämlich mit der Struktur einer sogenannten komplexen affin-algebraischen Varietät. Dazu muss man sagen, was die \mathbb{C} -Algebra der Funktionen auf der Menge sein soll. Für \mathbb{C}^2/\hat{I} ist das definitionsgemäß die Algebra der Funktionen, die bei Komposition mit der Restklassenbildung $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/\hat{I}$ eine \hat{I} -invariante ganz rationale Funktion auf \mathbb{C}^2 ergeben. Die Algebra der Funktionen auf \mathbb{C}^2/\hat{I} identifiziert sich also mit der Algebra $\mathbb{C}[u, v]^{\hat{I}}$ der invarianten Polynome.

Man kann beweisen, dass dies gerade die von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ erzeugte Unteralgebra ist, also:

$$\mathbb{C}[u, v]^{\widehat{I}} = \mathbb{C}[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] .$$

siehe z.B. Webers "Lehrbuch der Algebra" [362, Band 2, p. 77]. Für die Hyperfläche $V \subset \mathbb{C}^3$ ist die Funktionenalgebra definitionsgemäß die Algebra der Funktionen auf V , die durch Beschränkung der ganz rationalen Funktionen von \mathbb{C}^3 auf V entstehen. Diese Algebra $A(V)$ identifiziert sich kanonisch mit der Restklassenalgebra von $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ bezüglich des von $z_1^2 + z_2^3 + z_3^5$ erzeugten Ideals $(z_1^2 + z_2^3 + z_3^5)$, also

$$A(V) = \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]/(z_1^2 + z_2^3 + z_3^5) .$$

Dies folgt, weil dies Ideal ein Primideal ist, aus dem Hilbertschen Nullstellensatz (siehe z.B. E. Kunz: "Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie" [232, Satz 3.11]).

Nun induziert die Abbildung $\Psi : \mathbb{C}^2/\widehat{I} \rightarrow V$ kanonisch eine Abbildung der Funktionenalgebren $A(V) \mapsto \mathbb{C}[u, v]^{\widehat{I}}$ durch die Zuordnung $f \mapsto f \circ \Psi$. Aus der Bijektivität von Ψ folgt leicht, dass dieser Homomorphismus einen Isomorphismus induziert:

$$\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]/(z_1^2 + z_2^3 + z_3^5) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$$

$$z_i \mapsto \varphi_i .$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]/(z_1^2 + z_2^3 + z_3^5) \cong \mathbb{C}[u, v]^{\widehat{I}}$$

Die Abbildung Ψ induziert also einen Isomorphismus der Funktionenalgebren von \mathbb{C}^2/\widehat{I} und V . Mit anderen Worten:

Die Abbildung $\psi : \mathbb{C}^2/I \rightarrow V$ ist ein Isomorphismus von affin-algebraischen -Varietäten.

Nachdem wir nun durch Proposition 2.1.60 über eine sehr konkrete Beschreibung von $\mathbb{H}/\widetilde{I} = \mathbb{C}^2/\widehat{I}$ verfügen, nämlich als Varietät $V \subset \mathbb{C}^3$ mit

der Gleichung $z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0$, können wir leicht eine ebenso konkrete Beschreibung des sphärischen Dodekaederraumes $S^3(\mathbb{H})/\tilde{I}$ angeben. Denn wir können $S^3(\mathbb{H})$ kanonisch mit dem Quotienten $\mathbb{H} - \{0\}/\mathbb{R}^+$ identifizieren, wo \mathbb{R}^+ auf \mathbb{H} durch Multiplikation operiert: $t(q) = tq$ für $t \in \mathbb{R}^+$ und $q \in \mathbb{H} - \{0\}$. Auf $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ entspricht dem die skalare Multiplikation $t(u, v) = (tu, tv)$. Diese Operation kommutiert mit der von \tilde{I} bzw. \hat{I} und induziert eine Operation von \mathbb{R}^+ auf $\mathbb{C}^2/\hat{I} - \{0\}$. Identifizieren wir \mathbb{C}^2/\hat{I} mit V , dann erhalten wir eine Operation von \mathbb{R}^+ auf $V - \{0\}$, nämlich

$$t(z, z_2, z_3) = (t^{30}z_1, t^{20}z_2, t^{12}z_3) .$$

Auf diese Weise wird $S^3(\mathbb{H})/\tilde{I}$ kanonisch mit $V - \{0\}/\mathbb{R}^+$ identifiziert. Diesen Quotienten können wir aber noch konkreter beschreiben. Dazu betrachten wir den Durchschnitt von V mit der Einheitssphäre $S^5 \subset \mathbb{C}^3$, also

$$V \cap S^5 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0, \|z\| = 1\} .$$

Das ist also der Rand einer kugelförmigen Umgebung des singulären Punktes von V .

Die Inklusion $V \cap S^5 \hookrightarrow V - \{0\}$ induziert offensichtlich eine bijektive Abbildung $V \cap S^5 \rightarrow V - \{0\}/\mathbb{R}^+$. Durch Komposition mit der Bijektion $V - \{0\}/\mathbb{R}^+ \rightarrow S^3(\mathbb{H})/\tilde{I}$ erhält man eine bijektive Abbildung $V \cap S^5 \rightarrow S^3(\mathbb{H})/\tilde{I}$. Man macht sich leicht klar, dass dies sogar ein Diffeomorphismus ist. Damit haben wir insgesamt folgendes bewiesen.

Satz 2.1.61

Der sphärische Dodekaederraum $M \approx S^3(\mathbb{H})/\tilde{I}$ ist diffeomorph zu dem sphärischen Umgebungsrand $V \cap S^5$ der **Ikosaedersingularität** $0 \in V$ auf der Fläche $V \subset \mathbb{C}^3$ mit der Gleichung $z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0$.

Damit verfügen wir über drei verschiedene Beschreibungen des sphärischen Dodekaederraumes. Wir wenden uns nun den Suspensionen des Dodekaederraumes zu. Zunächst müssen wir aber die Suspensionsoperation definieren.

Definition:

X sei ein topologischer Raum, $[0, 1]$ das Einheitsintervall und R die Äquivalenzrelation auf $X \times [0, 1]$, die wie folgt definiert ist: (x, s) äquivalent zu (y, t) genau wenn $(x, s) = (y, t)$ oder wenn $s = t = 1$ oder wenn $s = t = 0$. Dann ist die **Suspension** von X der Quotientenraum

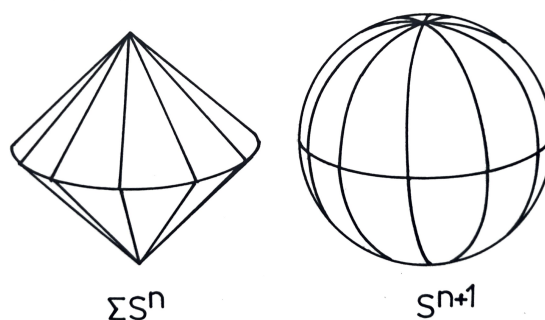
$$\Sigma^n X = X \times [0, 1] / R .$$

Die n -fache Suspension ist wie folgt rekursiv definiert:

$$\Sigma^n X = (\Sigma^{n-1} X) .$$

Die Suspension ist eine wichtige homotopietheoretische Operation, die in jedem ordentlichen Buch über algebraische Topologie oder Homotopietheorie behandelt wird, (z.B. Spanier [337, chap. 1.6]). Man kann auch die Suspension von Abbildungen definieren, und man erhält so einen Suspensionsfunktork. Dieser Funktor hat stabilisierende Eigenschaften, er führt zu einer "stabilen Homotopietheorie", in der sich durch die Suspension manche Probleme vereinfachen - natürlich um den Preis des Verlustes an Information. Dies gilt aber nicht nur für die Homotopietheorie, sondern auch für die geometrische Topologie. Ein Beispiel dafür ist die Suspension von Homologiesphären, der wir uns jetzt zuwenden.

Es ist klar, dass die Suspension ΣS^n einer n -Sphäre homöomorph zur $(n + 1)$ -Sphäre S^{n+1} ist. Das folgende Bild illustriert dies für $n = 1$.



Nun sei M eine **Homologie- n -Sphäre**, d.h. eine kompakte topologische

Mannigfaltigkeit mit der gleichen ganzzahligen Homologie wie S^n . Was passiert, wenn wir M suspendieren? Mit Hilfe des Satzes von Mayer-Vietoris beweist man ganz leicht, dass ΣM die gleiche Homologie wie S^{n+1} hat (Spanier [337, Chap. 4.6]). braucht man den Satz von E. Van Kampen ("On the connection between the fundamental groups of some connected spaces" [356]). Er impliziert, dass $\pi_1(K^+ \cup K^-)$ ein Quotient des freien Produktes $\pi_1(K^+) * \pi_1(K^-)$ ist, wenn $M = K^+ \cap K^-$ zusammenhängend ist. Dies ist für $n > 0$ der Fall, und weil offensichtlich $\pi_1(K^+) = \{1\} = \pi_1(K^-)$, folgt $\pi_1(\Sigma M) = \{1\}$ für $n > 1$. In diesem Sinne ist also ΣM einfacher als M : Selbst wenn M nicht einfach zusammenhängend war, ist ΣM einfach zusammenhängend. In anderer Hinsicht aber ist ΣM weniger einfach als M . Denn wenn M nicht einfach zusammenhängend ist, ist ΣM für $n > 1$ keine Mannigfaltigkeit. Denn die beiden Pole besitzen eine Umgebungsbasis, so dass die punktierten Umgebungen den gleichen Homotopietyp wie M haben. Daraus folgt leicht, dass diese beiden Punkte keine zu \mathbb{R}^{n+1} homöomorphe Umgebung in ΣM besitzen.

Angesichts dieser Lage ist die folgende Frage sehr interessant: Was passiert, wenn wir ΣM noch einmal suspendieren? Der folgende eindrucksvolle Satz gibt darauf die Antwort.

Satz 2.1.62

Die doppelte Suspension $\Sigma^2 M$ jeder n -dimensionalen Homologiesphäre M ist homöomorph zu S^{n+2} .

Der Beweis dieses Satzes geht weit über den Rahmen dieses Buches hinaus. Ein Spezialfall dieses Satzes wurde 1975 von R.D. Edwards bewiesen. Nach diesem Durchbruch bewies J.W. Cannon den Satz in voller Allgemeinheit ("Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimension three" [74]).

Insbesondere ist die doppelte Suspension $\Sigma^2 M$ des sphärischen Dodekaederraumes M homöomorph zu S^5 . Dies benutzen wir jetzt, um zu zeigen, wie man ein 5-dimensionales Polytop konstruieren kann, das homöomorph zu S^5 ist, aber trotzdem keine 5-dimensionale pl-Sphäre. M haben wir als einen ganz bestimmten Quotientenraum $M = D/R$ des regulären Dodekaeders be-

trachtet. $K = \delta^2(\mathcal{F}(D))$ sei der zweite derivierte Komplex des Seitenkomplexes $\mathcal{F}(D)$. Die Äquivalenzrelation R auf D induziert eine Äquivalenzrelation \mathcal{R} auf \mathcal{K} . Die Restklassenmenge $\mathcal{M} = \mathcal{K}/\mathcal{R}$ ist eine partial geordnete Menge mit der durch \mathcal{K} induzierten Partialordnung. Man macht sich ohne große Schwierigkeiten klar, dass M ein endlicher abstrakter simplizialer Komplex ist, und dass seine Realisierung $\|\mathcal{M}\|$ zu M homöomorph ist. (Abstrakte simpliziale Komplexe und ihre Realisierungen werden wir später definieren – ich bitte um Nachsicht für den Vorgriff). Die Realisierung $\|\mathcal{M}\|$ ist ein kompaktes Polytop in einem euklidischen Standardraum \mathbb{R}^N . Wir betten \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^{N+1} durch $(x_1, \dots, x_N) \rightarrow (x_1, \dots, x_N, 0)$ ein und betrachten im orthogonalen Komplement die 0-Sphäre $S^\circ = \{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$. Die Verbindung $\|\mathcal{M}\| * S^\circ$ ist ein zu ΣM homöomorphes Polytop in \mathbb{R}^{N+1} . Wiederholung dieser Konstruktion, d.h. Einbettung $\mathbb{R}^{N+1} \subset \mathbb{R}^{N+2}$, Wahl der Einheits-0-Sphäre $'S^\circ$ im Komplement und Bildung der Verbindung liefert schließlich ein Polytop in \mathbb{R}^{N+2} , nämlich

$$P := (\|\mathcal{M}\| * S^\circ) * 'S^\circ .$$

Dieses Polytop ist offensichtlich homöomorph zu $\Sigma^2 M$, also wegen des Satzes 224 von Edwards und Cannon homöomorph zu S^5 . Das Polytop P ist aber keine pl-Sphäre. Der Beweis dafür ist leichter zu führen, wenn wir über den Begriff der kombinatorischen Mannigfaltigkeit verfügen, den wir nachher noch einführen werden. Es ergibt sich dann aus der Konstruktion, dass das Polytop P keine kombinatorische Mannigfaltigkeit ist, während jede pl-Sphäre eine kombinatorische Mannigfaltigkeit ist.

Damit haben wir wie versprochen in der Dimension $n = 5$ ein Polytop konstruiert, das homöomorph zu S^n ist, aber trotzdem keine pl-Sphäre. Für höhere Dimensionen $n \geq 5$ erhält man ganz analoge Beispiele durch doppelte Suspension höherdimensionaler Homologiesphären. Der entscheidende Schritt war natürlich der Satz von Edwards und Cannon, den wir ohne Beweis zitieren mussten. Da wir die Konstruktion einer einzelnen Homologiesphäre, nämlich des sphärischen Dodekaederraumes, so ausführlich behandelt haben, liegt daran, dass dieser in vielen Zusammenhängen auf-

tritt, wie wir noch sehen werden.

Das oben konstruierte Polytop $P = \Sigma^2 \|\mathcal{M}\|$ liefert auch ein Gegenbeispiel gegen die berühmte **Hauptvermutung** (E. Steinitz: “Beiträge zur analysis situs” [341]). Diese Vermutung wurde 1907 von Steinitz aufgestellt. Die ursprünglich eng miteinander verbundenen Ansätze der analysis situs hatten sich im Laufe des 19. Jahrhunderts so weit differenziert, die Begriffe “Mannigfaltigkeit”, “Polytop”, “topologischer Raum” waren so weit entfaltet, Disziplinen wie die Riemannsche Geometrie, die kombinatorische, die mengentheoretische und die algebraische Topologie waren so weit entwickelt, dass der Wunsch nach Klärung des Verhältnisses dieser verschiedenen Ansätze im ersten Viertel unseres Jahrhunderts natürlich erscheinen mochte. Auf diesem Hintergrund ist die Aufstellung der Hauptvermutung zu sehen. Sie besagt in ihrer einfachsten Form: *Homöomorphe Polytope sind pl-isomorph.*

Es stellte sich jedoch heraus, dass die Frage verfrüht war. Lediglich im Fall der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten konnte sie von Kerékjártó 1923 positiv beantwortet werden. Bis zur Mitte unseres Jahrhunderts waren die Methoden nicht weit genug entwickelt, um die Frage zu entscheiden. 1956 fand dann J. Milnor ein Gegenbeispiel zur Hauptvermutung (J. Milnor: “Two complexes that are homeomorphic but combinatorially distinct” [248]). Milnors Polytope waren keine topologischen Mannigfaltigkeiten. Die doppelte Suspension $\Sigma^2 M$ des sphärischen Dodekaederraumes und allgemeiner die doppelten Suspensionen von Homologiesphären liefern für alle Dimensionen $n \geq 5$ Gegenbeispiele zur Hauptvermutung, so dass die homöomorphen, aber nicht pl-isomorphen Polytope n -dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeiten sind – und sogar homöomorph zu S^n ! Trotzdem ist damit die Frage noch nicht erledigt, denn man kann fragen, ob die Antwort nicht positiv wird, wenn man die kombinatorische Struktur durch weitere Bedingungen für die Mannigfaltigkeit einschränkt. Darauf werden wir noch zurückkommen, wenn wir berichten, was man heute über das Verhältnis der Kategorien DIFF, TOP und PL der differenzierbaren, der topologischen und der pl-Mannigfaltigkeiten weiß.

2.5 Kombinatorische und pl-Mannigfaltigkeiten

Unser nächstes Ziel ist es, kombinatorische Mannigfaltigkeiten und pl-Mannigfaltigkeiten zu definieren. Wir wollen diese Räume dadurch charakterisieren, dass sie lokal die gleiche Struktur haben wie eine pl-Kugel. Um diese Idee formal zu fassen, brauchen wir eine formale Definition dessen, was wir unter “lokal” verstehen wollen, also ein Analogon dessen, was in der Topologie durch den Begriff der “Umgebung” geleistet wird. Dafür gibt es nun mehrere Möglichkeiten. Wir geben zunächst einige Definitionen an und diskutieren ihre Bedeutung dann an Beispielen.

Definition:

\mathcal{K} sei ein Komplex von kompakten konvexen Polytopen und $P \neq \emptyset$ ein Polytop $P \in \mathcal{K}$.

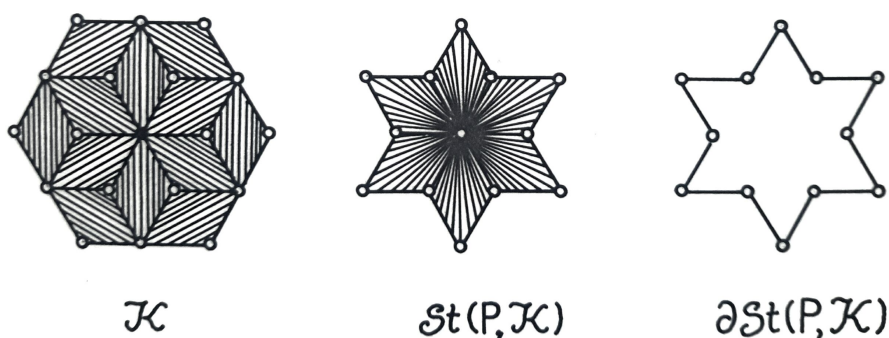
- (i) Der **Stern** von P in \mathcal{K} ist der folgende Unterkomplex von \mathcal{K} :

$$St(P, \mathcal{K}) = \{Q \in \mathcal{K} \mid \exists P' \in \mathcal{K} \mid Q \subseteq P' \subseteq P\}.$$

- (ii) Der **Sternrand** von P in \mathcal{K} ist der folgende Unterkomplex von \mathcal{K} :

$$\partial St(P, \mathcal{K}) = \{Q \in St(P, \mathcal{K}) \mid Q \cap P = \emptyset\}.$$

Die folgende Zeichnung illustriert diese Definitionen.



Der Begriff des Sterns wurde meines Wissens von H. Poincaré eingeführt [291, p. 276]. Das Wort “Stern” bzw. “star” in der englischen Literatur ist allgemein gebräuchlich. Hingegen fehlt ein ebenso allgemein gebräuchliches

Wort für den Sternrand ∂St . In der englischen Literatur ist “Link” gebräuchlich, und als Notation $Lk(p, \mathcal{K})$. Das hier benutzte “Sternrand” ist ein Notbehelf. Reidemeister hat “Ring” vorgeschlagen. Ich würde “corona” sehr schön finden, aber...

Man sieht leicht, dass der Träger des Sterns einer Ecke $\{p\}$ von \mathcal{K} eine abgeschlossene Umgebung von p in $|\mathcal{K}|$ ist. Die Definition des Sterns stellt also tatsächlich eine mögliche Fassung des Umgebungsbegriffs dar, und zwar eine solche, bei der von einem Komplex als dem primären Datum ausgegangen wird. Will man umgekehrt von einem Polytop als dem ursprünglichen Gegebenen ausgehen, dann kann man wie folgt vorgehen.

Definition:

Zwei Teilmengen X, Y eines affinen Raumes E heißen **verbindbar**, wenn gilt:

- (i) $X \cap Y = \emptyset$.
- (ii) Je zwei verschiedene Strecken $[x, y]$ und $[x', y']$ mit $x, x' \in X$ und $y, y' \in Y$ treffen sich höchstens in einem Randpunkt.

Sieht man zwei konvexe Linearkombinationen dann als gleich an, wenn sie nach Fortlassen der Summanden mit verschwindendem Koeffizienten identisch sind, dann kann man die obige Definition auch so formulieren: X und Y sind verbindbar, wenn sie disjunkt sind und jeder Punkt der Verbindung $X * Y$ **eindeutig** als konvexe Linearkombination eines Punktes aus X und eines Punktes aus Y dargestellt werden kann.

Der im Moment wichtigste Spezialfall ist der, wo $X = \{x\}$ einpunktig ist. Dann nennen wir $\{x\} * Y$ einen **Kegel** mit **Spitze** x und **Basis** Y .

Definition:

P sei ein Polytop in einem affinen Raum und $x \in P$ ein Punkt von P . Ein Polytop Q heißt ein **Sternrand** von x in P , wenn gilt:

- (i) Q ist kompakt.
- (ii) Q ist mit $\{x\}$ verbindbar.

(iii) $\{x\} * Q \subset P$.

(iv) $\{x\} * Q$ ist eine abgeschlossene Umgebung von x in P .

Das Polytop $\{x\} * Q$ heißt dann ein **Stern** von x in P .

Proposition 2.1.63

P sei ein kompaktes Polytop in E und $x \in P$ ein Punkt von P . Eine Teilmenge V von P ist genau dann ein Stern von x in P , wenn es einen endlichen Polytopkomplex \mathcal{K} mit Träger $|\mathcal{K}| = P$ gibt, so dass $\{x\}$ eine Ecke von \mathcal{K} ist und $V = |St(\{x\}, \mathcal{K})|$. Der zu V gehörige Sternrand ist dann $|\partial St(\{x\}, \mathcal{K})|$.

Beweis: dass für jedes K mit $|\mathcal{K}| = P$ und $\{x\} \in \mathcal{K}$ der Träger $|St(\{x\}, \mathcal{K})|$ ein Stern von x in P ist und $|\partial St(\{x\}, \mathcal{K})|$ sein Sternrand, ist fast trivial. Ist umgekehrt der Stern V von x in P mit Sternrand Q gegeben, dann kann man zunächst nach dem Zusatz zu 2.1.23 einen Polytopkomplex \mathcal{L} mit Träger $|\mathcal{L}| = P$ finden, so dass Q und V Träger von Unterkomplexen \mathcal{L}_Q bzw. \mathcal{L}_V sind. Die wie folgt definierte Menge \mathcal{K} von Polytopen ist dann ein Polytopkomplex mit den gewünschten Eigenschaften:

$$\mathcal{K} = (\mathcal{L} - \mathcal{L}_V) \cup \mathcal{L}_Q \cup \{\{x\} * Y \mid Y \in \mathcal{L}_Q\} .$$

Proposition 2.1.64

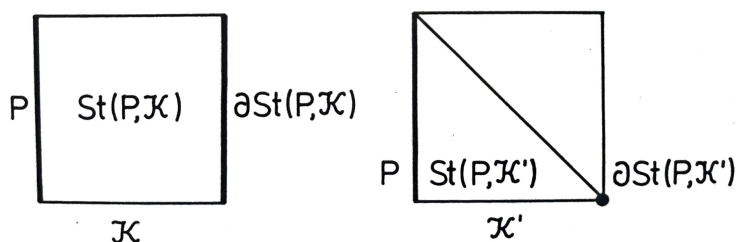
Alle Sternränder zu einem festen Punkt x eines Polytops P sind pl-isomorph. Alle Sterne von x in P sind zueinander pl-isomorph.

Beweis: Der Beweis ist eine Übung in der Anwendung der Methode der pseudoradialen Projektion.

Bemerkung: Man kann Proposition 2.1.64 wegen Proposition 2.1.63 auch wie folgt formulieren:

Sind \mathcal{K} und \mathcal{K}' Komplexe mit dem gleichen Träger und ist $\{x\}$ eine Ecke von \mathcal{K} und \mathcal{K}' , dann sind $|St(\{x\}, \mathcal{K})|$ und $|St(\{x\}, \mathcal{K}')|$ pl-isomorph. Eine analoge Aussage für die Sterne $St(P, \mathcal{K})$ mit $\dim P \geq 0$ gilt nicht allgemein für beliebige Komplexe. Die folgende Zeichnung zeigt ein triviales Beispiel. \mathcal{K} sei der Seitenkomplex eines Quadrates, \mathcal{K}' entstehe daraus durch diagonale Unterteilung. P sei eine 1-dimensionale Seite. Dann ist $St(P, \mathcal{K}) = \mathcal{K}$,

während $St(P, \mathcal{K}')$ der Seitenkomplex eines Dreiecks ist. $|\partial St(P, \mathcal{K})|$ ist ein 1-Simplex, $|\partial St(P, \mathcal{K}')|$ hingegen ein Punkt.



Das Beispiel zeigt auch, dass für $\dim P > 0$ und beliebige Komplexe \mathcal{K} im allgemeinen $|\partial St(P, \mathcal{K})|$ nicht mit P verbindbar ist. Dies sind Hinweise darauf, dass Sterne und ihre Ränder für höherdimensionale $p \in \mathcal{K}$ für beliebige Polytopkomplexe sich unkontrollierbar verhalten. Die nächste Proposition zeigt, dass dies anders ist, wenn wir uns auf simpliziale Komplexe beschränken.

Proposition 2.1.65 (1) \mathcal{K} sei ein simplizialer Komplex. Dann gilt für jedes $P \in \mathcal{K} - \{\emptyset\}$:

- (i) $|\partial St(P, \mathcal{K})|$ ist mit P verbindbar.
 - (ii) $P * |\partial St(P, \mathcal{K})| = |St(P, \mathcal{K})|$.
 - (iii) Die Zuordnung $X \mapsto P * X$ definiert eine bijektive ordnungstreue Abbildung $|\partial St(P, \mathcal{K})| \rightarrow \{Q \in \mathcal{K} \mid Q \supseteq P\}$.
- (2) Sind \mathcal{K} und \mathcal{K}' simpliziale Komplexe mit dem gleichen Träger $|\mathcal{K}| = |\mathcal{K}'|$ und mit einem gemeinsamen Simplex $\emptyset \neq P \in \mathcal{K}, \mathcal{K}'$, dann gilt
- (iv) $|\partial St(P, \mathcal{K})|$ und $|\partial St(P, \mathcal{K}')|$ sind pl-isomorph,
 - (v) $|St(P, \mathcal{K})|$ und $|St(P, \mathcal{K}')|$ sind pl-isomorph.

Beweis: Übung

Wir definieren jetzt die zentrale Kategorie der kombinatorischen Topologie.

Definition:

E sei ein endlich dimensionaler reeller affiner Raum. Eine **n -dimensionale pl-Mannigfaltigkeit in E** ist ein kompaktes Polytop in M in E , so dass für jeden Punkt $x \in M$ die Sternränder von x in M pl-Sphären der Dimension $n - 1$ sind.

Definition:

E sei ein endlich dimensionaler reeller affiner Raum. Eine **n -dimensionale kombinatorische Mannigfaltigkeit in E** ist ein endlicher Komplex \mathcal{K} von kompakten konvexen Polytopen in E , so dass für jede Ecke $\{x\} \in \mathcal{K}$ der Sternrand $|\partial St(\{x\}, \mathcal{K})|$ eine $(n - 1)$ -dimensionale pl-Sphäre ist.

Proposition 2.1.66

Ein endlicher Komplex \mathcal{K} von kompakten konvexen Polytopen in E ist genau dann eine n -dimensionale kombinatorische Mannigfaltigkeit in E , wenn die Träger $|\mathcal{K}|$ eine n -dimensionale pl-Mannigfaltigkeit in E ist.

Beweis: Die eine Richtung ist trivial: Wenn $|\mathcal{K}|$ eine pl-Mannigfaltigkeit ist, folgt aus den Propositionen 2.1.63 und 2.1.64, dass \mathcal{K} eine kombinatorische Mannigfaltigkeit ist. Sei also umgekehrt \mathcal{K} eine n -dimensionale kombinatorische Mannigfaltigkeit. Wir können o.B.d.A. zusätzlich annehmen, dass \mathcal{K} simplizial ist, denn man kann nach Proposition 2.1.46 zu einer simplizialen Unterteilung mit der gleichen Eckenmenge übergehen, und dabei bleibt wegen Proposition 2.1.63 und 2.1.64 der pl-Isomorphietyp der Sternränder erhalten. Nun sei $x \in |\mathcal{K}|$ irgendein Punkt aus dem Träger, und p das kleinste Simplex von \mathcal{K} mit $x \in p$. Das Polytop $Q = \partial P * \partial St(P, \mathcal{K})$ ist ein Sternrand von x in $|\mathcal{K}|$. Es genügt also zu zeigen, dass Q eine $(n - 1)$ -dimensionale pl-Sphäre ist. Es sei $k = \dim p$. Dann ist ∂P trivialerweise eine $(k - 1)$ -dimensionale pl-Sphäre. Ferner ergibt sich aus der im folgenden bewiesenen Proposition 2.1.67, dass $\partial St(P, \mathcal{K})$ eine $(n - k - 1)$ -dimensionale pl-Sphäre ist. Außerdem sind ∂P und $\partial St(P, \mathcal{K})$ verbindbar. Also ist Q als Verbindung von zwei miteinander verbindbaren pl-Sphären der Dimensionen $k - 1$ und $n - k - 1$ eine pl-Sphäre der Dimension $n - 1$ (vgl. [199, Lemma 1.13]).

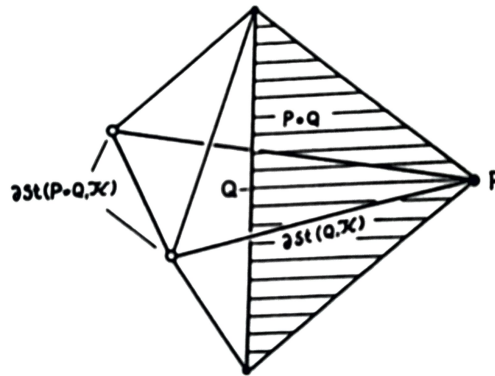
Proposition 2.1.67

K sei eine simpliziale n -dimensionale kombinatorische Mannigfaltigkeit und $P \in \mathcal{K}$ ein Simplex der Dimension $k \geq 0$. Dann ist $|\partial St(p, \mathcal{K})|$ eine $(n-k-1)$ -dimensionale pl-Sphäre.

Beweis: Wir schicken dem Beweis die folgende leicht verifizierbare allgemeine Bemerkung über Sternränder in simplizialen Komplexen voraus. K sei ein simplizialer Komplex, und $P, Q \in \mathcal{K}$ miteinander verbindbare Simplices, so dass auch das durch ihre Verbindung entstehende Simplex $P * Q$ zu \mathcal{K} gehört. Dann gilt:

$$\partial St(P * Q, \mathcal{K}) = \partial St(P, \partial St(Q, \mathcal{K})) .$$

Die folgende Zeichnung illustriert dies am Beispiel eines Komplexes von drei 3-Simplices mit einer gemeinsamen Kante Q , um die sich diese 3-Simplices zyklisch aneinander anschließen. P ist dabei eine zu Q disjunkte Ecke, und $P * Q$ ein "inneres" 2-Simplex.



Wir bemerken ferner, dass die Aussage von Satz 2.1.67 offensichtlich jedenfalls dann zutrifft, wenn $\mathcal{K} = \mathcal{F}[\Delta_m]$ der Randkomplex des Standard-simplex Δ_m ist. Daher zeigt der Beweis von Satz 2.1.66, dass $\partial \Delta_m$ eine pl-Mannigfaltigkeit ist. Jede m -dimensionale pl-Sphäre ist also eine m -dimensionale pl-Mannigfaltigkeit.

Wir beweisen nun Proposition 2.1.67 durch endliche Induktion über $k = \dim P$. Der Induktionsanfang $k = 0$ ist gerade die Voraussetzung, dass \mathcal{K} eine kombinatorische Mannigfaltigkeit ist. Wir schließen wie folgt von k auf $k + 1$. Jedes $(k + 1)$ -dimensionale Simplex von \mathcal{K} können wir in der Form $P * Q$ darstellen, wo P eine Ecke des Simplex ist und Q die gegenüberliegende Seite der Dimension k . Nach Induktionsvoraussetzung ist $|\partial St(Q, \mathcal{K})|$ eine pl-Sphäre, also insbesondere eine pl-Mannigfaltigkeit der Dimension $n - k - 1$. Daher ist $|\partial St(Q, \mathcal{K})|$ nach der bereits bewiesenen trivialen Richtung des Satzes eine kombinatorische Mannigfaltigkeit. Daher hat die Ecke P dieses Komplexes als Sternrand $|\partial St(P, \partial St(Q, \mathcal{K}))|$ eine pl-Sphäre der Dimension $(n - k - 1) - 1 = n - (k + 1) - 1$. Aber dieser Sternrand ist nach der anfangs gemachten Bemerkung gleich $|\partial St(P * Q, \mathcal{K})|$, und damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

Satz 2.1.68

Jede pl-Mannigfaltigkeit ist ein kompakte topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand. Aber es ist nicht umgekehrt jedes Polytop, welches eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand ist, auch eine pl-Mannigfaltigkeit. Beispiele hierfür sind die doppelten Suspensionen $\Sigma^2 M$ von nicht einfach zusammenhängenden Homologiesphären M der Dimension größer oder gleich 3, etwa des sphärischen Dodekaederraumes. Sie liefern für $n \geq 5$ Triangulierungen von topologischen n -Sphären, die keine kombinatorischen Mannigfaltigkeiten sind.

Beweis: Die Aussage ergibt sich fast unmittelbar aus dem Satz von Edwards und Cannon, Satz 2.1.62. Im Anschluß an diesen Satz haben wir schon ausgeführt, wie man zu einer Triangulierung von M eine Triangulierung \mathcal{K} von $\Sigma^2 M$ konstruiert. Auch wenn die Triangulierung von M eine kombinatorische Mannigfaltigkeit ist, ist die von $\Sigma^2 M$ keine. Wäre sie eine, so wäre für die beiden Pole P der zweiten Suspension $|\partial St(P^\pm, \mathcal{K})| = \Sigma M$ eine pl-Sphäre. Aber $|\partial St(P^\pm, \mathcal{K})|$ ist noch nicht einmal eine topologische Mannigfaltigkeit, wenn M nicht einfach zusammenhängend ist.

Man kann den Begriff der pl-Mannigfaltigkeit in verschiedener Weise weiter fassen, als wir das bisher getan haben. Die oben definierten pl-

Mannigfaltigkeiten sind kompakt, ohne Rand, und sie sind in affine Räume eingebettet. Von all diesen Einschränkungen kann man sich befreien.

Will man Mannigfaltigkeiten M mit Rand zulassen, dann verlangt man, dass die Sternränder der Punkte $x \in M$ entweder pl-isomorph zu $\partial\Delta_n$ oder Δ_{n-1} sind. Im ersten Fall ist x ein innerer Punkt, im zweiten Fall ein Randpunkt. Da wir uns später nur für pl-Mannigfaltigkeiten ohne Rand interessieren, gehen wir darauf nicht näher ein.

Hingegen ist die Loslösung von den konkreten, in affine Räume eingebetteten pl-Mannigfaltigkeiten durch Übergang zu abstrakten pl-Mannigfaltigkeiten ein in vieler Hinsicht wichtiger Schritt, den wir einigermaßen sorgfältig ausführen wollen. Unser Ansatz besteht darin, die Komplexe von kompakten konvexen Polytopen durch abstrakte partialgeordnete Mengen mit geeigneten Eigenschaften der Ordnungsstruktur zu ersetzen und anschließend die so definierten abstrakten Komplexe zu “realisieren”, d.h. dazu isomorphe Polytopkomplexe zu konstruieren.

Definition:

(\mathcal{K}, \leq) sei eine partial geordnete Menge. Für jedes $P \in \mathcal{K}$ definieren wir die folgenden partial geordneten Teilmengen von \mathcal{K} :

$$\partial^*(P) = \{X \in \mathcal{K} \mid X \geq P\}$$

$$\mathcal{F}(P) = \{X \in \mathcal{K} \mid X \leq P\}$$

$$\partial_*(P) = \{X \in \mathcal{K} \mid X < P\} .$$

Diese Definition ist durch unsere früheren Ergebnisse über Polytopkomplexe motiviert. Wenn \mathcal{K} ein Polytopkomplex ist, ist $\mathcal{F}(p)$ der zu dem Polytop P gehörige Polytopkomplex und $\partial_*(P) = \mathcal{F}[p]$ der Randkomplex von P . Ist \mathcal{K} außerdem simplizial, dann ist $\partial^*(P)$ ordnungstreu isomorph zu dem Polytopkomplex $\partial St(p, K)$ (vgl. Proposition 2.1.65(iii)).

Definition:

Ein **abstrakter Polytopkomplex** ist eine partial geordnete Menge (\mathcal{K}, \leq)

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Für alle $P, Q \in \mathcal{K}$ existiert das Infimum $P \wedge Q = \inf\{P, Q\}$.
- (2) Für alle $P \in \mathcal{K}$ ist $\mathcal{F}(P)$ ordnungstreu isomorph zum Polytopkomplex eines kompakten konvexen Polytops.

Ist $\mathcal{F}(P)$ für alle P sogar isomorph zum Polytopkomplex $\mathcal{F}(\Delta_k)$ eines Standardsimplex, dann heißt (\mathcal{K}, \leq) ein **abstrakter simplizialer Komplex**.

Definition:

Ein abstrakter Polytopkomplex (\mathcal{K}, \leq) ist **endlich**, wenn die Menge K endlich ist. Er ist **lokal endlich**, wenn für alle $P \in \mathcal{K} - \{\inf_{\mathcal{K}}\}$ die Menge $\partial^*(P)$ endlich ist. Allgemeiner sind partial geordnete Mengen \mathcal{K} mit Infimum lokal endlich, wenn für alle $P \in \mathcal{K} - \{\inf_{\mathcal{K}}\}$ die Mengen $\partial^*(P)$ und $\partial_*(P)$ endlich sind.

Außer abstrakten Polytopkomplexen werden wir noch allgemeinere partial geordnete Mengen zu betrachten haben. Wir formulieren deswegen einige Definitionen und Konstruktionen in einem sehr allgemeinen Rahmen. Eine Eigenschaft, die wir für die an Stelle der abstrakten Polytopkomplexe tretenden allgemeinen partial geordneten Mengen \mathcal{K} stets voraussetzen wollen, ist, dass das Infimum $\inf \mathcal{K}$ existiert. Wir tun dies, um an die schon entwickelte Theorie der Polytopkomplexe \mathcal{K} in affinen Räumen anzuschließen. Denn für diese existiert stets das Infimum, nämlich $\inf \mathcal{K} = \emptyset$. Im allgemeinen, für abstrakte Komplexe, wird das Infimum natürlich nicht die leere Menge sein. Zum Beispiel ist $\inf \partial^*(P) = P$. Für abstrakte Polytopkomplexe existiert offensichtlich das Infimum.

Notation: $i_{\mathcal{K}} = \inf \mathcal{K}$.

Wir führen jetzt eine Konstruktion für abstrakte Polytopkomplexe und allgemeiner für partial geordnete Mengen mit Infimum durch, die der baryzentrischen Unterteilung von Polytopkomplexen entspricht.

Definition:

\mathcal{K} sei eine partial geordnete Menge mit Infimum $i_{\mathcal{K}}$. Die **derivierete partial**

geordnete Menge \mathcal{K}° ist die Menge der endlichen Fahnen in $\mathcal{K} - \{i_{\mathcal{K}}\}$, also

$$\mathcal{K}^\circ = \{X \subset \mathcal{K} - \{i_{\mathcal{K}}\} \mid X \text{ total geordnet, endlich} \} .$$

\mathcal{K}° ist partial geordnet durch die Inklusionsrelation und hat das Infimum \emptyset .

Proposition 2.1.69

\mathcal{K} sei eine partial geordnete Menge mit Infimum. Dann ist \mathcal{K}° ein abstrakter simplizialer Komplex. \mathcal{K}° ist genau dann endlich bzw. lokal endlich, wenn \mathcal{K} endlich bzw. lokal endlich ist.

Beweis: Für $X, Y \in \mathcal{K}^\circ$ existiert das Infimum: $X \wedge Y = X \cap Y$. Für jedes $X \in \mathcal{K}^\circ$ gilt $\mathcal{F}(X) = \mathcal{P}(X)$, die Potenzmenge von X , also, wenn die Zahl der Elemente von X gleich $n + 1$ ist, $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(\Delta_n)$. Der Rest des Beweises ist ebenfalls eine triviale Übung.

Definition:

\mathcal{K} sei ein abstrakter lokal endlicher Polytopkomplex, und \mathcal{L} sei ein lokal endlicher Komplex von kompakten konvexen Polytopen in einem affinen Raum. Eine **Realisierung** von \mathcal{K} durch \mathcal{L} ist eine ordnungserhaltende bijektive Abbildung $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$.

Beispiele für Realisierungen liefert die folgenden Proposition.

Proposition 2.1.70

\mathcal{K} sei ein lokal endlicher Komplex von kompakten konvexen Polytopen in einem affinen Raum E . \mathcal{K}° sei die derivierte partial geordnete Menge. Sie ist ein lokal endlicher abstrakter simplizialer Komplex. $\delta(\mathcal{K})$ sei die baryzentrische Unterteilung von \mathcal{K} . Sie ist ein lokal endlicher simplizialer Komplex in E . Schließlich sei $\varphi : \mathcal{K}^\circ \rightarrow \delta(\mathcal{K})$ die Abbildung, die $\{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{K}^\circ$ die konvexe Hülle $C\{\zeta(P_1), \dots, \zeta(P_k)\}$ der Menge der Baryzentren $\zeta(P_i)$ zugeordnet. Dann ist φ eine Realisierung von \mathcal{K}° durch $\delta(\mathcal{K})$.

Beweis: Triviale Übung.

Proposition 2.1.71

Es gibt endliche abstrakte Polytopkomplexe ohne Realisierung durch einen Polytopkomplex in einem affinen Raum.

Beweis: Wir geben zwei Beispiele für solche Komplexe an. Mehr dazu findet man im Buch von B. Grünbaum, “Convex Polytopes” [163, pp. 205–207].

Beispiel 1.

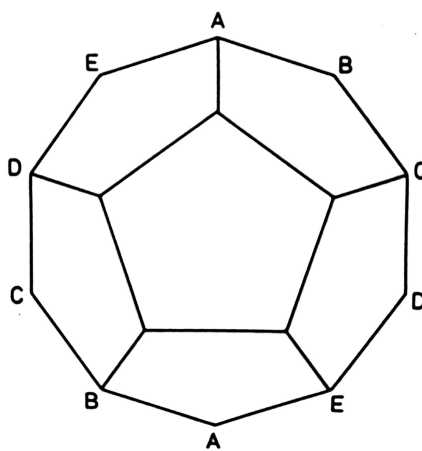
D sei ein reguläres Dodekaeder, und $\mathcal{F}[D]$ sein Randkomplex. Die zyklische Gruppe $\{\pm 1\}$ der Ordnung 2 operiert auf $\mathcal{F}[D]$ durch die Antipodenabbildung. \mathcal{K} sei der Orbitraum, also:

$$\mathcal{K} = \mathcal{F}[D]/\{\pm 1\} .$$

Die Partialordnung von $\mathcal{F}[D]$ induziert eine Partialordnung auf \mathcal{K} , nämlich

$$\pm P \leq \pm Q \Leftrightarrow P \cup -P \subset Q \cup -Q .$$

Wir geben noch eine andere anschauliche Beschreibung von \mathcal{K} , die mit der gerade gegebenen leicht identifizierbar ist. Wir betrachten einen ebenen Komplex \mathcal{F} von 6 Pentagonalen wie in der folgenden Zeichnung:



Wenn man die gleichbezeichneten Ecken von \mathcal{F} miteinander identifiziert und auch Kanten mit gleichbezeichneten Eckpunkten identifiziert, entsteht ein zu \mathcal{K} isomorpher abstrakter Polytopkomplex mit 6 pentagonalen abstrakten “Flächen”, 15 abstrakten “Kanten” und 10 abstrakten “Ecken”. Dieser abstrakte Komplex hat unter anderem die folgenden drei Eigenschaften:

- (i) In jeder Ecke stoßen nur 3 Flächen zusammen.
- (ii) Jede Kante liegt in genau 2 Flächen.
- (iii) Je zwei Flächen haben genau eine gemeinsame Kante.

Behauptung: Der abstrakte Polytopkomplex \mathcal{K} hat keine Realisierung.

Beweis: Wir führen einen indirekten Beweis. Wir nehmen an, $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ sei eine Realisierung von \mathcal{K} durch einen Polytopkomplex \mathcal{L} in einem affinen Raum E der Dimension n , und n sei o.B.d.A. minimal. Dann gilt $n = 3$. Dehn wegen (ii) gilt offensichtlich $n \geq 3$. Andererseits beweist man wie folgt $n \leq 3$. Die 6 Pentagone von \mathcal{L} seien P_1, \dots, P_6 . Es sei \mathcal{F} die affine Hülle $F = A(P_1 \cup P_2)$. Natürlich gilt $\dim F = 3$. Wir zeigen $E = F$. Dazu genügt es, zu zeigen: $P_3, \dots, P_6 \subset F$. Wegen (i) kann man o.B.d.A. annehmen, dass die P_i so nummeriert sind, dass P_1, P_2, P_3 in einer Ecke zusammenstoßen. P_3 hat wegen (iii) gemeinsame Kanten $P_1 \cap P_3$ und $P_2 \cap P_3$ mit P_1 und P_2 , und diese sind wegen (ii) verschieden. Also liegen 2 Kanten von P_3 in F , und daraus folgt $P_3 \subset F$. Analog beweist man, dass die Fläche P_4 , die mit P_1, P_2 in der anderen Ecke der Kante $P_1 \cap P_2$ zusammenstößt, in F liegt. Indem man nun so nacheinander die Kanten von P_1 durchläuft und die in diesen an P_1 anstoßenden P_i betrachtet, zeigt man sukzessive $P_3, P_4, P_5, P_6 \subset F$. Also gilt tatsächlich $E = F$ d.h. $n = 3$.

Wir behaupten nun weiter, dass die Ebenen $A(P_i)$ den Träger $|\mathcal{L}|$ nicht zerlegen. Denn wegen $\dim F = 3$ ist klar, dass $A(P_i) \cap |\mathcal{L}| = P_i$ gilt, und wegen (ii) und (iii) ist klar, dass $|\mathcal{L}| - P_i$ zusammenhängend ist. $|\mathcal{L}|$ liegt also ganz in einem der beiden Halbräume mit Rand $A(P_i)$. Wir bezeichnen diesen Halbraum mit H_i und betrachten das 3-dimensionale konvexe Polytop $P = H_1 \cap \dots \cap H_6$. Wegen $|\mathcal{L}| \subset P$ gilt $P \cap \partial H_i \supset |\mathcal{L}| \cap \partial H_i = P_i$, und daher ist nach Satz 2.1.16 klar, dass die Darstellung $P = H_1 \cap \dots \cap H_6$ minimal ist. Die Durchschnitte $Q_i = P \cap \partial H_i$ sind also die maximalen Seiten von P . Behauptung: $P \cap \partial H_i = P_i$. Beweis: Wegen (iii) hat das ebene Pentagon P_i die 5 Kanten $P_i \cap P_j$, $j \neq i$. Es gilt $P_i \cap P_j \subset Q_i \cap \partial H_j$. Deswegen sind die $Q_i \cap \partial H_j$ die Kanten des ebenen Vielecks Q_i . Die Kanten der konvexen ebenen Vielecke P_i und Q_i haben also die gleichen affinen Hüllen, und es

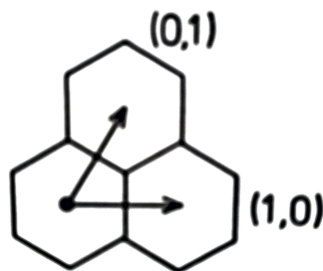
gilt $P_i \subset Q_i$. Daraus folgt $P_i = Q_i$. Damit haben wir folgendes Ergebnis: $\mathcal{K} = \mathcal{F}[P]$ ist der Randkomplex des kompakten konvexen Polyeders P .

Aber das ist absurd. Denn wenn \mathcal{K} ein Komplex von m -Ecken ist, der die Bedingungen (i)-(iii) erfüllt, dann gilt für die Zahlen e, k, f der Ecken, Kanten und Flächen von \mathcal{K} natürlich $f = m + 1$ sowie $k = m(m + 1)/2$ und $e = m(m + 1)/3$. Also folgt für die Eulerzahl $e - k + f = (6 - m)(m + 1)/6$. Hier ist $m = 5$ und daher die Eulerzahl von \mathcal{K} gleich 1. Dagegen ist die Eulerzahl des Randkomplexes $\mathcal{F}[P]$ eines kompakten konvexen Polyeders gleich 2. Das ist ein Widerspruch!

Der abstrakte Polytopkomplex im vorstehenden Beispiel beschreibt eine Flächenteilung der projektiven Ebene $\partial D/\{\pm 1\} \approx S^2/\{\pm 1\} \approx P_2/(\mathbb{R})$. Der abstrakte Polytopkomplex des nächsten Beispiels beschreibt eine Flächenteilung der Torusfläche $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx S^1 \times S^1$.

Beispiel 2.

\mathcal{F} sei der lokalendliche Polytopkomplex einer regulären hexagonalen Flächenteilung der euklidischen Standardebene \mathbb{R}^2 . Die Translationsuntergruppe der Symmetriegruppe von \mathcal{F} ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang 2. Als Erzeugende wählen wir zwei Translationen, die einen Winkel von $\pi/3$ miteinander bilden und jedes Hexagon in ein angrenzendes Hexagon verschieben. Dadurch identifizieren wir die Translationsuntergruppe mit $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.



In dieser Translationsgruppe betrachten wir die Untergruppe $\Gamma \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, die von $(2, 1)$ und $(3, -2)$ erzeugt wird. Die Determinante dieser beiden Spaltenvektoren hat den Betrag 7, und daraus folgt, dass die Restklassengruppe

$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\Gamma$ isomorph zur zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ist. Die Gruppe Γ operiert auf \mathbb{R}^2 , und der Orbitraum \mathbb{R}^2/Γ ist eine Torusfläche. Wir können diese auch wie folgt beschreiben: Wir wählen einen Eckpunkt eines Hexagons als Ursprung. Die Vektoren $(2, 1)$ und $(3, -2)$ definieren dann ein Periodenparallelogramm wie in der folgenden Zeichnung.

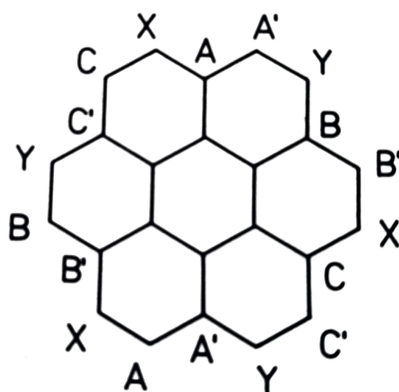


Der Torus \mathbb{R}^2/Γ entsteht durch Identifikation gegenüberliegender Seiten dieses Parallelogramms. Die hexagonale Flächenteilung der Ebene induziert auf dem Torus eine Flächenteilung durch 7 Flächen vom kombinatorischen Typ eines Hexagons. Der zugehörige abstrakte Polytopkomplex ist der Orbitraum

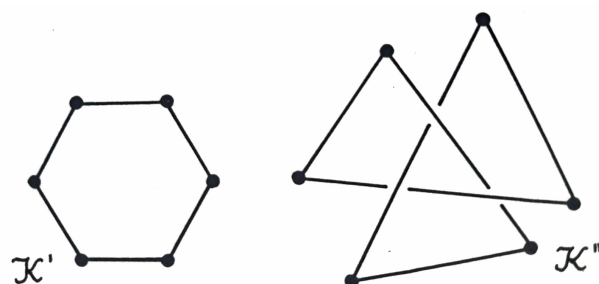
$$\mathcal{K} := \mathcal{F}/\Gamma$$

bezüglich der kanonischen Operation von Γ auf \mathcal{F} . Man verifiziert, dass für die 7 Flächen, 21 Kanten und 14 Ecken dieses abstrakten Polytopkomplexes wieder die Aussagen (i), (ii), (iii) wie in Beispiel 1 gelten. Alle Argumente unserer Untersuchung von Beispiel 1 gelten auch für dies neue Beispiel. Diesmal haben wir eine Flächenteilung durch Hexagone, also $m = 6$ und die Eulerzahl ist 0. Auch diesmal ist das Ergebnis: \mathcal{K} hat keine Realisierung. Übrigens ist die Zahl 7 die maximale mögliche Zahl einer Flächenteilung des Torus mit den Bedingungen (i), (ii), (iii) (vgl. G. Ringel: “Farbensatz für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechts” [302]). Zum Abschluß

zeigt die folgende Zeichnung noch eine weitere Konstruktion von \mathcal{K} durch geeignete Identifikation von Ecken und Kanten in einem Komplex von 7 Hexagonen in der Ebene:



Die beiden gerade betrachteten Beispiele zeigen, dass die Frage nach der Existenz einer Realisierung eines abstrakten Polytopkomplexes durch einen Polytopkomplex in einem affinen Raum im allgemeinen nicht positiv zu beantworten ist. Wir werden jedoch bald sehen, dass die Situation ganz anders wird, wenn wir uns auf abstrakte simpliziale Komplexe beschränken. Neben der Frage nach der Existenz wird man sich selbstverständlich die Frage nach der Eindeutigkeit der Realisierung stellen. Dieser Frage kann man auf sehr verschiedene Weise einen präzisen Sinn geben. Um das zu verdeutlichen, betrachten wir den Randkomplex $\mathcal{K} = \mathcal{F}[p]$ eines Hexagons P . Dieses ist ein abstrakter 1-dimensionaler simplizialer Komplex aus sechs 1-dimensionalen Simplexes, die zyklisch in sechs Eckpunkten aneinanderstoßen. Die folgende Zeichnung zeigt zwei wesentlich verschiedene Realisierungen dieses Komplexes durch zwei Polytopkomplexe $\mathcal{K}', \mathcal{K}''$ im 3-dimensionalen Raum.



Die eine Realisierung ist die übliche als Rand eines Hexagons, von der wir ja ausgegangen sind. Die andere Realisierung ist davon wesentlich verschieden. Sie ist *“verknötet”*, und zwar sogar topologisch verknötet. Das heißt hier: Es gibt keinen Homöomorphismus des 3-dimensionalen Raumes auf sich selbst, der den Träger $|\mathcal{K}''|$ der zweiten Realisierung in den Träger $|\mathcal{K}'|$ der ersten Realisierung überführt. Man sieht, dass diese Betrachtungsweise auf sehr interessante Probleme führt. Man wird definieren müssen, wann zwei Realisierungen als nicht wesentlich verschieden anzusehen sind. Die hierauf bezüglichen Begriffe sind die Begriffe der **Isotopie** und der **Umgebungsisotopie** (vgl. z.B. Rourke/Sanderson [308, p. 37]). Ein wichtiger Teil der kombinatorischen Topologie beschäftigt sich dann mit dem Beweis von Sätzen, die aussagen, dass unter geeigneten Voraussetzungen, z.B. hoher Codimension, zwei verschiedene Einbettungen ein- und desselben abstrakten Komplexes isotop sind (vgl. z.B. [308, chap. 7]). Diese Sätze gehen aber weit über den Rahmen dieses Buches hinaus. Deswegen nehmen wir einen anderen, viel naiveren Standpunkt ein: Wir ignorieren die subtile Frage, auf wieviel wesentlich verschiedene Weisen ein abstrakter Komplex durch Polytopkomplexe realisiert werden kann, und interessieren uns nur für die Frage, ob diese Polytopkomplexe an sich – d.h. ohne die Berücksichtigung ihrer Lage im Raum – isomorph sind. Auf den Unterschied dieser beiden Standpunkte haben wir ja schon früher, bei der Diskussion des Möbiusbandes in Abschnitt 13.3 der LA III [57], hingewiesen. Die Antwort auf diese simple Fragestellung ist simpel.

Proposition 2.1.72

\mathcal{K} sei ein endlicher abstrakter Polytopkomplex, und $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ bzw. $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$ seien Realisierungen von \mathcal{K} durch Polytopkomplexe \mathcal{L} und \mathcal{M} in affinen Räumen. Dann ist $\Psi \circ \varphi^{-1} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ ein kombinatorischer Isomorphismus und kann daher durch einen pl-Isomorphismus $|\mathcal{L}| \rightarrow |\mathcal{M}|$ induziert werden. Ist \mathcal{K} simplizial, dann gibt es einen eindeutig bestimmten simplizialen Isomorphismus $|\mathcal{L}| \rightarrow |\mathcal{M}|$, der $\Psi \circ \varphi^{-1} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ induziert.

Beweis: Dies ist eine triviale Anwendung von Proposition 2.1.56.

Aus Proposition 2.1.72 folgt insbesondere, dass die Träger aller Realisierungen eines endlichen abstrakten Komplexes \mathcal{K} alle zueinander pl-isomorph sind, so dass man, wenn \mathcal{K} überhaupt eine Realisierung besitzt, den Träger von \mathcal{K} durch die Träger seiner Realisierungen definieren könnte. Allerdings liefert dies kein eindeutig bestimmtes Polytop, solange es nicht gelingt, unter den verschiedenen Realisierungen eine als die “Standardrealisierung” auszuzeichnen. Wir zeigen jetzt, wie man wenigstens für endliche simpliziale Komplexe solch eine Standardrealisierung definieren kann. Eine völlig analoge Konstruktion ist auch für unendliche simpliziale Komplexe ausführbar. Sie liefert jedoch dann nicht mehr eine Realisierung in einem endlich dimensionalen affinen Raum, sondern nur noch einen Komplex von Polytopen in einem unendlichdimensionalen affinen Raum.

Definition:

\mathcal{K} sei ein abstrakter Polytopkomplex. Dann ist für jedes $Y \in \mathcal{K}$ die **Dimension** $\dim Y$ wie folgt definiert. $\mathcal{F}(Y)$ ist isomorph zum Seitenkomplex $\mathcal{F}(P)$ eines Polytops P , und es ist $\dim Y = \dim P$.

Das **q-Gerüst** von \mathcal{K} ist $\mathcal{K}^q = \{Y \in \mathcal{K} \mid \dim Y \leq q\}$. Die **Eckenmenge** von \mathcal{K} ist $\mathcal{K}_0 = \{X \in \mathcal{K} \mid \dim X = 0\}$. \mathcal{K} heißt **endlich dimensional**, wenn $\{\dim Y \mid Y \in \mathcal{K}\}$ beschränkt ist. In diesem Fall ist

$$\dim \mathcal{K} = \max\{\dim Y \mid Y \in \mathcal{K}\} .$$

Definition:

\mathcal{K} sei ein abstrakter simplizialer Komplex.

\mathcal{K}_0 sei die Eckenmenge von \mathcal{K} .

$V_{\mathcal{K}} := \mathbb{R}^{(\mathcal{K}_0)}$ sei der von \mathcal{K}_0 erzeugte freie \mathbb{R} -Vektorraum.

$(e_x)_{x \in \mathcal{K}_0}$ sei die Standardbasis von $V_{\mathcal{K}}$ (vgl. LA I, [55, Bd. 1, p.270]). $E_{\mathcal{K}} := \mathbb{A}(V_{\mathcal{K}})$ sei der zu $V_{\mathcal{K}}$ gehörige reelle affine Standardraum.

Für jeden Unterkomplex $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ wird $V_{\mathcal{L}}$ kanonisch mit einem Unterraum $V - \mathcal{L} \subset V_{\mathcal{K}}$ und $E_{\mathcal{L}}$ mit einem affinen Unterraum $E_{\mathcal{L}} \subset E_{\mathcal{K}}$ identifiziert. Diese Unterräume sind genau dann endlichdimensional, wenn \mathcal{L}_0 endlich ist. Dies ist insbesondere der Fall für alle Unterkomplexe der Form $\mathcal{L} = \mathcal{F}(Y) = \{Z \in \mathcal{K} \mid Z \leq Y\}$, wo $Y \in \mathcal{K}$ irgendein Element von \mathcal{K} ist.

Definition:

\mathcal{K} sei ein abstrakter simplizialer Komplex, und $Y \in \mathcal{K}$. Das **zu Y gehörige Simplex** P_Y ist die konvexe Hülle der Standardbasis von $V_{\mathcal{F}(Y)}$ in $E_{\mathcal{F}(Y)} \subset E_{\mathcal{K}}$, also

$$\begin{aligned} P_Y &= C(\{e_X \mid X \in \mathcal{F}(Y)_0\}) \\ &= C(\{e_X \mid X \in \mathcal{K}_0, X \leq Y\}) \\ &= \left\{ \sum_{X \in \mathcal{K}_0} t_X e_X \mid \sum t_X = 1 \text{ und } t_X = 0 \text{ für } X \notin \mathcal{F}(Y)_0 \right\} \end{aligned}$$

Definition:

\mathcal{K} sei ein abstrakter simplizialer Komplex. Der **zu \mathcal{K} gehörige Komplex von Simplexes** ist der abstrakte simpliziale Komplex

$$K_{\mathbb{R}} := \{P_Y \mid Y \in \mathcal{K}\} .$$

Der **Träger** von \mathcal{K} ist die folgende Teilmenge des affinen Raumes $E_{\mathcal{K}}$:

$$\|\mathcal{K}\| := |K_{\mathbb{R}}| = \bigcup_{Y \in \mathcal{K}} P_Y \subset E_{\mathcal{K}} .$$

Wenn \mathcal{K} ein endlicher simplizialer Komplex ist, ist $E_{\mathcal{K}}$ ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum, und man prüft leicht nach, dass die Zuordnung $Y \rightarrow P_Y$ eine Realisierung des abstrakten simplizialen Komplexes \mathcal{K} durch den simplizialen Komplex $K_{\mathbb{R}}$ in $E_{\mathcal{K}}$ ist.

Definition:

Für einen endlichen abstrakten simplizialen Komplex \mathcal{K} ist $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ mit $Y \mapsto P_Y$ die **Standardrealisierung** von \mathcal{K} .

Bemerkung: Unsere Terminologie hinsichtlich der inzwischen eingeführten Begriffe von “Träger” ist — im Gegensatz zur eindeutigen Notation — zweideutig. Ist \mathcal{K} ein endlicher simplizialer Komplex in dem affinen Raum E , dann ist \mathcal{K} einerseits der Träger $|\mathcal{K}| \subset E$ zugeordnet, ein Polytop in E . Andererseits können wir \mathcal{K} auch als abstrakten simplizialen Komplex auffassen und dann ist \mathcal{K} der gerade definierte Träger $\|\mathcal{K}\| \subset E_{\mathcal{K}}$ zugeordnet, also ein Polytop in dem Raum $E_{\mathcal{K}}$ der im allgemeinen viel höhere Dimension als E hat. Natürlich sind die beiden Polytope $|\mathcal{K}|$ und $\|\mathcal{K}\|$ zwar verschieden, aber simplizial isomorph, denn $|\mathcal{K}|$ gehört ja zur identischen Realisierung $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ und $\|\mathcal{K}\|$ zur Standardrealisierung $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$.

Ein abstrakter simplizialer Komplex \mathcal{K} ist genau dann endlich, wenn seine Eckenmenge \mathcal{K}_0 endlich ist, denn man überlegt sich leicht, dass die Abbildung $\mathcal{K} \rightarrow P(\mathcal{K}_0)$ in die Potenzmenge von \mathcal{K}_0 , die durch die Zuordnung $\mapsto \mathcal{F}(Y) \cap \mathcal{K}_0$ definiert ist, injektiv ist, so dass man \mathcal{K} als Unterkomplex des abstrakten simplizialen Komplexes aller endlichen Teilmengen von \mathcal{K}_0 auffassen kann. Der affine Raum $E_{\mathcal{K}}$ ist also genau dann endlichdimensional, wenn \mathcal{K} endlich ist. In diesem Fall hat $E_{\mathcal{K}}$ eine kanonisch gegebene Topologie, und daher hat auch der Träger $\|\mathcal{K}\|$ eine kanonisch gegebene Topologie, nämlich die induzierte Topologie. Wenn aber \mathcal{K} unendlich ist und daher $E_{\mathcal{K}}$ unendlichdimensional, ist es keineswegs a priori klar, wie man eine Topologie auf $E_{\mathcal{K}}$ einzuführen hat. Außerdem könnten ganz verschiedene Topologien für $E_{\mathcal{K}}$ auf dem Träger $\|\mathcal{K}\|$ die gleiche Topologie induzieren. Darum erscheint es richtiger, auf direktem Wege eine Topologie auf $\|\mathcal{K}\|$ einzuführen. Das machen wir folgendermaßen. $\|\mathcal{K}\|$ ist ja die Vereinigung der Simplices P_Y , wo Y die Elemente von \mathcal{K} durchläuft. Jedes P_Y hat natürlich eine kanonische Topologie als Unterraum $P \subset E_{\mathcal{F}(Y)}$ des endlichdimensionalen affinen Raumes $E_{\mathcal{F}(Y)}$. Auf der Vereinigung P können wir daher folgendermaßen kanonisch eine Topologie definieren.

Definition:

\mathcal{K} sei ein abstrakter simplizialer Komplex, und $\|\mathcal{K}\| = \bigcup_{Y \in \mathcal{K}} P_Y$ sei der Träger von \mathcal{K} . Die **Topologie des Trägers** ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{U} \subset \|\mathcal{K}\| \text{ offen} :\Leftrightarrow \forall_{Y \in \mathcal{K}} \mathcal{U} \cap P_Y \text{ offen in } P_Y$$

Man kann beweisen, dass diese Topologie von $\|\mathcal{K}\|$ auf jedem $P_Y \subset \|\mathcal{K}\|$ die kanonische Topologie von P_Y induziert, und dass P_Y ein abgeschlossener Unterraum von $\|\mathcal{K}\|$ ist (Spanier [337, Introduction, 2.5 und p.111]).

Auf dem unendlichdimensionalen Vektorraum $V_{\mathcal{K}}$ und damit auf dem affinen Raum $E_{\mathcal{K}}$ kann man auf verschiedene Weise sinnvoll eine Topologie einführen. Zwei sehr natürliche Topologien sind die “schwache Topologie” und eine gewisse “metrische Topologie”, die von einer Prähilbertraumstruktur auf $V_{\mathcal{K}}$ kommt.

Die **schwache Topologie** auf $V_{\mathcal{K}}$ erhält man, wenn man $V_{\mathcal{K}}$ als direkten Limes der endlichdimensionalen Vektorunterräume auffasst. Eine Menge $\mathcal{U} \subset V_{\mathcal{K}}$ ist also definitionsgemäß genau dann offen in der schwachen Topologie, wenn für alle endlichdimensionalen Vektorunterräume $W \subset V_{\mathcal{K}}$ gilt: $\mathcal{U} \cap W$ ist offen in der kanonischen Topologie von W .

Die “metrische Topologie” auf $V_{\mathcal{K}}$ definiert man wie folgt. Zu der Standardbasis $(e_X)_{X \in \mathcal{K}_0}$ gehört eine eindeutig definierte positiv definite symmetrische Bilinearform b auf $V_{\mathcal{K}}$, so dass die Standardbasis eine Orthonormalbasis ist. Dazu gehört eine Norm, nämlich $\|v\|^2 = b(v, v)$. Zu dieser gehört eine Metrik d auf $V_{\mathcal{K}}$ nämlich $d(x, y) = \|x - y\|$. Zu der Metrik gehört schließlich eine Topologie, die **“metrische Topologie”** von $V_{\mathcal{K}}$. Wenn \mathcal{K} endlich ist, stimmen die metrische Topologie und die schwache Topologie überein. Wenn aber \mathcal{K} unendlich ist, dann ist die metrische Topologie größer als die schwache Topologie.

Proposition 2.1.73

Wenn \mathcal{K} ein lokalkalender abstrakter simplizialer Komplex ist, wird die Topologie des Trägers $\|\mathcal{K}\| \subset E_{\mathcal{K}}$ sowohl von der schwachen Topologie als auch von der metrischen Topologie auf $E_{\mathcal{K}}$ induziert. $\|\mathcal{K}\|$ ist dann lokal-kompakt.

Beweis: Siehe Spanier [337, Chap. 3.2, thm. 8]. Dort wird außerdem gezeigt, dass die Lokalkompaktheit von $\|\mathcal{K}\|$ zur Lokalendlichkeit von \mathcal{K} äquivalent ist.

Zumindest für lokalendliche abstrakte simpliziale Komplexe \mathcal{K} können wir also $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ als eine Art “**topologische Standardrealisierung**” ansehen. Jedoch ist dies für unendliche \mathcal{K} keine Realisierung durch einen simplizialen Komplex in einem endlichdimensionalen affinen Raum. Wir verlangen von einer solchen Realisierung $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$, dass die zugehörige Abbildung $\|\mathcal{K}_{\mathbb{R}}\| \rightarrow |\mathcal{L}|$ ein Homöomorphismus ist. Dann gilt

Satz 2.1.74

Ein abstrakter simplizialer Komplex \mathcal{K} lässt sich im oben definierten Sinn genau dann durch einen simplizialen Komplex in einem endlichdimensionalen affinen Raum realisieren, wenn gilt: \mathcal{K} ist lokalendlich, abzählbar und endlichdimensional. — Wenn diese Bedingungen erfüllt sind und n die Dimension von \mathcal{K} ist, lässt sich \mathcal{K} durch einen Komplex in \mathbb{R}^{2n+1} mit abgeschlossenem Träger realisieren. $\|\mathcal{K}\|$ ist dann lokalkompakt und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.

Beweis: Einen Beweis dieses Satzes in voller Allgemeinheit, d.h. für beliebige abstrakte simpliziale Komplexe, findet man z.B. bei Spanier [337, Chap. 3.2, Thm 9] (vgl. auch L.C. Glaser: “Geometrical Combinatorial Topology” [149, Exercise 1.7, 1.9]). – Wir wollen hier nur den Fall endlicher Komplexe behandeln. Für diese ist lediglich zu zeigen: Ein endlicher simplizialer Komplex \mathcal{K} mit $\dim \mathcal{K} = n$ besitzt eine Realisierung in einem affinen Raum der Dimension $2n + 1$. Dies beweisen wir wie folgt. \mathcal{K}' sei irgendeine Realisierung von \mathcal{K} in einem affinen Raum E , z.B. die Standardrealisierung. Es sei $N = \dim E$. Ist $N \leq 2n + 1$, dann sind wir fertig. Also sei $N > 2n + 1$. Zu jedem ungeordneten Paar von Simplices $X, Y \in \mathcal{K}'$ mit $X \cup Y \neq \emptyset$ betrachten wir die affine Hülle $A(X \cup Y)$. Es gilt

$$\dim A(X \cup Y) \leq \dim X + \dim Y + 1 \leq 2n + 1 .$$

Daher existiert eine affine Gerade $L \subset E$ mit der folgenden Eigenschaft: Keine zu L parallele Gerade ist in einem der endlich vielen niederdimensio-

nalen affinen Räume $A(X \cup Y)$ enthalten. (Hinweis: Die Familien paralleler Geraden bilden einen reellen projektiven Raum P_{N-1} der Dimension $N-1$, und die ausgeschlossenen Familien von Geraden bilden ein endliches System von projektiven Unterräumen der Dimension $\leq 2n$.) Es sei F eine zu L orthogonale Hyperebene und $\pi : E \rightarrow F$ die orthogonale Parallelprojektion. Die Fasern von π sind die zu L parallelen Geraden. Sie treffen jedes Simplex $X \in \mathcal{K}'$ höchstens in einem Punkt. Das Bild $\pi(X)$ ist daher ein Simplex in F . Wir setzen:

$$\mathcal{L} = \{\pi(X) \mid X \in \mathcal{K}'\}.$$

Aus der Konstruktion von π folgt sofort, dass die Beschränkung von π auf den Träger von $|\mathcal{K}'|$ injektiv ist. Daraus folgt, dass die Zuordnung $X \mapsto \pi(X)$ eine bijektive ordnungserhaltende Abbildung $\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{L}$ definiert, und dass daher \mathcal{L} ein simplizialer Komplex in F ist, der \mathcal{K} realisiert. Durch die Projektion erhält man also eine Realisierung von \mathcal{K} in einem affinen Raum niedrigerer Dimension. So erhält man schließlich durch wiederholte Projektion eine Realisierung in einem Raum der Dimension $2n+1$.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun pl-Mannigfaltigkeiten in voller Allgemeinheit definieren. Dazu gibt es mehrere mögliche Ansätze, die sich a posteriori als äquivalent erweisen. Die drei wichtigsten sind die folgenden.

- (1) Pl-Mannigfaltigkeiten als Träger lokalendlicher Komplexe, deren Sternränder pl-Sphären sind. — Dies ist der traditionelle Ansatz, und im Falle kompakter pl-Mannigfaltigkeiten der einfachste.
- (2) Pl-Mannigfaltigkeiten als topologische Räume M – Hausdorffsch und mit abzählbarer Basis der Topologie — zusammen mit einem maximalen pl-Atlas. Ein Atlas ist ein System von Karten, d.h. Homöomorphismen $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ von offenen Mengen $U_i \subset M$ auf offene Mengen $V_i \subset \mathbb{R}^n$, so dass $M = \cup U_i$ gilt. Der Atlas ist ein pl-Atlas, wenn die Koordinatentransformationen $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : V_i \cap \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow V_j \cap \varphi_j(U_i \cap U_j)$ pl-Isomorphismen sind. Der Atlas ist maximal, wenn es keinen ihn echt umfassenden pl-Atlas auf M gibt. — Diese Definition hat den Vorteil, dass sie vollkommen analog zur Definition zahlreicher anderer Kategorien von Mannigfaltigkeiten ist (z.B. C^∞ -

Mannigfaltigkeiten). Sie setzt allerdings voraus, dass man vorher definiert hat, was pl-Abbildungen offener Mengen von \mathbb{R}^n sind.

- (3) Pl-Mannigfaltigkeiten als pl-Räume M , in denen jeder Punkt eine zu einer pl-Kugel isomorphe Umgebung hat. Dabei wird die pl-Struktur mit Hilfe von Einbettungen kompakter Polytope in M definiert. — Dieser Ansatz geht auf E.C. Zeemann zurück und vermeidet bewusst unendliche Komplexe.

Wir skizzieren den zuletzt genannten Ansatz von Zeemann. Für Einzelheiten und Beweise verweise ich auf J.F.P. Hudson [199, Chap. III]. Dieser Ansatz setzt voraus, dass die Kategorie der kompakten Polytope und ihrer pl-Abbildungen bereits definiert ist, etwa so, wie wir das getan haben. Im folgenden sind mit Polytopen die kompakten Polytope in den affinen Standardräumen \mathbb{R}^k gemeint.

Definition:

M sei ein topologischer Raum. Eine **Poly-Karte** in M ist eine Einbettung $\varphi : P \rightarrow M$ eines kompakten Polytops P in M , also ein Homöomorphismus von P auf den Unterraum $\varphi(P) \subset M$. Zwei Poly-Karten $\varphi : P \rightarrow M$ und $\Psi : Q \rightarrow M$ sind **pl-compatibel**, wenn gilt: $P' := \varphi^{-1}(\varphi(P) \cap \Psi(Q)) \subset P$ und $Q' := \Psi^{-1}(\Psi(Q) \cap \varphi(P)) \subset Q$ sind Polytope und $\Psi^{-1} \circ \varphi : P' \rightarrow Q'$ ist eine pl-Abbildung.

Definition:

M sei ein topologischer Hausdorff-Raum, dessen Topologie eine abzählbare Basis besitzt. Φ sei eine Menge von Poly-Karten in M . Dann heißt (M, Φ) ein **pl-Raum**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Alle $\varphi, \Psi \in \Phi$ sind kompatibel.
- (ii) Φ ist **maximal**, d.h. jede Poly-Karte $\varphi : P \rightarrow M$, die mit allen $\Psi \in \Phi$ verträglich ist, gehört zu Φ .
- (iii) Zu jedem $x \in M$ existiert eine Poly-Karte $\varphi : P \rightarrow M$ von Φ , so dass $\varphi(P)$ eine Umgebung von x in M enthält.

Definition:

Ein pl-Raum (M, Φ) ist eine m -dimensionale **pl-Mannigfaltigkeit**, wenn es für jeden Punkt $x \in M$ eine zu Φ gehörige Poly-Karte $\varphi : \Delta_m \rightarrow M$ gibt, so dass $\varphi(\Delta_m)$ eine Umgebung von x in M enthält.

Definition:

(M, Φ) und (N, Ψ) seien pl-Räume. Eine stetige Abbildung $\chi : M \rightarrow N$ ist eine **pl-Abbildung** $(M, \Phi) \rightarrow (N, \Psi)$, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes Paar von Poly-Karten $\varphi : P \rightarrow M$ aus Φ und $\psi : Q \rightarrow N$ aus Ψ ist $P' := (\chi \circ \varphi)^{-1}(\psi(Q)) \subset P$ ein Polytop, und

$$\psi^{-1} \circ \chi \circ \varphi : P' \rightarrow Q$$

ist eine pl-Abbildung kompakter Polytope.

Die pl-Räume und die pl-Abbildungen bilden offensichtlich eine Kategorie, und diese Kategorie enthält die vollen Unterkategorien der pl-Mannigfaltigkeiten bzw. der kompakten pl-Mannigfaltigkeiten. Insbesondere ist für diese Kategorien definiert, was unter einem pl-Isomorphismus zu verstehen ist.

Das erste und ursprünglichste Beispiel für einen pl-Raum ist der affine Raum selbst. E sei ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum. Dann definieren wir eine Menge von Poly-Karten Φ_E auf E wie folgt. Die Poly-Karten von Φ_E sind die Abbildungen $\varphi : P \rightarrow E$, so dass P ein kompaktes Polytop in einem reell affinen Standardraum ist und $\varphi(P)$ ein kompaktes Polytop in E und $\varphi : P \rightarrow \varphi(P)$ ein pl-Isomorphismus von kompakten Polytopen.

Proposition 2.1.75

Jeder n -dimensionale affine Raum E ist mit der Menge Φ_E von Poly-Karten eine n -dimensionale pl-Mannigfaltigkeit (E, Φ_E) .

Beweis: Übung.

Selbstverständlich versehen wir in Zukunft jeden affinen Raum E mit der **Standard-pl-Struktur** Φ_E und schreiben einfach E statt (E, Φ_E) . Aus diesen Standard-pl-Räumen gewinnen wir sofort viele weitere Beispiele wegen der folgenden Proposition.

Proposition 2.1.76

(M, Φ) sei ein pl-Raum und $U \subset M$ eine offene Teilmenge. $\Phi_U \subset \Phi$ sei die Teilmenge der Poly-Karten $\varphi : P \rightarrow M$ von Φ , so dass $\varphi(P) \subset U$. Dann ist die offene Menge U mit der **induzierten pl-Struktur** Φ_U ein pl-Raum (U, Φ_U) .

Beweis: Übung. Der Beweis dafür, dass Φ_U maximal ist, ist nicht ganz trivial.

Korollar 2.1.77

Jede offene Teilmenge $U \subset E$ in einem endlichdimensionalen reellen affinen Raum ist eine pl-Mannigfaltigkeit.

Insbesondere ist dadurch definiert, was unter pl-Abbildungen bzw. pl-Isomorphismen $\varphi : U \rightarrow V$ von offenen Mengen von affinen Räumen zu verstehen ist. Natürlich hätte man das auch etwas direkter definieren können, z.B. in der Art der folgenden Proposition.

Proposition 2.1.78

U und V seien offene Mengen in affinen Räumen E und E' . Eine Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ ist genau dann eine pl-Abbildung, wenn es zu jedem $x \in U$ einen in U enthaltenen Stern $\{x\} * Q$ von x in E gibt, so dass die Beschränkung von φ auf die Strahlen des Sterns linear ist, also

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$$

für alle $y \in Q$ und alle $\lambda x + \mu y \in [x, y]$.

Beweis: Übung. Mit den so charakterisierten pl-Abbildungen offener Mengen in affinen Räumen kann man dann im Sinne des oben unter (2) skizzierten Ansatzes direkt pl-Mannigfaltigkeiten definieren. Auf die Äquivalenz zu dem hier gewählten Ansatz (3) von Zeeman wollen wir hier nicht eingehen. Hingegen wollen wir jetzt die Beziehung zu dem traditionellen Ansatz (1) herstellen.

Proposition 2.1.79

\mathcal{K} sei ein lokalendlicher Polytopkomplex in dem endlichdimensionalen affinen

Raum E . Ferner sei $|\mathcal{K}|$ der Träger von \mathcal{K} , und $\Phi_{\mathcal{K}}$ sei die Menge derjenigen Poly-Karten $\varphi : P \rightarrow |\mathcal{K}|$, so dass $\varphi(P) \subset |\mathcal{K}|$ ein kompaktes Polytop ist und $\varphi : P \rightarrow \varphi(P)$ ein pl-Isomorphismus von kompakten Polytopen. Dann ist $(|\mathcal{K}|, \Phi_{\mathcal{K}})$ ein nur von $|\mathcal{K}|$ abhängiger pl-Raum.

Beweis: Übung.

Proposition 2.1.80

\mathcal{K} und \mathcal{L} seien lokalendliche simpliziale Komplexe in endlichdimensionalen affinen Räumen. $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ sei ein kombinatorischer Isomorphismus, d.h. eine ordnungserhaltende bijektive Abbildung. Es sei $\varphi : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ die zugehörige simpliziale Abbildung, welche Ψ induziert. Dann ist φ ein pl-Isomorphismus $(|\mathcal{K}|, \Phi_{\mathcal{K}}) \cong (|\mathcal{L}|, \Phi_{\mathcal{L}})$.

Beweis: Übung.

Wegen der beiden Propositionen 2.1.79 und 2.1.80 und wegen des Satzes 2.1.74, der die Existenz von Realisierungen garantiert, können wir jetzt wie folgt abstrakten simplizialen Komplexen kanonisch einen pl-Raum zuordnen.

Definition:

\mathcal{K} sei ein lokalendlicher, abzählbarer, endlichdimensionaler abstrakter simplizialer Komplex. Der **zu \mathcal{K} gehörige pl-Raum** ist der durch \mathcal{K} eindeutig bestimmte pl-Raum $(\|\mathcal{K}\|, \Phi_{\mathcal{K}})$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Realisierung $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ von \mathcal{K} durch einen lokalendlichen simplizialen Komplex \mathcal{L} in einem endlichdimensionalen affinen Raum ist die zugehörige Abbildung $\varphi : \|\mathcal{K}\| \rightarrow |\mathcal{L}|$ der Träger ein Isomorphismus von pl-Räumen $(\|\mathcal{K}\|, \Phi_{\mathcal{K}}) \cong (|\mathcal{L}|, \Phi_{\mathcal{L}})$.

Die vorstehende Definition eröffnet uns schließlich die Möglichkeit, sehr allgemein in kanonischer Weise partial geordneten Mengen pl-Räume zuzuordnen, da wir diesen ihre derivierten partial geordneten Mengen zuordnen können und da diese nach Proposition 2.1.69 abstrakte simpliziale Komplexe sind.

Definition:

\mathcal{K} sei eine partial geordnete Menge mit Infimum. \mathcal{K} sei abzählbar und lokalendlich. Die Kardinalität total geordneter Teilmengen von \mathcal{K} habe eine

endliche obere Schranke. Dann ist der **zu \mathcal{K} assoziierte pl-Raum** der pl-Raum $(\|\mathcal{K}'\|, \Phi_{\mathcal{K}'})$.

Die Beziehung zwischen dem traditionellen Ansatz (1), der mit unendlichen, lokalendlichen Komplexen arbeitet, und dem Ansatz (3) von Zeeman, der von den eingebetteten kompakten Polytopen ausgeht, wird nun durch den folgenden Satz hergestellt.

Satz 2.1.81

Zu jedem pl-Raum (M, Φ) , für dessen Poly-Karten $\varphi : P \rightarrow M$ es eine obere Schranke für $\dim P$ gibt, existiert ein lokalendlicher simplizialer Komplex \mathcal{K} in einem endlichdimensionalen affinen Raum und ein pl-Isomorphismus $(M, \Phi) \cong (|\mathcal{K}|, \Phi_{\mathcal{K}})$.

Beweis: Man findet, eine Beweisskizze bei Hudson [199, Chap. III.2], insbesondere in Lemma 3.5 und dem darauf folgenden Text.

Bemerkungen: Satz 2.1.81 ist ein Triangulierungssatz. Er impliziert z.B., dass jede offene Menge eines affinen Raumes eine Triangulierung als lokalendlicher simplizialer Komplex besitzt. Der Satz identifiziert bis auf Isomorphie die abstrakten pl-Räume (M, Φ) mit den konkreten pl-Räumen $(|\mathcal{K}|, \Phi_{\mathcal{K}})$. Dies Bild wird durch die folgenden beiden Bemerkungen abgerundet. Erstens: Die m -dimensionalen pl-Mannigfaltigkeiten (M, Φ) entsprechen dabei Komplexen \mathcal{K} , so dass jeder Punkt $x \in |\mathcal{K}|$ im Inneren einer in $|\mathcal{K}|$ enthaltenen m -dimensionalen pl-Kugel liegt. Dies kann man auch als Bedingung für die Sternränder formulieren. Zweitens: Die pl-Abbildungen $(|\mathcal{K}|, \Phi_{\mathcal{K}}) \rightarrow (|\mathcal{L}|, \Phi_{\mathcal{L}})$ sind diejenigen stetigen Abbildungen $|\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$, die für jeden endlichen Unterkomplex \mathcal{K}' von \mathcal{K} eine pl-Abbildung des kompakten Polytops $|\mathcal{K}'|$ auf ein kompaktes Polytop in $|\mathcal{L}|$ induzieren. Man kann diese Bedingung auch wie in Proposition 2.1.78 formulieren.

Der Triangulierungssatz impliziert auch, dass jeder kompakte pl-Raum pl-isomorph zu einem kompakten Polytop ist und dass jede kompakte pl-Mannigfaltigkeit pl-isomorph zu einer pl-Mannigfaltigkeit in einem affinen Raum, so wie wir sie früher definiert haben. Insofern sind im kompakten Fall die neu definierten pl-Räume bzw. pl-Mannigfaltigkeiten nichts völlig Neues. Trotzdem war es wichtig, den allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriff

losgelöst von den Einbettungen in affine Räume zu definieren. Denn nun ist es beispielsweise möglich, geometrisch interessante Räume, die keine Polytope sind, trotzdem mit einer pl-Struktur zu versehen. Nehmen wir als Beispiel die Einheitssphäre S^n im \mathbb{R}^{n+1} . Das ist kein Polytop. Aber durch radiale Projektion auf eine geeignete pl-Sphäre, etwa den Rand $\partial\Delta$ eines $(n+1)$ -Simplex mit Baryzentrum 0, können wir S^n mit der pl-Sphäre $\partial\Delta$ identifizieren und die pl-Struktur von $\partial\Delta$ auf S^n übertragen. Dadurch erhält S^n die Struktur einer kombinatorischen Mannigfaltigkeit.

Aber nun erhebt sich eine Frage. Die eben beschriebene Konstruktion einer kombinatorischen Mannigfaltigkeitsstruktur auf S^n ist ja sicher sehr natürlich, aber man muss doch fragen, ob nicht andere, vielleicht auch natürliche Konstruktionen zu anderen, wesentlich verschiedenen Strukturen führen können. In der Tat wissen wir ja durch den Satz von Edwards und Cannon (Satz 2.1.62 und Satz 2.1.68) schon, dass es für $n \geq 5$ pl-Strukturen auf S^n gibt, die keine kombinatorischen Mannigfaltigkeiten sind, und dass — eine weniger spezifische Aussage — die Hauptvermutung falsch ist: Ein kompakter topologischer Raum kann mehrere wesentlich verschiedene, d.h. nicht isomorphe pl-Raum-Strukturen tragen. Auf Eindeutigkeit der pl-Struktur kann man also nur hoffen, wenn man die Möglichkeiten durch weitere Bedingungen einschränkt. Die wichtigste Einschränkung ist, dass nur pl-Mannigfaltigkeitsstrukturen zugelassen werden. Weitere mögliche Einschränkungen ergeben sich aus der Geometrie der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit M . So kann man für differenzierbare Mannigfaltigkeiten Verträglichkeit der pl-Struktur mit der differenzierbaren Struktur verlangen. Schließlich kann sich auf eine ganz bestimmte zugrundeliegende Mannigfaltigkeit beschränken, z.B. $M = S^n$.

Topologische Mannigfaltigkeiten, pl-Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sind drei verwandte Arten von Strukturen. Sie stellen drei Möglichkeiten dar, den im vorigen Jahrhundert entstandenen Begriff der Mannigfaltigkeit genau zu fassen. Die Frage nach den Beziehungen zwischen diesen Strukturen konnte in den letzten 30 Jahren weitgehend geklärt werden. Die Antworten sind das Ergebnis der gemeinsamen Anstrengung vieler bedeutender Mathematiker. Ich meine, dass ihr Werk zum

Besten gehört, was die Mathematik unseres Jahrhunderts hervorgebracht hat. An Bedeutung, Tiefe und Schwierigkeit geht es weit über alles hinaus, was in einem elementaren Buch wie diesem dargestellt werden kann. Trotzdem will ich versuchen, einen Eindruck davon zu vermitteln, was gefunden wurde – auch wenn mein Bericht ganz oberflächlich bleiben muss. Es geht dabei nur um Ergebnisse und Beispiele. Die Beispiele sind scheinbar ganz einfach. Das soll nicht über die Schwierigkeit der Theorie hinwegtäuschen, die zu ihrer Behandlung nötig ist. Es soll nur zeigen, dass die “exotischen” Strukturen, von denen die Theorie handelt, keine Artefakte sind, sondern in natürlicher Weise in der Mathematik auftreten. Von Beweisen sage ich nichts. Dafür sei auf die zitierte Literatur verwiesen. Als eine sehr gut lesbare Einführung, durch die man auch eine allererste Ahnung von der Art der Beweise bekommt, empfehle ich den folgenden Übersichtsvortrag von Matthias Kreck: “Exotische Strukturen auf 4-Mannigfaltigkeiten” [231].

Anm. Hrsg.: Mit diesem Satz bricht das Typoskript ab. Eine handschriftliche Notiz (Bleistift) des Autors auf der Mappe des Typoskripts merkt an:

ca. 112 Seiten. Fast fertiger Text. Einzelne Korrekturen sind möglicherweise erforderlich. Text über das Verhältnis der Kategorien Diff-Top-PL muss noch geschrieben werden.

Der letzte Absatz des Textes (hier auf p. 597f.) wird betitelt als:

Ein ganz oberflächlicher Bericht zu einer der wichtigsten Errungenschaften der Mathematik des 20. Jahrhunderts: Die Klärung der Beziehungen zwischen den drei Mannigfaltigkeitsstrukturen TOP, PL, DIFF.

Direkt im Anschluss daran findet sich im detaillierten Inhaltsverzeichnis des Typoskripts folgende vom Autor verfasste Erläuterung:

Hier endet das Typoskript zu 13.7.1. Im Manuskript gibt es dazu noch die Seiten 175–183.⁴⁰ Auch hier wäre der Text noch weiterzuschreiben. Geplant waren noch folgende Abschnitte :

13.7.2 Dualität, Eulerscher Polyedersatz

13.7.3 Endliche Untergruppen von $SO(3)$, $SU(2)$ und reguläre Polyeder

13.7.4 Kammergeometrien

13.7.5 Flächenteilungen

13.7.6 Der Hauptsatz der konvexen Typen

13.7.7 Delaney-Symbole.

⁴⁰Anm. Hrsg.: Das Manuskript von 13.7.1 ist nicht erhalten.

2.6 Ausblick: Geplanter Aufbau von LA III §13.7 (Hrsg.)

§13.7 der LA III sollte unter dem Titel “*Reguläre Polyeder*” stehen. Davon liegt nur der hier als Kap. 2.1 bis 2.4 wiedergegebene erste Teilabschnitt §13.7.1 *Kombinatorische Geometrie und Topologie der Polyeder* als Fragment vor. Die Abschnitte 13.7.2 bis 13.7.7 wurden nie geschrieben. Dasselbe gilt für den ursprünglich geplanten Paragraphen 14 zur geometrischen Kristallographie.

Die Themen der nicht verwirklichten Teile von 13.7 sind bekannt (siehe oben); zu §14 liegen Zeichnungen des Autors und eine Vielzahl von Abbildungen vor. Eine Auswahl davon wird im folgenden Kapitel 3 als *Bildmaterial* mit erläuternden Kommentaren des Herausgebers dokumentiert (S. 611ff.). Hier folgen Bemerkungen des Herausgebers zu den nicht weiter ausgeführten Themen von 13.7.2 bis 13.7.7. Sie verweisen insbesondere auf Querverbindungen der geplanten Abschnitte mit Passagen der *Einleitung*. Der besseren Lesbarkeit wegen sind sie, obwohl vom Hrsg. stammend, in normaler Schrift gesetzt. (Hrsg.)

13.7.2 Dualität, Eulerscher Polyedersatz

Diese Themen tauchen in der *Einleitung* lediglich am Rande auf, duale Polyeder und Flächenteilungen unter anderem auf den Seiten 82ff., 123ff.; eine Anwendung des Eulerschen Polyedersatzes auf S. 289.

Zur Dualität von Polytopen siehe etwa B. Grünbaum *Convex Polytopes* [163, sec. 3.4], zum Eulerschen Polyedersatz [163, sec. 8].

13.7.3 Endliche Untergruppen von $SO(3)$, $SU(2)$ und reguläre Polyeder

Die endlichen Untergruppen von $SO(3)$ bestehen bekanntlich aus 2 Serien und den 3 Symmetriegruppen der regulären (platonischen) Polyeder aus eigentlichen Bewegungen (vgl. S. 532). Unter Verwendung der von A. Schoenflies eingeführten Notation sind dies:

- die zyklischen Gruppen, realisiert als Drehungen C_k , $k \in \mathbb{N}$,

- die Diedergruppen D_k , $k > 1$, realisiert durch Rotation der Ordnung k um eine “Hauptachse” und Rotationen der Ordnung 2 um eine dazu orthogonale Achse,
- Ikosaedergruppe I (S. 552), Oktaedergruppe O , Tetraedergruppe T .

Schon C. Jordan erwähnte diese Gruppen 1869 in der ersten Arbeit, in der der Gruppenbegriff in der Geometrie überhaupt verwendet wurde (siehe S. 703). Die entsprechenden Punktsymmetriekonstellationen waren schon (ohne Verwendung des Gruppenbegriffs) von verschiedenen Kristallographen aufgelistet worden: J.F.C. Hessel 1830, A. Bravais 1848 (siehe Anhang zur Geschichte der Kristallographie).

Die endlichen Untergruppen von $SU(2)$ sind die *binären* endlichen Symmetriegruppen der *Einleitung* (S. 402, 552). Durch Erzeugende und Relationen lassen sich speziell die binären Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedergruppen darstellen als:

$$\begin{aligned}\hat{T} &\cong \langle r, s, t \mid r^2 = s^3 = t^3 = rst \rangle \\ \hat{I} &\cong \langle r, s, t \mid r^2 = s^3 = t^5 = rst \rangle\end{aligned}$$

Die endlichen Untergruppen von $O(3)$ entstehen durch Erweiterung der endlichen Untergruppen von $SO(3)$ durch orientierungsumkehrende Isometrien. Das führt auf 7 Serien endlicher orthogonaler Gruppen und 7 erweiterte Symmetriegruppen der regulären (platonischen) Polyeder. In Schoenflies Notation treten zu den oben angegebenen Serien und Einzelgruppen hinzu:

- Drehungsgruppen erweitert durch eine Spiegelung an einer Ebene durch die Rotationsachse (“vertikal”) C_{kv} , $k \in \mathbb{N}$,
- Drehungsgruppen erweitert durch eine Spiegelung an einer Ebene orthogonal zur Rotationsachse (“horizontal”) C_{kh} , $k \geq 2$,
- von einer Drehspiegelung der Ordnung $2k$ erzeugte erweiterte Drehungsgruppe, \overline{C}_{2k} , $k \in \mathbb{N}$ (für $k = 1$ auch $\overline{C}_2 = C_i$),⁴¹

⁴¹ i steht für Inversion/Punktspiegelung.

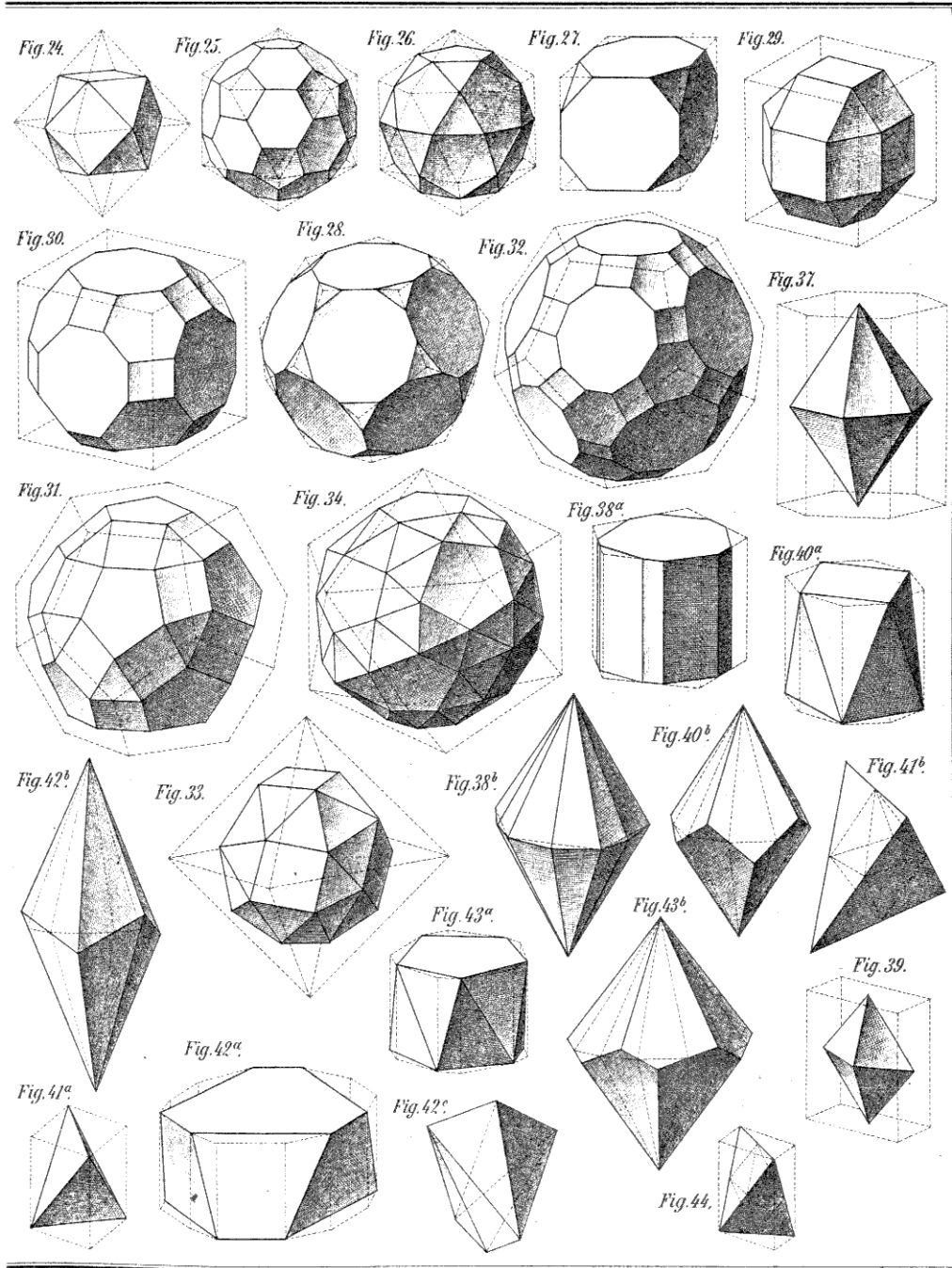
- Diedergruppen erweitert durch eine Spiegelung an einer Ebene durch die Rotationsachse (“diagonal”) D_{kd} , k ,
- Diedergruppen erweitert durch eine Spiegelung an einer (geeigneten) Ebene orthogonal zur Rotationsachse (“horizontal”) D_{kh} , $k \geq 2$,
- Tetraedergruppe erweitert durch eine Spiegelung an einer durch eine Kante und den gegenüberliegenden Kantenmittelpunkt gehenden Ebene (“diagonal”) T_d (isomorph der symmetrischen Gruppe S_4),
- Tetraedergruppe erweitert durch eine Spiegelung an einer durch drei Kantenmittelpunkte gehenden Ebene (“horizontal”) T_h ⁴²
- Oktaeder- bzw. Ikosaedergruppe erweitert durch Spiegelung an einer beliebigen Symmetrieebene des Oktaeders (Hexaeders) beziehungsweise des Ikosaeders (Dodekaeders) O^* (oder auch O_h), I^* .

Alle diese sind – im Gegensatz zu den binären Symmetriegruppen – als semidirekte Produkte der jeweiligen speziellen orthogonalen Gruppe mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ darstellbar.

Die entsprechenden Punktsymmetriekonstellationen waren schon J.F.C. Hessel (1830) bekannt (siehe historischer Anhang, S. 698). Die Orthogonalebene des Orbits $G \cdot v$ eines Vektors v bezüglich einer dieser endlichen Gruppen G definieren eine *einfache Form* oder Gestalt von G . Sie ist der Durchschnitt aller zugehörigen, den Ursprung enthaltenden Halbräume. Durch Schnitt solcher einfacher Formen entstehen *Komplexformen* der Gruppe G . In Hessels Arbeit von 1830 – und in späteren Arbeiten – finden sich diverse Abbildungen einfacher Formen. In E. Brieskorns Materialien zu §13.7 und §14 finden sich ausgewählte Bildtafeln aus einem Band von Max Brückner [60].

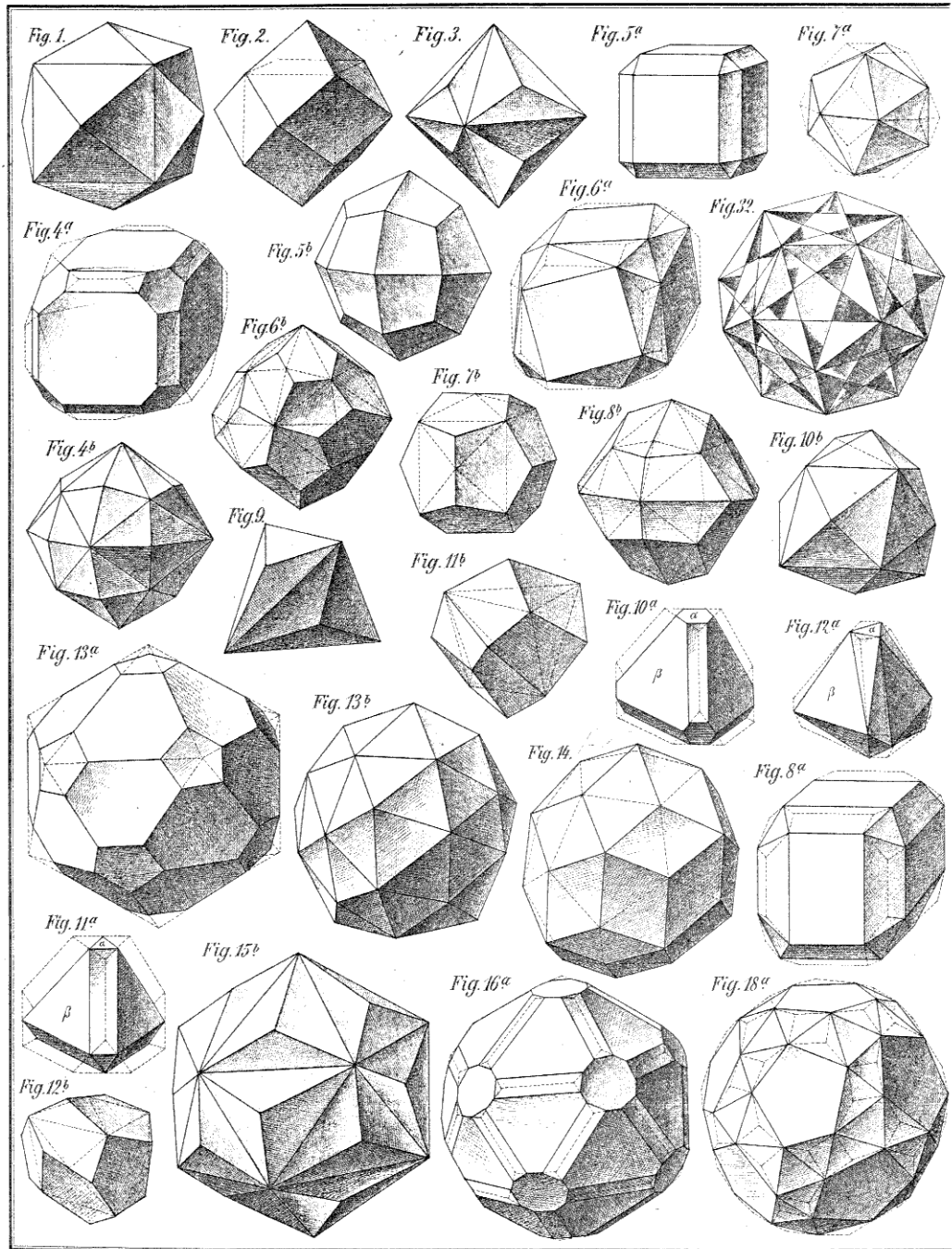
⁴²Dies ist keine Symmetriegruppe des Tetraeders, führt aber die Drehachsen der Tetraedergruppe T in sich über, wie schon Schoenflies argumentierte [317, p. 97]. Die Erweiterung T_d ist daher ein semidirektes Produkt vom Typ $T_d \cong T \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

73/6



Lith. u. Druck. v. R. Zwickler, Zwickau.

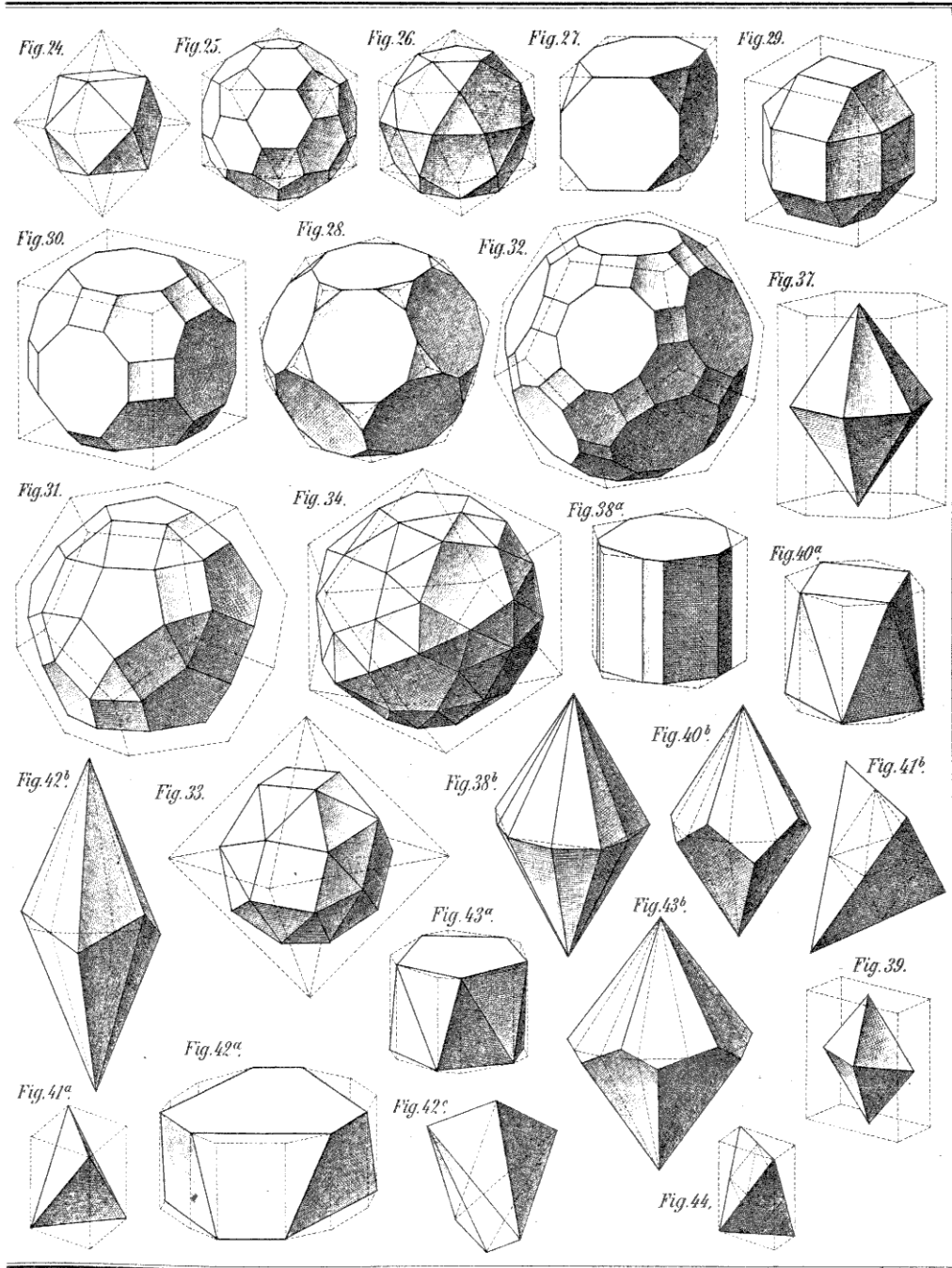
Abbildung 2.89: Brückner: Vielecke und Vielfache, Tafel VI rechts



Brückner; Vielecke und Vielfläche.

Abbildung 2.90: Brückner: Vielecke und Vielfläche, Tafel VII links

73/6



Lith u. Druck v. R. Zwickler, Zwickau.

Abbildung 2.91: Brückner: Vielecke und Vielfache, Tafel VII rechts

13.7.4 Kammergeometrien

Es sei \mathfrak{H} eine lokal endliche Menge von Hyperebenen in einem reellen euklidischen Raum $\mathbb{E}^{(n)}$ (bzw. in einem hyperbolischen Raum) der Dimension n , für die die von den Spiegelungen an Hyperebenen erzeugte Gruppe \mathfrak{W} eine diskrete Gruppe bildet und \mathfrak{H} invariant lässt. In diesem Fall bezeichnet man eine offene konvexe (und damit zusammenhängende) Teilmenge K des Komplements der Vereinigung aller Hyperebenen von \mathfrak{H} , also ein Raumstück im Sinne der Definition S. 478, als eine *Kammer*. \mathfrak{W} operiert transitiv auf der Menge der Kammern und wird schon von der Menge \mathfrak{S} von Spiegelungen an Hyperebenen, die *eine* Kammer begrenzen, erzeugt, $\mathfrak{W} = \langle \mathfrak{S} \rangle$. Der Abschluss von K ist ein Fundamentalbereich von \mathfrak{W} . Der kombinatorische Typ und die Raumwinkel von K bestimmen die Struktur von \mathfrak{W} . Insofern bestimmt die *Kammergeometrie* die Struktur der von Spiegelungen erzeugten endlichen diskreten Gruppen.

Paradigmatische Beispiele sind die Weylkammern. Die *Weylkammer* \mathfrak{W} eines Wurzelsystems Λ mit positiven Wurzeln Λ^+ im Euklidischen Raum $\mathbb{E}^{(n)}$ der Dimension n besteht aus dem Schnitt der Halbräume

$$\mathfrak{W} = \{x \in \mathbb{E}^{(n)} \mid (x, \alpha) > 0 \text{ für alle } \alpha \in \Lambda^+\}$$

Zu Wurzelsystemen und den zugehörigen Weylgruppen siehe *Einleitung* S. 317ff. und die dort angegebene Literatur. Beispiel von Kammergeometrien und ihrer Spiegelungsgruppen sind auch die Fuchsschen Gruppen der hyperbolischen Ebene; siehe Abb. 2.92

13.7.5 Flächenteilungen

In der *Einleitung* (Abschnitt 1.2, S. 119ff.) findet man die Aussage von

Satz

Eine monoedrische Parkettierung mit konvexen k -Ecken ist genau für $k \leq 3 \leq 6$ möglich. Dabei gilt: jedes Dreieck und jedes Viereck ($k = 3, 4$) parkettiert, für $k = 6$ gelingt dies für genau drei Hexagone [300]; für $k = 5$ sind derzeit 15 Typen parkettierender konvexer Pentagone bekannt.

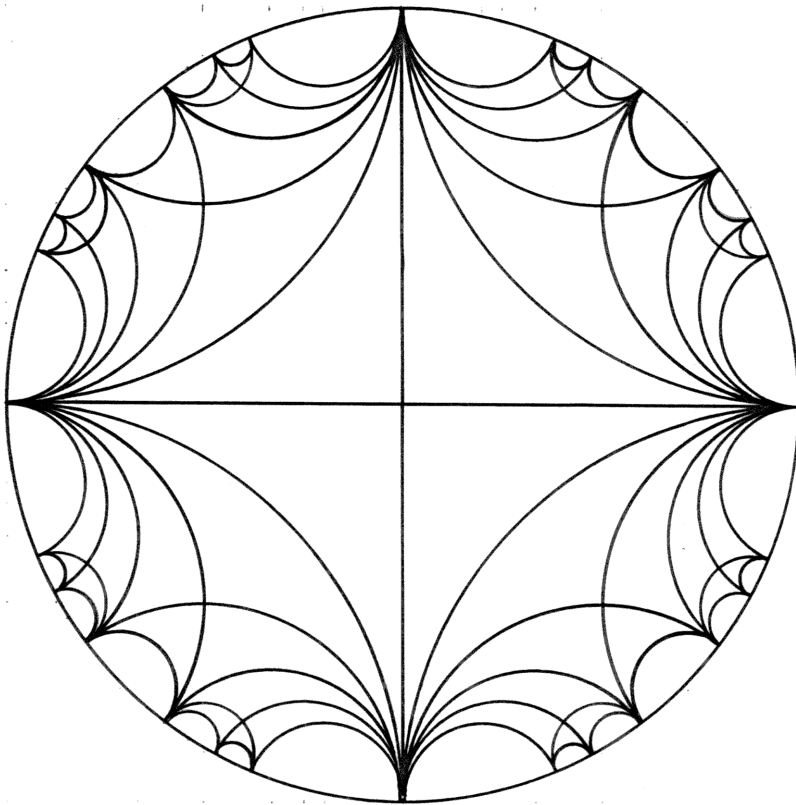


Abbildung 2.92: Beispiel einer Kammergeometrie der hyperbolischen Ebene

Es scheint, dass diese Liste vollständig ist (siehe S. 129, dort insbesondere Anm. 12.)

Grünbaum/Shepard geben eine Klassifizierung (eigentlich) isoedrischer Flächenteilungen bis auf homömorphe Deformation der typischen Flächenfiguren unter Aufrechterhaltung der Ecken-Kanten Eigenschaft an [166, p. 474]. Siehe auch 1.6 *Kleiner Exkurs zu Flächenornamenten*, S. 464ff.

13.7.6 Der Hauptsatz der konvexen Typen

Ernst Steinitz gab notwendige und hinreichende Bedingungen an, unter denen ein “polyedrischer Komplex” \mathfrak{P} (kombinatorischer Komplex der Dimension $n = 2$) durch ein konvexes Polyeder im \mathbb{R}^3 realisiert werden kann. Dies nannte er den “Fundamentalsatz der konvexen Typen” [343, p. 77]. Seine Bedingungen reformuliert B. Grünbaum dadurch, dass \mathfrak{P} einem planaren 3-fach zusammenhängenden Graphen Γ äquivalent ist [163, sec. 13.1]. 3-fach zusammenhängend bedeutet hier, dass zwei Ecken durch 3 verschiedene Wege verbindbar sind. Umgekehrt ist das Schlegel-Diagramm, also die Zentralprojektion des 2-Skeletts eines 3-dimensionalen konvexen Polytops, ein planarer 3-fach zusammenhängender Graph (siehe [163, sec. 11.3]). In der Formulierung von Grünbaum lautet der Hauptsatz der konvexen Typen damit:

Satz (Steinitz)

Jeder planare 3-fach zusammenhängende Graph Γ bestimmt ein konvexes Polyeder, mit einem zu Γ äquivalenten Schlegel-Diagramm.

13.7.7 Delaney-Symbole

Eine *äquivariante Flächenteilung* oder *Pflasterung* besteht aus einer Flächenteilung/Pflasterung \mathfrak{T} der euklidischen Ebene (oder der Sphäre, der hyperbolischen Ebene etc.) zusammen mit einer von rechts operierenden Gruppe Γ von euklidischen (sphärischen, hyperbolischen etc.) Automorphismen, die \mathfrak{T} in sich abbildet. Zu ihrer Klassifikation führte Andreas Dress in den 1980er Jahren das *Delaney-Symbol* \mathfrak{D} ein [105, p. 66f.].

Dazu betrachte man eine baryzentrische Unterteilung \mathfrak{B} von \mathfrak{T} . Deren 2-Zellen (Dreiecke) heißen die *Kammern* von \mathfrak{B} . Die Gruppe Γ operiert auf dem Kammersystem, das als \mathfrak{C} bezeichnet werde.

Definition

Das *Delaney-Symbol* \mathfrak{D} ist der Orbitraum von Γ auf dem Kammersystem:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}/\Gamma$$

Für die Notation von \mathfrak{D} gibt es verschiedene Konventionen. Die in diesem Band verwendete geht auf Dress zurück und wird wie folgt eingeführt: hat sich folgende Konvention eingebürgert: Die Ecken von \mathfrak{B} werden mit Symbolen $0, 1, 2$ belegt, je nachdem sie auf einer 2-Zelle, einer Kante oder einer Ecke von \mathfrak{T} liegen. Jeder Kante von \mathfrak{B} wird dasjenige Symbol $0, 1$ oder 2 zugeordnet, das die gegenüberliegende Ecke der Kammer trägt. Die Nachbarschaftsrelation zwischen je zwei benachbarten Kammern wird als vom Typ s_0, s_1 bzw. s_2 bezeichnet, wenn letztere eine gemeinsame Kante vom Typ $0, 1$ beziehungsweise 2 besitzen.

Zur Repräsentation von \mathfrak{D} benenne man die Kammern in einem Fundamentalbereich von Γ , etwa als A_1, A_2, \dots, A_k und setze dies gemäß der Operation von Γ auf anliegende Kammern fort. Zu jeder Kammer A_j des Fundamentalbereiches bildet man Folgen von Übergängen zu einer “übernächsten” Kammer über je zwei Kanten vom Typ $s_i s_j$ hinweg. $s_0 s_1$ überführt Kammern aus derselben 2-Zelle der ursprünglichen Flächenteilung \mathfrak{T} ineinander; m_{01} sei die minimale Anzahl solcher Übergänge bis zur Rückkehr zur Ausgangskammer A_j . Analog ergibt sich bei Ausführung von doppelten Nachbarschaftsübergängen vom Typ $s_1 s_2$ ein Umlauf um eine Ecke (Typ 2); m_{12} sei die minimale Anzahl von Schritten bis zur Rückkehr zu A_j . Jeder Kammer des Fundamentalbereichs wird so ein Zahlenpaar (m_{01}, m_{12}) zugeordnet.

Definition

Das *Delaney-Dress Symbol* von \mathfrak{D} besteht aus einem Graphen $\tilde{\mathfrak{D}}$ mit k Ecken, die den Kammern $A_j, 1 \leq j \leq k$ eines Fundamentalsystems entsprechen und jeweils mit den Zahlenpaaren (m_{01}, m_{12}) versehen sind. Sind die Kammern A_i, A_j benachbart und haben eine Kante vom Typ s_l ($l \in \{0, 1, 2\}$) gemein-

sam, so werden die zugehörigen Ecken von $\tilde{\mathfrak{D}}$ verbunden und die Verbindung mit dem Symbol l arkiert (“gefärbt”). Weitere Kanten enthält $\tilde{\mathfrak{D}}$ nicht.

In der *Einleitung* wird das Delaney-Symbol stets in der Form eines Delaney-Dress Graphen angegeben. Insbesondere findet man dort die Delaney-Symbole der 11 Archimedischen Flächenteilungen, S. 146, und der 13 halbbregulären Polyeder (Flächenteilungen der Sphäre) 270 ff.

Anmerkungen:

Beim Übergang zur dualen Flächenteilung \mathfrak{T}^* tauschen 2-Zellen und Ecken die Rolle. Die baryzentrischen Unterteilungen sind gleich; aber die Kanten mit Symbol 2 und 0 tauschen die Rollen, während der Kantentyp 1 gleich bleibt. Die Symmetrieverhältnisse übertragen sich. Ecken und Kanten der Delaney-Dress Graphen von \mathfrak{T}^* und \mathfrak{T} sind also gleich; lediglich die den Ecken zugeordneten Symbole (m_{01}, m_{12}) unterliegen einer Vertauschung, die Kantenfärbungen werden entsprechend geändert ($0 \leftrightarrow 2$, 1 bleibt).

Eine Schlüsselrolle kommt den Delaney-Symbolen bei der Klassifikation der äquivarianter Flächenteilungen zu. In [105] bewies A. Dress den **Satz**: Zwei äquivalente Flächenteilungen sind genau dann kombinatorisch äquivalent, wenn ihre Delaney-Symbole isomorph sind.

3 Material zu *Geometrische Kristallographie* (geplant als §14 der LA III)

Die Gestaltbildungen der Kristallographie lagen E. Brieskorn besonders am Herzen. Leider ist er nicht mehr dazu gekommen, seine Gedanken über die Verbindung von Gestalt und Struktur in diesem Bereich der Naturformen auszuführen. In seinem Nachlass finden sich jedoch Vorbereitungen dazu, hauptsächlich in der Form von Bildmaterial. Besonders hervorzuheben sind neun vom Autor zusammengestellte Bildtafeln mit selbst erstellten Fotos von Mineralien in einfachen Kristallformen samt zugehörigen Erläuterungstafeln (S. 669 ff.). Einige wenige Abbildungen wurden vom Herausgeber hinzugefügt (mit Quellenangabe). Nicht besonders ausgezeichneten Abbildungen stammen in der Regel vom Autor (E.B.).

Nur ein Teil der im Nachlass vorhandenen Abbildungen zu geometrischen Kristallographie wird im Folgenden dokumentiert.⁴³ Um deren Verständnis zu erleichtern, werden kurze, vom Herausgeber verfasste Einführungstexte in grundlegende Konzepte der Kristallographie hinzugefügt. Eine systematische Darstellung, wie sie der Autor beabsichtigte, findet man hier nicht; die Kommentare dienen lediglich als Lesehilfe. Eine gute Ergänzung findet man gegebenenfalls in der Einführung in die geometrische Kristallographie von M. Senechal [333]. In der Verlagskorrespondenz erwähnt E. Brieskorn [139, 297] als von ihm herangezogene Literatur.

Wie schon in Kap. 2.2 (zu §13.7.2ff. der LA III) stammen die folgenden Textkommentare vom Herausgeber, sind aber wie dort aus Gründen der leichteren Lesbarkeit nicht kursiv gesetzt. (Hrsg.)

⁴³Der Nachlass enthält zahlreiche unmontierte Kopien aus unbekanntem Quellen. Sie waren vom Autor offenbar zur Aufnahme in seinen Band vorgesehen. Hier wurden sie nur in wenigen Fällen aufgenommen.

3.1 Kristallklassen und Kristallsysteme

Die Kristallgestalten und ihre Symmetrien werden in 7 (zuweilen auch 6) Kristallsysteme eingeteilt, denen sich 32 Kristallklassen unterordnen. Unter Verwendung der seit dem späten 19. Jahrhundert verwendeten Sprache der euklidischen Transformationsgruppen sind die *Kristallklassen* durch diejenigen endlichen orthogonalen Gruppen charakterisiert, die ein Raumgitter invariant lassen. Davon gibt es 32. Ihre Bezeichnung in einer auf A. Schoenflies zurück gehenden Notation und eine Skizze der Lage ihrer Symmetrieelemente (Rotationsachsen, Spiegelungen, Drehspiegelungen, Punktspiegelung/Inversion) findet man in Abbildung 3.94 zusammengestellt. Zuweilen werden sie auch nach der maximalen Flächenanzahl ihrer einfachen Gestalten bezeichnet (etwa in den Bildunterschriften zu den Tafeln S. 673f.).⁴⁴

Das Wort “Kristallklasse” wird hononym verwendet: Häufig steht es für eine entsprechende Punktsymmetriegruppe der Kristallographie, manchmal bezeichnet es aber auch die Gesamtheit der Kristalle der entsprechenden Symmetrie. Es können sogar die kristallographischen Raumgruppen mit der entsprechenden Punktsymmetrie gemeint sein. Der Kontext macht in der Regel klar, welche Bedeutung intendiert ist.

Sieben Kristallklassen treten als (maximale) orthogonale Gruppen auf, die ein *Raumgitter* invariant lassen (vgl. S. 625). Diese werden als *holoedrische*, d.h. vollständige, wörtlich “vollflächige”, Punktsymmetriegruppen der *Kristallsysteme* bezeichnet. Die Kristallsysteme lassen sich durch geometrische Bedingungen von Raumgittern charakterisieren und stehen daher in 1:1 Korrespondenz zu den Bravaisystemen beziehungsweise Gittersystemen und den für sie typischen Achsensystemen (siehe unten). Die Bezeichnungen der Kristallsysteme und ihre holoedrischen Symmetriegruppen sind folgende:

- *Kubisches, reguläres* oder *isometrisches* System mit der holoedrischen Symmetrie O^* (auch als O_h notiert),
- *hexagonales System*, Holoedrie D_{6h} ,
- *trigonales* oder auch *rhomboedrisches* System (manchmal mit dem

⁴⁴*Hexakisoktaedrische Klasse* steht dann für die Kristallklasse der Symmetriegruppe O^* , *disdodekaedrische Klasse* für die von T_h , hexakistetreadrisch für T_d (vgl. die Übersicht der einfachen Formen des kubischen Systems in Abb. 3.100).

- hexagonalen System zusammengefasst), Holoedrie D_{3d} ,
- *tetragonales* System, Holoedrie D_{4h} ,
 - *orthorhombisches* System, Holoedrie D_{2h} ,
 - *monoklines* System, Holoedrie C_{2h} ,
 - *triklines* System, Holoedrie $C_i = \bar{C}_2$

Die Namen der Systeme drücken typische geometrische Eigenschaften der an die Raumgitter jeweils angepassten Achsensysteme, beziehungsweise der zugehörigen sogenannten Einheitszellen aus (vgl. Abb. 3.105).

Die 32 Kristallklassen sind Untergruppen der holoedrischen Symmetrien und werden nach Maßgabe ihrer Invarianzeigenschaften gegenüber den Raumgittern zu 7 Systemen zusammengefasst (siehe Abb. 3.95 mit Untergruppenrelationen). Untergruppen vom Index 2 in einer holoedrischen Kristallklasse werden als *hemiedrisch* bezeichnet, solche vom Index 4 als *tetartoedrisch*, solche vom Index $k > 1$ allgemein als *meriedrisch*.

In der kristallographischen Literatur werden üblicherweise andere Bezeichnungen für die Kristallklassen verwendet als die Schoenflieschen, die sogenannte *internationale kristallographische* (auch *Hermann-Mauguin*) Notation. Dabei werden für die Gruppe typische Symmetrieachsen mit Spiegelungseigenschaften notiert. Beispiel $\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$ für O^* ; dabei steht $\frac{k}{m}$ für eine Rotationsachse (oder mehrere) der Ordnung k mit orthogonaler Spiegelung (also Untergruppe(n) vom Typ $\sim C_{kh}$), \bar{k} für einer Rotationsachse der Ordnung k mit Inversionszentrum auf der Achse. Diese Symbolik wird auf vielen der Abbildungen von E. Brieskorn verwendet, meist mit einer Übersetzung in die Schoenflies-Notation.

Die Lage der Achsen wird graphisch durch einschlägige Zeichenkonventionen beschrieben, die hier nicht im Detail vorgestellt werden sollen. Man kann sie aus den folgenden Abbildungen erschließen, wenn man folgende graphische Regeln kennt: dunkles n -Eck – Rotationsachse der Ordnung n , darin heller Punkt – Inversionszentrum, bzw. darin helles 2-Eck – Drehspiegelung, dunkler Strich – vertikale Spiegelungsebene, dunkler Kreis – horizontale Spiegelungsebene. Sie entsprechen bis auf kleine Abweichungen den

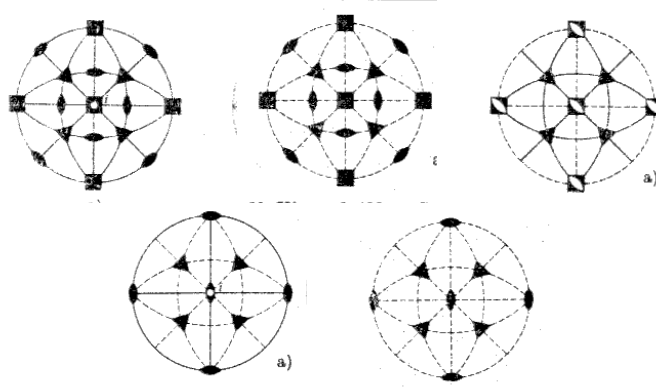


Abbildung 3.93: Die Symmetrieelemente der 5 kubischen Klassen in räumlicher Ansicht; oben: O^* , O , T_d , unten: T_h , T

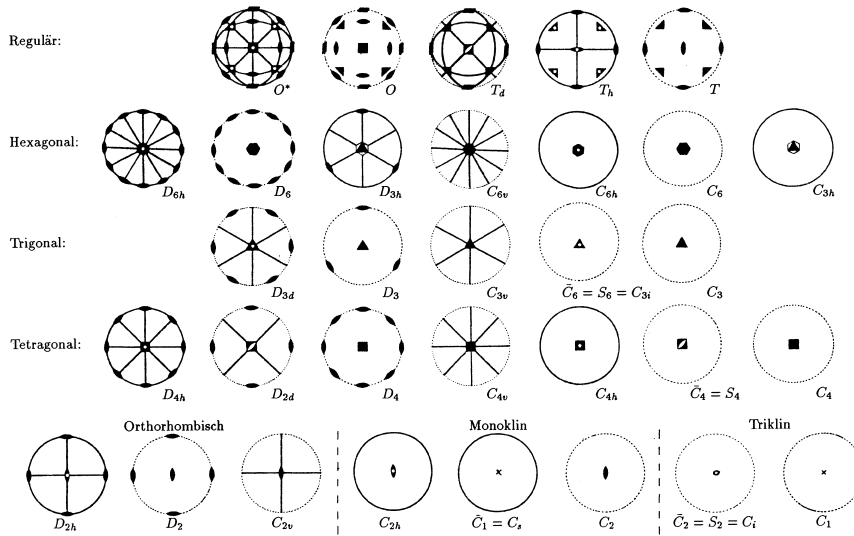


Abbildung 3.94: Symmetrie-Karten (ebene Projektion) und Schoenflies-Symbole der 32 Kristallklassen, Quelle (Scholz 1989, Fig 15)

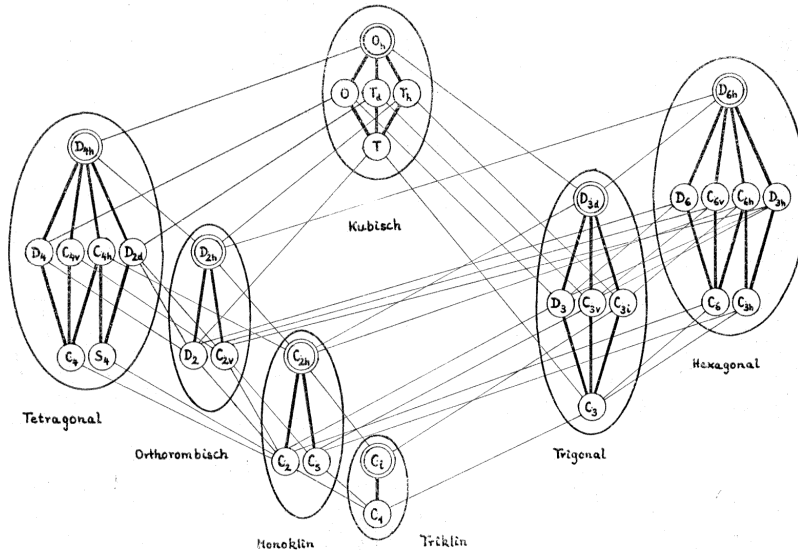


Abbildung 3.95: Die 7 Kristallsysteme und die 32 Kristallklassen

in den ebenen Symmetriediagrammen der *Einleitung* verwendeten Symbolen (siehe S. 141)

3.2 Einfache Formen der Kristallographie

Einfache Formen einer Kristallklasse G entstehen durch den Schnitt von Halbräumen bezüglich Orthogonalebene zu allen Vektoren eines Orbits $G \cdot v$ eines Vektors v (vgl. auch Abschnitt 2.2, S. 602). Üblicherweise wird v durch ganzzahlige Koeffizienten (Flächenindizes oder "Millersche Indizes") bezüglich eines für das betreffende Kristallsystem typischen Achsensystems angegeben. Je nach Lage des Vektors v in Bezug auf die Symmetriachsen können dabei kombinatorisch nicht äquivalente konvexe Polyeder auftreten; im Fall der Kristallklassen O^* und T_d sind es jeweils 7. Die einfachen Formen von O^* zeigt Abb. 3.96. Einen Eindruck, wie sich diese Formen bei wechselndem v verändern, gibt Abb. 3.97.

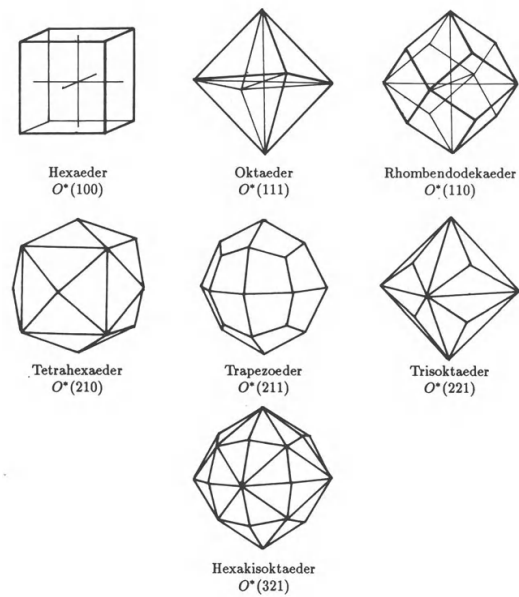


Abbildung 3.96: Die 7 einfachen Formen der Klasse O^* mit Flächenindizes, Quelle (Scholz 1989, Fig. 3)

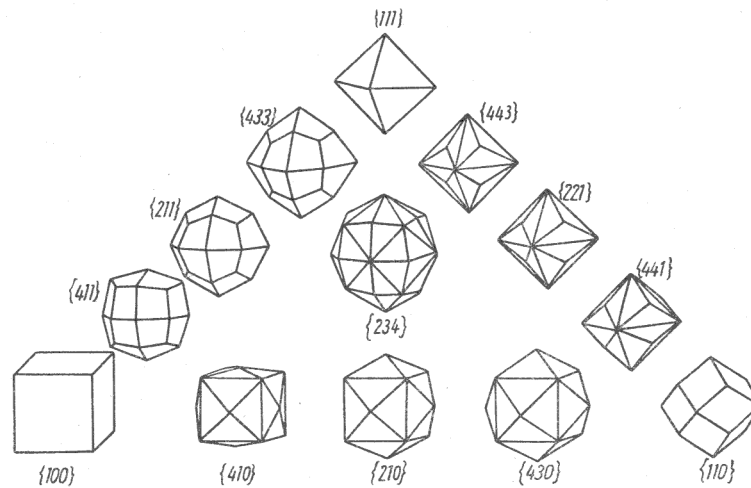


Abbildung 3.97: Übergänge zwischen den einfachen Formen der Klasse O^* mit Flächenindizes, Quelle (Fischer 1957, p. 162), Kopie im Nachlass E.B.

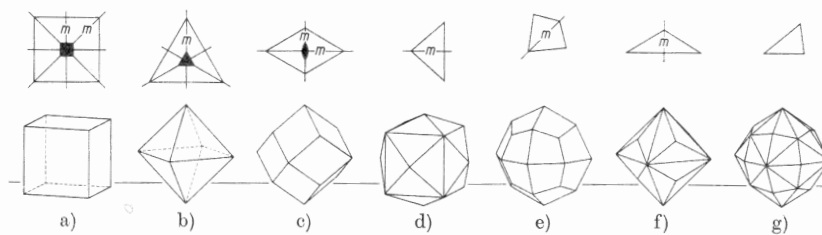


Abb. 45. Die 7 einfachen Formen der Klasse O_h-3m , mit Angabe der Flächensymmetrie.

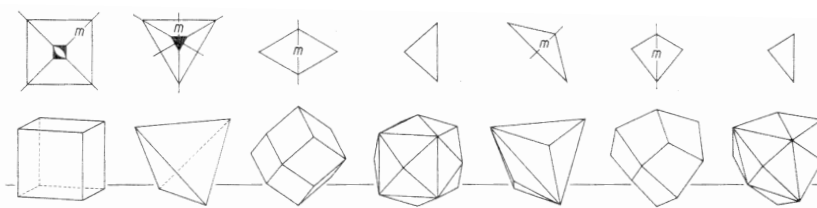


Abb. 46. Die 7 einfachen Formen der Klasse T_d-3m , mit Angabe der Flächensymmetrie.

Abbildung 3.98: Die 7 einfachen Formen der Klassen O_h und T_d ,
Quelle (Ramdohr/Strunz 1967), Kopie im Nachlass E.B.

Dabei tritt häufig auf, dass einfache Formen verschiedener Kristallklassen desselben Systems zusammenfallen. Beispiele dafür findet man in den Abbildungen, etwa im Fall O^* und der hemiedrischen Klasse T_d (Abb. 3.98). Die einfachen Formen der tetraedischen Klassen T_d, T_h, T zeigt Abbildung 3.99. Sämtliche einfache Formen des kubischen Systems (also einfache Formen von O^*, T_d, T_h, O, T), insgesamt 15, sind der Abbildung 3.100 zu entnehmen.

Insgesamt gibt es unter dem gemeinsamen Gesichtspunkten Symmetrie und kombinatorischer Typ 47 einfache Kristallformen. Sie sind in den Zeichnungen des Autors Abb. 3.101 – Abb. 3.103 dargestellt. Eine komprimierte Zusammenstellung aller findet man in Abb. 3.104. Sieht man von der Symmetrie ab, reduzieren sich die 47 einfachen Gestalten auf 26 kombinatorische Polyedertypen.⁴⁵

⁴⁵Laut Hinweis in [332, p. 52f.] findet man die kombinatorische Klassifikation in einem mir (Hrsg.) nicht zugänglichen Artikel von Aleksei V. Shubnikov aus dem Jahre 1916.

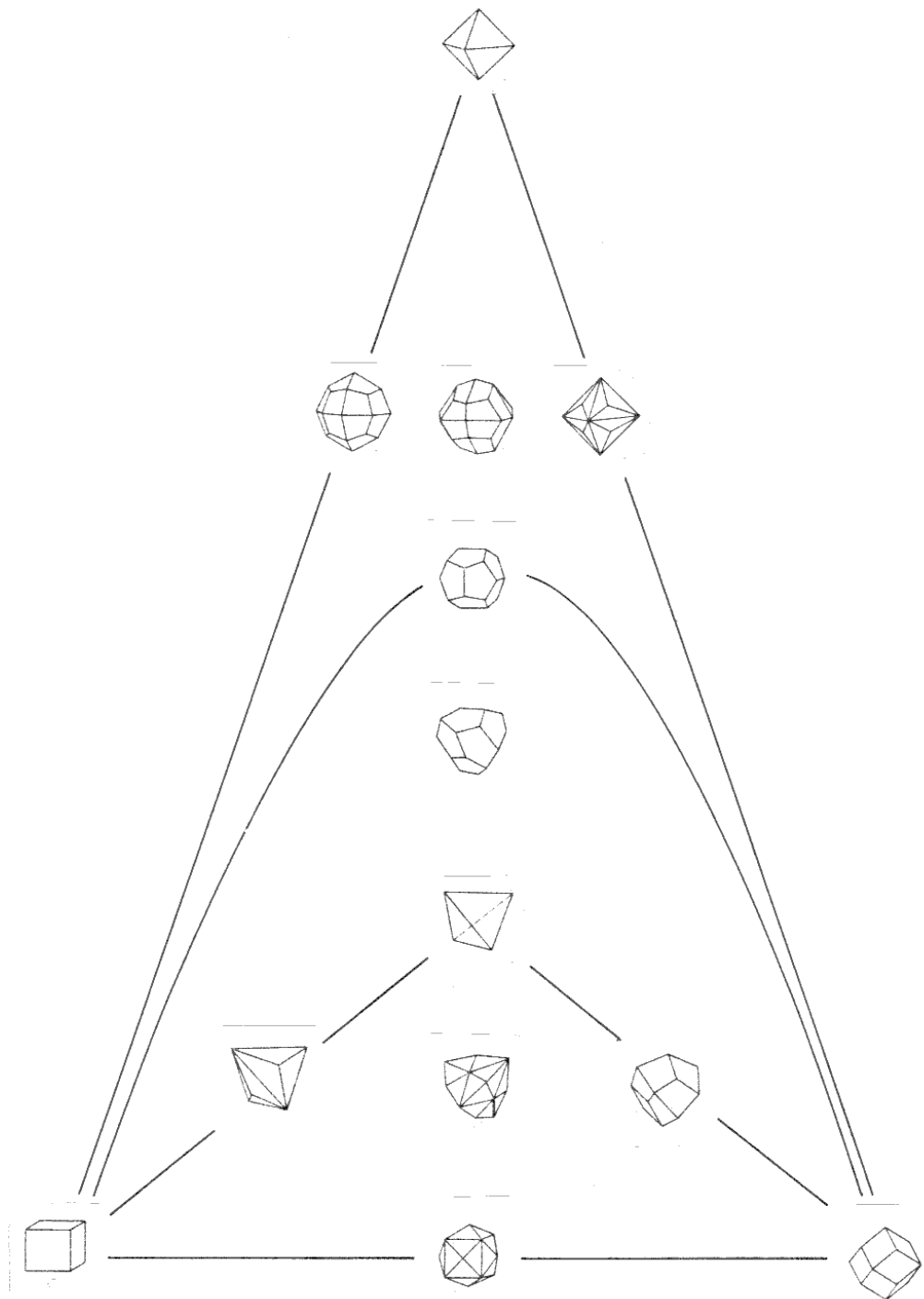


Abbildung 3.99: Die 13 Formen der tetraedischen Klassen T_d , T_h und T
















Hexakisoktaeder		g				
Hexakistetraeder			g			
Pentagon-Ikositetraeder				g		
Disdodekaeder					g	
tetraedrisches Pentagondodekaeder						g
Tetrakisoktaeder		d	d	d		
Pentagondodekaeder					d	d
Ikositetraeder		e		e	e	
Triakistetraeder			e			e
Triakisoktaeder		f		f	f	
Deltoiddodekaeder			f			f
Rhombendodekaeder		c	c	c	c	c
Hexaeder		a	a	a	a	a
Oktaeder		b		b	b	
Tetraeder			b			b
		O_h	T_d	O	T_h	T

Abbildung 3.100: Die 15 einfachen Formen des kubischen Systems

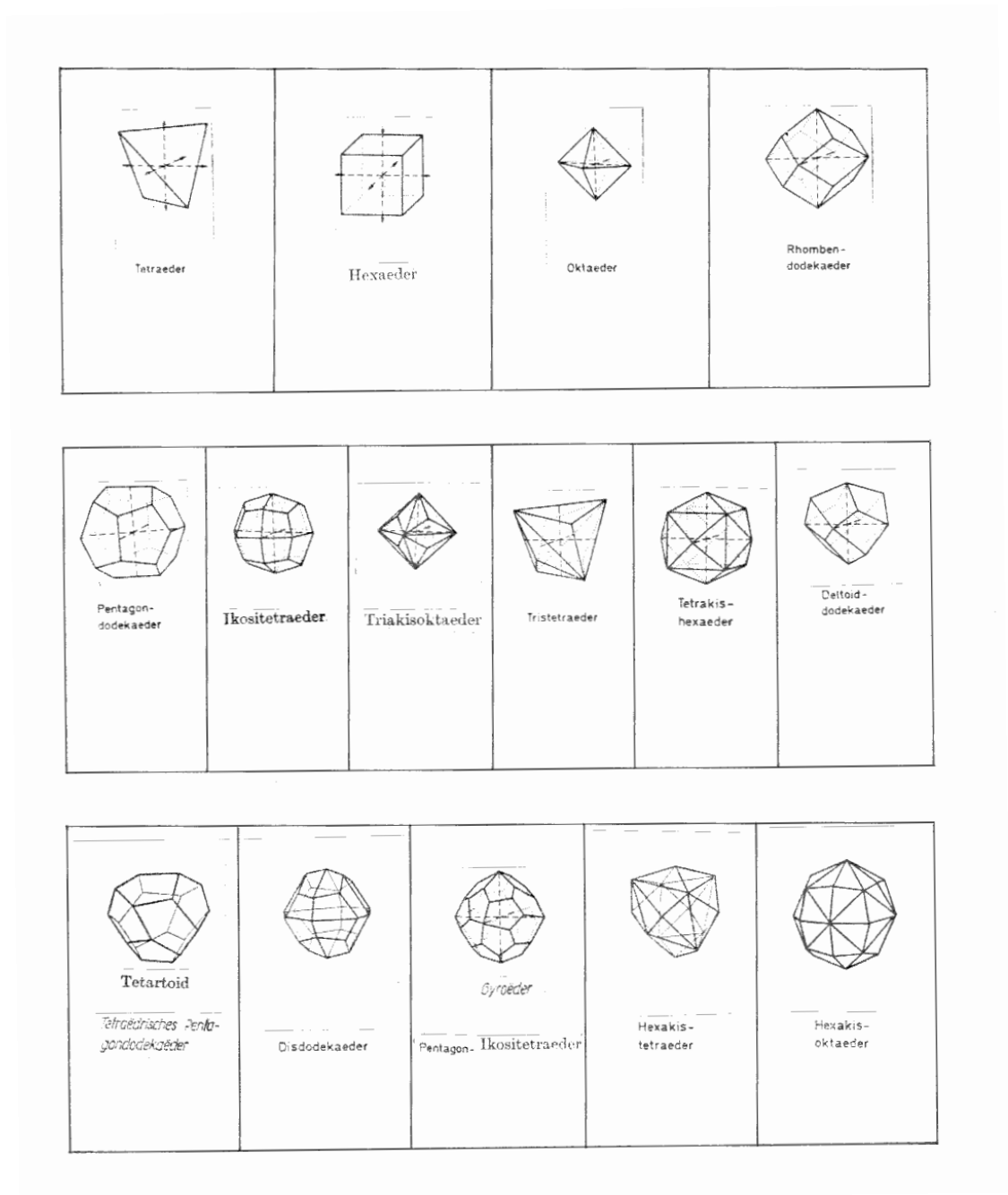


Abbildung 3.101: Einfache Kristallformen 1

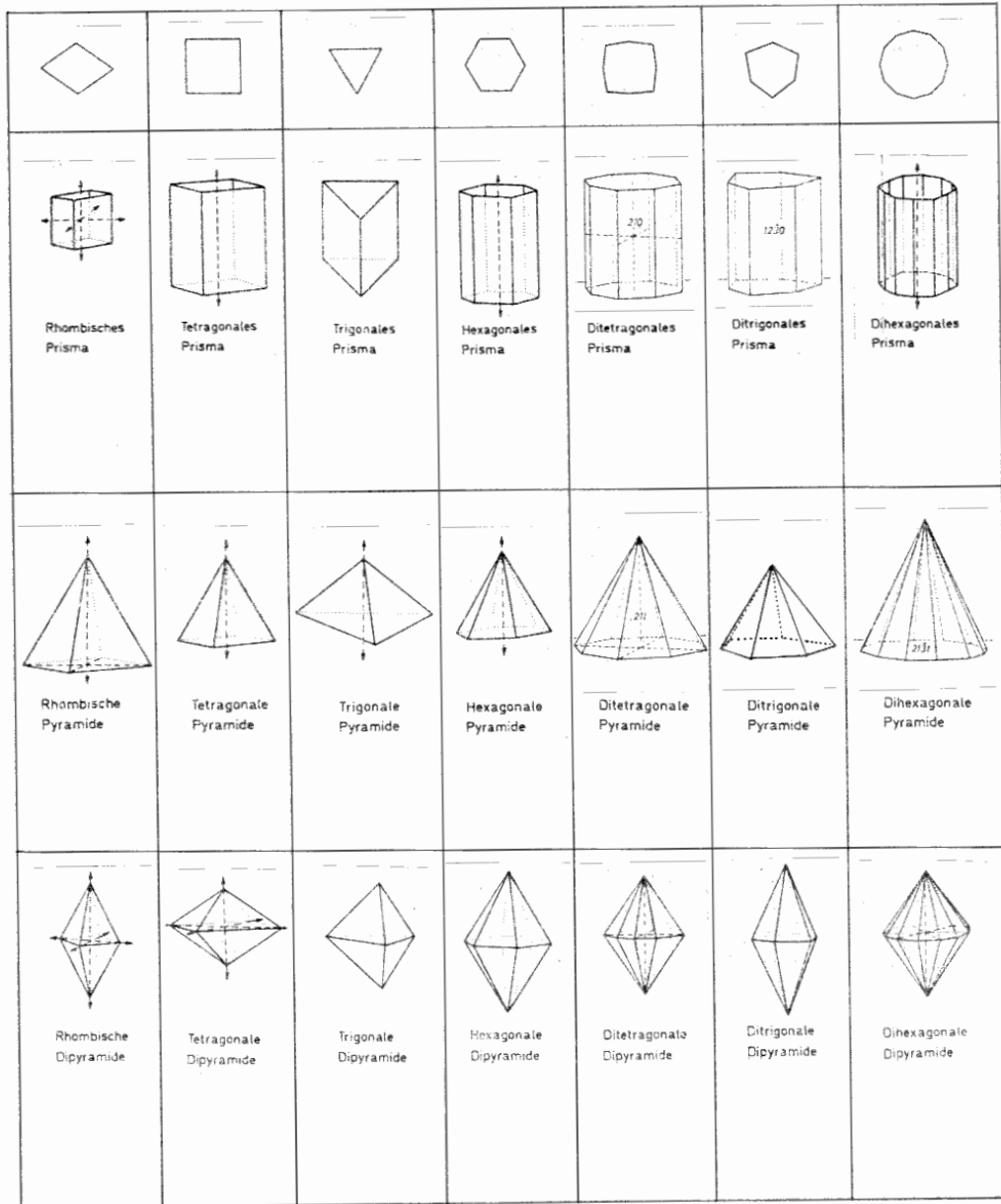


Abbildung 3.102: Einfache Kristallformen 2

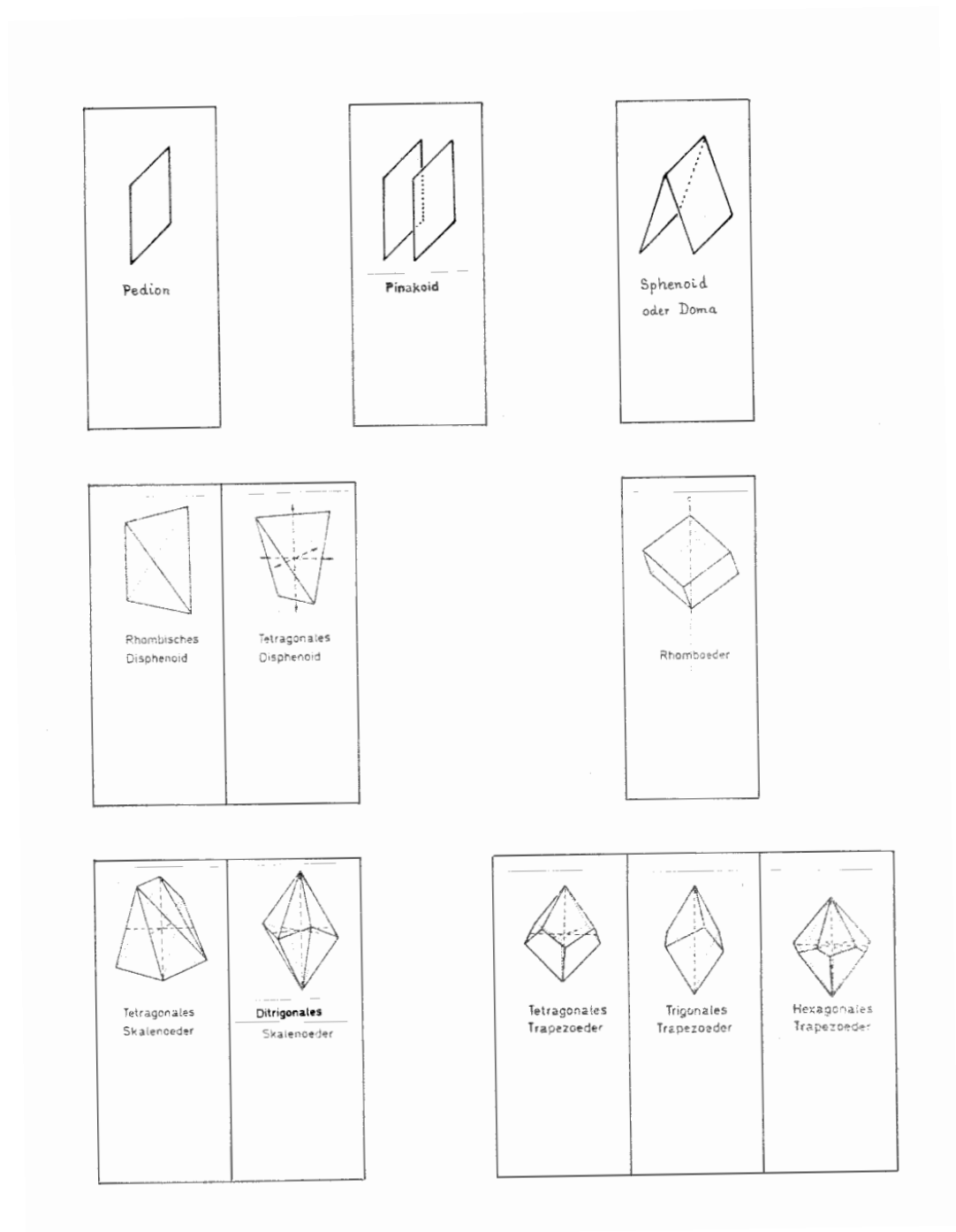


Abbildung 3.103: Einfache Kristallformen 3

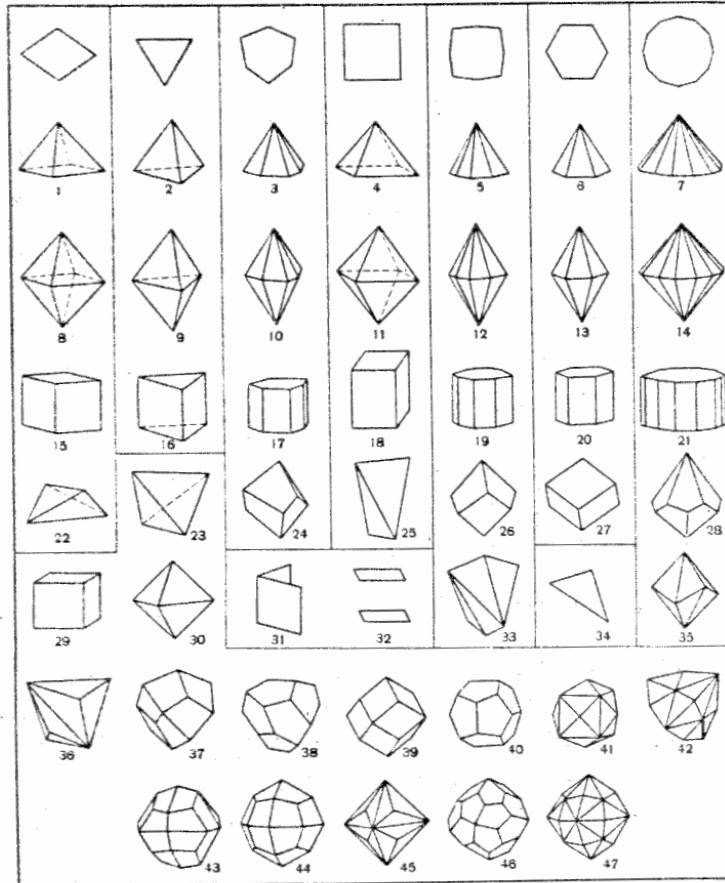


Fig. 73. The 47 simple forms which crystals may take: (1)–(7) Pyramids: orthorhombic, trigonal, ditrigonal, tetragonal, ditetragonal, hexagonal, dihexagonal; (8)–(14) bipyramids of the same types; (15)–(21) prisms of the same types; (22), (23), (25) tetrahedra: orthorhombic, regular, and tetragonal; (24), (26), (28) trapezohedra: trigonal, tetragonal, hexagonal; (27) rhombohedron; (34) scalene triangle; (33), (35) scalenohedra: tetragonal and ditrigonal; (31) dihedron (axial or nonaxial); (32) pinacoid; (23), (29), (30), (36)–(47) simple forms of the cubic system: (23) tetrahedron; (29) hexahedron (cube); (30) octahedron; (36) trigonal tristetrahedron; (37) tetragonal tristetrahedron; (38) pentagonal tristetrahedron; (39) rhombic dodecahedron; (40) pentagonal dodecahedron; (41) tetrahexahedron; (42) hexatetrahedron; (43) didodecahedron; (44) tetragonal trisoctahedron; (45) trigonal trisoctahedron; (46) pentagonal trisoctahedron; (47) hexoctahedron. The central cross-sections of all the figures above the stepped line dividing the table are the regular polygons indicated in the top row.

Abbildung 3.104: Zusammenstellung der 47 einfachen Kristallformen
(Kopie im Nachlass E.B., Quelle unbekannt)

3.3 Gitter, Gittersysteme und Bravaistypen

Zur Klärung der Sprache sei an folgende Begrifflichkeit erinnert. Eine diskrete Translationsgruppe im euklidischen Raum $\mathbb{E}^{(n)}$ der Dimension n oder im affinen reellen Raum derselben Dimension heißt (Translations-) *Gitter*, wenn sie von maximalem Rang n ist. Daran anschließend verwendet man üblicherweise die

Definition:

- a) Eine diskontinuierlich operierende Gruppe G von Isometrien des euklidischen Raums $\mathbb{E}^{(n)}$ heißt *kristallographische Raumgruppe* der Dimension n , (genau dann) wenn die in ihr enthalten Translationen ein Gitter bilden.
- b) Zwei kristallographische Raumgruppen G, G' im $\mathbb{E}^{(n)}$ gehören genau dann dem gleichen *Raumgruppentyp* an, wenn sie durch affine Konjugation ineinander überführt werden können.
- c) Ist dies sogar für orientierungserhaltende affine Abbildungen möglich, so heißen G und G' vom gleichen *eigentlichen* Raumgruppentyp; falls nicht, werden sie als *enantiomorph* bezeichnet.

Zur Vereinfachung der Sprache bezeichnet im im weiteren Verlauf dieses Abschnitts *Raumgruppe* stets eine kristallographische Raumgruppe.

Weiter oben wurde schon erwähnt, dass im Fall $n = 3$ die (maximalen) orthogonalen Symmetriegruppen von Translationsgittern im euklidischen Raum, $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2 + \mathbb{Z}v_3$ mit reell linear unabhängigen Vektoren v_1, v_2, v_3 , genau die 7 holoedrischen Kristallklassen $O^*, D_{6h}, D_{3d}, D_{4h}, D_{2h}, C_{2h}, C_i$ sind. Unter diesem Gesichtspunkt lassen sich sowohl die Raumgitter als auch die kristallographischen Raumgruppen analog den Kristallklassen in 7 *Gittersysteme* oder *Bravaisysteme* mit jeweils derselben maximalen endlichen orthogonalen Symmetriegruppe einteilen (Abb. 3.105).

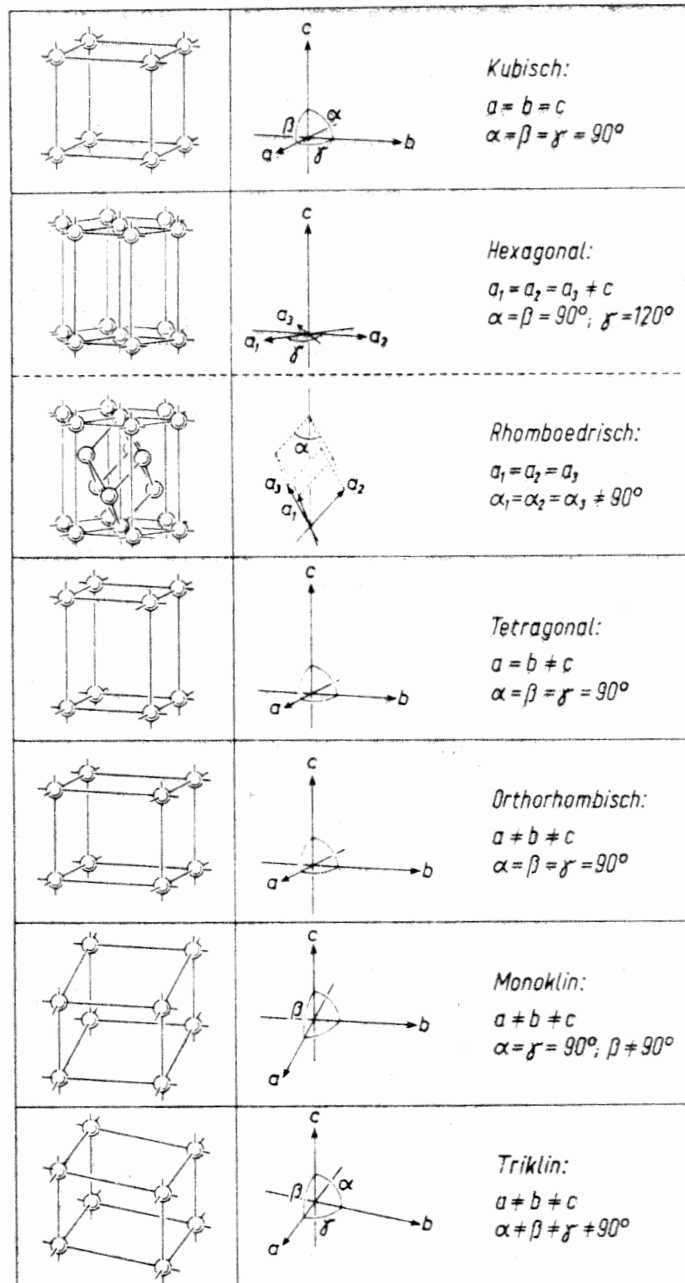


Abbildung 3.105: Die Einheitszellen der 7 Gittersysteme
 Quelle (Ramdohr/Strunz 1967, Abb. 28), Kopie im Nachlass E.B.

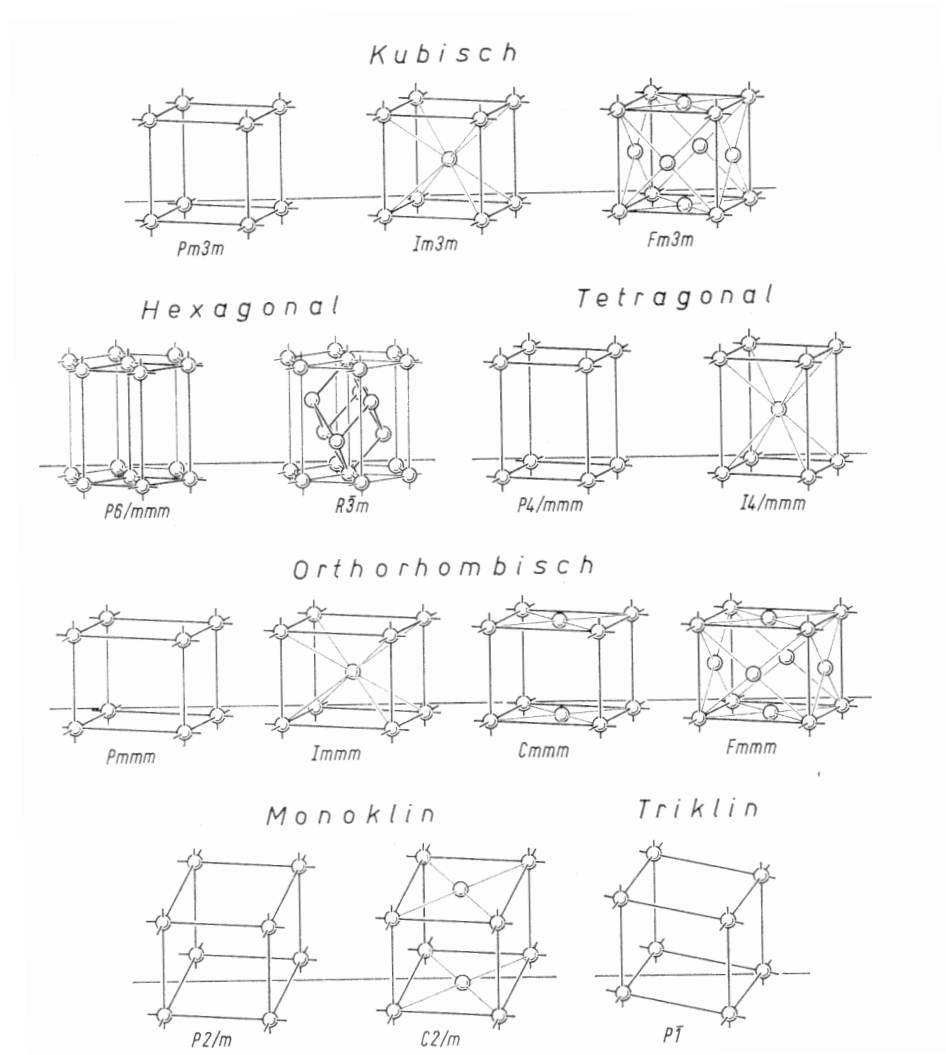


Abbildung 3.106: Einheitszellen der 14 Bravaisstypen,
 Quelle (Ramdohr/Strunz 1967, Abb. 146), Kopie im Nachlass E.B.

Zwei Raumgitter Γ, Γ' desselben Gittersystems, also von gleichem Punktsymmetriotyp, lassen sich nicht immer so durch eine stetige Schar (umkehrbarer) affiner Abbildungen ineinander überführen, dass jedes Gitter der Schar dieselbe orthogonale Symmetriegruppe besitzt wie das Ausgangsgitter. Falls dies aber der Fall ist, nennt man Γ und Γ' vom gleichen *Gittertyp* oder auch *Bravaistyp*. So zumindest teilte Bravais die Gitter in unterschiedliche Typen ein (vgl. historischer Anhang S. 701). Heute zieht man üblicherweise folgendes Kriterium vor:

Definition:

Zwei Gitter Γ, Γ' mit (holoedriscen) Punktsymmetriegruppen H und H' im euklidischen Raum $\mathbb{E}^{(n)}$ sind genau dann vom selben *Gittertyp*, falls es eine invertierbare *affine* Abbildung φ von $\mathbb{E}^{(n)}$ in sich gibt, die sowohl die Gitter als auch die Punktsymmetriegruppen ineinander überführt:

$$\Gamma' = \varphi(\Gamma), \quad H' = \varphi \cdot H \cdot \varphi^{-1}$$

A. Bravais analysierte die letztgenannte Art der Äquivalenz für Punktgitter, noch lange bevor diese Frage nach der Äquivalenz aus der Sicht der Raumgruppen gestellt werden konnte, sogar noch bevor überhaupt der Gruppenbegriff in die Geometrie übertragen wurde. Er bewies, dass es im räumlichen Fall (also der Dimension $n = 3$) genau 14 Gittertypen gibt. Dies gilt ebenso für Translationsgitter und analog für die Raumgruppentypen.

Ohne hier ins Einzelne zu gehen, kann man sich eine Übersicht über die 14 Gittertypen und ihre geometrische Charakterisierung verschaffen; siehe dazu Abb. 3.106. Die dort dargestellten Referenz-Parallelepipede werden in der kristallographischen Literatur als *Einheitszellen* bezeichnet (siehe Haupttext S. 320). Sie dienen zur Auszeichnung eines der Kristallstruktur angepassten Koordinatensystems und werden durch ihre Kanten a, b, c mit den jeweiligen Größenbeziehungen und Winkeln bestimmt. Außer im Fall des triklinen Systems handelt es sich um orthogonale Parallelepipede (“Säulen”). Das Translationsgitter kann auf viele Weisen erzeugt werden, etwa die Vektoren zwischen Ursprung (“links unten”) und den nächstliegenden

3 ausgezeichneten gezeichneten Punkten der jeweiligen Einheitszelle. Die eingetragenen Symbole für die Einheitszellen entsprechen denen in der kristallographischen Literatur und bestehen aus einer Kurzbezeichnung für die Symmetrie, angelehnt an die internationale kristallographische Notation (siehe S. 613), und einen Buchstaben (P , F , C , I oder R), durch den angegeben wird, welche Punkte gegebenenfalls zusätzlich zu den Ecken des Referenz-Parallelepipeds Π im Orbit von Γ liegen. P (“primitive”) zeigt an, dass es keine weiteren solche Punkte gibt; F (“face centered”, vgl. S. 320) dass zusätzlich die Mittelpunkte der Seitenflächen enthalten sind, C (“centered”) zusätzlich die Zentren von Basis und Deckfläche, I zusätzlich das Zentrum von Π . R charakterisiert ein Referenz-Parallelepiped mit rhombischer Basis und Winkeln $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{6}$ mit zwei zusätzlichen gleichabständig verteilten Punkten auf der Hauptdiagonale. Dadurch wird die hexagonale Rotationssymmetrie der rhombischen Säule auf die Ordnung 3 reduziert.

3.4 Raumgruppen

Bezeichnet B einen der 14 Bravaistypen, $\Gamma(B)$ ein Gitter dieses Typs sowie H die Holoedriegruppe des zugehörigen Gittersystems, so lässt sich jede Raumgruppe G des Typs B , als Erweiterung von $\Gamma(B)$ durch eine Untergruppe $K < H$ gewinnen. Allerdings ist zu beachten, dass die kurze exakte Sequenz, die von der Einbettung des Gitters in die Raumgruppe und die Abbildung der Isometrien auf ihren orthogonalen Anteil $Isom(\mathbb{E}^3) \xrightarrow{o} O(3)$ induziert wird,

$$0 \longrightarrow \Gamma(B) \longrightarrow G \xrightarrow{o} K \longrightarrow 0,$$

nicht notwendigerweise spaltet. Ist dies der Fall, kann das Repräsentantensystem \tilde{K} für $o^{-1}(K)$ als eine endliche orthogonale Gruppe angegeben werden. Dann kann die Erweiterung als ein semidirektes Produkt $\Gamma \rtimes K$ geschrieben werden. In diesem Fall spricht man von einer *symmorphen Raumgruppe*.

Für viele Raumgruppen ist es jedoch unmöglich ein solches Repräsentantensystem für $o^{-1}(K)$ in Form einer endlichen orthogonalen Gruppe anzugeben. Die ist etwa der Fall, wenn das Urbild $\tilde{\delta}$ einer Drehung δ der Ordnung $k \in 2, 3, 4, 6$ von K durch eine Schraubenbewegung gegeben ist, oder das Urbild einer Spiegelung σ durch eine Schubspiegelung $\tilde{\sigma}$. Deren Translationsanteile müssen allerdings stets der Bedingung genügen, dass das k -fache (beziehungsweise das 2-fache im Fall der Schubspiegelung) im Gitter liegt, weil ja die Gruppenrelationen modulo $\Gamma(B)$ gelten müssen.

A. Schoenflies analysierte die möglichen Konstellationen von Schraubenbewegungen und Schubspiegelungen für jede der zulässigen Kombinationen aus Raumgittertyp B und Kristallklasse $K < H$ (H die Holoedrie des Gittersystems von B), lange bevor eine allgemeine Theorie der Gruppenerweiterung entstand (siehe historischer Anhang S. 704). Das Ergebnis war eine Liste von 230 kristallographischen Raumgruppen, davon 73 symmorphe, also semidirekte Produkte aus Translationsgitter Γ und Kristallklasse K .⁴⁶ Bei einer geometrischen Beschreibung der Raumgruppen durch Symmetrieelemente innerhalb einer Einheitszelle, wie sie etwa in den internationalen kristallographischen Tabellenwerken üblich ist, findet man bei den symmorphen Gruppen die Symmetrieelemente von K in jedem Gitterpunkt vor; zusätzlich aber auch Schubspiegelungen oder/und Schraubenbewegungen, die aus der Kombination von erzeugenden Elementen von K und Translationen hervorgehen. Einen Eindruck davon gibt ein Blick auf die in der kristallographischen Literatur verwendeten Symmetriekarten (oder auch "Symmetriediagramme", vgl. S. 141). Sie zeigen die Lage der Symmetrieelemente durch Projektion auf die Basisebene der Einheitszelle (oder ggf. einen Teil davon) durch entsprechende graphische Symbole. Ein Beispiel findet man in (Abb. 3.107) für die symmorphe Erweiterung T_h^1 .

⁴⁶Dies sind 10 mehr als man aus der Tabelle der Raumgruppentypen und der Liste der Kristallklassen durch formale Kombinatorik schließen würde, $3 \cdot 5 + 7 + 7 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 = 63$. Bei einigen Konstellationen gibt es nicht nicht-äquivalente Operationen der Kristallklasse auf dem Gitter.

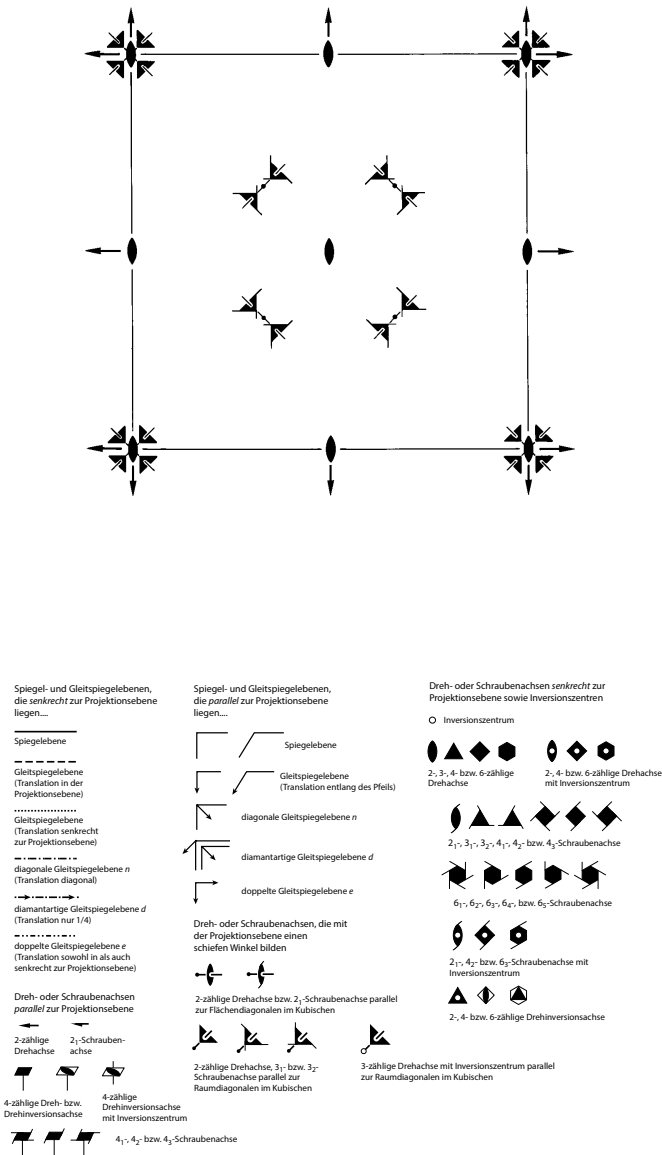


Abbildung 3.107: Symmetriekarte der symmorphen Raumgruppe T_h^1 (Quelle Hahn 2005, p. 614) mit Legende (Quelle Hoffmann 2016, p. 217)

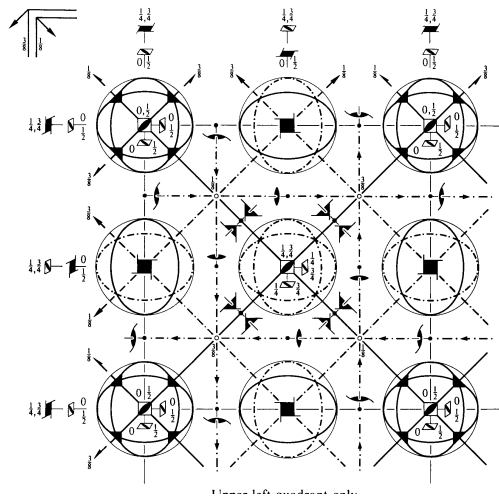
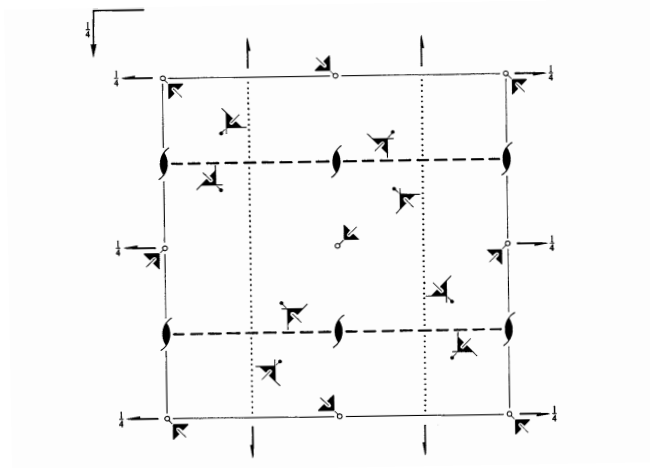


Abbildung 3.108: Symmetriekarten der nicht-symmorphen Raumgruppen T_h^6 (oben) und O_h^7 (unten, Ausschnitt), (Quelle Hahn 2005, p. 630, 684)

Komplizierter wird die geometrische Konstellation im nicht-symmorphen Fall. Die Symmetrieelemente von K werden dann zumindest teilweise durch Schraubungen beziehungsweise Gleitspiegelungen realisiert, deren geometrische Repräsentanten (Geraden für die Rotationen/Schraubungen und Ebenen für die Gleit-/Spiegelungen) im Normalfall nicht mehr mit den Gitterpunkten inzidieren.

Schoenflies analysierte die möglichen Erweiterungsmöglichkeiten von Gittertypen durch Kristallklassen Schritt für Schritt und unterschied die konstruierten Raumgruppen einer Kristallklasse K durch Superskript, also in der Form K^j . Beispielsweise bezeichnet in seiner Notation T_h^1 die symmorpe Erweiterung des kubischen Gitters vom Typ P durch T_h . Die Raumgruppe des Pyrit T_h^6 (wie sich später herausstellte) ist eine nicht-symmorphe Erweiterung des kubischen Gitters P durch T_h , bei der die Rotationen der Ordnung 2 als Schraubenbewegungen realisiert werden und die Spiegelungen als Gleitspiegelungen, während die erzeugenden Rotationsachsen der Ordnung 3 (teilweise) nicht mehr mit den Gitterpunkten inzidieren (Abb. 3.108). Die Raumgruppe des Diamant O_h^7 ist eine noch kompliziertere nicht-symmorphe Erweiterung des kubischen Gitters vom Typ I durch O_h .

Die Abbildungen dienen hier lediglich dazu, einen ersten Eindruck der Komplexität der räumlichen Verteilung der Symmetrieelemente bei kristallographischen Raumgruppen zu vermitteln. Für ihre genaue Interpretation oder gar technische Verwendung ist die Fachliteratur zur Kristallographie heranzuziehen, insbesondere [171]. Leserfreundliche Einführungen findet man in [195] oder in [333, p. 97ff.].

E. Brieskorn verwendet in der Legende zu seinen Abbildungen stets die Schoenflies Notation. Eine Übersetzung zwischen der internationalen kristallographischen Notation für die Raumgruppen und der Schoenflies Notation findet man in [171, pp. 826] oder auch in Wikipedia unter *Liste der Raumgruppen*.

3.5 Eine Brücke zur Zahlentheorie

Gitter wurden im 19. Jahrhundert nicht nur in der Kristallographie untersucht sondern auch in der Zahlentheorie, etwa von J.-L. Lagrange, C.F. Gauss, L.A. Seeber, P.G. Lejeune Dirichlet, C. Hermite und anderen (vgl. *Historische Anmerkungen* S. 699). Anfangs ging es dabei um das Studium der binären quadratischen Formen $\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und der Frage, welche Werte diese für ganzzahlige x und y annehmen können, letztlich also um die Lösung von diophantischen Gleichungen der Form $\varphi(x, y) = z$ (mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$). Den Autoren war klar, dass sich das diophantische Problem nicht wesentlich verändert, wenn man die quadratische Form einer unimodularen Transformation mit $S \in GL(2, \mathbb{Z})$ unterzieht. In modernisierter Form geschriebene Umformungen vom Typ⁴⁷

$${}^t\tilde{X} \cdot A \cdot \tilde{X} = {}^tX \cdot \tilde{A} \cdot X = z \quad (3.8)$$

mit $\tilde{X} = S \cdot X$ und $\tilde{A} = {}^tS \cdot A \cdot S$

Gauß analysierte in seinen *Disquisitiones arithmeticae* [146] die binären quadratischen Formen, teilte sie in unimodulare Äquivalenzklassen ein, zeigte, dass es für jeden Wert der *Diskriminante* $D = -\det A$ nur endlich viele Äquivalenzklassen der binärer Formen A gibt, und gab an, wie man Standardrepräsentanten findet. Diese bezeichnete er als *reduzierte Formen*. Darauf aufbauend entwickelte er eine Theorie der Komposition der Äquivalenzklassen der binären Formen, die weitreichende Anstöße für die Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie gab [153, chap. II.2, II.3] und bei der Herausbildung des Gruppenbegriffs eine wichtige Rolle spielte [381, p. 40ff.].

Das Äquivalenzproblem und seine Lösung durch Standardrepräsentanten wurde auch für $n > 2$ Unbestimmte gestellt. Schon Gauss begann in seinen *Disquisitiones* [146] mit dem Studium ternärer Formen (also für $n = 3$). Weitere, in unserem Zusammenhang wichtige Arbeiten von L. Seeber [329] und

⁴⁷Dabei ist hier natürlich

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

P.G.L. Dirichlet [102] folgten bis zur Jahrhundertmitte. Von den späteren Untersuchungen zu $n > 3$ sind in unserem Zusammenhang insbesondere die von H. Minkowski [250, 251, 252, 254] (vgl. *Einleitung* S. 191) und von G. Voronoi zu nennen [358, 359, 360] (vgl. S. 706).

Im positiv definiten Fall lässt sich eine binäre oder ternäre quadratischen Form, hier notiert durch ihre symmetrische $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$

$$\varphi(x) = {}^t x \cdot A \cdot x, \quad x \in \mathbb{Z}^n \quad (3.9)$$

als eine Metrik (genauer als Quadrat der Norm) auf dem Raum der diskreten Variablen x interpretieren. Dieser kann in diesem Sinne isometrisch in den euklidischen Raum $\mathbb{E}^{(n)}$ eingebettet werden. Die Erzeugenden des \mathbb{Z}^n -Moduls in (3.9) werden dann durch linear unabhängige Vektoren u_i ($1 \leq i \leq n$) der Norm $|u_i| = \sqrt{a_{ii}}$ mit entsprechenden Winkeln zueinander dargestellt und erzeugen ein Translationsgitter Γ im euklidischen Raum. Einer unimodularen Transformation der quadratischen Form (3.8) korrespondiert ein Basiswechsel im euklidischen Vektorraum des $\mathbb{E}^{(n)}$, der gleichzeitig einen Basiswechsel im Gitter Γ darstellt. Die Seebersche Lösung des Reduktionsproblems positiver ternärer Formen lässt sich damit als die Auszeichnung einer dem Punktgitter angepassten Basis des Translationsgitters Γ beschreiben. Dies wird als *reduzierte Basis* im Seeberschen Sinne oder einfach als *Seeber Basis* bezeichnet. Das alles ist hier natürlich in etwas anderer Sprache ausgedrückt als in den Originalarbeiten.⁴⁸ Weitere Reduktionsverfahren sind im Gebrauch; ein in der Kristallographie benutztes geht auf E. Selling zurück [331].

⁴⁸ Gauss sprach in seiner Rezension der Seeberschen Arbeit davon, dass die positive definite Form “allgemein das Quadrat der Entfernung zweier unbestimmter Punkte” darstellt, wobei die Punkte in der Ebene ein aus Parallelogrammen, im Raum aus Parallelepipeden zusammengesetztes Gitter bilden, die durch Koordinaten x_i bezüglich dreier, im allgemeinen schiefen Achsen angegeben werden. Die Abstände je zweier aufeinander folgender Punkte sind jeweils $\sqrt{a_{ii}}$ in Richtung der Achse i gemessen ($1 \leq i \leq 3$). Der Cosinus des Winkels zwischen je zwei Achsen j, k ($j \neq k$) ist dabei $\frac{a_{jk}}{\sqrt{a_{jj}a_{kk}}}$ mit i, j, k [147, p. 318f.]. Die geometrische Interpretation der Seeberschen Reduktionsbedingungen geht – wenn auch noch nicht in vektorieller Sprache – auf Dirichlets schon genannte Arbeit [102] zurück.

Absoluter Reduktionsbereich $R = R_I \cup R_{II}$
für Seiber-Reduktion.

I. Ungleichungen für R_I Hauptbedingungen: I.1, I.2

$$I.0. \quad a_{23} > 0, \quad a_{13} > 0, \quad a_{12} > 0$$

$$I.1. \quad a_{11} \leq a_{22} \leq a_{33}$$

$$I.2. \quad 2a_{23} \leq a_{22}, \quad 2a_{13} \leq a_{11}, \quad 2a_{12} \leq a_{11}$$

$$I.4. \quad a_{11} = a_{22} \Rightarrow a_{23} \leq a_{13}$$

$$a_{22} = a_{33} \Rightarrow a_{13} \leq a_{12}$$

$$I.5. \quad 2a_{23} = a_{22} \Rightarrow a_{12} \leq 2a_{13}$$

$$2a_{13} = a_{11} \Rightarrow a_{12} \leq 2a_{23}$$

$$2a_{12} = a_{11} \Rightarrow a_{13} \leq 2a_{23}$$

II. Ungleichungen für R_{II} Hauptbedingungen: II.1, II.2, II.3.

$$II.0. \quad a_{23} \leq 0, \quad a_{13} \leq 0, \quad a_{12} \leq 0$$

$$II.1. \quad a_{11} \leq a_{22} \leq a_{33}$$

$$II.2. \quad 2|a_{23}| \leq a_{22}, \quad 2|a_{13}| \leq a_{11}, \quad 2|a_{12}| \leq a_{11}$$

$$II.3. \quad 2(|a_{23}| + |a_{13}| + |a_{12}|) \leq a_{11} + a_{22}$$

$$II.4. \quad a_{11} = a_{22} \Rightarrow |a_{23}| \leq |a_{13}|$$

$$a_{22} = a_{33} \Rightarrow |a_{13}| \leq |a_{12}|$$

$$II.5. \quad 2|a_{23}| = a_{22} \Rightarrow a_{12} = 0$$

$$2|a_{13}| = a_{11} \Rightarrow a_{12} = 0$$

$$2|a_{12}| = a_{11} \Rightarrow a_{13} = 0$$

$$II.6. \quad 2(|a_{23}| + |a_{13}| + |a_{12}|) = a_{11} + a_{22} \Rightarrow a_{11} \leq 2|a_{13}| + |a_{12}|$$

Abbildung 3.109: Notizen E. Brieskorns zur Seiber-Reduktion

Grob beschrieben läuft die Bestimmung einer Seeber Basis darauf hinaus, von einem Punkt p_0 des Punktgitters ausgehend, die drei nächstliegenden Punkte p_1, p_2, p_3 mit steigenden oder gleichbleibenden Abständen zu p_0 finden. Für Γ entspricht das der Wahl einer Basis mit Diagonalelementen der quadratischen Form $a_{11} \leq a_{22} \leq a_{33}$. Die Basisvektoren sind dabei stets so wählbar, dass die Winkel zwischen je zwei von ihnen entweder alle spitz sind (Fall I) oder alle stumpf oder rechtwinklig (Fall II) [329, p. 49ff.]. Die entsprechenden Bedingungen für die Koeffizienten a_{ij} der quadratischen Form sind als *Seebersche Reduktionsbedingungen* bekannt. Seeber entwickelte eine Methode zur Reduktion einer vorgegebenen Form und diskutierte die bei ihrer Durchführung auftretenden Fallunterscheidungen [329, p. 47ff.]. Seebers Vorgehensweise bei der Bestimmung der zu einer gegebenen Form äquivalente reduzierten wird in [116, p. 47ff.] ausführlich dargestellt.

Offenbar beabsichtigte E. Brieskorn eine an die Dirichletschen Reduktionsbedingungen (S. 214) anschließende Diskussion der Seeberschen Bedingungen; in seinen Materialien finden sich kurze Notizen zu diesem Thema und montierte Kopien einer Tafel mit Daten zu den reduzierten Basen der 14 Gittertypen (hier als Abb. 3.110f.). Die Seeber-Bedingungen in seiner Handschrift sind wiedergegeben in Abb. 3.109.

Die im zweidimensionalen Fall von Dirichlet in [102, §4] betrachteten, später nach ihm benannten *Dirichletzellen* (S. 205) sind auf den n -dimensionalen Fall übertragbar. Das machte der in Warschau lehrende Mathematiker *Georgi Voronoi* in seinen Untersuchungen der quadratischen Formen in n Variablen (vgl. *Historischer Anhang*, S. 706). Sie werden daher als *Voronoi-Bereiche*, manchmal auch als *Dirichlet-Voronoi-Bereiche* bezeichnet. Heute wird gerne die folgende etwa verallgemeinerte Definition zugrunde gelegt.

Definition:

Der **Voronoi-Bereich** (auch Voronoi- oder Dirichletzelle) $V(p, \tilde{\Gamma})$ einer diskreten Punktmenge $\tilde{\Gamma} \in \mathbb{R}^n$ bezüglich eines Punktes $p \in \mathbb{R}^n$ besteht aus allen Punkten q , die von p nicht weiter entfernt sind als vom nächsten Punkt der diskreten Menge:

9. CRYSTAL LATTICES

Table 9.2.2. Three-dimensional Bravais lattices

Bravais lattice	Lattice parameters		Metric tensor			Projections
	Conventional	Primitive	Conventional	Primitive	Relations of the coefficients	
<i>aP</i>	a, b, c α, β, γ	a, b, c α, β, γ	$g_{11} \quad g_{12} \quad g_{13}$ $g_{22} \quad g_{23}$ g_{33}	$g_{11} \quad g_{12} \quad g_{13}$ $g_{22} \quad g_{23}$ g_{33}		
<i>mP</i>	a, b, c $\beta, \alpha = \gamma = 90^\circ$			$g_{11} \quad 0 \quad g_{13}$ $g_{22} \quad 0$ g_{33}		
<i>mC (mS)</i>	a, b, c $\beta, \alpha = \gamma = 90^\circ$	$a_1 = a_2, c$ $\gamma; \alpha = \beta$	$g_{11} \quad 0 \quad g_{13}$ $g_{22} \quad 0$ g_{33}	$g'_{11} \quad g'_{12} \quad g'_{13}$ $g'_{11} \quad g'_{13}$ g'_{33}	$g'_{11} = \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22})$ $g'_{12} = \frac{1}{2}(g_{11} - g_{22})$ $g'_{13} = \frac{1}{2}g_{13}$ $g_{11} = 2(g'_{11} + g'_{12})$ $g_{22} = 2(g'_{11} - g'_{12})$ $g_{13} = 2g'_{13}$	
<i>oP</i>	a, b, c $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$			$g_{11} \quad 0 \quad 0$ $g_{22} \quad 0$ g_{33}		
<i>oC (oS)</i>		$a_1 = a_2, c$ $\gamma; \alpha = \beta = 90^\circ$		$g'_{11} \quad g'_{12} \quad 0$ $g'_{11} \quad 0$ g'_{33}	$g'_{11} = \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22})$ $g'_{12} = \frac{1}{2}(g_{11} - g_{22})$ $g_{11} = 2(g'_{11} + g'_{12})$ $g_{22} = 2(g'_{11} - g'_{12})$	
<i>oI</i>	a, b, c $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	$a_1 = a_2 = a_3$ α, β, γ $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = -1$	$g_{11} \quad 0 \quad 0$ $g_{22} \quad 0$ g_{33}	$-\tilde{g} \quad g'_{12} \quad g'_{13}$ $-\tilde{g} \quad g'_{23}$ $-\tilde{g}$ $\tilde{g} = g'_{12} + g'_{13} + g'_{23}$	$g'_{12} = \frac{1}{4}(-g_{11} - g_{22} + g_{33})$ $g'_{13} = \frac{1}{4}(-g_{11} + g_{22} - g_{33})$ $g'_{23} = \frac{1}{4}(g_{11} - g_{22} - g_{33})$ $g_{11} = -2(g'_{12} + g'_{13})$ $g_{22} = -2(g'_{12} + g'_{23})$ $g_{33} = -2(g'_{13} + g'_{23})$	
<i>oF</i>	a, b, c α, β, γ $\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$ $\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac}$ $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$			$\tilde{g}_1 \quad g'_{12} \quad g'_{13}$ $\tilde{g}_2 \quad g'_{23}$ \tilde{g}_3 $\tilde{g}_1 = g'_{12} + g'_{13}$ $\tilde{g}_2 = g'_{12} + g'_{23}$ $\tilde{g}_3 = g'_{13} + g'_{23}$	$g'_{12} = \frac{1}{4}g_{33}$ $g'_{13} = \frac{1}{4}g_{22}$ $g'_{23} = \frac{1}{4}g_{11}$ $g_{11} = 4g_{23}$ $g_{22} = 4g_{13}$ $g_{33} = 4g_{12}$	
<i>I</i>		$a_1 = a_2, c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$		$g_{11} \quad 0 \quad 0$ $g_{11} \quad 0$ g_{33}		
<i>II</i>		$a_1 = a_2 = a_3$ $\gamma; \alpha = \beta$ $2 \cos \alpha + \cos \gamma = -1$	$g_{11} \quad 0 \quad 0$ $g_{11} \quad 0$ g_{33}	$\tilde{g} \quad g'_{12} \quad g'_{13}$ $\tilde{g} \quad g'_{13}$ \tilde{g} $\tilde{g} = -(g'_{12} + 2g'_{13})$	$g'_{12} = \frac{1}{4}(-2g_{11} + g_{33})$ $g'_{13} = -\frac{1}{4}g_{33}$ $g_{11} = 2(g'_{12} + g'_{13})$ $g_{33} = -4g'_{13}$	

Abbildung 3.110: Tabelle reduzierte Basen der Kristallographie Quelle (Hahn 1984), Kopie im Nachlass E.B.

9.3. REDUCED BASES

Table 9.2.2 (cont)

Bra- vais lattice	Lattice parameters		Metric tensor			Projections
	Conventional	Primitive	Conventional	Primitive	Relations of the coefficients	
<i>hR</i>		$a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha = \beta = \gamma$		g'_{11} g'_{12} g'_{12} g'_{11} g'_{12} g'_{11}	$g'_{11} = \frac{1}{3}(3g_{11} + g_{33})$ $g'_{12} = \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}g_{11} + g_{33})$ $g_{11} = 2(g'_{11} - g'_{12})$ $g_{33} = 3(g'_{11} + 2g'_{12})$	
<i>hP</i>	$a_1 = a_2, c$ $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$	$a_1 = a_2, c$ $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$	g_{11} $-\frac{1}{2}g_{11}$ 0 g_{11} 0 g_{33}	g_{11} $-\frac{1}{2}g_{11}$ 0 g_{11} 0 g_{33}		
<i>cP</i>		$a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$		g_{11} 0 0 g_{11} 0 g_{11}		
<i>cI</i>	$a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	$a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha = \beta = \gamma$ $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$	g_{11} 0 0 g_{11} 0 g_{11}	g'_{11} $-\frac{1}{3}g'_{11}$ $-\frac{1}{3}g'_{11}$ g'_{11} $-\frac{1}{3}g'_{11}$ g'_{11}	$g'_{11} = \frac{2}{3}g_{11}$ $g_{11} = \frac{3}{2}g'_{11}$	
<i>cF</i>		$a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$		g'_{11} $\frac{1}{2}g'_{11}$ $\frac{1}{2}g'_{11}$ g'_{11} $\frac{1}{2}g'_{11}$ g'_{11}	$g'_{11} = \frac{1}{2}g_{11}$ $g_{11} = 2g'_{11}$	

* See footnote to Table 9.2.1. Symbols in parentheses are standard symbols, see Table 2.1.1.

Abbildung 3.111: Tabelle reduzierte Basen der Kristallographie (Fortstz.)

$$V(p, \tilde{\Gamma}) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid d(q, p) \leq d(q, x) \text{ für alle } x \in \tilde{\Gamma}\}$$

Voronoi bewies im Jahre 1908 für Punktgitter, also im Spezialfall $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cdot x_o$ mit beliebigem Punkt x_o und Γ Translationsgitter, dass deren Dirichlet-Voronoi Bereiche n -dimensionale zentralsymmetrische konvexe Polytope mit paarweise parallelen Seiten sind, wobei das zugehörige Translationsgitter auf der Raumteilung durch die Paralleloeder einfach transitiv operiert. Zur Formulierung seines Ergebnisses verwendete er den Begriff des Paralleloeders [359, p. 228].

Definition:

- a) Ein konvexes n -Polytop \mathfrak{P} im \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) heißt **Paralleloeder** genau dann, wenn es es als Zelle einer translativen isoedrischen Pflasterung des \mathbb{R}^n auftritt.
- b) Falls jede k -Seite mit genau $n + 1 - k$ entsprechenden Seiten der Raumteilung inzidiert, heißt das Paralleloeder **primitiv**.

Aus dieser Eigenschaft folgt, dass \mathfrak{P} paarweise parallele $(n - 1)$ -Seiten besitzt [359, p. 226] und daraus wiederum – durch einen Satz von Minkowski – dass Paralleloeder zentralsymmetrisch sind [251, p. 118].⁴⁹ Mit dem Begriff des Paralleloeders griff Voronoi, wie er selbst anmerkte, auf ein Schlüsselkonzept der Studien E.S. Fedorovs zur Kristallographie zurück [359, p. 211]. Sein Kontext und seine Vorgehensweise unterschieden sich aber merklich von Fedorovs. Letzterer hatte in den beiden vorangehenden Jahrzehnten Paralleloederteilungen der Dimensionen $n = 2, 3$ zur Charakterisierung und Klassifizierung der Symmetrien der geometrischen Kristallographie verwendet. Er kam dabei zu ähnlichen Ergebnissen wie Schoenflies, allerdings ohne den Begriff der Raumgruppe zu verwenden (siehe Anhang, S. 704). In diesem Zusammenhang entwickelte Fedorov eine kombinatorische Klassifikation der Paralleloeder in der Ebene und im Raum.

⁴⁹Voronoi griff in diesem Punkt nicht auf Minkowski zurück sondern bewies die Zentralsymmetrie, zunächst nur für primitive (siehe unten) Paralleloeder neu [360, p. 268]

In der Ebene ($n = 2$) fand er genau zwei kombinatorische Typen von Paralleloedern (Parallelogonen), im Raum ($n = 3$) fünf – und zwar:

für $n = 2$: Quadrat/Parallelogramm und 6-Eck,

für $n = 3$: Würfel/Parallelepipid (Triparalleloeder), hexagonales Prisma (Tetraparalleloeder), rhombisches Dodekaeder (Hexaparalleloeder 1), hexarhombisches Dodekaeder (Hexaparalleloeder 2), gestutztes Oktaeder (Heptaparalleloeder) (siehe dazu (Abb. 3.112)).⁵⁰

Voronoi gewann alle fünf Paralleloedertypen aus einer Betrachtung der Voronoi-Bereiche positiv definiter quadratischer Formen. Für die erwartete Vollständigkeit berief er sich allerdings noch auf Fedorovs Klassifikation [359, p. 164]. Bewiesen wurde diese erst in den 1920er Jahren für $n = 3, 4$ von Boris N. Delone/Delauney, publiziert auch in [99] (siehe S. 707). Einen neueren Beweis findet man in [85] oder in [1, p. 349ff.].

Satz 3.1.82

Bis auf kombinatorische Isomorphien gibt es genau 5 Typen von Voronoi-Dirichlet-Zellen dreidimensionaler Gitter (Abb. 3.112) – und zwar:

Typ I: Das Archimedische Polyeder (4, 6, 6,) (gestutztes Oktaeder),

Typ II: ein 12-flächiges Polyeder mit 8 Rhomben und 4 Hexagonen,

Typ III: Rhombendodekaeder,

Typ IV: hexagonales Prisma,

Typ V: Hexaeder.

Delone analysierte, auf welche Weisen Elemente der Gittersymmetrien in den Voronoizellen verteilt sein können. Er klassifizierte die zugehörigen kombinatorischen Konstellationen von Paralleloedern mit Symmetrieelementen. Dies führte auf eine Liste von 24 *Symmetriesorten* oder *Delone-Typen*.

⁵⁰In Klammern sind Fedorovs an Anzahl paralleler Seitenpaare orientierter Bezeichnungen eingefügt. In [320, p. 117] wird Fedorovs Klassifikation fälschlich als affine Äquivalenz wiedergegeben. Das wurde von M. Senechal und B. Grünbaum richtig gestellt [164].

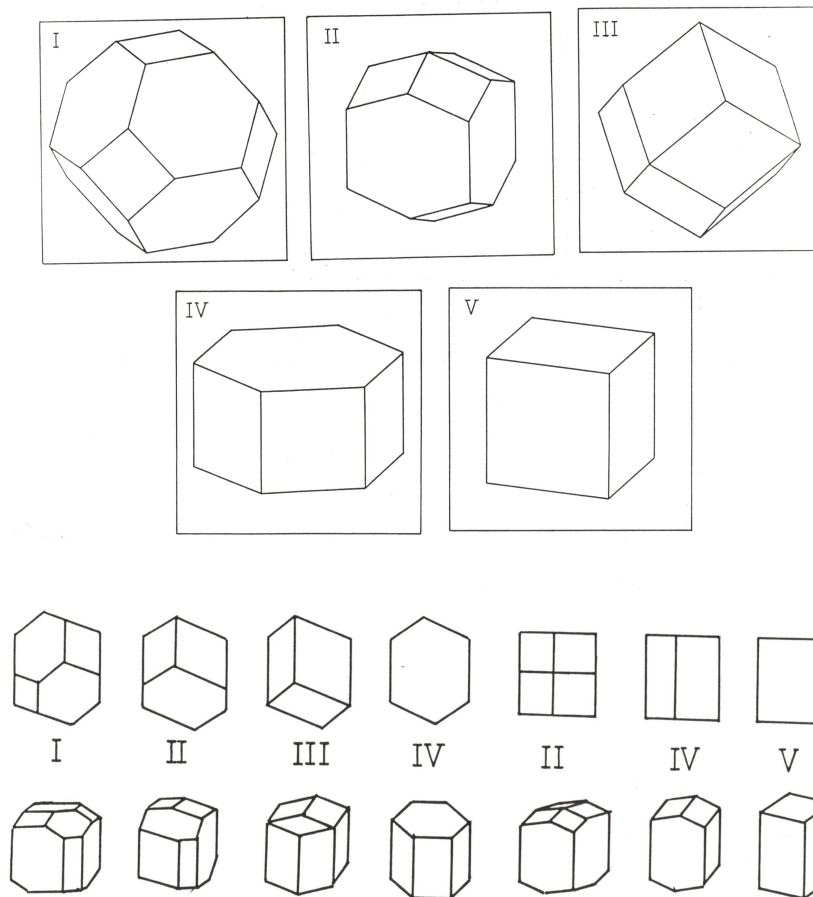


Abbildung 3.112: Die 5 Voronoi Typen; unten mit Kopfbildern (unterschiedlicher zentraler Projektionen)

Darüber hinaus erläuterte er, wie sie bei der Symmetriestimmung eines vorgegebenen Punktsystems eingesetzt werden können [99, p. 133ff.].

Eine Delone-Typ lässt sich durch ein Paar $(D_L, \Gamma_e(D_L))$ aus einer Dirichlet-Voronoi-Zelle eines 3-dimensionalen Punktgitters L und deren euklidischer Symmetriegruppe $\Gamma_e(D_L)$ charakterisieren. Dabei gehören zwei Punktgitter L, L' demselben Delone-Typ an, wenn die zugehörigen Paare $(D_L, \Gamma_e(D_L))$ und $(D_{L'}, \Gamma_e(D_{L'}))$ kombinatorisch äquivalent sind. Zwei Punktgitter L, L' desselben Delone-Typs gehören auch demselben Bravais-Typ an. In diesem Sinne kann man die Delone-Typen als eine Verfeinerung der Bravaistypen auffassen; allerdings beziehen sie sich auf unterschiedliche Raumteilungen (in Voronoi-Dirichlet-Zellen statt parallelepipedischer).

Die Grundzüge dieser Einteilung in Symmetriesorten kann man der Abbildung 3.113 entnehmen. Die dort verwendete Bezeichnung Xn setzt sich aus einem Buchstaben für das Gittersystem $X \in \{T, M, O, Q, R, H, K\}$ des zugehörigen Punktgitters L als Abkürzung für das triklone, monokline, orthorhombische, tetragonale, rhombische, hexagonale und kubische System (in dieser Reihenfolge) und einer laufenden Nummer $n \leq 6$ zusammen.

E. Brieskorn beabsichtigte eine detaillierte Diskussion der Voronoi-Bereiche als Fortsetzung seiner Überlegungen zu Dirichletzellen und den Ausführungen zu Raumteilungen in der *Einleitung*. Zur Bestimmung der Delone-Typen $(D, \Gamma_e(D))$ eignet sich die Betrachtung zugehöriger *charakteristischer Parallelepipede* $P(D)$. Dabei heißt ein Parallelepiped $P(D)$ charakteristisch für D , wenn es dieselben Isometrien besitzt wie D , also $\Gamma_e(D) = \Gamma_e(P) \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$. Die drei Delone-Typen des Voronoityps IV (hexagonales Prisma) besitzen im allgemeinen kein charakteristisches Parallelepiped, da letzteres keine hexagonale Symmetrie haben kann. Alle Dirichletzellen D zu Voronoitypen I, II, III, V besitzen hingegen charakteristische Parallelepipede.⁵¹ In der Abbildung 3.114 wird der Typ des charakteristischen Parallelepipeds der 21 Delone-Typen angegeben, für die ein

⁵¹Für D vom Voronoityp ungleich IV ist $P(D)$ das Parallelepiped, dessen 8 Ecken durch Spiegelung des Mittelpunkts von D an den 8 hexagonalen Seiten von D entstehen.

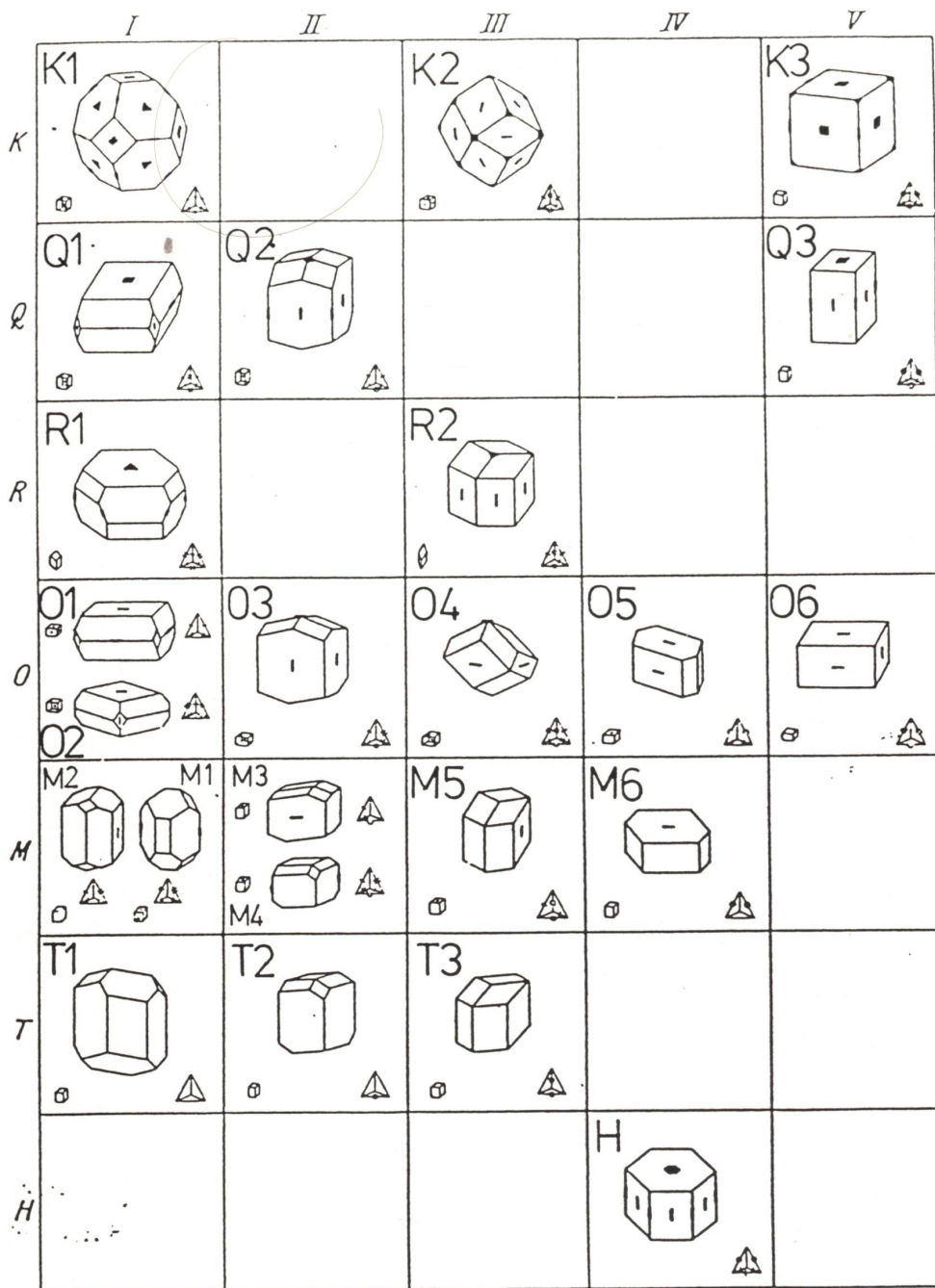


Fig. 11. Die 24 Sorten der Punktgitter.

Abbildung 3.113: Die 24 Delone-Typen, nach (Delone 1933, Fig. 11, laufende Nummern zugefügt)

solches existiert.⁵² Zusätzlich zu den Bezeichnungen nach Delone sind in der Tabelle die in der kristallographischen Literatur verwendeten Symbole der entsprechenden Delone-Typen angegeben. Sie bestehen aus einem Buchstaben (P, F, I, R, C) für den Typ der zum Punktgitter von D gehörenden kristallographischen Einheitszelle und einem Kürzel für die Symmetriegruppe (o, t, h, c, a, m). Die relative Lagebeziehungen zwischen den Voronoi-Zellen und den Einheitszellen des zugehörigen Gitters, sowie die Symmetriegruppe (und Kopfbilder verschiedener Projektionen) kann man den Abbildungen 3.115, 3.115 entnehmen.

Zur Gewinnung einer Übersicht über die Klassifikation der kristallographischen räumlichen Pflasterungen betrachtete E. Brieskorn Unterteilungen des Parameterraums der Punktgitter in kombinatorisch unterschiedliche Strata der zugehörigen Raumteilung durch Voronoi-Dirichlet-Zellen. Die darin enthaltenen Adjazenz-Relationen stellt er durch einen Graphen der Partialordnung der Delone-Typen dar (Abb. 3.117). Aus seiner Sicht kommt in der Zuordnung zwischen Punktgitter L und Dirichlet-Voronoi-Zelle $D_L(0)$,

$$L \mapsto D_L(0),$$

beziehungsweise der umgekehrten Zuordnung eines Punktgitters $L(D)$ zu einem Paralleloeder D mit Dirichlet-Zellen Eigenschaft

$$D \mapsto L(D)$$









der *Übergang von Arithmetik zur kombinatorischen Geometrie von Polyedern* zum Ausdruck.⁵³

⁵²Quelle: Aufzeichnungen E.Brieskorn für seine Vortrag am 13. 07. 1988 (siehe S. vi.)

⁵³Vortrag E.B. am 13. 07. 1988

Delaunay-Typen von Gittern

Es gibt 24 Typen, die sich auf 5 Voronoi-Typen verteilen.
 Drei davon gehören zum Voronoi-Typ IV, hexagonales Prisma: H, O5, M6
 Die übrigen sind eindeutig durch die Kombination von Voronoi-typ und Symmetrietyp des charakteristischen Parallelepipeds charakterisiert.

	I	II	III	V	
1	K1 cI		K2 cF	K3 cP	
2	Q1 tI	Q2 tI		Q3 tP	
3	R1 hR		R2 hR		
4	O2 oI	O3 oI		O6 oP	
5	O1 oF		O4 oI		
6	M2 mC	M3 mC			
7	M1 mC	M4 mC	M5 mC		
8	T1 aP	T2 aP	T3 aP		

- 1 = reg. Hexaeder
- 2 = tetragon. Prisma
- 3 = Rhomboeder
- 4 = rechteckiges orthog. Prisma
- 5 = rhombisches orthog. Prisma

- 6 = gerades Prisma, Basis Parallelogramm
- 7 = schiefes Prisma, Basis Rhombus
- 8 = generisches Prisma.

Abbildung 3.114: 21 Delone-Typen mit charakteristischen Parallelepipeden

Tab. 18 (Fortsetzung)

$\frac{2}{m} \frac{2}{m} \frac{2}{m}$	V_I				oI		$\xi < \sqrt{(b^2)+1}$
	V_{II}				oF		
	V_{III}				oI		$\xi > \sqrt{(b^2)+1}$
	V_{IV}				oI		$\xi > \sqrt{(b^2)+1}$
	V_V				cC		
	V_V				oP		

Tab. 18 (Fortsetzung)

$\frac{4}{m} \frac{2}{m} \frac{2}{m}$	V_I				tI		$\xi < \sqrt{2}$
	V_{II}				tI		$\xi > \sqrt{2}$
	V_V				tP		
$\frac{6}{m} \frac{2}{m} \frac{2}{m}$	V_{IV}				hP		
	V_{II}				hR (rP) R1		$\alpha > 90^\circ$
$\frac{3}{m} \frac{2}{m}$	V_I				hR (rP)		$\alpha < 90^\circ$

Tab. 18 (Fortsetzung)

$\frac{4}{m} \frac{3}{m} \frac{2}{m}$	V_I				cI K1		
	V_{III}				cF K2		
	V_V				cP K3		

Abbildung 3.115: Delone-Typen I) (unbekannte Quelle, Kopie im Nachlass E.B.)

Tab. 18 VORONOI-Typen und Symmetrische Sorten

T	V _I				aP		$a_1 \cdot a_2 \neq 0$ für alle Skalarprodukte der Vektoren $a_1, a_2, a_3, a_4 = -a_1 - a_2 - a_3$ der reduzierten Zelle
	V _{II}				aP		$a_i \cdot a_j = 0$ für genau ein Skalarprodukt $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}$
	V _{III}				aP		$a_1 \cdot a_2 = 0 = a_3 \cdot a_4$ für $(i, j, k, l) = \{1, 2, 3, 4\}$ z.B.: $a_1 \cdot a_3 = 0 = a_2 \cdot a_4$

Tab. 18 (Fortsetzung)

M	V _I				mC		$\frac{b}{a} > 1$ $a^2 - b^2 < 2ac \cos \beta$
	V _I				mC		$\frac{b}{a} < 1$
	V _{II}				mC		$\frac{b}{a} > 1$ $a^2 - b^2 > 2ac \cos \beta$
	V _{II}				mC		$\frac{b}{a} = 1$
	V _{III}				mC		$\frac{b}{a} > 1$ $a^2 - b^2 = 2ac \cos \beta$
	V _{IV}				mP		

Abbildung 3.116: Delone-Typen II
 (unbekannte Quelle, Kopie im Nachlass E.B.)

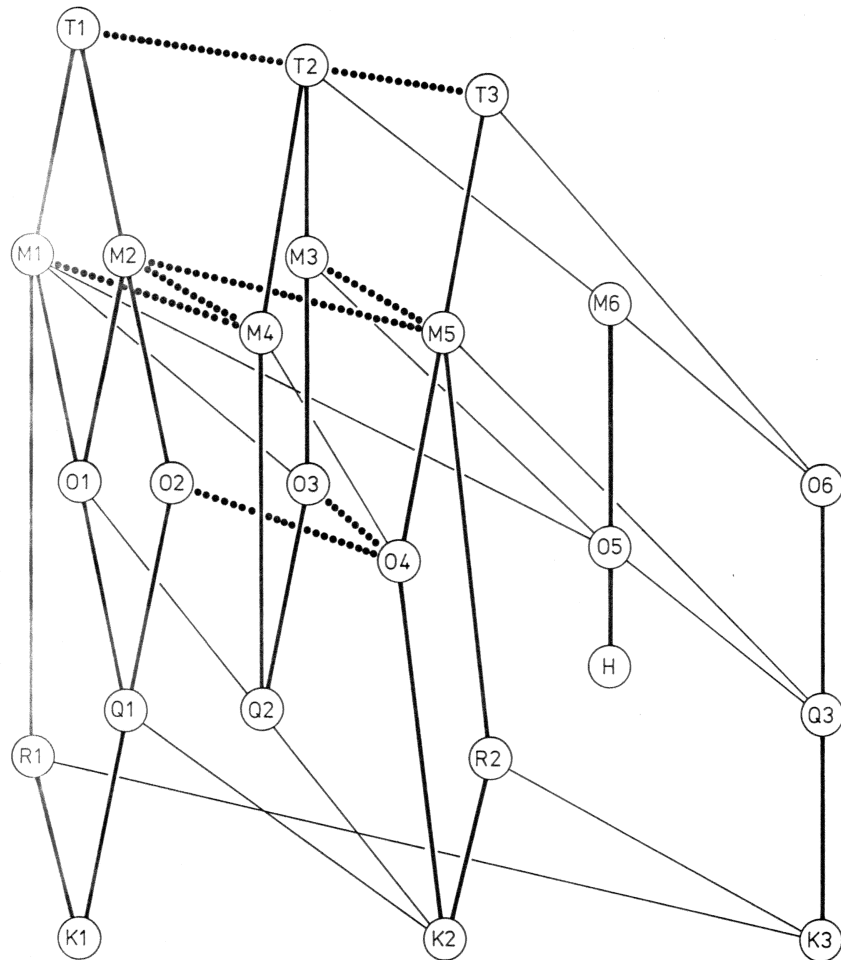


Abbildung 3.117: Partialordnung der 24 Delone-Typen nach E.B.
 durchgezogene fette Verbindungen – erhalten Voronoityp,
 punktierte Verbindung – erhalten Symmetriegruppe,
 durchgezogene einfache Verbindung – exzeptionelle Adjazenz-Relation

3.6 Arithmetische Theorie der Raumgruppen

Auch zum Studium der Raumgruppentypen ist der arithmetische Zugang hilfreich. Mathematisch lässt sich die geometrisch höchst verwickelte Erweiterungsstruktur von Gittertypen durch endliche orthogonale Gruppen besser durchschauen, wenn man zunächst von der Einbettung des Gitters $\mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2 + \mathbb{Z}a_3$ ($a_i \in \mathbb{R}^n$) in den euklidischen Raum abstrahiert und es zunächst, gewissermaßen aus arithmetischer Sicht, lediglich als einen \mathbb{Z} -Modul betrachtet $\Gamma \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Für die Erweiterung zu einer arithmetischen Raumgruppe G können alle endlichen Untergruppen A von $GL(3, \mathbb{Z})$, den unimodularen 3×3 -Matrizen, herangezogen werden. Sie sind dabei nur bis auf Konjugation in der unimodularen Gruppe zu unterscheiden. Es liegt daher nahe, eine der geometrischen Theorie der kristallographischen Raumgruppen analoge Begrifflichkeit einzuführen.

Definition

a) Eine Gruppenerweiterung G eines arithmetischen Gitters vom Rang n durch eine endliche Untergruppe H von $GL(n, \mathbb{Z})$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0 \quad (3.10)$$

heißt *arithmetische Raumgruppe* vom Rang n .

b) Zwei endliche Untergruppen der $A, A' \in GL(n, \mathbb{Z})$ gehören genau dann zur gleichen *arithmetischen Kristallklasse*, wenn sie unimodular äquivalent sind, also $A' = S^{-1}AS$ für ein $S \in GL(n, \mathbb{Z})$ gilt.

In der Ebene gibt es 13, im Dreidimensionalen 73 arithmetische Kristallklassen, für $n = 4$ sind es 780 (enantiomorphe Paare nicht identifiziert). Ähnlich wie im geometrischen Fall liegt es nahe, die Terminologie *arithmetische Kristallklasse* von den endlichen unimodularen Gruppen auf die entsprechenden arithmetischen Raumgruppen zu übertragen.

Eine noch abstraktere Charakterisierung der kristallographischen Gruppen erlaubt folgender

Satz (Zassenhaus [389])

Eine als Erweiterung eines \mathbb{Z} -Moduls vom Rang n durch eine endliche Grup-

pe H darstellbare Gruppe G ,

$$o \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0,$$

ist einer kristallographischen Raumgruppe der Dimension n isomorph.

Damit erweisen sich arithmetische und geometrische Raumgruppen als zwei Aspekte derselben mathematischen Struktur; eine ergibt sich aus einer eher abstrakten und arithmetischen Sichtweise, die andere ist konkret in einem geometrischen Sinn. Daher überträgt sich auch die Klassifizierung der arithmetischen Kristallklassen auf die (geometrischen) Raumgruppen. Zwei Raumgruppen G , G' gehören genau dann derselben arithmetischen Kristallklasse an, wenn ihre orthogonale Anteile $o(G)$ und $o(G')$, als Matrixgruppen bezüglich ihrer jeweiligen Gitterbasis geschrieben, unimodular äquivalent sind. Es stellt sich heraus, dass in jeder arithmetischen Klasse genau eine der symmorphen Raumgruppen der geometrischen Theorie liegt. Sie ist die einfachste (nämlich semidirekte) Erweiterung des arithmetischen Gitters \mathbb{Z}^3 durch die zugehörige endliche unimodulare Gruppe H [63].

Terminologisch ein wenig paradox, logisch aber konsistent und mathematisch gerechtfertigt, können die arithmetischen Kristallklassen nach den ihnen zugehörigen symmorphen geometrischen Raumgruppentypen benannt werden. In diesem Sinne gehört etwa die Raumgruppe des Pyrit T_h^6 zur arithmetischen Klasse von T_h^1 ; die Raumgruppe des Diamant O_h^7 zur arithmetischen Kristallklasse O_h^1 usw.

Der Begriff der arithmetischen Kristallklasse wurde Anfang der 1930er Jahre von *Johann J. Burckhardt* in Arbeiten zur Herleitung der kristallographischen Gruppen eingeführt. Bei der Herleitung schloss er an eine Bemerkung von *Georg Frobenius* aus dem Jahre 1911 an (siehe S. 708):

Ist $|H| = h$, so werden wegen $A^h = 1$ für jedes $A \in H$ die Translationsanteile von G auf Brüche mit Nenner h eingeschränkt. Ein Repräsentantensystem für H in der Erweiterungsgruppe G (3.10) hat unter Verwendung der üblichen Notation (A, u) mit $A \in GL(n, \mathbb{Z})$, $u \in \Gamma = \mathbb{Z}^n$ für Elemente von $G < GL(n, \mathbb{Z}) \rtimes \Gamma$ die Form

$$\overline{H} = \{(A_j, u_j) \mid A_j \in H, hu_j \in \Gamma\}.$$

Falls $A_j \cdot A_k = A_l$ in H gilt, besitzt die Komposition zweier Repräsentanten (A_j, u_j) , (A_k, u_k) in G bis auf eine Gittertranslation den Translationsanteil u_l . Es gilt also notwendigerweise

$$(A_j, u_j) \cdot (A_k, u_k) \equiv (A_l, u_l) \pmod{\mathbb{Z}^n}. \quad (3.11)$$

Frobenius machte auf dieses System von Kongruenzen modulo Gittervektoren aufmerksam und stellte fest, dass der Gruppe H ebenso viele Erweiterungsgruppen G entsprechen, "...als diese Kongruenzen Systeme inkongruenter Lösungen zulassen" [145, p. 664 (514)] In diesem Hinweis waren vom Prinzip her alle von Schoenflies analysierten komplizierten Kombinationen von Schraubenbewegungen und Gleitspiegelungen beim Aufbau der Raumgruppen arithmetisch-algebraisch zusammengefasst; damit waren sie allerdings noch nicht berechnet.

Burckhardt präzisierte die Bedingung dafür, dass zwei Systeme von Lösungen der Kongruenzen äquivalent sind.⁵⁴ Auch beobachtete er, dass Summe und Differenz von Lösungssystemen der *Frobeniusschen Kongruenzen* (3.11) wieder eine Lösung sind, und ein Lösungssystem $\{(A_j, u_j)\}$ der sogenannten *Null-Lösung* $\{(A_j, 0)\}$ genau dann äquivalent ist, wenn für ein $s \in \mathbb{Z}^n$ gilt:

$$u_j = (1 - A_j)s \quad \text{für } 1 \leq j \leq |H| \quad (3.12)$$

Die translativen Komponenten der Repräsentanten in (3.11) definieren einen verschränkten Homomorphismus von H in das Translationsgitter $\tilde{\Gamma} = \frac{1}{h}\Gamma$ modulo Γ , also in $\tilde{\Gamma}/\Gamma$. Dabei wird ganz allgemein eine Abbildung $\mu : H \rightarrow M$ mit H -Modul M ein *verschränkter Homomorphismus* genannt, falls für alle $h, h' \in H$ gilt:

$$\mu(h \cdot h') = \mu(h) + h\mu(h') \quad (3.13)$$

⁵⁴**Lemma:** Zwei Lösungssysteme $\{(A_j, u_j)\}$ und $\{(A_j, v_j)\}$ ($1 \leq j \leq |H|$) sind genau dann äquivalent,⁵⁵ wenn es ein $s \in \mathbb{Z}^n$ und einen Automorphismus $U \in GL(n, \mathbb{Z})$ von H gibt, sodass $u_j - Uv_k = (1 - A_j)s$ wobei $U^{-1} \cdot A_j \cdot U = A_k$ [65, p. 110].

In der Sprache der Kohomologietheorie endlicher Gruppen ausgedrückt, bilden die verschränkten Homomorphismen von H gerade die 1-Kozykel von H mit Werten in M (siehe etwa [228, p. 81]),⁵⁶ bei uns also:

$$Z^1(H, \tilde{\Gamma}/\Gamma) = \{\mu \mid \mu : H \longrightarrow \tilde{\Gamma}/\Gamma \text{ verschr. Homomorphismus}\}$$

Jedem Element von $Z^1(H, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ entspricht eine Lösung der Frobenius Kongruenz (3.11) und umgekehrt. Das Burckhardtsche Kriterium für Null-Lösungen zeichnet die Ko-Ränder der Kohomologietheorie aus:

$$B^1(H, \tilde{\Gamma}/\Gamma) = \{\mu : H \longrightarrow \tilde{\Gamma}/\Gamma \mid \exists_{s \in \tilde{\Gamma}/\Gamma} \mu(h) = (1-h)s \text{ für alle } h \in H\}$$

Burckhardts Berechnung der kristallographischen Raumgruppen lässt sich somit auch als Berechnung der 1. Kohomologie

$$H^1(H, \tilde{\Gamma}/\Gamma) = Z^1(H, \tilde{\Gamma}/\Gamma)/B^1(H, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$$

verstehen.

Aus Sicht der Erweiterungstheorie von Gruppen würde man allerdings zunächst eine Charakterisierung der Erweiterungen von Γ mittel H durch die 2-te Kohomologie $H^2(H, \Gamma)$ erwarten (vgl. Gl. (4.27) in den *Historischen Anmerkungen* S. 710). Eine solche Charakterisierung ist natürlich auch hier möglich; es gilt nämlich $H^2(H, \Gamma) \cong H^1(H, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$. Jeder Kozykel $t \in Z^1(G, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ stellt eine Lösung der “Frobenius Kongruenz” (3.11) dar. Das Faktorensystem (4.26) der zugehörigen Raumgruppen ist $\tilde{t}(h, h') := t(h) - t(hh') + ht(h')$ und bestimmt einen Kozykel mit (hier gleich bezeichneter Äquivalenzklasse) $\tilde{t} \in H^2(G, \Gamma)$. Umgekehrt wird jedem $\tilde{t} \in H^2(G, \Gamma)$

⁵⁶Koketten der Kohomologie der Gruppe G mit Werten in einem G -Modul M sind definiert als $C^k(G, M) := \{\varphi : G^k \longrightarrow M\}$, der Ko-Randoperator $d^{k+1} : C^k \longrightarrow C^{k+1}$ als

$$\begin{aligned} d^{k+1}\varphi(g_1, \dots, g_{k+1}) &= g_1\varphi(g_2, \dots, g_{k+1}) + \sum_{j=1}^k (-1)^j \varphi(g_1, \dots, g_j g_{j+1}, \dots, g_{k+1}) \\ &\quad + (-1)^{k+1} \varphi(g_1, \dots, g_k) \end{aligned}$$

Es gilt $d^{k+1} \cdot d^k = 0$. Damit sind Kozykel $Z^k(G, M)$ und Koränder $B^k(G, M)$ wie üblich bildbar und damit auch die Kohomologie $H^k(G, M) = Z^k(G, M)/B^k(G, M)$.

durch $t(h) := \frac{1}{|H|} \sum_{h' \in H} \tilde{t}(h, h')$ ein $t \in Z^2(G, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ zugeordnet. Die beiden Zuordnungen sind invers zueinander (mehr dazu in [228, p. 83]).

Die arithmetische Theorie trägt merklich zur mathematischen Klärung der Struktur der Raumgruppen bei. Darüber hinaus zeigt sie einen Weg zu deren Berechnung auf. Burckhardt etwa charakterisiert in seinem Buch [65] sämtliche Raumgruppentypen schrittweise durch einen durchsichtigen Aufbau aus Nebenklassen ausgewählter Untergruppen. Für die schon weiter oben als Beispiel herangezogene Raumgruppe des Pyrit T_h^6 ist D_{2h}^{15} diese Untergruppe [65, p. 145, 158] und es gilt:

$$T_h^6 = D_{2h}^{15} + [z, x, y] D_{2h}^{15} + [y, x, z] D_{2h}^{15} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } D_{2h}^{15} &= D_2^4 + [-x, -y, -z] D_2^4 & (3.15) \\ &= D_2^4 + [-x + \frac{1}{2}, -y + \frac{1}{2}, -z + \frac{1}{2}] D_2^4 \end{aligned}$$

Die eckigen Klammern stehen hier für eine Transformation der Koordinaten, zum Beispiel

$$[z, x, y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Weiter entsteht D_2^4 aus der Raumgruppe der arithmetischen Kristallklasse $D_2^1 = \mathbb{Z}(222P) \rtimes D_2$ (dem semidirekten Produkt aus dem Translationsgitter der orthorhombischen primitiven Einheitszelle $222P$ mit D_2), mittels Ersetzung aller Rotationen (der Ordnung 2) durch Schraubungen mit Translationskomponente $\frac{1}{2}$ [65, p. 142].

Die Raumgruppe des Diamant lässt sich darstellen als [65, p. 161f.]

$$O_h^7 = O^4 + [y, x, z] O^4 \quad (3.16)$$

$$\text{mit } O^4 = T^2 + [x + y + z + \frac{1}{4}, -z + \frac{1}{4}, -x + \frac{1}{4}] T^2. \quad (3.17)$$

Dabei ist $T^2 = \Gamma[23F] \rtimes T$ ($23F$ die Bezeichnung für die flächenzentrierte Einheitszelle des kubischen Systems).

Auf der arithmetischen Theorie der Kristallklassen beruht auch ein von H. Zassenhaus im Jahr 1948 skizzierter Algorithmus, der später zur Be-

rechnung der kristallographischen Raumgruppen der Dimension 4 ausgebaut wurde [272? , 380].

3.7 Kristallstrukturen idealisiert als Punktsysteme

In der geometrischen Kristallographie liegt es nahe, eine Kristallstruktur durch ein diskretes Punktsystem \mathfrak{P} im Raum zu charakterisieren, das unter einer der 230 Raumgruppen G invariant ist. \mathfrak{P} zerfällt dabei in eine endliche Zahl von Orbits $\mathfrak{P} = G \cdot \{p_1, \dots, p_k\}$ (mit $G \cdot p_i \neq G \cdot p_j$ für $i \neq j$). Ein Orbit kann als eine idealisierte Darstellung der Schwerpunkte von Atomen desselben Typs im Kristall verstanden werden. Jeder einzelne Orbit und damit auch \mathfrak{P} ist bekannt, wenn sein Schnitt $\tilde{\mathfrak{P}}$ mit einer Einheitszelle Z des Translationsgitters gegeben ist. \mathfrak{P} ist dann ja die 3-fach periodische Fortsetzung von $\tilde{\mathfrak{P}}$ durch die von Z gegebene Translationsgruppe $\tilde{\Gamma}$. Ein Orbit erscheint in der entsprechenden Darstellung $\mathfrak{P} = \tilde{\Gamma} \cdot \tilde{\mathfrak{P}}$ als eine Vereinigung von Punktgittern, ein *Gitterkomplex* in der Terminologie von P. Niggli [273].⁵⁷ Chemisch unterschiedliche Atome eines Moleküls der Kristallsubstanz liegen dabei grundsätzlich auf unterschiedlichen Orbits. Die Umkehrung gilt nicht notwendig.⁵⁸

Die Anzahl der verschiedenen Punkte eines Orbits in Z variiert je nach der Lage und daraus resultierender Isotropiegruppe des Punktes. Aus naheliegenden Gründen wird die Kardinalität der Isotropiegruppe eines Punktes p als die *Zähligkeit* von p bezeichnet.⁵⁹ Dabei ist darauf zu achten, dass eine Einheitszelle mehr als ein von einer reduzierten Gitterbasis aufgespanntes Parallelepipet (Elementarzelle) enthalten kann (je nach Gittertyp 1, 2, 3 oder 4). Selbst bei einer stark vereinfachten Beschreibung einer Kristallstruktur durch solche Punktsysteme ist eine Unterscheidung (“Färbung”) der Punkte nach Atomart vorzunehmen. Das Ergebnis sind idealisierte Be-

⁵⁷Vgl. [332, p. 51].

⁵⁸Wyckoff verwendete die Bezeichnung “Kristallmolekül” für die mit chemischen Atomen belegte Punktconfiguration $\tilde{\mathfrak{P}}$ [385]. Diese Bezeichnung hat sich m.W. nicht allgemein durchgesetzt.

⁵⁹Nach [69] geht diese Terminologie auf P. Niggli zurück [273, Kap. 4].

schreibungen, wie sie in Abb. 1.76 der *Einleitung* zu LA III 13.7 angegeben werden.

Die komplexen Kristallstrukturen des Elements Bor (B , 3-wertiges Halbmetall der Ordnungszahl 5) hatten für E. Brieskorn offenbar eine besondere Faszination. Bor kristallisiert häufig mit ikosaedrischen Substrukturen innerhalb einer Elementarzelle. Vainshtein spricht davon, dass die gerichteten Bindungsstrukturen des Bor zu einer "Koordinationszahl" 5 führen.⁶⁰ Sie gehen mit einer *lokalen* Ikosaedersymmetrie innerhalb der Kristallstruktur einher. Die ikosaedrischen Substrukturen sind dabei durch Brücken verbunden, die aus einzelnen Bor-Atomen oder auch aus eingelagerten Atomen eines anderen Elements (etwa Kohlenstoff C oder Stickstoff N) bestehen. Dabei können, je nach vorliegender Modifikation des *Borons*, sehr unterschiedliche Anzahlen k von B -Atomen in einer Einheitszelle unterschiedlicher Gittertypen auftreten. Die entsprechende Modifikation wird dann als B - k oder B_k notiert. Vainshtein gibt Modifikationen an mit $k \in \{12, 50, 78, 90, 100, 105, 108, 134, 192, 288, 700, 1708\}$ [353, p. 126] und illustriert dies durch die Abbildungen einer tetragonalen B -50 und einer rhomboedrischen B -104 Struktur [353, p. 130]. Solche ikosaedrischen Substrukturen gibt es auch bei anderen Kristallenbildungen. Sie werfen die Frage auf, wie sie sich schließlich zu 3-fach periodischen Gesamtstrukturen zusammenfügen [194], [332, p.50]. .

Zwei von E. Brieskorn selbst gezeichnete Auszüge ikosaedrischer Boron-Strukturen werden in Abb. 3.118 dokumentiert. Bei beiden handelt es sich um kohlenstoffhaltige Modifikationen. Zumindest eine scheint rhomboedrische Symmetrie zu haben (3-zählige Achse). Welche Modifikationen dabei als Vorlage dienten, ist nicht angegeben.⁶¹

Man beachte aber auch die oben auf Seite 333 ausgesprochene Warnung, diese einfachen Punktlagebilder für eine ausreichende Charakterisierung

⁶⁰Also der Eckenzahl eines Koordinationspolyeders für die nächstliegenden Atome eines Bor-Atoms, vgl. S. 319.

⁶¹Bei der mit 3-zähliger Symmetrie könnte $B_{50}C_2$ gemeint sein.

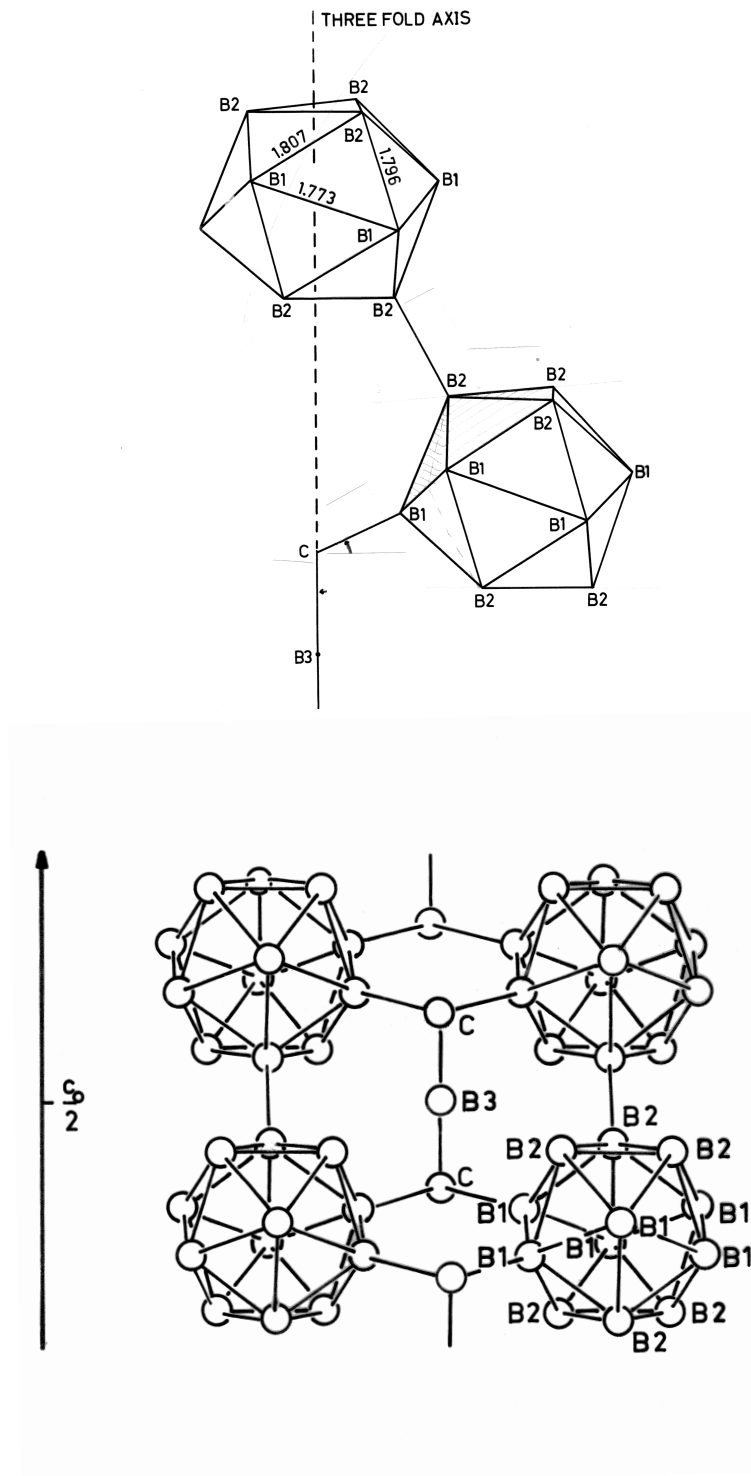


Abbildung 3.118: Icosaedrische Teilstrukturen des Boron (E.B.), oben vermutlich Auszug aus einer rhomboedrische Modifikation

der Kristallstruktur zu halten, sowie das daran anschließende Zitat von Vainshtein et al. Eine bessere Annäherung an die Struktur des Aufbaus der Kristallmaterie erhält man aus Daten der Röntgenstrahlbeugung unter Verwendung einer auf diesen Kontext zugeschnittenen Anwendung der Fourieranalyse.

3.8 Duale Gitter, Fourieranalyse periodischer Funktionen

Zur Beschreibung von Gitterebenen in einem Punktgitter im euklidischen Raum $\mathbb{E}^{(3)} \cong (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, das von einem Translationsgitter Γ mit erzeugender Basis $\mathfrak{B} = \{a_1, a_2, a_3\}$ erzeugt wird, zieht man üblicherweise die duale Basis $\mathfrak{B}^* = \{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$ mit $a_i^*(a_j) = \delta_{ij}$ heran. Mittels Skalarprodukt werden die Linearformen a_i^* mit denjenigen Vektoren b_i in $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ identifiziert, für die $\langle b_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$ gilt. In der kristallographischen Literatur spricht man unter Verwendung der Identifikation $\mathfrak{B}^* = \{b_1, b_2, b_3\}$ von der *reziproken Basis* zu \mathfrak{B} . Das duale Gitter $\Gamma^* = \mathbb{Z} a_1^* \oplus \mathbb{Z} a_2^* \oplus \mathbb{Z} a_3^*$ wird entsprechend mit dem (gleich bezeichneten) *reziproken Gitter* $\Gamma^* = \mathbb{Z} b_1 \oplus \mathbb{Z} b_2 \oplus \mathbb{Z} b_3$ identifiziert. Nur im Fall einer Orthonormalbasis \mathfrak{B} fallen Γ und Γ^* zusammen.

Eine Gitterebene A_l mit Punkten $x = \sum_i x_i a_i$ wird durch eine lineare diophantische Gleichung für die Koeffizienten x_i dargestellt:

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 = l$$

Dabei sind $h_i, l \in \mathbb{Z}$ und h_1, h_2, h_3 als relativ prim vorausgesetzt. Mit $h^* = \sum_i h_i a_i^*$ und zugehörigen reziproken Vektor $h = \sum_i h_i b_i$ lautet die Ebenenbedingung $h^*(x) = \langle h, x \rangle = l$. Im \mathbb{R}^3 ist daher h ein (euklidischer) Orthogonalvektor zur Parallelschar von Ebenen A_l (mit festem h und laufendem $l \in \mathbb{Z}$), $h \perp A_l$. Der Abstand des Ursprungs 0 von A_1 berechnet sich für ein beliebiges $x \in A_1$ als

$$d(A_1, 0) = \left\langle x, \frac{h}{|h|} \right\rangle = \frac{1}{|h|} \langle x, h \rangle = \frac{1}{|h|}.$$

Er ist dem Abstand d zwischen zwei aufeinander folgenden Ebenen der Schar A_l gleich,

$$d = |h|^{-1}.$$

Die Ebene A_l hat daher den Abstand $d(A_l, 0) = \frac{|l|}{|h|}$ vom Ursprung.

Einem von Null verschiedenen Vektor des dualen Gitters, $h \in \Gamma^* \setminus \{0\}$, $h = (h_1, h_2, h_3)$ mit gekürzter Form $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3)$ und $h = l\tilde{h}$ entspricht also ein punktspiegelbildliches Paar von Gitterebenen von Γ mit Orthogonalvektor h und Abstand l vom Ursprung. In der kristallographischen Literatur werden – nach Auszeichnung einer Orientierung und daran gebundene Selektion eines der beiden Ebenen – die Koordinaten des Orthogonalvektors bezüglich der reziproken Basis, häufig ohne Kommata in der Form $(h_1 h_2 h_3)$ geschrieben, als *Millersche Indizes* der Ebene $\langle h, x \rangle = l = \text{ggT}(h_1, h_2, h_3)$ bezeichnet.

Die Ebenen $(h_1 h_2 h_3)$ mit hoher 2-dimensionaler Punktdichte haben gute Chancen, in der Kristallgestalt als Begrenzungsfläche aufzutreten. Diese schon von Bravais formulierte Annahme wurde grosso modo in der späteren Strukturwachstumstheorie bestätigt [333, p. 56f.]. Eine noch wichtigere Rolle spielt das duale (reziproke) Gitter für die Fourieranalyse periodischer Funktionen und dadurch für die Strukturbestimmung von Kristallen durch die Röntgenbeugungsmethode.

Für eine im Unendlichen ausreichend schnell abfallende komplexwertige Funktion⁶² f auf $V = \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten x ist die Fouriertransformierte $\mathfrak{F}(f) = F$ eine Funktion auf dem Dualraum V^* mit Elementen ξ :⁶³

$$\mathfrak{F}f(\xi) = F(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi(x)} dx \quad (3.18)$$

Bei Vorgabe eines Skalarprodukts auf \mathbb{R}^n ist V^* mit V identifizierbar; dann ist in etwas lascher Notation $\xi(x) = \langle \xi, x \rangle$. Die Rücktransformation einer Funktion g auf V^* erfolgt durch

$$\mathfrak{F}^{-1}g(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{i\xi(x)} d\xi. \quad (3.19)$$

⁶²Etwa $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

⁶³Siehe etwa [141, p. 104f.].

Für eine unter Γ invariante 3-fach periodische Funktion f definiert man die Fouriertransformierte durch Integration über ein Elementarparallelepiped P , etwa aufgespannt von den Basisvektoren a_1, a_2, a_3 . F hat in diesem Fall den diskreten Träger Γ^* mit

$$F(h) = (\text{vol } P)^{-1} \int_P f(x) e^{-2\pi i h(x)} dx \quad \text{für } h \in \Gamma^* . \quad (3.20)$$

Die inverse Fouriertransformation $\mathfrak{F}^{-1}(F) = f$ ist

$$f(x) = \sum_{h \in \Gamma^*} F(h) e^{2\pi i h(x)} = \sum_{h \in \Gamma^*} F(h) e^{2\pi i \sum h_j x_j} ,$$

also eine Reihe mit Koeffizienten $c_k = F(h)$ ($k \in \mathbb{Z}^3$), die sich für jedes $h = \sum_j k_j a_j^* \in \Gamma^*$ gemäß (3.20) berechnen:⁶⁴

$$c_k = (\text{vol } P)^{-1} \int_P f(x) e^{-2\pi i \sum k_j x_j} dx \quad (3.21)$$

Bei Konvergenz wird f dann durch die 3-fache *Fourierreihe*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} c_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle} , \quad x = \sum_{j=1}^3 x_j a_j , \quad (3.22)$$

dargestellt.

3.9 Röntgenstrukturanalyse von Kristallen

Die Strukturbestimmung von Kristallen durch Röntgenstrukturanalyse ist Gegenstand eines multidisziplinären Wissenschaftsfeldes aus Festkörperphysik, physikalischer Chemie, organischer Chemie, Molekularbiologie, Mineralogie, Materialwissenschaften und angewandter Mathematik. Hier können nur deren allereinfachsten Prinzipien skizziert

⁶⁴Die Fourierkoeffizienten einer bezüglich dem Standardintervall $[0, 2\pi]^3$ 3-fach periodischen Funktion f berechnen sich als $c_k = (2\pi)^{-3} \int_{[0, 2\pi]^3} f(u) e^{-i \langle k, u \rangle} du$. Damit gilt $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} c_k e^{i \langle k, x \rangle}$. Die Fourierkoeffizienten einer bezüglich einem allgemeinen Gitter periodischen Funktion folgen hieraus durch affine Transformation.

werden (mehr dazu in [352, 353]). Die Methode geht auf die Entdeckungen von M. von Laue, W.H. Bragg, W.L. Bragg und vielen anderen zu Beginn des 20. Jahrhunderts zurück (siehe *Historischer Anhang*, S. 711 und [12]). Von theoretischer Seite aus beruht sie auf einer mathematischen Modellierung des Beugungsverhaltens von elektromagnetischen Wellen oder – je nach Sichtweise – der Streuung interferierender Photonengesamtheiten an der periodischen Struktur der Elektronenverteilung im Kristall. Dabei beschreibt man einen einfallenden Strahl durch eine ebene Welle der Wellenlänge λ mit Wellenvektor k_0 des Betrags $|k_0| = \frac{2\pi}{\lambda}$. Unter Vernachlässigung der zeitlichen Änderung ist deren räumliche Verteilung durch

$$\varphi(x) = Ae^{i\langle k_0, r \rangle} \quad (3.23)$$

mit komplexer Amplitude A gegeben. Der wichtigste Anteil der Streuung erfolgt elastisch (Thomson Streuung) und kann durch Superposition von Sekundärwellen dargestellt werden, die an jeder Stelle des Kristalls mit verschiedener Intensität und Phase aus der Anregung der Elektronen hervorgehen. Die Elektronendichte wird dabei durch eine kontinuierliche Funktion modelliert, im quantentheoretischen Ansatz durch das Quadrat einer Wellenfunktion um einen Atomkern herum, $\rho(x) = |\psi(x)|^2$. Bei dem sehr vereinfachten Bild einer Überlagerung von jeweils zentralsymmetrisch angesetzten Elektronendichten von k Atomen in einer Einheitszelle erhält man bei Atompositionen q_j , $j = 1, \dots, k$, etwa $\rho(x) = \sum_{j=1}^k \rho_j(x - q_j)$. Dies vernachlässigt die Verteilung der Valenzelektronen innerhalb der Bindungsstruktur, kann aber als einfaches Modell einer ionischen Bindung verstanden werden (vgl. S. 342). Hier dient sie lediglich als ein illustrierendes Beispiel.

Die ausgehende Welle wird als Überlagerung ebener Wellen modelliert, jede davon mit einem Wellenvektor k , dessen Abweichung von der einfallenden Welle durch den *Streuvektor* $s = \frac{k - k_0}{2\pi}$ ausgedrückt wird. Die Superposition der von jeder einzelnen Stelle im Kristall ausgehenden Streuteile lässt sich durch eine Integraltransformation darstellen [352, eq. 4.12]:

$$F(s) = \int \rho(x) e^{2\pi i \langle s, x \rangle} dx \quad (3.24)$$

$F(s)$ hat bis auf einen Koeffizienten die Gestalt einer inversen Fouriertransformation $F = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathfrak{F}^{-1}(\rho \circ 2\pi id)$ und stellt eine komplexe Streuamplitude dar, aus der – wenn man sie messen könnte – die Elektronendichte wiederum durch eine Fouriertransformation zu bestimmen wäre, $\rho = \mathfrak{F}((2\pi)^{-\frac{n}{2}} F \circ (2\pi)^{-1} id)$. Dabei treten jedoch zwei grundsätzliche Probleme auf. Der kontinuierliche Definitionsbereich von F entzieht letztere einer exakten Messung. Darüberhinaus ist selbst an einzelnen Werten von s bestenfalls die reelle Amplitude als Intensität des gebeugten (gestreuten) Röntgenstrahls, nicht aber die komplexe Phase von $F(s)$ messbar.⁶⁵

In einem als 3-fach unendlich periodisch angenommenen Fall entfällt das Kontinuitätsproblem. Die Fouriertransformation reduziert sich dann wie oben auf die Bestimmung der Fourierkoeffizienten der Dichte ρ mit komplexen Streuamplituden $F(h)$ auf dem reziproken Gitter wie in (3.21) und (3.22).⁶⁶

Bei einfachen Gittern kann schon die Messung der Streuung an den Hauptgitterebenen ausreichen, um die Verteilung der Atome in einer Einheitszelle zu bestimmen. Dazu benötigt man nicht einmal die Kenntnis der Fourierreihendarstellung; die Kenntnis der Streuvektoren an den betreffenden Ebenen kann ausreichend sein. Der Winkel wird durch das *Braggsche Reflexionsgesetz* charakterisiert, aus dem durch Verfeinerung und Einbezug von Überlagerung auch die allgemeine Darstellung durch die Fourierreihenzerlegung gewonnen wurde (vgl. *Historischer Anhang* S. 711f.).

Für kompliziertere Fälle sind Methoden notwendig, das oben genannte Phasenproblem zu umgehen. Das ist für zentralsymmetrische Gitterstrukturen noch relativ einfach möglich, ansonsten müssen durch Integration gewonnene Hilfsfunktionen [387, p. 19] oder auf Überbestimmung beruhende raffiniertere Methoden eingesetzt werden [174].

⁶⁵Auf dieses Problem wies von Laue schon 1913 in seinem Vortrag auf der Wiener Naturforschertagung der Naturforscher hin [12, p. 158].

⁶⁶Vgl. auch [387, eq. (1.33), p. 16]

3.10 Beispiele von Kristallformen ausgewählter Mineralien

E. Brieskorn begeisterte sich für klare, von ihm als schön empfundene Naturformen. Für den abschließenden Paragraph seiner LA III erwarb er vom Doris Bode Verlag (Haltern) Fotos zur Veröffentlichung (Abb. 3.119, 3.119) und suchte einige Abbildungen aus dem 1913 bis 1923 erschienenen 9-bändigen *Atlas der Kristallformen* von Victor M. Goldschmidt [152] aus, die Kristallformen des Diamant und des Pyrit darstellen (hier wiedergegeben als Abb. 3.121, 3.122).

Den Höhepunkt des Materials bildet eine Sammlung von eigenen Fotos besonders deutlich ausgeprägter Kristallformen, die vom Autor in *9 Bildafeln mit Erläuterungen* zusammengestellt wurden:

Tafel 1 Einfache Formen des kubischen Systems (S. 669)

Tafel 2 Formen der hexakisoktaedrischen Klasse (S. 671)

Tafel 3 Formen der disdodekaedrischen Klasse (S. 673)

Tafel 4 Formen der hexakistetraedrischen Klasse (S. 675)

Tafel 5 Formen des trigonalen Systems (S. 677)

Tafel 6 Formen des trigonalen und hexagonalen Systems (S. 679)

Tafel 7 Formen des tetragonalen Systems (S. 681)

Tafel 8 Formen des orthorh., monoklinen und triklinen Systems (S. 683)

Tafel 9 Boracit xx mit den Formen 100, 110, 111 (S. 685)

Der Autor plante, den Paragraphen durch die Farbabbildung eines Granat-Kristalls, ergänzt durch ein Novalis-Zitat wie auf S. 687, abzuschließen.⁶⁷

⁶⁷Dank an U. Schmickler-Hirzebruch für diesen Hinweis auf Verlagsabsprachen mit dem Autor aus den 1980er Jahren; Hrsg.

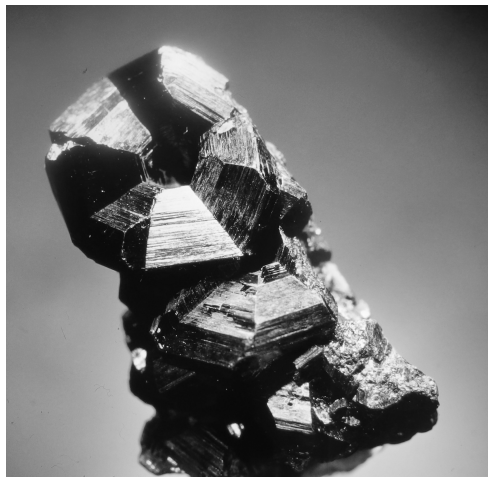


Abbildung 3.119: Oben: Fahlerz – Tristetraeder, unten: Rutil – Achtling
(Foto: E. Lück, R. Bode)

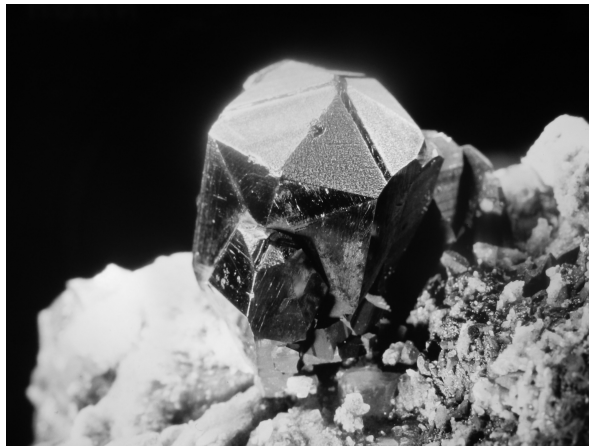


Abbildung 3.120: Oben: Mimetesit – hexagonale Bipyramide,
unten: Pyrargyrit – ditrigonales Prisma + ditrig. Pyramide
(Foto: E. Lück, R. Bode)

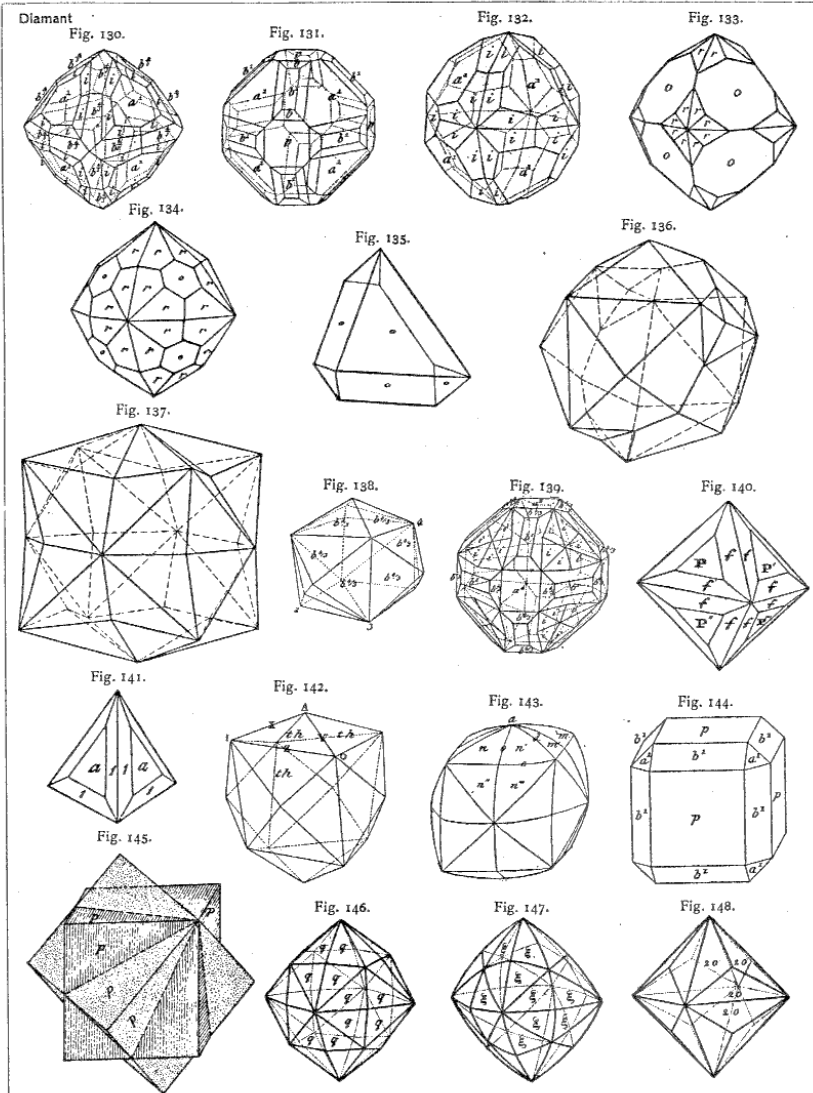


Abbildung 3.121: Kristallformen des Diamants (Goldschmidt 1913-1923, Bd. 3, Tafel 33), Kopie im Nachlass E.B.

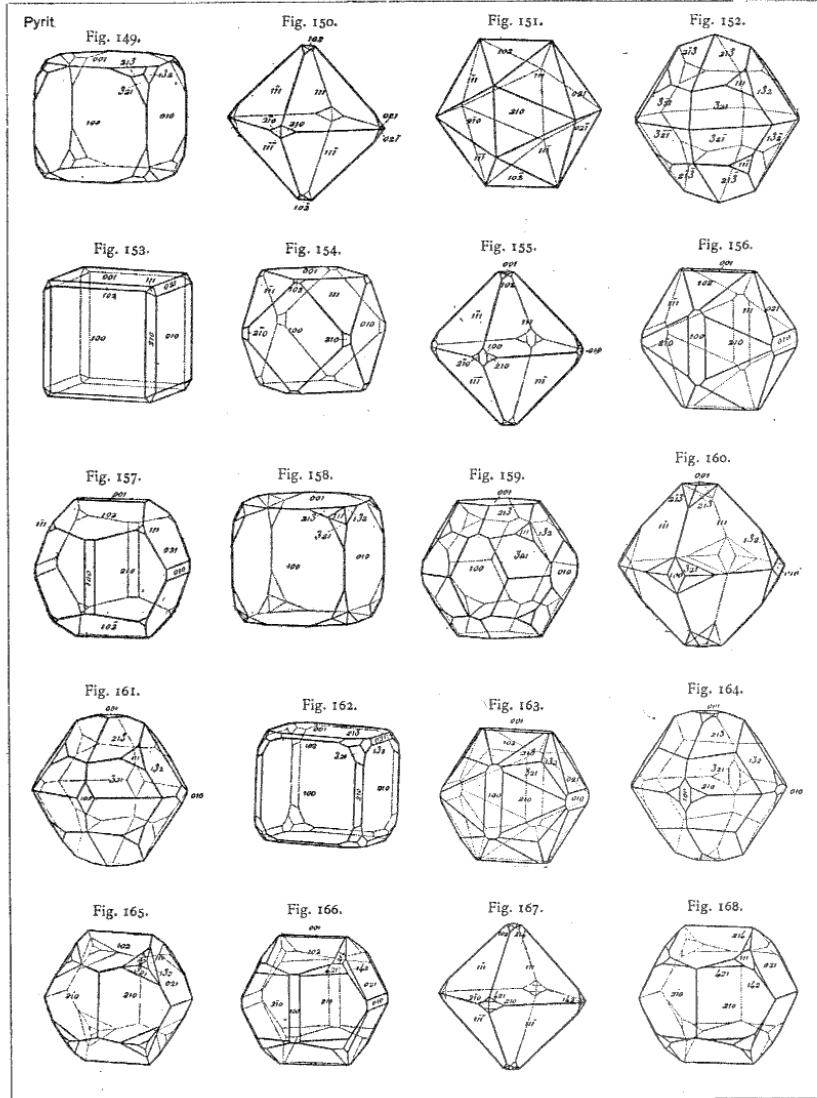

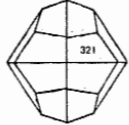

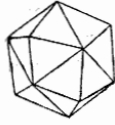



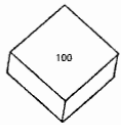
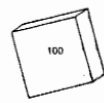

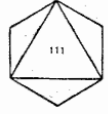
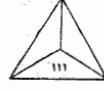
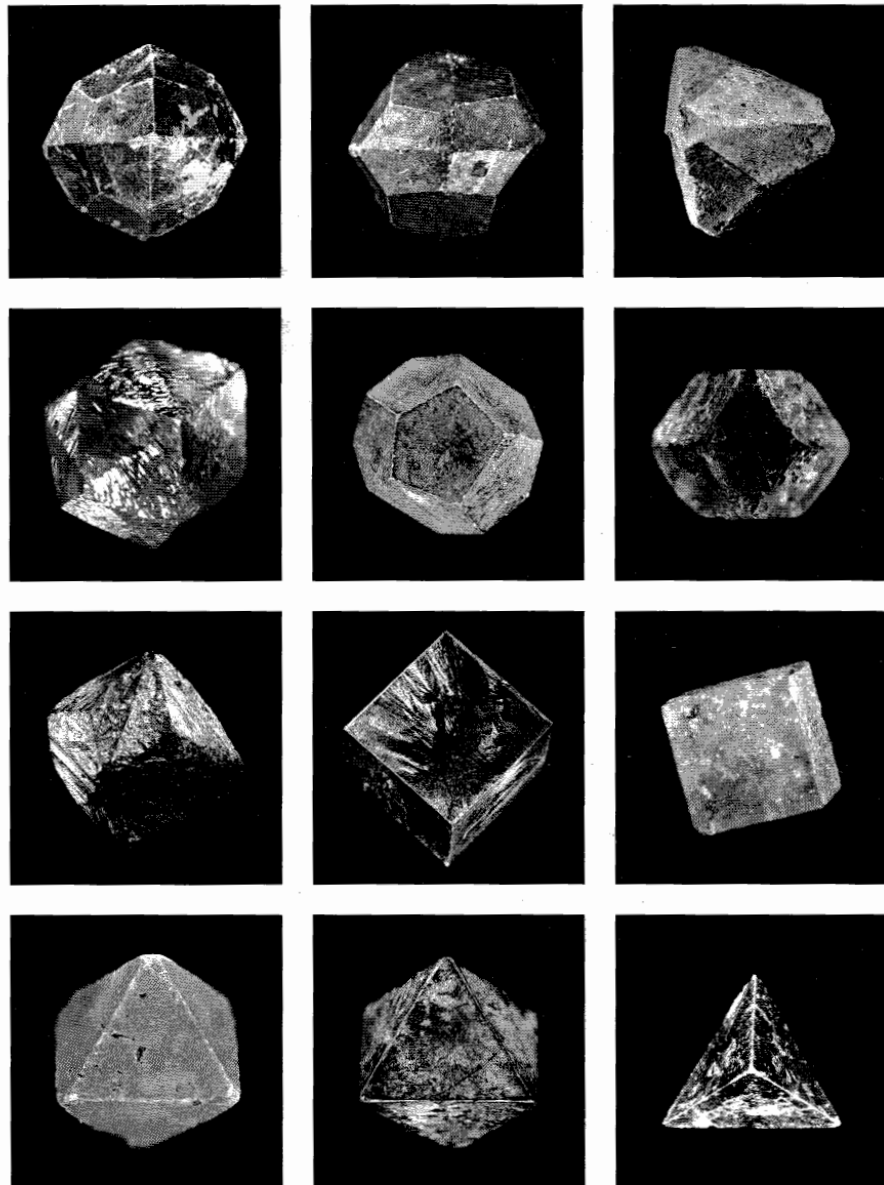


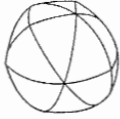

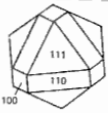
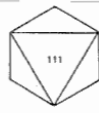


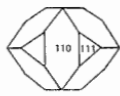


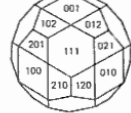


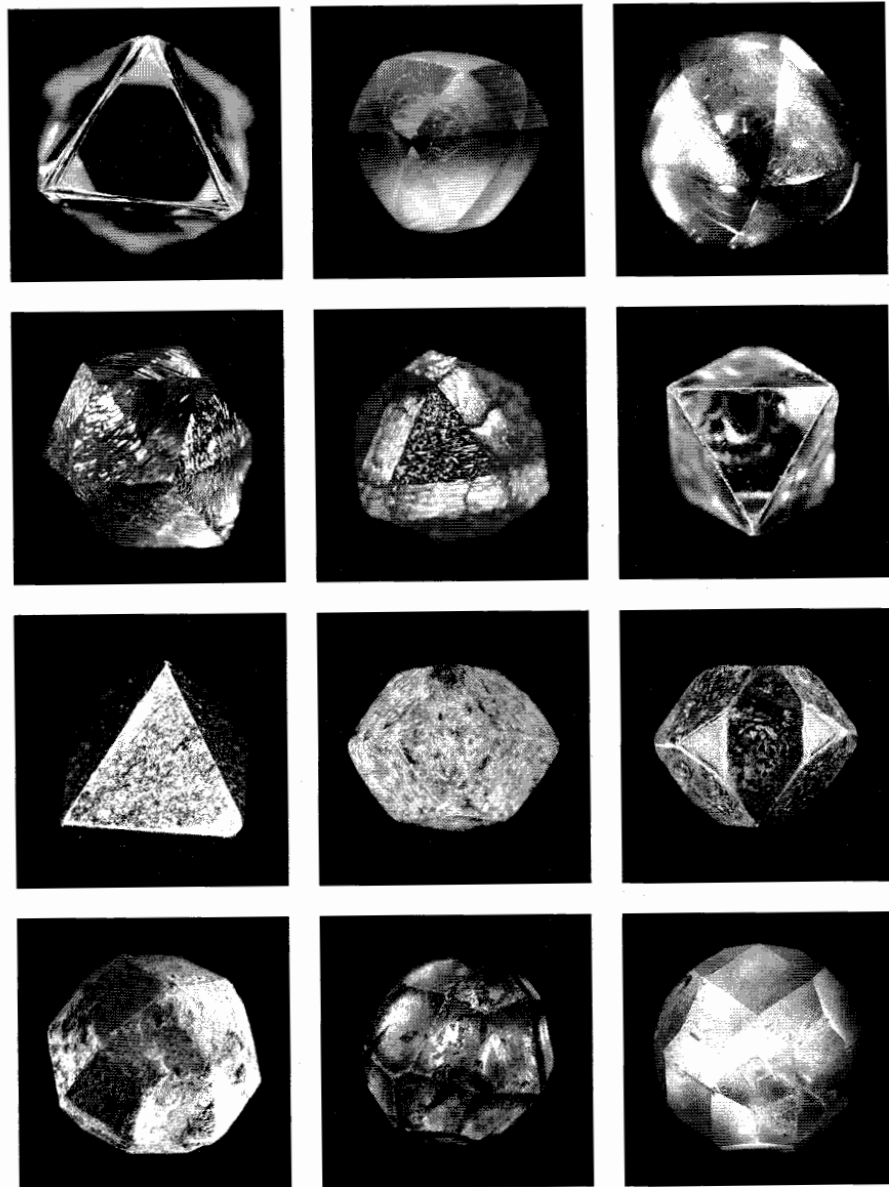
Abbildung 3.122: Kristallformen des Pyrits (Goldschmidt 1913–1923, Bd. 6, Tafel 111), Kopie im Nachlass E.B.

<p>Almandin, O_{h}^{10}, Ikositetraeder {211}, Sambi River, Zimbabwe</p> 	<p>Pyrit, T_{h}^6, Diskodekaeder {321}, Sierra de Camarros, Spanien</p> 	<p>Pseudomorphose: Achtarandit nach Helvin, T_{d}^4, Triakistetraeder {211}, Wilui-Fluß, Sibirien, SU</p> 
<p>Diamant, O_{h}^7, scheinbares Tetrakishexaeder, Sudafrika</p> 	<p>Pyrit, T_{h}^6, Pentagondodekaeder {210}</p> 	<p>Pseudomorphose: Tief-Boracit, C_{2v}^5 nach Hoch-Boracit, T_{d}^5, Rhombendodekaeder {110}, Westeregeln bei Magdeburg</p> 
<p>Magnetit, O_{h}^7, Triakisoktaeder {221}, Ivland, Norwegen</p> 	<p>Pyrit, T_{h}^6, Hexaeder {100}, Navajun, Spanien</p> 	<p>Pseudomorphose: Tief-Boracit nach Hoch-Boracit, T_{d}^5, Hexaeder {100}, Seegeberg bei Kiel</p> 
<p>Senarmontit, O_{h}^7, Oktaeder {111}, Djebel Hamimat, Algerien</p> 	<p>Pyrit, T_{h}^6, Oktaeder {111}</p> 	<p>Pseudomorphose: Tief-Chambersit C_{2v}^5, nach Hoch-Chambersit T_{d}^5, Tetraeder {111}, Venice, Louisiana, USA</p> 

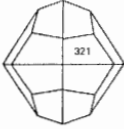
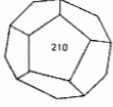
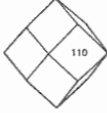
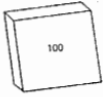
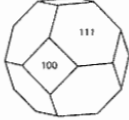

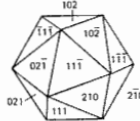
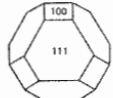

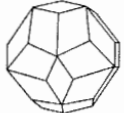
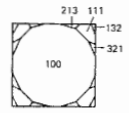



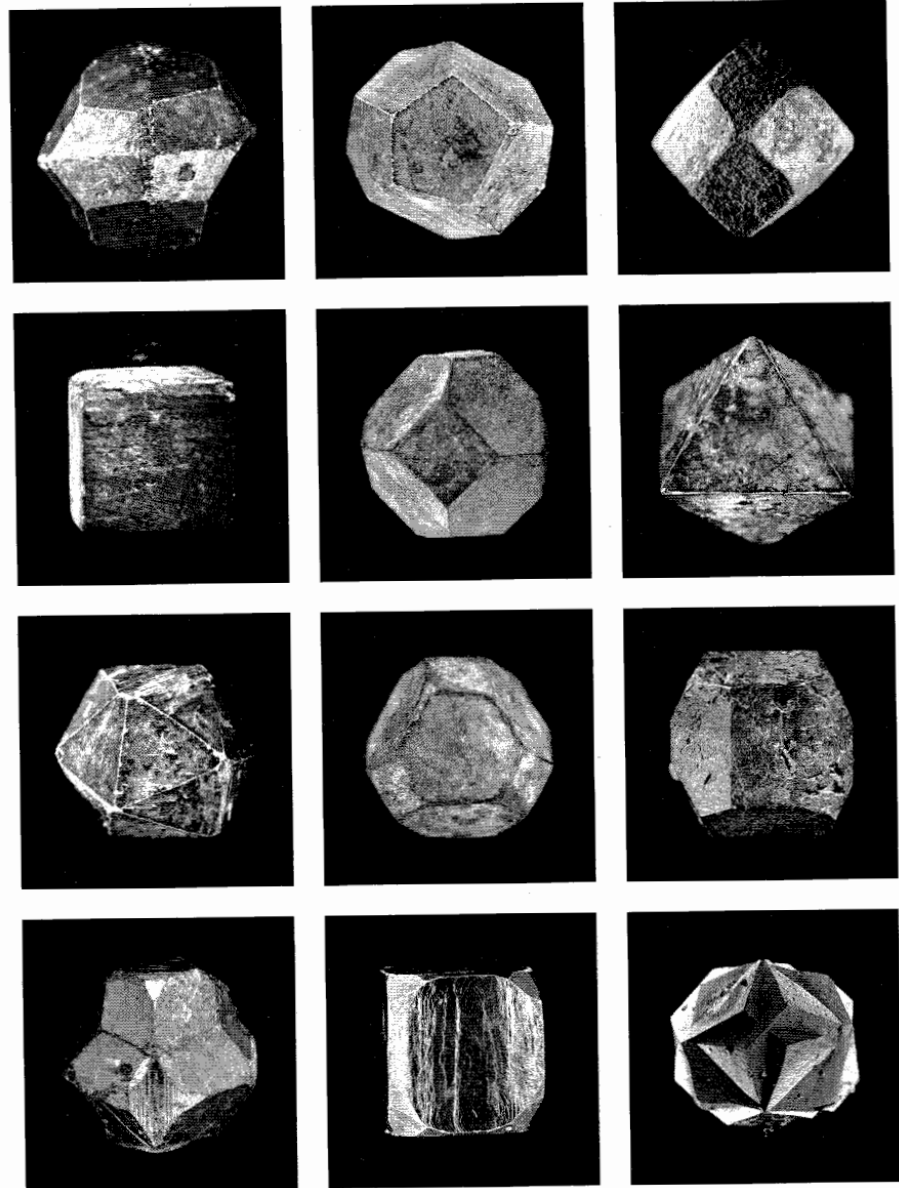
Tafel 1 Einfache Formen des kubischen Systems

<p>Diamant, O_h^7, Oktaeder $\{111\}$, Südafrika</p> 	<p>Diamant, O_h^7, Lösungskörper scheinbar tetrakishexaedrisch Südafrika</p> 	<p>Diamant, gleicher Kristall wie Bild links</p> 
<p>Diamant, O_h^7, scheinbares Tetrakishexaedrer, Südafrika</p> 	<p>Diamant, O_h^7, Oktaeder $\{111\}$, Rhombendodekaeder $\{110\}$, Hexaeder $\{100\}$</p> 	<p>Spinell, O_h^7, Oktaeder $\{111\}$, Mogok, Birma</p> 
<p>Cuprit, O_h^4, Oktaeder $\{111\}$</p> 	<p>Pseudomorphose: Malachit, C_{2h}^5, nach Cuprit, O_h^4, Rhombendodekaeder $\{110\}$, Chessy bei Lyon</p> 	<p>Pseudomorphose: Malachit nach Cuprit, O_h^4, Rhombendodekaeder $\{110\}$, Oktaeder $\{111\}$, Chessy bei Lyon</p> 
<p>Pseudomorphose: Tief- Leucit C_{4h}^6, nach Hoch-Leucit, O_h^{10}, Ikositetraeder $\{211\}$, Vesuv</p> 	<p>Granat, O_h^{10}, Ikositetraeder $\{211\}$, Mtoko, Zimbabwe</p> 	<p>Halit, O_h^5, Hexaeder $\{100\}$, Oktaeder $\{111\}$, Tetrakishexaeder $\{210\}$, synthetisch</p> 

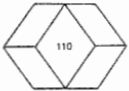
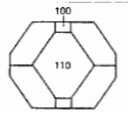
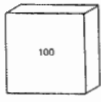

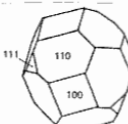
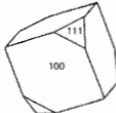
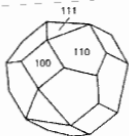
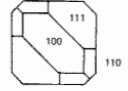

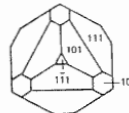
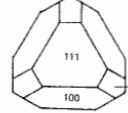
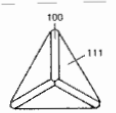


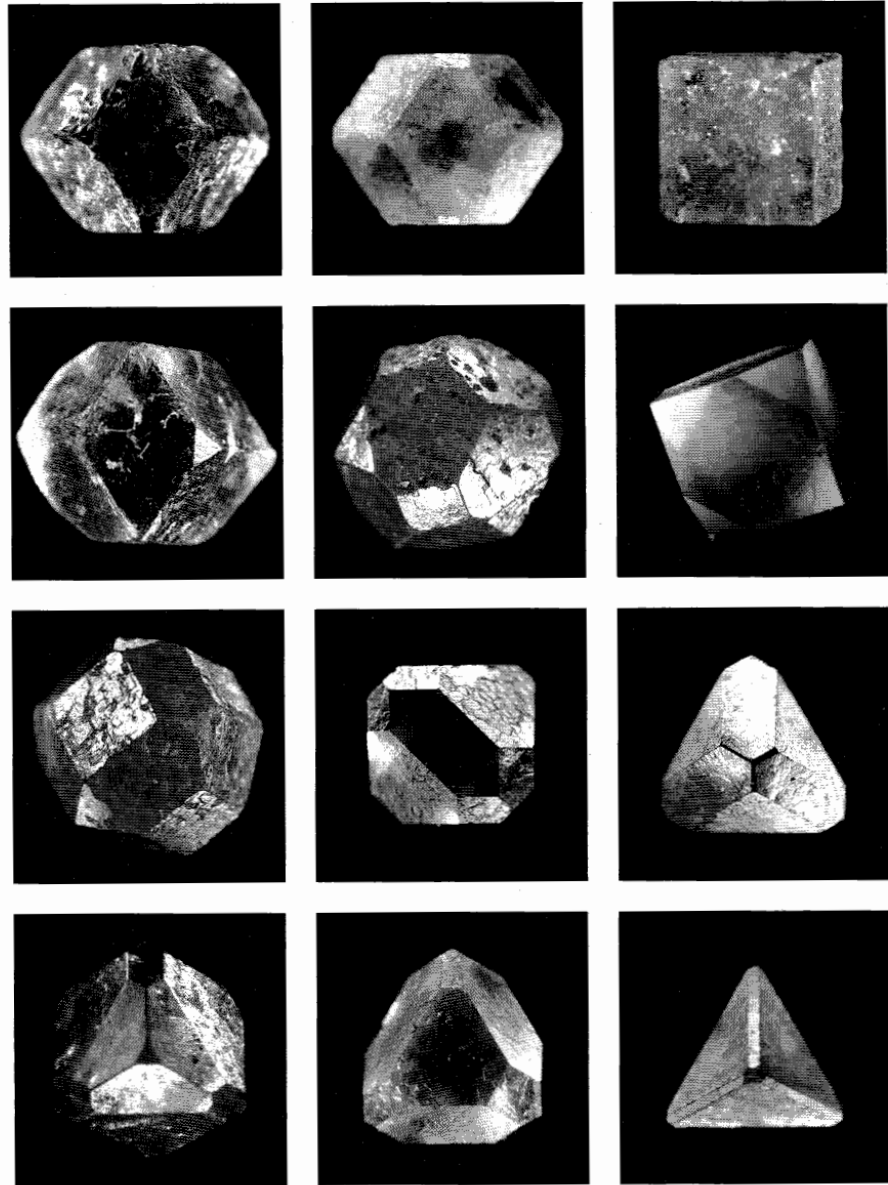
Tafel 2 Formen der hexakisoktaedrischen Klasse

<p>Pyrit, $T_{h'}^6$ Diskodekaeder $\{321\}$, Sierra de Camarros, Spanien</p> 	<p>Pyrit, $T_{h'}^6$ Pentagondodekaeder $\{210\}$</p> 	<p>Cobaltit, $T_{h'}^6$ Rhombendodekaeder $\{110\}$, Riddarhyttan, Schweden</p> 
<p>Cobaltit, $T_{h'}^6$ Hexaeder $\{100\}$, Tunaberg, Schweden</p> 	<p>Hauerit, $T_{h'}^6$ Oktaeder $\{111\}$, Hexaeder $\{100\}$, Raddusa, Sizilien</p> 	<p>Pyrit, $T_{h'}^6$ Oktaeder $\{111\}$</p> 
<p>Pyrit, $T_{h'}^6$ Dodekaeder $\{210\}$, Oktaeder $\{111\}$</p> 	<p>Hauerit, $T_{h'}^6$ Oktaeder $\{111\}$, Hexaeder $\{100\}$, gleicher Kristall wie oben</p> 	<p>Pseudomorphose: Limonit nach Pyrit, $T_{h'}^6$, Pentagondodekaeder $\{210\}$, Hexaeder $\{100\}$</p> 
<p>Pyrit, $T_{h'}^6$ Disdodekaeder $\{321\}$, Hexaeder $\{100\}$</p> 	<p>Pyrit, $T_{h'}^6$ Hexaeder $\{100\}$, Oktaeder $\{111\}$, Disdodekaeder $\{321\}$</p> 	<p>Pseudomorphose: Limonit nach Pyrit, $T_{h'}^6$, Zwilling nach $\{110\}$ auf zwei Dodekaedern $\{210\}$</p> 





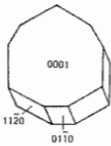
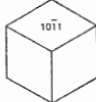


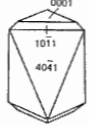
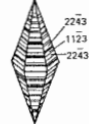

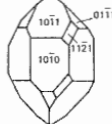


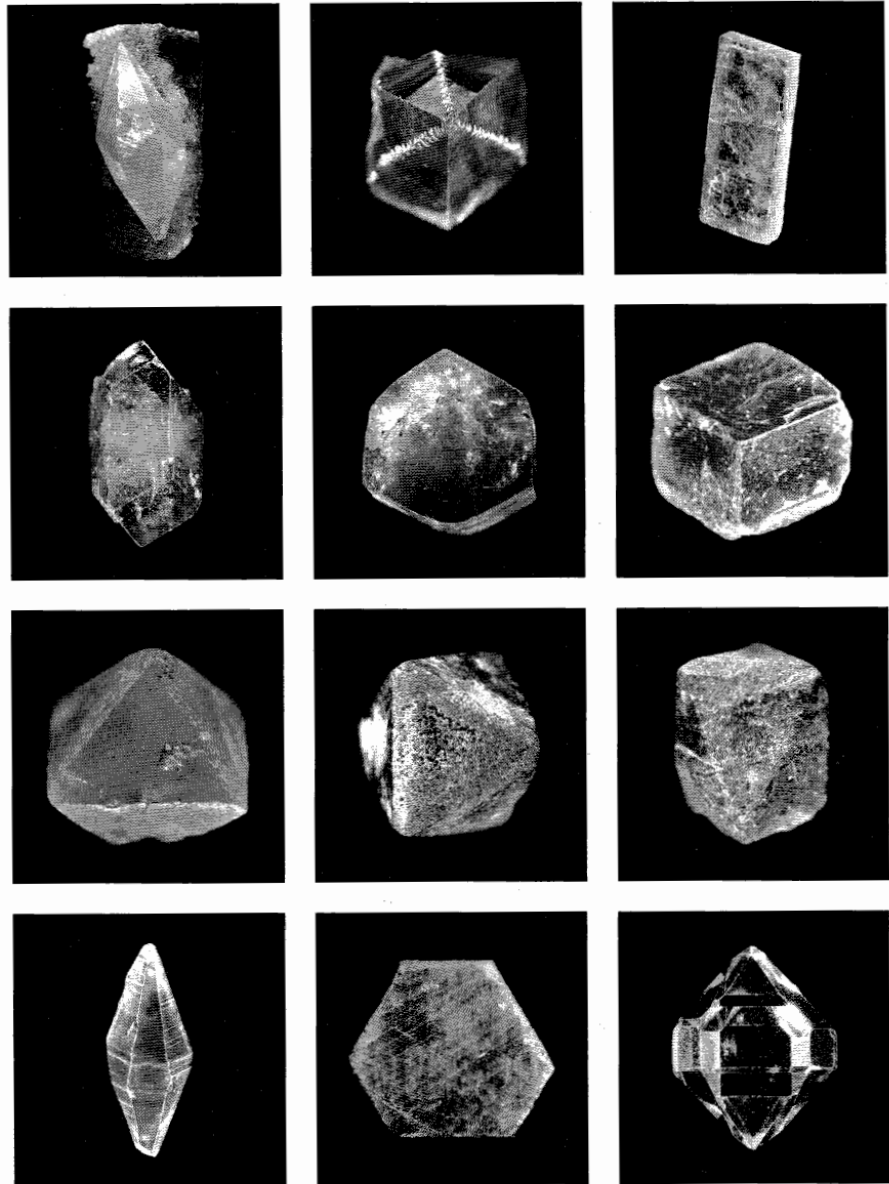
Tafel 3 Formen der disdodekaedrischen Klasse

<p>β-Boracit nach α-Boracit, Rhombendodekaeder $\{110\}$, Westeregeln bei Magdeburg</p> 	<p>β-Boracit nach α-Boracit, Rhombendodekaeder $\{110\}$, Hexaeder $\{100\}$, Lüneburg, Niedersachsen</p> 	<p>β-Boracit nach α-Boracit, Hexaeder $\{100\}$, Seegeberg bei Kiel</p> 
<p>β-Boracit nach α-Boracit, Rhombendodekaeder $\{110\}$, Tetraeder $\{111\}$, Westeregeln bei Magdeburg</p> 	<p>β-Boracit nach α-Boracit, Rhombendodekaeder $\{110\}$, Tetraeder $\{111\}$, Hexaeder $\{100\}$, Lüneburg</p> 	<p>β-Boracit nach α-Boracit, Hexaeder $\{100\}$, Tetraeder $\{111\}$, Seegeberg bei Kiel</p> 
<p>β-Boracit nach α-Boracit, Hexaeder $\{100\}$, Rhombendodekaeder $\{110\}$, Tetraeder $\{111\}$</p> 	<p>β-Boracit nach α-Boracit, Tetraeder $\{111\}$, Hexaeder $\{100\}$, Rhombendodekaeder $\{110\}$</p> 	<p>β-Boracit nach α-Boracit, Tetraeder $\{111\}$, Hexaeder $\{100\}$</p> 
<p>β-Boracit nach α-Boracit, Rhombendodekaeder $\{110\}$, Tetraeder $\{111\}$ und $\{1\bar{1}\bar{1}\}$, Hexaeder $\{100\}$, Lüneburg</p> 	<p>β-Boracit nach α-Boracit, Tetraeder $\{111\}$, Hexaeder $\{100\}$, Rhombendodekaeder $\{110\}$, gleicher Kristall wie oben</p> 	<p>β-Boracit nach α-Boracit, Tetraeder $\{111\}$, Hexaeder $\{100\}$, Seegeberg bei Kiel</p> 


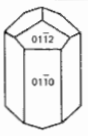
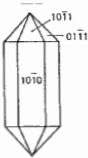



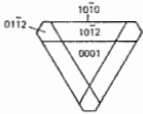
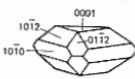
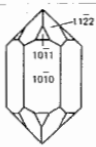
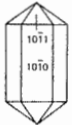

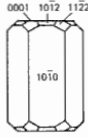


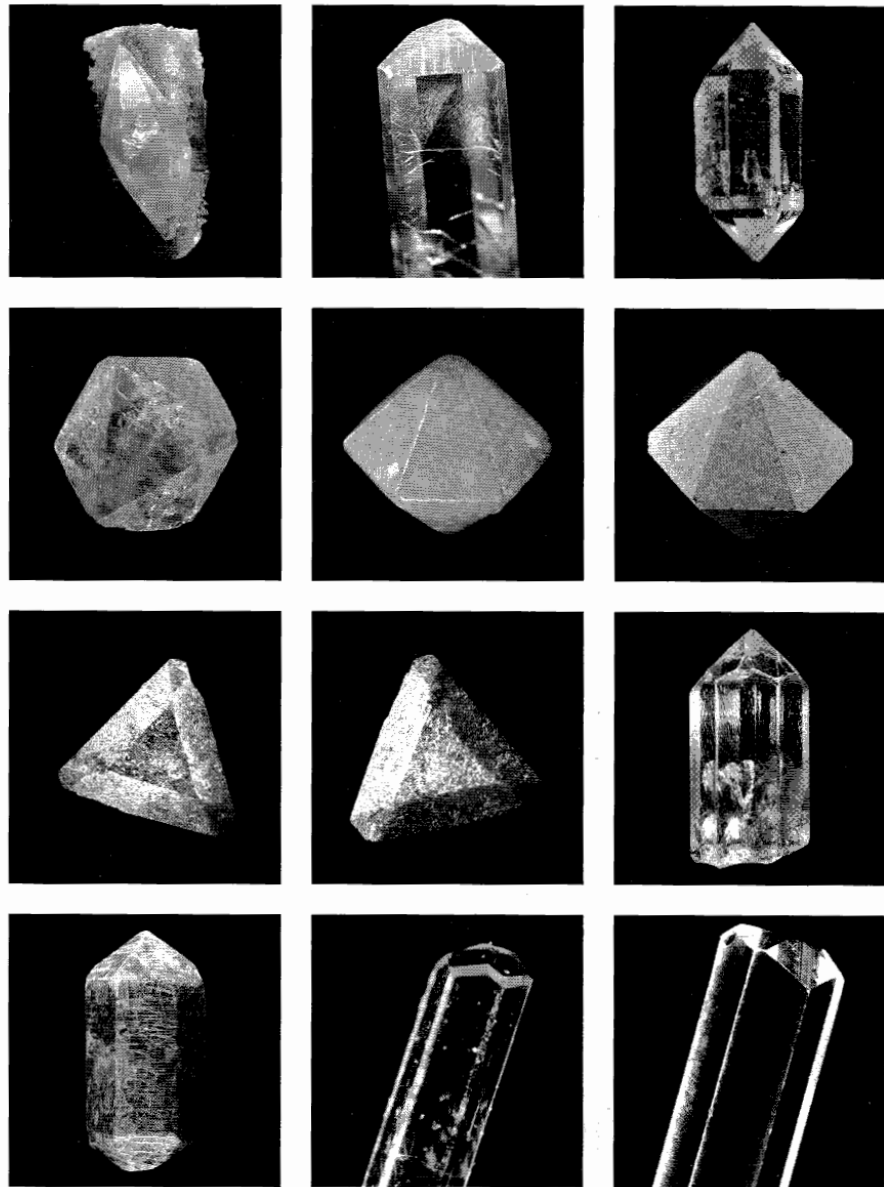
Tafel 4 Formen der hexakistetrahedriscen Klasse

<p>Calcit, D_{3d}^6, Ditrigonales Skalenoeder $\{21\bar{3}1\}$</p> 	<p>Rhodochrosit, D_{3d}^6, Ditrigonales Skalenoeder $\{21\bar{3}1\}$</p> 	<p>Rhodochrosit, D_{3d}^6, Rhomboeder $\{10\bar{1}1\}$, Casapalca, Peru</p> 
<p>Dioptas, C_{3i}^2, Hexagonales Prisma $\{11\bar{2}0\}$, Rhomboeder $\{02\bar{2}1\}$</p> 	<p>Turmalin, C_{3v}^5, Basispedion $\{0001\}$, Hexagonales Prisma $\{11\bar{2}0\}$</p> 	<p>Dolomit, C_{3i}^2, Rhomboeder $\{10\bar{1}1\}$</p> 
<p>Dolomit, C_{3i}^2, Basispinakoid $\{0001\}$, Rhomboeder $\{40\bar{4}1\}$, Lake Arthur, New Mexico, USA</p> 	<p>Dolomit, C_{3i}^2, Basispinakoid $\{0001\}$, Rhomboeder $\{40\bar{4}1\}$ und $\{1011\}$, Teruel, Spanien</p> 	<p>Dolomit C_{3i}^2, Basispinakoid $\{0001\}$, Rhomboeder $\{40\bar{4}1\}$ und $\{10\bar{1}1\}$, gleicher Kristall wie links</p> 
<p>Saphir, D_{3d}^6, verschiedene hexagonale Dipyramiden, vorwiegend $\{22\bar{4}3\}$, sowie $\{11\bar{2}3\}$, Ratnapura, Sri Lanka</p> 	<p>Korund, D_{3d}^6, Basispinakoid $\{0001\}$, hexagonales Prisma $\{11\bar{2}0\}$</p> 	<p>β-Quarz, D_3^4, D_3^6, Hexagonales Prisma $\{10\bar{1}0\}$, Rhomboeder $\{10\bar{1}1\}$ und $\{01\bar{1}1\}$, trigonale Dipyramide $\{11\bar{2}1\}$, Herkimer, N.Y., USA</p> 

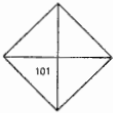
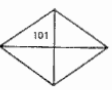
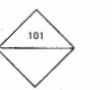
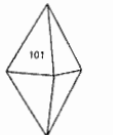

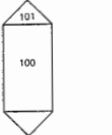

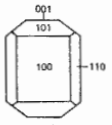
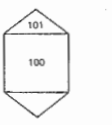
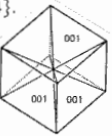

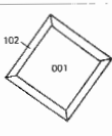


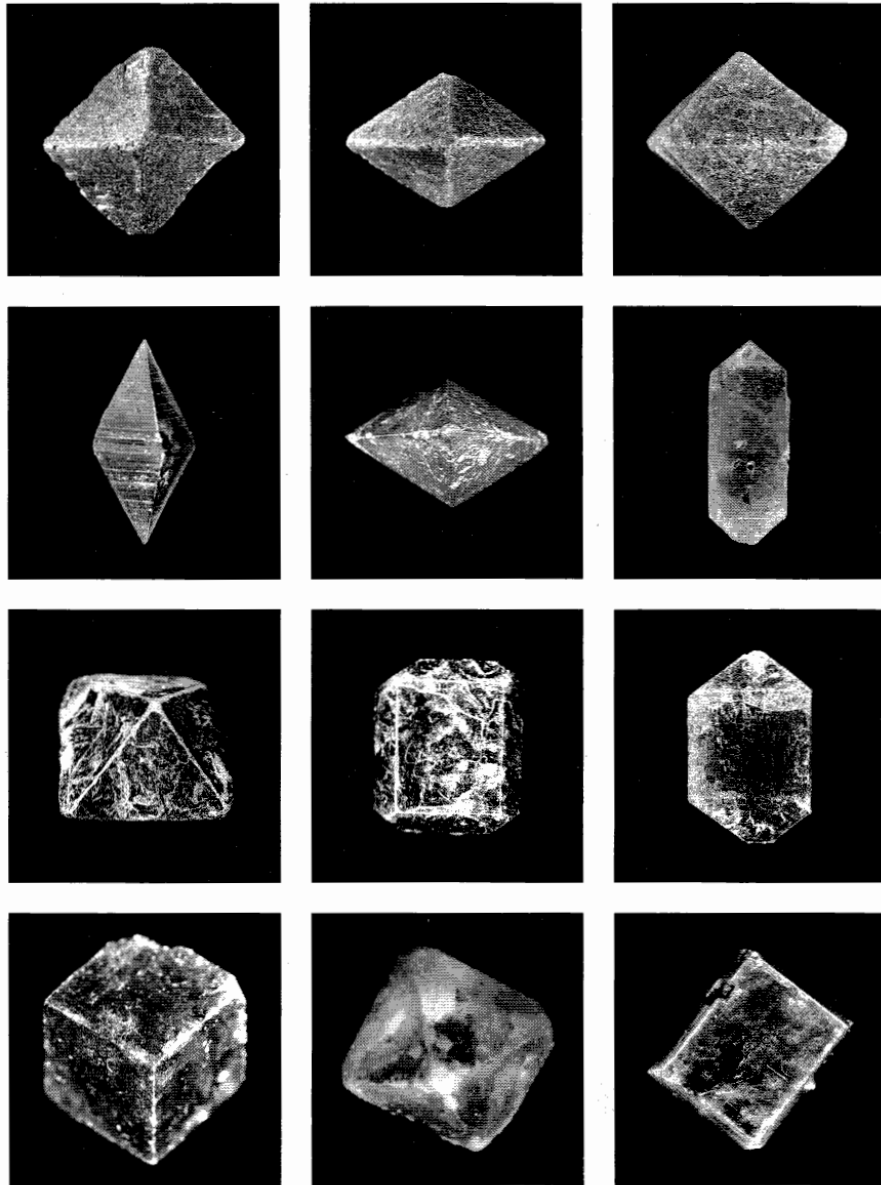
Tafel 5 Formen des trigonalen Systems

<p>Calcit, D_{3d}^6, Ditrigonales Skalenoeeder $\{21\bar{3}1\}$</p> 	<p>Calcit, D_{3d}^6, Hexagonales Prisma $\{10\bar{1}0\}$, Rhomboeeder $\{01\bar{1}2\}$, Egremont, Cumberland, GB</p> 	<p>β-Quarz D_3^4, D_3^6, Hexagonales Prisma $\{10\bar{1}0\}$, Rhomboeeder $\{10\bar{1}1\}$ und $\{01\bar{1}1\}$, Lumezzana bei Brescia, Helien</p> 
<p>Calcit, D_{3d}^6, Basispinakoid $\{0001\}$, Rhomboeeder $\{10\bar{1}1\}$, Kongsberg, Norwegen</p> 	<p>? Pseudomorphose: β-Quarz D_3 nach α-Quarz D_6, Hexagonale Dipyramide $\{10\bar{1}1\}$, Java</p> 	<p>? β-Quarz D_3, Rhomboeeder $\{10\bar{1}1\}$, $\{01\bar{1}1\}$</p> 
<p>Benitoit, D_{3h}^2, Basispinakoid $\{0001\}$, Trigonale Dipyramiden $\{10\bar{1}2\}$ und $\{01\bar{1}2\}$, Trigonales Prisma $\{10\bar{1}0\}$, San Benito, Calif., USA</p> 	<p>Benitoit, D_{3h}^2, Basispinakoid $\{0001\}$, Trigonale Dipyramiden $\{10\bar{1}2\}$ und $\{01\bar{1}2\}$, Trigonales Prisma $\{10\bar{1}0\}$, gleicher Kristall wie links</p> 	<p>Aquamarin, D_{6h}^2, Hexagonales Prisma $\{10\bar{1}0\}$, Hexagonale Dipyramiden $\{10\bar{1}1\}$ und $\{11\bar{2}2\}$, Brasilien</p> 
<p>Apatit C_{6h}^2, Hexagonales Prisma $\{10\bar{1}0\}$, Hexagonale Dipyramide $\{10\bar{1}1\}$</p> 	<p>Milairit D_{6h}^2, Hexagonales Prisma $\{11\bar{2}0\}$, Hexagonale Dipyramide $\{10\bar{1}2\}$, Basispinakoid $\{0001\}$, Val Giuv, Schweiz</p> 	<p>Beryll, D_{6h}^2, Hexagonales Prisma $\{10\bar{1}0\}$, Hexagonale Dipyramiden $\{10\bar{1}2\}$ und $\{11\bar{2}2\}$, Basispinakoid $\{0001\}$, Minas Gerais, Brasilien</p> 

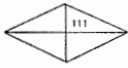
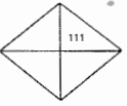

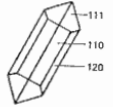
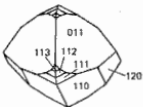
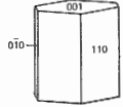
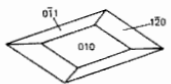

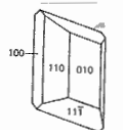
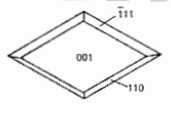
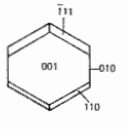
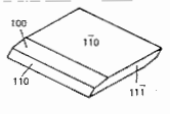


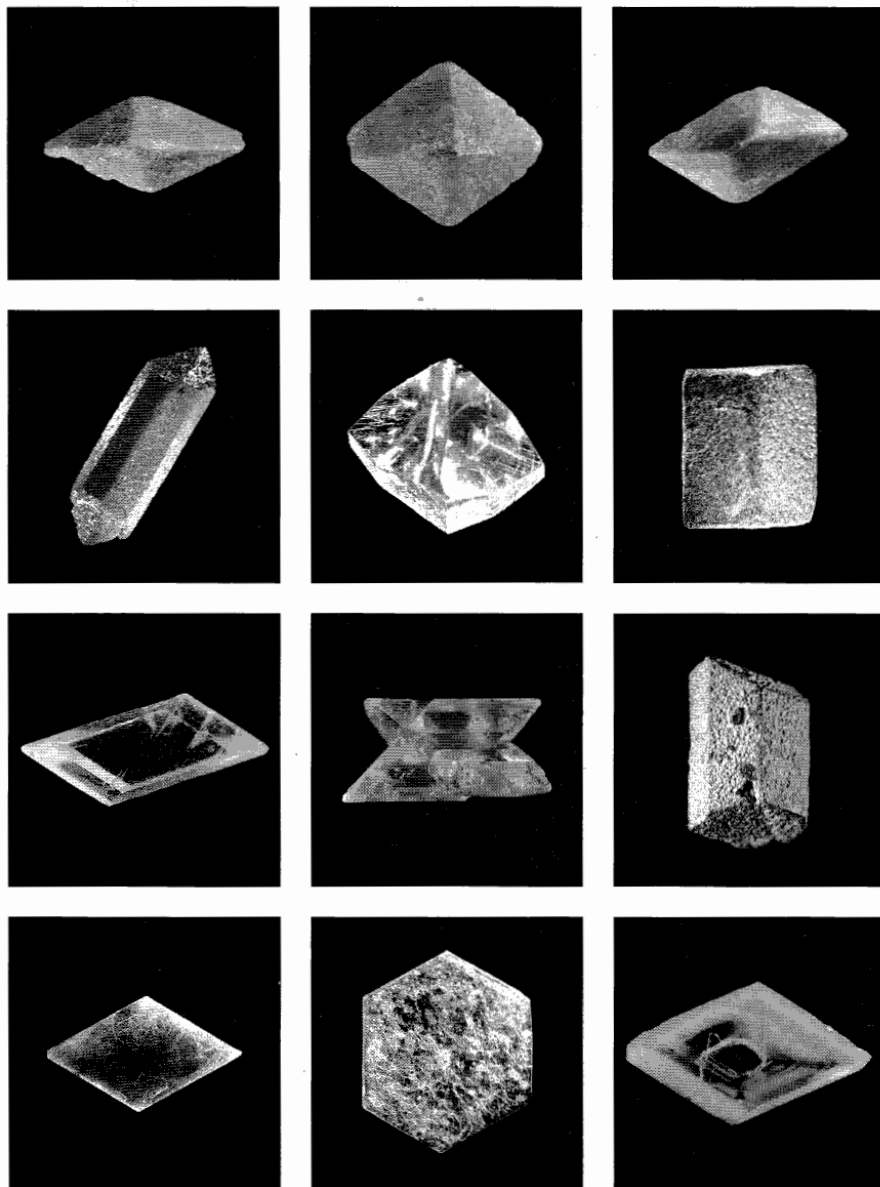
Tafel 6 Formen des trigonalen und des hexagonalen Systems

<p>Zirkon, D_{4h}^{19}, Tetragonale Dipyramide {101}, Projektion auf (001), Goias, Brasilien</p> 	<p>Zirkon, D_{4h}^{19}, Tetragonale Dipyramide {101}, Projektion auf (110), gleicher Kristall wie links</p> 	<p>Zirkon, D_{4h}^{19}, Tetragonale Dipyramide {101}, Projektion auf (100), gleicher Kristall wie links</p> 
<p>Anatas, D_{4h}^{19}, Tetragonale Dipyramide {101}, Kistevik, Hardanger Vidda, Norwegen</p> 	<p>Thorit, D_{4h}^{19}, Tetragonale Dipyramide {101}, Projektion auf (110), Arendal, Norwegen</p> 	<p>Zirkon, D_{4h}^{19}, Tetragonales Prisma {100}, Tetragonale Bipyramide {101}, North Carolina, USA</p> 
<p>Kassiterit, D_{4h}^{14}, Tetragonale Dipyramide {111}, Kosolo, Zaire</p> 	<p>Vesuvian, D_{4h}^4, Tetragonale Prismen {100}, {110}, Tetragonale Bipyramide {101}, Basispinakoid {001}, Wilui-Fluß, UdSSR</p> 	<p>Vesuvian, D_{4h}^4, Tetragonales Prisma {100}, Tetragonale Bipyramide {101}, Wilui-Fluß, Sibirien, UdSSR</p> 
<p>Boleit, D_{4h}^{17}, Pseudokubischer Drilling. Alle 3 Paare von gegenüberliegenden scheinbaren Würfelflächen zeigen das Basispinakoid {001}. Zwillingsfläche: Tetragonale Dipyramide {104}. Boleo, Mexiko</p> 	<p>Mellit, D_4^3, D_4^7, Tetragonale Dipyramide {111}, Artern, Tübingen</p> 	<p>Torbernit, D_{4h}^{17}, Basispinakoid {001}, Tetragonale Dipyramide {102}, Poppenreut, Oberpfalz</p> 



Tafel 7 Formen des tetragonalen Systems

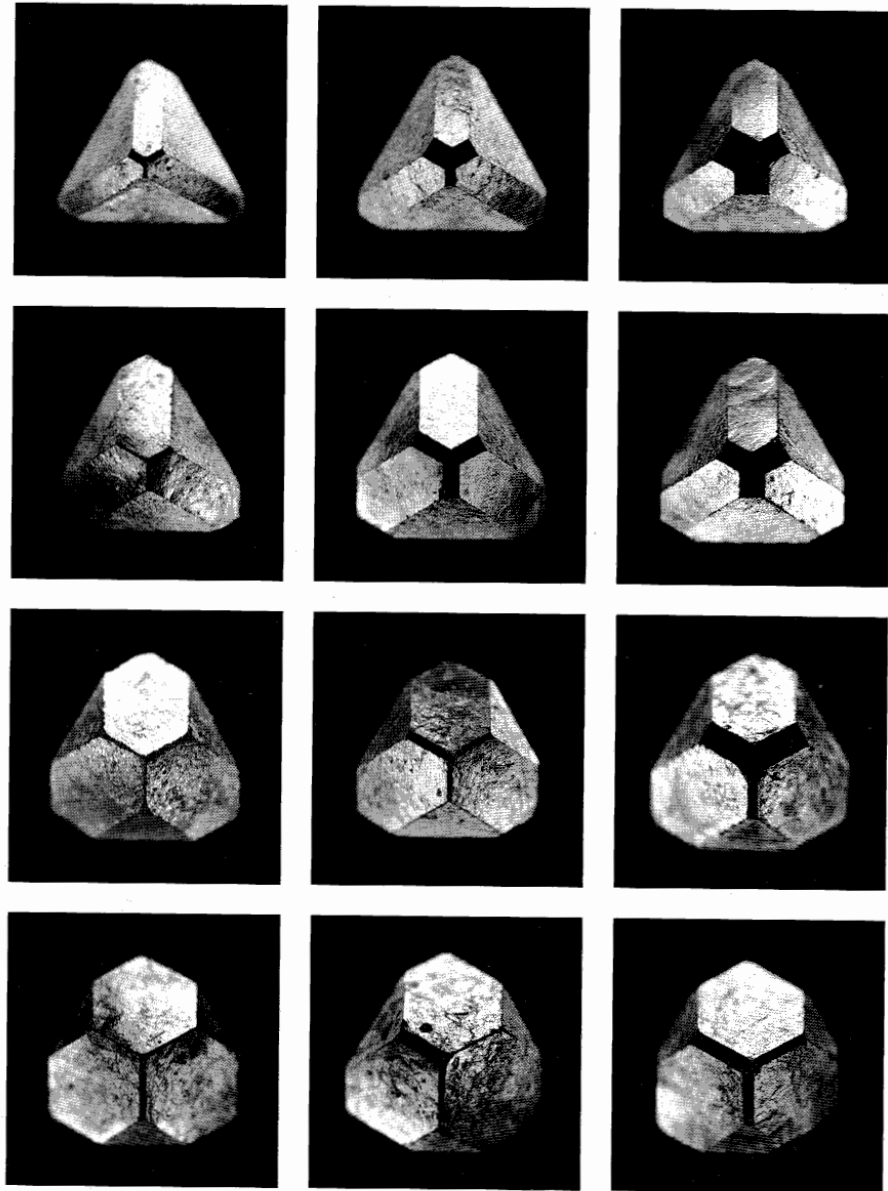
<p>Thenardit, D_{2h}^{24}, Rhombische Dipyramide $\{111\}$, Projektion auf $\{100\}$, Salinas, Bolivien</p> 	<p>Thenardit, D_{2h}^{24}, Rhombische Dipyramide $\{111\}$, Projektion auf $\{001\}$, gleicher Kristall wie links</p> 	<p>Thenardit, D_{2h}^{24}, Rhombische Dipyramide $\{111\}$, Projektion auf $\{010\}$, gleicher Kristall wie links</p> 
<p>Topas, D_{2h}^{16}, Prismen $\{110\}$ und $\{120\}$, Rhombische Dipyramide $\{111\}$, Thomas Range, Utah, USA</p> 	<p>Topas, D_{2h}^{16}, Prismen $\{110\}$ und $\{120\}$, Prisma $\{011\}$, Rhombische Dipyramiden $\{111\}$, $\{112\}$, $\{113\}$</p> 	<p>Staurolith C_{2h}^3, Prisma $\{110\}$, Pinakoide $\{010\}$ und $\{001\}$, Rio Arriba, New Mexiko, USA</p> 
<p>Gips C_{2h}^6, Pinakoid $\{001\}$, Prismen $\{120\}$ und $\{011\}$</p> 	<p>Gips, C_{2h}^6, Verwachsung, Pinakoide $\{010\}$ und Prismen $\{120\}$, $\{011\}$ Schweiz</p> 	<p>Augit, C_{2h}^6, Prismen $\{110\}$ und $\{111\}$, Pinakoide $\{100\}$ und $\{010\}$, Fundort: Bitze, Herkunft: Vulkaneifel?</p> 
<p>Muscovit, C_{2h}^6, Pinakoid $\{001\}$, Prismen $\{110\}$ und $\{111\}$, Henry Lincoln Co, North. Car. USA</p> 	<p>Muscovit, C_{2h}^6, Pinakoide $\{001\}$ und $\{010\}$, Prismen $\{110\}$ und $\{111\}$, Maine, USA</p> 	<p>Kupfervitriol, C_1^1, Pinakoide $\{110\}$, $\{100\}$, $\{110\}$ und $\{111\}$ synthetisch</p> 



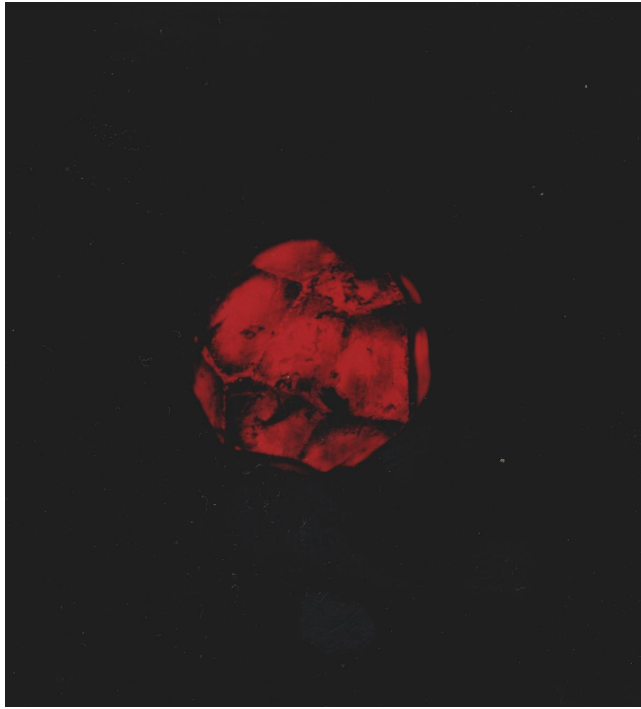
Tafel 8 Formen des orthorhombischen, des monoklinen und des triklinen Systems

Tabelle der auf Tafel 1 bis 9 abgebildeten Mineralien

Mineral	Gruppe	Formel	Gitterkonstanten
Achtarandit	—	Gemenge: Grossular, Kaolinit, Klinochlor, Pennin, Dolomit	
Almandin	O _h ¹⁰	Fe ₃ Al ₂ [SiO ₄] ₃	
Anatas	D _{4h} ¹⁹	TiO ₂	a:c = 1:2.511
Apatit	C _{6h} ²	Ca ₅ [(F, OH) (PO ₄) ₃]	a:c = 1:0.731
Aquamarin	D _{6h} ²	Al ₂ Be ₃ [Si ₆ O ₁₈]	a:c = 1:0.996
Augit	C _{2h} ⁶	CaMg[Si ₂ O ₆]	a:b:c = 1.092:1:0.589
Benitoit	D _{3h} ²	BaTi[Si ₃ O ₉]	a:c = 1:1.471
Beryll	D _{6h} ²	Al ₂ Be ₃ [Si ₆ O ₁₈]	a:c = 1:0.996
α-Boracit	T _d ⁵	Mg ₃ [Cl B ₇ O ₁₃]	
β-Boracit	C _{2v} ⁵	Mg ₃ [Cl B ₇ O ₁₃]	
Boleit	D _{4h} ¹⁷	(26 PbCl ₂ · 3 AgCl) · 24 Cu(OH) ₂ · 6 AgCl · 3H ₂ O	a:c = 1:4.03
Calcit	D _{3d} ⁶	CaCO ₃	a:c = 1:3.420
α-Chambersit	T _d ⁵	Mn ₃ [Cl B ₇ O ₁₃]	
β-Chambersit	C _{2v} ⁵	Mn ₃ [Cl B ₇ O ₁₃]	
Cobaltit	T _h ⁶	CoAsS	
Cuprit	O _h ⁴	Cu ₂ O	
Diamant	O _h ⁷	C	
Diopas	C _{3i} ²	Cu ₆ [Si ₆ O ₁₈] · 6H ₂ O	a:c = 1:0.534
Dolomit	C _{3i} ²	CaMg[CO ₃] ₂	a:c = 1:3.300
Gips	C _{2h} ⁶	CaSO ₄ · 2H ₂ O	a:b:c = 0.429:1:0.414
Granat	O _h ¹⁰	A ₃ B ₂ [RO ₄] ₃ , A = Mg, Fe, Mn, B = Al, Fe, Cr, R = Si, P ...	β = 127° 24'
Halit	O _h ⁵	NaCl	
Hauerit	T _h ⁶	MnS ₂	
Helvin	T _d ⁴	(Fe, Mn, Zn) ₈ [S ₂ (BeSiO ₄) ₆]	
Kassiterit	D _{4h} ¹⁴	SnO ₂	a:a:c = 1:0.672
Korund	D _{3d} ⁶	Al ₂ O ₃	a:c = 1:2.734
Kupfervitriol	C _i ¹	CuSO ₄ · 5H ₂ O	a:b:c = 0.572:1:0.558 α = 97° 35' β = 107° 10' γ = 77° 33'
α-Leucit	O _h ¹⁰	K[AlSi ₂ O ₆]	
β-Leucit	C _{4h} ⁶	K[AlSi ₂ O ₆]	a:c = 1:1.062
Limonit	—	Brauneisenerz. Hauptbestandteil: α-FeOOH	
Magnetit	O _h ⁷	Fe ₃ O ₄	
Malachit	C _{2h} ⁵	Cu ₂ [(OH) ₂ CO ₃]	
Mellit	D ₄ ³ , D ₄ ⁷	Al ₂ [C ₁₂ O ₁₂] · 18H ₂ O	a:c = 1:1.059
Milairit	D _{6h} ²	KCa ₂ AlBe ₂ [Si ₁₂ O ₃₀]	a:c = 1:1.328
Muskorit	C _{2h} ⁶	KAl ₂ [(OH, F) ₂ AlSi ₃ O ₁₀]	a:b:c = 0.574:1:2.221
Pyrit	T _h ⁶	FeS ₂	
α-Quarz	D ₆ ⁴ , D ₆ ⁵	SiO ₂	
β-Quarz	D ₃ ⁴ , D ₃ ⁸	SiO ₂	a:c = 1:1.100
Rhodochrosit	D _{3d} ⁶	MnCO ₃	a:c = 1:3.228
Sapphir	D _{3d} ⁶	Al ₂ O ₃	a:c = 1:2.734
Senarmontit	O _h ⁷	Sb ₂ O ₃	
Spinell	O _h ⁷	MgAl ₂ O ₄	
Staurolith	C _{2h} ³	2FeO · AlOOH · 4Al ₂ [O SiO ₄]	a:b:c = 0.473:1:0.341
Thenardit	D _{2h} ²⁴	Na ₂ SO ₄	a:b:c = 0.794:1:0.476
Thorit t	D _{4h} ¹⁹	ThSiO ₄	a:c = 1:0.889
Topas	D _{2h} ¹⁶	Al ₂ [F ₂ SiO ₄]	a:b:c = 0.528:1:0.955
Torbernit	D _{4h} ¹⁷	Cu[UO ₂ PO ₄] ₂ · 8-12H ₂ O	a:c = 1:2.904
Turmalin	C _{3v} ⁵	XY ₉ [(OH) ₄ (BO ₃) ₃ Si ₆ O ₁₈], X = Na, Ca, Y = Al, Mg, Fe, ...	
Vesuvian	D _{4h} ⁴	Ca ₁₀ (Mg, Fe) ₂ Al ₄ [(OH) ₄ (SiO ₄) ₅ (Si ₂ O ₇) ₂]	a:c = 1:0.757
Zirkon	D _{4h} ¹⁹	Zr[SiO ₄]	a:c = 1:0.901



Tafel 9 Boracit xx mit den Formen 100, 110, 111



*Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren
Sind Schlüssel aller Kreaturen
Wenn die, so singen oder küssen,
Mehr als die Tiefgelehrten wissen,
Wenn sich die Welt in's freie Leben,
Und in die Welt wird zurück begeben,
Wenn dann sich wieder Licht und Schatten
Zu ächter Klarheit werden gatten,
Und man in Märchen und Gedichten
Erkennt die ewigen Weltgeschichten,
Dann fliegt vor Einem geheimen Wort
Das ganze verkehrte Wesen sofort.*

4 Anhang zur *Geschichte der Kristallographie* und der *kristallographischen Gruppen*

von Erhard Scholz⁶⁸

Anfänge

Der griechischen Naturphilosophie galt der Bergkristall (Quarz) als nach der “Art des Eises” gebildet. Das Wort “krystallos” (κρύσταλλος) bezeichnete eine besonders reine und klare Substanz. Nach Ansicht des ionischen Naturphilosophen *Anaximandros* (6. Jhd. v.C.) bestand auch das Himmelsgewölbe, das an seinen hellen Stellen (Fixsterne) das Licht von Sonne und Mond reflektierte, aus diesem Material [229, pp. 11, 163]. In der Spätantike setzte sich die Vorstellung durch, dass der Bergkristall in langanhaltender, starker Kälte durch dauerhafte Verfestigung aus Eis entstanden wäre [289, Vol. 37, pp. 9f.].

Man traf auch an anderer Stelle auf ähnlich wohlgeformte Mineralien wie den Bergkristall, etwa beim Diamant und anderen Edelsteinen, sowie beim Pyrit, der zu Beginn der Eisenzeit besondere Aufmerksamkeit auf sich zog. In seiner auf Elba und in Norditalien auftretenden Form diente er möglicherweise als Vorlage etruskischer und keltischer Stein- und Bronzedodekaeder. Durch die Vermittlung des Pythagoras könnte er sogar bei der Herausbildung des Begriffs der regulären Polyeder in der griechischen Mathematik eine Rolle gespielt haben [239] (vgl. Haupttext S. 8f.). Beim Studium der regulären Polyeder richtete sich das Interesse griechischer Philosophen-

⁶⁸Ein Entwurf für diese Anmerkungen wurde 1986/87 geschrieben. Wie die historischen Anmerkungen zu LA I/II sind auch diese äußerst knapp gehalten. Für die vorliegende Publikation wurden sie stilistisch bearbeitet und moderat erweitert. Literaturverweise wurden ergänzt und aktualisiert. Allgemein ist für den gesamten Abschnitt auf [332] zu verweisen.

Wissenschaftler vorwiegend auf deren mathematische Eigenschaften (Theaitetos, Euklid), wurde aber auch mit bemerkenswerten philosophisch-ontologischen Spekulationen verbunden. So sah etwa Plato die Eigenschaften der vier Elemente der griechischen Ontologie als ein Abbild der Geometrie und Kombinatorik der regulären Körper an (Tetraeder – Feuer, Oktaeder – Luft, Ikosaeder – Wasser, Hexaeder – Erde) (vgl. Haupttext S. 3ff.) [229, pp. 322ff.].

Die griechischen Vorstellungen blieben bis in die frühe Neuzeit unangefochten. Während des Mittelalters wurden sie von arabischen Naturwissenschaftlern, etwa *Ibn Sina* (980–1037 n.C.), um Beschreibungen verschiedenster Mineralien und eine empirische Einteilung in vier Klassen erweitert: Steine, schwefelige Stoffe, wasserlösliche Salze, schmelzbare Körper. Diese Einteilung wurde in die frühneuzeitliche europäische Mineralogie übernommen und bis in das 18. Jahrhundert beibehalten (etwa bei Werner, Romé de l'Isle, s.u.).

Frühe Neuzeit

Die in der frühen Neuzeit aufkommende Sichtweise der Natur als ein in der Sprache der Mathematik geschriebenes Buch – wie es etwa G. Galilei formulierte – das in der Wechselwirkung empirisch messender und abstrahierend theoretischer Forschung zu dechiffrieren sei, hatte auch in der Mineralogie erste Auswirkungen. So lenkten etwa *Georgius Agricola* (1494–1555) und *Gerolamo Cardano* (1501–1576) schon während des 16. Jahrhunderts die Aufmerksamkeit auf die regelmäßige hexagonale Formbildung des Bergkristalls. Der Nürnberger Künstler *Wenzel Jamitzer* (ca. 1507–1585) zeichnete und modellierte über 140 regelmäßig gebaute Körper durch eine intuitive Variation der Formen der regulären Körper [245, p. 25f.] (vgl. auch Haupttext S. 91).

Zu Beginn des 17. Jahrhunderts wagte *Johannes Kepler* (1571–1630) einen Versuch der Entzifferung der Baugesetze des Universums durch einen umfassenden gedanklichen Entwurf [213, 214] (siehe die ausführliche Diskussion im Haupttext S. 100ff.). Darin nahmen die platonischen Polyeder (“vollkommenste und reguläre räumliche Kongruenzen”), die archimedi-

schen halbbregulären Polyeder (“vollkommenste Kongruenzen niederen Grades”), zwei von Kepler neu gefundene “vollkommenste reguläre” Polyeder, das große und das kleine Sternpolyeder (Haupttext S. 259), sowie Rhombendodekaeder und Rhombentriakontaeder als “vollkommenste halbbreguläre räumliche Kongruenzen” eine wichtige Stellung ein (Haupttext S. 254). Regelmäßigkeit definierte Kepler im antiken Sinne durch einen lokalen Vergleich als Kongruenz (in unserem Sinne – Kepler verwendete das Wort “Kongruenz” ja anders) der räumlichen Ecken, der Seitenflächen und/oder der Kanten. Bei den halbbregulären Körpern ließ Kepler jeweils zwei Kongruenzklassen räumlicher Ecken zu, die auf zwei konzentrischen Sphären angeordnet waren.

In einer anderen Arbeit, *Strena seu de Nive Sexangula* [212?], diskutierte Kepler die in der Natur auftretenden Formbildungsprozesse unter dem Gesichtspunkt ihrer Regelmäßigkeit (Haupttext S. 296): “sechseckige” Schneeflocken, Bienenwaben, Blüten, Granatäpfel, die oktaedrische Form beim Diamant und die “sechseckige” beim Quarz (Bergkristall). In der Sprechweise der “sechseckigen” (bzw. bei Blumen “fünf-” oder “zehneckigen”) Form trat deutlich ein morphologisches (nichtoperatives) Symmetriekonzept hervor.

Kristallgestalten und Symmetrien bis Ende des 18. Jahrhunderts

Die Mineralogie sieht einen entscheidenden konstitutiven Einschnitt für ihre Wissenschaft in der 1669 von *Nils Stensen* (1638–1686) veröffentlichten Entdeckung der Winkelkonstanz zwischen den Seitenflächen des Bergkristalls, unabhängig von Größe und Ausbildung der Flächen am speziellen Kristall [245, p. 55f.], [162, p. 3f.]. Lediglich ein Jahr später wurde die Doppelbrechung des Lichtes am isländischen Kalkspat entdeckt. Um dafür eine Erklärung zu finden, stellte *Christiaan Huyghens* (1629–1695) in seinem *Traité de la lumière* [203] die Hypothese eines Aufbaus der bekannten regelmäßig geformten Stoffe (Eis, Quarz, Diamant, Kalkspat, Salz usw.) aus aneinanderliegenden ellipsoidförmigen kleinsten Teilen auf. Aus dieser Annahme konnte er die drei bis dahin an diesen Stoffen beobachteten Phänomene erklären, die regelmäßige Formbildung, die verschiedene Spaltbarkeit in unterschiedliche Richtungen und die Doppelbrechung (beim Kalkspat).

Zu Beginn des 18. Jahrhunderts wurde die Bezeichnung “Crystal” schließlich auf die gesamte Klasse der regelmäßig geformten Mineralien übertragen [76]. Mit mikroskopischer Beobachtung, graphischer Darstellung und phänomenologischer Gestaltklassifikation bildete sich so die Kristallographie zu einer eigenen Teildisziplin der beschreibenden Naturwissenschaften (“Naturgeschichte”) heraus [245, pp. 73ff.].

Während des 18. Jahrhunderts gewann die Kristallographie an empirischer Breite und methodischer Präzision. Im deutschsprachigen Raum ragte *Abraham Gottlob Werner* (1750–1817) hervor, der die Terminologie zur Beschreibung der Kristallformen verschärfte [371], umfangreiche Studien zum Vorkommen und der Verwendung der Mineralien anstellte und die Geologie durch seine Hypothese der Gebirgsbildung durch Ablagerung in vorge-schichtlichen Meeren (“Neptunismus”) bereicherte. Er teilte die einfachen Mineralien noch ganz ähnlich wie die arabische Wissenschaft in Steine, Salze, brennbare Stoffe und Metalle ein. Bezüglich der Formbildung ging er von fünf Grundgestalten aus (Dodekaeder, Würfel, Säule, Doppel-/ Pyramide und die sogenannte “Tafel”) und studierte die durch Kanten- bzw. Eckenabstumpfung möglichen Formübergänge, wie zum Beispiel den Übergang vom Würfel zum (nicht ganz regelmäßigen) Dodekaeder und zum Ikosaeder [245, Tafel III]. Eine weitergehende mathematische Theoriebildung findet man bei ihm nicht.

Etwa zeitgleich arbeitete in Frankreich *Jean Baptiste Louis Romé de l’Isle* (1736–1790), beeinflusst von Linnés Klassifikation der Naturgeschichte, an einer Beschreibung und Einteilung der Mineralien. 1783 gab er einen Katalog der Formen von über 500 Kristallen heraus – ein vorher nicht annähernd erreichter Umfang. Die Formen leitete er ähnlich wie Werner aus sechs Grundgestalten durch Kanten- und Eckenabstumpfungen ab (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, rhombische Säule, rhombisches Oktaeder, hexagonale Dipyramide). Dabei ordnete er unter anderem auch das reguläre Dodekaeder und das Keplersche Triakontaeder der Gruppe des Würfels und seiner Modifikation zu [307, t.4, Tafel II] Dem kann man entnehmen, dass Romé de l’Isles Einteilung nicht primär nach Symmetriegesichtspunkten vorging. Sie war eher ein Resultat der von ihm gewählten Regeln zur Erzeugung der Kri-

stallformen; der Symmetrieaspekt spielte lediglich indirekt und bestenfalls implizit eine unterstützende Rolle.

Die von ihm in Auftrag gegebene Nachbildung der Kristallformen setzte eine genaue Kenntnis der auftretenden Winkel voraus und motivierte zur Erfindung und Einführung des *Kontaktgoniometers* als (mechanisches) Winkelmessgerät der Kristallographie. Die damit ermöglichte präzisere Winkelmessung an Kristallen führte zur Entdeckung der Winkelkonstanz als allgemeinem Gesetz kristalliner Formbildung [245, p. 124f.]. Noch waren die Messungen oder deren Auswertung allerdings nicht genau genug, um das reguläre Dodekaeder und Ikosaeder aus dem Bereich der zulässigen Kristallformen auszuschließen. Romé de l'Isle glaubte, sie unter den Formen des Elba-Pyrits finden zu können wie auch, weniger gut ausgebildet, das Rhombentriakontaeder [307, t.3, pp 232ff.].

Ein Ausschluss aus Symmetriegründen erfolgte erst durch *René-Just Haüy* (1743–1822) [245, p. 146f.]. Er widmete den mathematischen Gesetzmäßigkeiten der Kristallbildung im Laufe seines Lebens über 130 Artikel und mehrere Monographien. Haüy verfolgte das Programm, die vielfältigen Kristallgestalten durch Spaltungsversuche auf wenige einfache Grundgestalten zurückzuführen und umgekehrt aus diesen die komplizierteren durch Anlegen von Schichten parallelepipedischer Bausteine (“molécules intégrantes”) wiederzugewinnen. 1793 ging er von fünf Grundformen aus (Parallelepiped, Oktaeder, Tetraeder, gerades hexagonales Prisma, Rhombendodekaeder). In seinem Spätwerk *Traité de cristallographie*, ergänzte er diese um 11 weitere [178, pp. 263ff.]⁶⁹

Symmetriegesichtspunkte spielten bei der Auswahl der Grundgestalten keine ausgezeichnete Rolle, anders als beim daran anschließenden Aufbau. Beim Anlegen der Schichten an einen Kern in Grundgestalt ließ Haüy regelhaftes stufenförmiges Zurücktreten der Kanten jeder neuen Schicht zu; dadurch entstanden die neuen Formen. Dieses Zurücktreten der Kanten erfolgte notwendig in ganzzahligen Verhältnissen und schränkte so den Bereich möglicher Flächenwinkel an den Kristallen einer Gattung ein. Darüberhinaus sollte das Zurücktreten an “gleichartigen” (*identiques*) Ecken oder Kanten

⁶⁹Siehe etwa auch [245, pp. 134ff], [162, p. 46], [320, pp. 24ff].

einer Grundgestalt in gleichen Zahlenverhältnisses erfolgen. Diese schon in seinem ersten Aufsatz von 1784 enthaltene Idee präziserte Haüy im Laufe seines Lebens und bezeichnete sie schließlich 1815 als “Symmetriegesetz” des Kristallaufbaus [177, p. 81].⁷⁰ In diesem Kontext wurden zu Beginn des 19. Jahrhunderts die den Kristallgestalten inhärenten Symmetrieeigenschaften zum expliziten Thema der Kristallographie.

Kristallsysteme

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts machte sich im deutschsprachigen Raum der Einfluß der Naturphilosophie des deutschen Idealismus auch innerhalb der Mineralogie geltend. Dem “Atomismus” als grundlegender Hypothese des Materieaufbaus wurde der “Dynamismus” entgegengestellt, d.h. die Hypothese eines Systems anziehender und abstoßender Kräfte als Grundlage der materiellen Phänomene (einschließlich der Konstituierung der Atome bzw. Moleküle, wenn man sie denn schon als wirkliche Phänomene behandeln wollte und nicht nur als bloße Annahmen) [71, pp. 150ff.].

Christian Samuel Weiß (1780–1856), ein Schüler Werners der durch einen Aufenthalt in Paris auch mit Haüy und dessen Schule gut bekannt war, zeigte sich von Schellings Naturphilosophie so stark beeinflusst, dass er nach einer Auswertung der von Haüy entdeckten Formbildungsprinzipien suchte, ohne auf die Hypothese der “molécules intégrantes” zurückgreifen zu müssen. Er verband die Symmetrieidee mit der Annahme formbildender innerer Kräfte des Kristalls im Sinne des “Dynamismus” und entwickelte eine *Übersichtliche Darstellung der verschiedenen natürlichen Abtheilungen der Krystallisationssysteme* [365]. Er entdeckte, dass die bekannten Kristallformen nach dem Gesichtspunkt der Symmetrie in 7 Systeme eingruppiert werden können: das “gleichgliedrige oder sphäroedrische” (modern kubisches oder isometrisches System), das “4-gliedrige” (tetragonale), das “2- und 2-gliedrige” (orthorhombische), das “2- und 1-gliedrige” (monokline), das “6-gliedrige” (hexagonale), das “3- und 3-gliedrige” (trigonale) und das “1- und 1-gliedrige” (trikline) System.⁷¹ Beim “2- und 1-gliedrigen” sowie beim “1-

⁷⁰Vgl. [245, p. 140f.], [71, p. 155], [320, p. 27].

⁷¹Zu den Kristallsystemen siehe Haupttext S. 615.

und 1-gliedrigen" System arbeitete er wie beim "sphäroidischen" mit einem System orthogonaler Achsen. Diese etwas unglückliche, der geometrischen Konstellation nicht gut angepasste Achsenwahl wurde von F. Mohs [264] und C.F. Naumann [270] aufgegeben.

Die Einteilung erfolgte nach einem vage gehaltenen physikalisch interpretierten phänomenologischen Symmetriekonzept. So charakterisierte Weiß z.B. die Kristallformen des isometrischen Systems durch die Angabe "... drei Dimensionen gleich und rechtwinklig unter sich; oder mehr physikalisch ausgesprochen: Gleichheit des Gestaltungsactes in diesen drei Dimensionen..." [365, p. 29] und die des tetragonalen Systems durch "... 3 rechtwinklige Dimensionen, zwei unter sich gleich, aber von der dritten verschieden..." (p. 305) etc. Er stellte die einfachen Formen der vollen ("holoedrischen") Symmetrie des isometrischen Systems auf [365, p. 294], in späterer Terminologie also der Kristallklasse O^* , und diskutierte jeweils die zugehörigen Anzahlen "gleichwertiger Flächen", hier 48, 24, 12, 8, 6 (vgl. Haupttext S. 616). Darüber hinaus diskutierte er "halbflächige" oder "hemiedrische" Kristallformen des kubischen/isometrischen Systems (aus späterer Sicht also einfache Formen der Kristallklassen O , T_d oder T_h , jeweils vom Index 2 in der holoedrischen Klasse O^* des Systems). Bei diesen schienen ihm gewisse Flächen dominant zu werden und die Hälfte der Flächen einer einfachen holoedrischen (vollflächigen) Form zu unterdrücken.⁷²

Schritt für Schritt diskutierte Weiß die einfachen holoedrischen und einige hemiedrische Formen der Kristallsysteme. Beim triklinen ("1- und 1-gliedrigen") System schienen ihm schließlich, wie er formulierte, "... die Regeln vom Zusammengehören einer Mehrzahl von Gliedern ..." zu verschwinden, dies aber nicht vollständig. Direkt im Anschluss schränkte er ein, "... abgesehen von dem Gesetz, dass je zwei Flächen unter sich parallel und gleichen Werthes bleiben ..." [365, p. 321]. Dadurch deutete er das Vorliegen einer Punktsymmetrie an.

Die Kräfte analysierte Weiß nicht nur nach Symmetriegesetzen; sie unterlagen seiner Auffassung nach in ihren relativen Größen- und Lageverhältnissen darüber hinaus einem "Rationalitätsgesetz" [366]. In

⁷²Erläuterung hierzu mit Abbildung findet man in [320, p. 39].

seinem Rationalitätsgesetz transformierte Weiß die aus Häüys Theorie der Flächenbildung folgende Einschränkung für die möglichen Flächenkonstellationen (durch sukzessive zurücktretende, auf einem Kern aufliegende Schichten) in das Forschungsprogramm der hypothetischen flächenbildenden Kräfte. Diese sollten in seiner Sicht aus wenigen Grundkräften durch ganzzahlige oder rationale Zusammensetzung mit kleinen Zählern und Nennern zusammengesetzt sein.

Auch die empirische Untersuchung von Kristallen erreichte zu Beginn des 19. Jahrhunderts eine neue Stufe, bedingt durch die Ablösung des Kontaktgoniometers durch das genauere optische *Reflexionsgoniometer* (Wollaston 1809) und die Eröffnung eines systematischen Studiums der optischen Eigenschaften von Kristallen (A.J. Fresnel, D. Brewster, F. Neumann und andere). Im Ergebnis stellte sich ein besseres Verständnis der Beziehung zwischen Symmetrieeigenschaften der äußeren Form und inneren physikalischen Eigenschaften des Materieaufbaus von Kristallen ein [96], [162, pp. 93ff.].

Kristallklassen, Punktsymmetrien, rationale Vektorsysteme

Ergänzend zur physikalisch-empirischen Forschungsrichtung wurde, zunächst wenig beachtet, das theoretische Studium der Kristallgestalten und ihrer Symmetrien fortgesetzt. Der Physiker *Moritz Ludwig Frankenheim* (1801–1869) folgte grundsätzlich dem dynamistischen Ansatz von Weiß, betrachtete ihn aber nicht als Gegenposition, sondern eher ergänzend zum Atomismus der zeitgenössischen französischen Schule der Kristallographie. Er charakterisierte die an einer Kristallform auftretenden Flächen durch die Verhältnisse der Koeffizienten der zugehörigen linearen Gleichung, also etwa durch $(a : b : c)$ und stellte die daraus durch Kristallsymmetrien erzeugten Flächen in einer eigens dafür entwickelten Symbolik mittels Permutationen und Vorzeichenwechsel der Koeffizienten dar [143]. Er nannte das eine “Flächengruppe” (modernisiert Flächenorbit der Symmetriegruppe). Durch Auswertung des Weißschen Rationalitätsgesetzes konnte er, moderat anachronistisch formuliert, Rotationssymmetrien von anderer Ordnung als 6, 4, 3 oder 2 ausschließen.

Davon ausgehend, stellte Frankenheim eine Liste sämtlicher “vollständiger Flächengruppen”, also der einfachen Kristallgestalten, in den Weißschen Krystallsystemen zusammen.⁷³ Über die von Weiß zumindest schon teilweise betrachteten holoedrischen oder hemiedrischen Formen hinaus erhielt er eine Liste aller auch weiter symmetriereduzierten Formen (den “tetardoedrischen” bei Index 4, oder allgemein den “meriedrischen” bei beliebigem Index der Symmetriereduktion). Vom Resultat her erhielt er eine komplette Zusammenstellung der 32 Kristallklassen, ausgedrückt durch die algebraisch symbolisierten “Flächengruppen” der zugehörigen einfachen Kristallgestalten.⁷⁴

Johann Friedrich C. Hessel (1796–1872) entwickelte 1830 in einem auch separat publizierten Artikel für ein physikalische Lexikon eine über Weiß deutlich hinausgehende feinere Einteilung der Kristallsymmetrien [189]. Hessel verwendete in seiner “Lehre von der Gleichwerthigkeit räumlicher Dinge” ein Symmetriekonzept, das aufs Engste mit der Beschreibung zugehöriger symmetrischer Figuren (“Strahlensysteme” und Polyeder) verbunden war. Es legte fest, welche Punkte jeweils als “gleichwerthig”, in späterer Sprache also in symmetrischer Lage, anzusehen waren. Elementare Gleichwertigkeits- (also Symmetrie-) Beziehungen charakterisierte er durch die Einführung von “Achsen” beziehungsweise “Strahlen” verschiedenen Typs. Je nach Typ konnte eine solche Achse für Hessel neben rotativen Symmetriebeziehungen auch die Eigenschaft tragen, Spiegelungen (“horizontal” oder “vertikal” in der späteren etwa von Schoenflies verwendeten Sprache), Drehspiegelungen oder eine 2-zählige Rotationssymmetrie (zu einer ausgezeichneten schneidenden Orthogonalgerade) zuzulassen.⁷⁵ Verschiedene solcher Achsen konnten zu einem (endlichen) “Strahlensystem” zusammengestellt werden; die zugehörigen Symmetriebeziehungen mussten allerdings der Transiti-

⁷³Allerdings gruppierte Frankenheim etwas anders als Weiß. Er fasste das orthorhombische, monokline und trikline System (in heutiger Terminologie bezeichnet) als “zweigliedriges” oder “trimetrisches System” zusammen, das hexagonale und rhomboedrische System (heutige Terminologie) zum “sechsgliedrigen System”. Er reduzierte damit die 7 “Abtheilungen” von Weiß auf 4 “Systeme”.

⁷⁴Eine Lesehilfe für die Frankenheimschen Symbolik findet man in [70, p. 38f.].

⁷⁵Für Hessels eigenwillige Terminologie siehe etwa [320, p. 57].

vitätsforderung genügen. In seiner Diskussion der Frage, welche Symmetrieverhältnisse untereinander verträglich sind, trat der Systemcharakter der Symmetrien bei ihm dadurch deutlich hervor [189, Bd. 1, pp. 43, 49]. Vom Ansatz her enthielt seine Liste der Symmetrietypen eine implizite Aufzählung aller endlichen orthogonalen Gruppen im Raum.

Die kristallographisch relevanten Symmetrien zeichnete Hessel dadurch aus, dass sämtliche "Strahlen" einer Gestalt (bei Polyedern etwa die Normalen zu den Seitenflächen oder deren Projektionen), die in einer Orthogonalenebene zu einer Achse (Drehachse oder Normale zu einer Spiegelungsebene) liegen, aus drei von ihnen durch rationale Linearkombinationen zu erhalten sind. Hessel nannte dies die "Gerengesetzlichkeit" eines Strahlensystems; [189, Bd. 2, p. 48]. Daraus folgte eine drastische Einschränkung. Nicht jedes Strahlensystem erfüllte die Forderung eines "gerengesetzlichen Strahlenvereins". Dies galt für genau 32 von ihnen, den späteren *Kristallklassen*. Hessel gab deren 33 an - eine Klasse tauchte von ihm unbemerkt in zwei verschiedenen Formen auf [189, Bd. 2, pp. 92ff.].

Unabhängig und etwa zeitgleich mit dem an der Universität Marburg lehrenden Professor Hessel studierte der Stettiner Gymnasiallehrer *Justus Günther Graßmann* die Kristallbildung unter dem Gesichtspunkt der Kombination hypothetischer flächenbildender innerer Kräfte [160]. Zwar kam er in der Analyse der Symmetrietypen nicht so weit wie Hessel; aber ganz analog zu dessen Idee der "gerengesetzlichen Kombination" (vektorielle Linearkombination) formulierte Graßmann Ansätze einer "geometrischen Kombinationslehre" für das Studium der formbildenden Kräfte in Kristallen. Er entwarf so eine Vorform der Vektorrechnung mit ganzzahligen Koeffizienten ("Wiederholungsexponenten") und beschrieb ausgewählte Symmetriesysteme durch Permutationen und Vorzeichenwechsel der Koeffizienten. Dieser Ansatz wurde von seinem Sohn *Hermann Günther Graßmann* (1809–1877) aufgenommen, unter anderem in einem Artikel von 1839 im Schulprogramm der Ottoschule in Stettin [156]. Später, 1844 und noch einmal im Jahr 1862, baute Hermann Graßmann den Ansatz zur "Ausdehnungslehre" aus, die man später als eine n -dimensionale Vektorraumtheorie verstehen konnte [157, 158]. Am Rande verwies er dort auch auf die Anwendung rationaler

Linearkombinationen in der Kristallographie.

Die von M.L. Frankenheim (1826) oder J.G. Graßmann (1833) eingesetzte Idee einer Verbindung von Symmetrieoperationen und Permutationen ausgezeichneter geometrischer Elemente einer räumlichen Konfiguration wurde 1849 auch durch den Physiker, Astronom und Mathematiker *August Ferdinand Möbius* (1790-1868) aufgenommen [260, 261]. Er führte sie in eigenen, zu Lebzeiten unpublizierten Aufzeichnungen in einem systematischen Studium der Symmetrien endlicher Polyeder weiter und stellte eine Verbindung zu den in der zeitgenössischen Algebra studierten “Gruppen von Permutationen” her [263]. In diesem Studium der Polyedersymmetrien kam Möbius einer Untersuchung endlicher Isometriegruppen des euklidischen Raumes schon sehr nahe – noch vor der Herausbildung des allgemeinen Konzepts der geometrischen Transformationsgruppe durch Jordan, Lie und Klein. Seine Liste war allerdings nicht vollständig. In ihr fehlten die Symmetrien der durch Horizontalspiegelungen erweiterten Diedergruppen mit Hauptachse geradzahligter Ordnung (Schoenflies Notation D_{2k}^h). Eine Wirkung konnten seine Studien aus den genannten Gründen nicht entfalten.

Gauß, Seeber und die Brücke zur Zahlentheorie

Nicht lange nach dem Erscheinen der *Disquisitiones arithmetica* (siehe S. 633) versuchte *Ludwig August Seeber* (1793–1855) eine konzeptionelle Parallele zwischen der Reduktionstheorie positiv definiter ternärer Formen und der Kristallographie herzustellen. Zu Beginn der 1820er Jahre skizzierte er eine Theorie der kristallinen Materie, die von einem regelmäßigen Aufbau aus kugelförmigen kleinsten Teilen unbekannter Größe und Natur ausging. Zwischen diesen nahm er anziehende und abstoßende Kräfte an, die im ungestörten Zustand des Kristalls im Gleichgewicht stehen [328]. Für einen genaueren Ausbau dieser Theorie galt es, die unterschiedlichen Arten der gitterartigen Anordnung der kleinsten Teile mathematisch zu verstehen. Eine Chance dazu sah Seeber in der Ausarbeitung der Gaußschen Reduktionstheorie der quadratischen Formen für den positiv definiten ternären Fall [329, p. II, VIIf.]. Gauß stimmte dem nachdrücklich zu [147, p. 319f.]. Seeber gelang die Aufstellung einer vollständigen Liste der positiv definiten, redu-

zierten ternären Formen. Ihm war klar, dass dies einer geometrischen Klassifikation der Punktgitter im Raum entsprach. Wie man das allerdings für die Kristallographie nutzen konnte, blieb zunächst unklar. Das war erst sehr viel später zu ermitteln, nachdem die Symmetrie von Raumgittern und der kristallographischen Raumgruppen auf geometrische Weise ausgearbeitet worden war. Historisch gesehen stellte sich dies als eine Voraussetzung für die Formulierung einer arithmetischen Theorie der Raumgruppen heraus (siehe S. 708). In der Zwischenzeit war auch die Gaußsche Theorie der quadratischen Formen und ihrer Komposition zu einem wichtigen Forschungsthema in der Zahlentheorie des ausgehenden 19. Jahrhunderts geworden [153, chap. II.2, II.3]. Dirichlet, Minkowski, Voronoi und andere arbeiteten parallel dazu die Konvexgeometrie der mit den Formen verbundenen Flächen- und Raumteilungen aus [102, 250, 252, 253, 254, 358, 359, 360].⁷⁶

Gittersysteme und Raumgittertypen (Bravaistypen)

In Frankreich wurde das Studium von Symmetriesystemen weitgehend unabhängig von dieser Entwicklung weitergeführt. *Philippe Breton* etwa untersuchte 1845 geometrische Figuren mit mehreren Inversionszentren [54]. So erhielt er zu Symmetriekonstellationen derjenigen Isometriegruppen der euklidischen Ebene oder des Raumes, die von Systemen von Inversionen erzeugt werden, und entdeckte, dass im diskreten Fall die Zentren auf den Schnittpunkten eines gleichmäßigen Gitternetzes aus kongruenten Parallelepipeden (im Raum) liegen. Das harmonierte mit den neuesten Tendenzen in der kristallographischen Schule Haüy's. Dessen Schüler *Gabriel Delafosse* (1796–1878) hatte wenig vorher die Haüy'sche Hypothese des Kristallaufbaus in die Annahme einer raumgitterartigen Anordnung der Schwerpunkte der kleinsten Teile (Moleküle) der Kristallmaterie umgeformt [97, 98].

Auf diesem Hintergrund konnte *Auguste Bravais* (1811–1863) um die Jahrhundertmitte eine neue Theorie der Kristallstruktur formulieren (vgl. S. 227ff.). Hessels Arbeiten scheinen ihm unbekannt geblieben zu sein; jedenfalls begann er seine Arbeiten zur Kristallstruktur 1848 mit einer ei-

⁷⁶Zu Minkowskis *Geometrie der Zahlen* siehe den Kommentar von J. Schwermer in [153, pp. 583–504].

genständigen Untersuchung der Symmetrietypen endlicher Polyeder [48, 47]. In zwei nachfolgenden Arbeiten in den Jahren 1850 und 1851 untersuchte und klassifizierte er Punktgitter (“assemblages des points distribués régulièrement”) in der Ebene und im Raum nach Symmetriegesichtpunkten [50] und setzte die hier und bei den Polyedersymmetrien erzielten Ergebnisse in einer Studie zur Kristallographie um [51].

Schon in seinen Überlegungen zur Polyedersymmetrie arbeitete Bravais den operativen Gehalt des Symmetriekonzepts deutlicher heraus als Hessel 20 Jahre vorher und listete die von ihm gefundenen Symmetrietypen unter Angabe der zugehörigen Symmetrieelemente auf (Achsen, Spiegelungsebenen, Inversionszentren). In dieser Form gab Bravais eine nahezu vollständige Aufzählung der zu endlichen orthogonalen Gruppen im Raum korrespondierenden Symmetriekonstellationen, ähnlich wie auch Möbius noch vor der Herausbildung des expliziten Begriffs der Transformations- oder Isometrie-gruppe. Ihm entgingen dabei nur die Drehspiegelungen als selbständige Symmetrieelemente und damit die Gruppen $C_{2ni} = C_{4n}$ in Schoenflies' Notation.

Daran schloss Bravais eine Untersuchung über Punktgitter und ihre Symmetrien an [50, 52]. Er stellte fest, dass ebene Punktgitter aus Quadraten, Rechtecken, $120^\circ/60^\circ$ -Rhomben oder allgemeinen Parallelogrammen zusammengesetzt sind, also nur 2-, 3-, 4- oder 6-zählige Drehsymmetrien aufweisen, und fand darauf aufbauend 14 verschiedene Möglichkeiten (“mode de symétrie”), die 4 ebenen Gitter zu Raumgittern zusammenzufügen. Später nannte man dies die 14 *Raumgittertypen* oder auch *Bravaistypen* (siehe S. 626f.). Zu jedem Typ bestimmte Bravais die maximale Punktsymmetrie (“symbole de symétrie”). Dabei traten genaue 7 Punktsymmetriesysteme (entsprechend den orthogonalen Gruppen) auf. Dies führte ihn auf eine größeren Einteilung in 7 Gittersysteme im Raum. Sie entsprachen den holoedrischen Symmetrien der Weißschen Kristallsysteme und weitgehend den von Mineralogen um die Mitte des 19. Jahrhunderts verwendeten *Kristallsystemen* [51, p. 104].⁷⁷ Zwei Raumgitter desselben “Symmetriesymbols” betrachtete Bravais dabei nur dann als demselben *Typ* angehörig, wenn sie sich durch stetige Deformation ineinander überführen lassen, ohne an ir-

⁷⁷C.S. Weiß wurde von Bravais an dieser Stelle nicht erwähnt.

gendeiner Stelle die vorliegende holoedrische Punktsymmetrie zu verletzen [50, p. 50f.]. Des weiteren führte er unter Anspielung auf eine Dualisierungs-idee aus der projektiven Geometrie das *polare Gitter* zu einem vorgegebenen Punktgitter ein. Bis auf die Normierung der Abstände (und auf Punktsysteme übertragen) entsprach das dem späteren reziproken Gitter.⁷⁸

Beiläufig erwähnte Bravais eigentliche und uneigentliche Deckoperationen der Gitter [50, p. 36f.]. Das kam einer Betrachtung von Isometrien des gesamten Raumes – nicht nur begrenzter Konfigurationen – schon sehr nahe. Er vertiefte diesen Aspekt in seiner mathematischen Untersuchung von 1850 zunächst nicht weiter. In der anschließenden kristallographischen Arbeit führte er diese Überlegungen jedoch fort. Er ging davon aus, dass die Molekülsymmetrie durch Punktsymmetriesysteme charakterisiert werden kann und die Molekülzentren auf “regulär verteilten Punktsystemen” (Raumgittern) angeordnet sind. Dabei muss die Punktsymmetrie des Moleküls mit der Gittersymmetrie verträglich sein, d.h. in der holoedrischen Symmetrie des Gittersystems enthalten sein. Sie kann aber kleiner sein als letztere. Die von Bravais betrachteten (mathematischen) Kristallstrukturen führten ihn so auf die Betrachtung unendlicher Systeme von Symmetrieelementen, die über den gesamten Raum regelmäßig verteilt sind. Aus späterer Sicht gelesen, entsprachen Bravais Raumsymmetriesysteme im Kern denjenigen Raumgruppentypen, die als semidirektes Produkte jeweils einer Kristallklasse (als orthogonale Gruppe verstanden) mit einem Translationsgitter entsprechenden Gittertyps geschrieben werden können.⁷⁹

Vom Standpunkt der begrifflichen Entwicklung stechen Bravais Arbeiten in zweierlei Hinsicht hervor. Sie führten in den Kategorierahmen der Kristallographie zusätzlich zu den (vorher wenig bekannten) Kristallsystemen und Kristallklassen den Gesichtspunkt der Gittersysteme und sowie der Raumgittertypen und deren Deckbewegungen ein. Dabei deckten sich die aus dem dynamistischen Ansatz gewonnene Einteilung der Kristallsysteme mit

⁷⁸Mehr zu Bravais findet man in [320, pp.81ff.]; für die polaren Gitter siehe [12, p. 378].

⁷⁹Bravais’s Übersicht war nicht ganz vollständig. Sie enthielt (implizit) 71 von insgesamt 73 möglichen semidirekten Produkten; [320, pp. 89ff.]. In der Sprache der geometrischen Kristallographie werden diese semidirekten Produkte auch als *symmorphe Raumgruppen* bezeichnet.

dem atomistisch motivierten Konzept der Gittersysteme. Methodisch brachte Bravais den Symmetriegesichtspunkt bis an den Rand einer expliziten Betrachtung von Isometriegruppen. Seine Arbeiten lieferten gewissermaßen eine “Steilvorlage” für Jordans Übertragung des Gruppenbegriffs aus der Algebra in die Geometrie.

Gruppenbegriff, die 230 kristallographischen Raumgruppen

Camille Jordan (1838–1922), der sich in den 1860-er Jahren mit Galoistheorie, Permutationen und linearen Substitutionen beschäftigt hatte, machte den Gruppengesichtspunkt beim Studium der Bravaischen Symmetriesysteme 1869 explizit und verallgemeinerte ihn durch die Einführung des Konzepts einer “Bewegungsgruppe” (*groupe des mouvements*) [208]. Darunter verstand er ein unter Komposition abgeschlossenes System eigentlicher euklidischer Bewegungen. Er stellte eine Liste von 174 Typen solcher Gruppen auf, darunter die endlichen speziellen orthogonalen Gruppen [208, §§11–13], räumliche Gittergruppen (§7), verschiedene kristallographische Gruppen und nichtdiskrete Gruppen. Er verwies ausdrücklich auf Bravais Arbeiten als Anlass, den Gruppenbegriff von der Algebra in die Geometrie zu übertragen und zur Präzisierung und Erweiterung des in der Kristallographie entwickelten Symmetriekonzepts einzusetzen.

Das änderte nichts daran, dass Jordans Ansatz zunächst innerhalb der Kristallographie kaum zur Kenntnis genommen wurde. Eine Ausnahme bildete der Mineraloge *Leonhard Sohncke* (1842–1897), der 1867 ähnlich wie Bravais, symmetrische räumliche Punktkonfigurationen mit dem Ziel untersucht hatte, von der Phänomenologie der Kristallformen auf die räumliche Gruppierung der Moleküle zurückzuschließen. Jordans Ansatz erschien ihm als nützlich für seine Fragestellung; so studierte er die Jordansche Arbeit im Jahre 1875 unter dem Gesichtspunkt, welche der dort aufgeführten Bewegungsgruppen für die Kristallographie von Bedeutung waren. Er wies darauf hin, dass lediglich etwa ein Drittel der 174 von Jordan diskutierten Gruppen für die Kristallographie in Frage kamen (die eigentlich diskontinuierlichen). Andererseits fand er auch Lücken in Jordans Aufzählung und stellte schließlich eine Liste von 65 Symmetrietypen

zusammen [336]. Dabei argumentierte er weitgehend geometrisch, ohne die in den 1870-er Jahren gerade neu entstehenden Begriffe und Methoden der Gruppentheorie zu verwenden, und beschränkte sich der Zeit gemäß auf eigentliche Bewegungen [70].

Knapp zehn Jahre später wurden die 32 Kristallklassen von *Bernhard Minnigerode* zum ersten Mal in gruppentheoretischer Sprache formuliert und eine vollständige Liste der endliche orthogonalen Gruppen im dreidimensionalen Raum angegeben [258]. Im selben Jahr gab der Mathematiker *Arthur Schoenflies* (1853-1928) eine Herleitung der 65 eigentlichen Bewegungsgruppen der Kristallographie mit gruppentheoretischen Methoden [315]. Durch F. Klein darauf aufmerksam gemacht, dass es sinnvoll erschien, auch die orientierungsumkehrenden Operationen zu berücksichtigen, untersuchte Schoenflies in den folgenden Jahren die dadurch mögliche Erweiterung der Theorie und fand 162 weitere Gruppen, die auch uneigentliche Bewegungen enthielten [316].

Parallel dazu war der russische Naturforscher und Bergwerksdirektor *Evgraph Stepanovič Fedorov* (1853–1919) schon vor Schoenflies zu ähnlichen Ergebnissen gekommen, wenn auch mit anderen Methoden (siehe unten). Er wies Schoenflies auf 3 weitere Raumsymmetriesystem hin. So erschienen in Schoenflies' abschließender Darstellung *Krystallsysteme und Krystallstruktur* (1891) 230 kristallographische Gruppen [317], von denen allerdings wiederum Fedorov schon zum Zeitpunkt der Veröffentlichung zwei als identisch erkannt hatte [66, p. 241]. Schoenflies' Buch enthielt damit zwar "nur" 229 der 230 kristallographischen Gruppen; aber seine gruppentheoretische Darstellung arbeitete mit damals neuen mathematischen Methoden und machte die Verbindung zwischen Kristallographie und Gruppentheorie weit bekannt. Die geometrisch-anschauliche Darstellungsweise von Schoenflies macht sein Buch für heutige Leser allerdings streckenweise schwer lesbar.

Fedorov arbeitete schon seit 1882 an einer Theorie der Kristallstruktur. Auch er kannte Jordans Arbeiten, interessierte sich aber nicht für Bewegungsgruppen sondern suchte mit anderen, eher geometrisch-

kombinatorischen Methoden nach einer Klassifikation einfacher symmetrischer Gestalten im Raum. Aus seiner Sicht war die Kristallstruktur mit Polyederteilungen des Raumes verbunden, deren Zellen paarweise durch Translationen ineinander überführt werden können. Für solche Zellen prägte er den Begriff des *Paralleloeders*. Nach ausführlichen Studien kam er zum Ergebnis, dass es hinsichtlich des kombinatorischen Typs in der Ebene genau 2 und im Raum genau 5 Typen von Paralleloedern gibt (vgl. S. 639f.) [132, §77], [135, Teil II, Satz 8].⁸⁰

Fedorovs Beweis war schwierig nachzuvollziehen und mathematisch nicht ganz vollständig. In seiner Definition der Paralleloeder und der Herleitung ihrer Klassifikation fehlte eine Klärung der Eigenschaft der Zentralsymmetrie der konvexen Polyeder. Sein Beweis von [135, Teil II, Satz 8] blieb damit unvollständig.⁸¹ H. Minkowski stieß in seinen Studien zur Geometrie der Zahlen, genauer bei Untersuchungen von später nach Voronoi benannten Gebieten bezüglich Zahlengittern, auf ähnliche Fragestellungen wie Fedorov hinsichtlich der Raumteilungen. Er zeigte in diesem Rahmen, dass die auftretenden konvexen polyedrischen Gebiete mit paarweise parallelen Seitenflächen stets zentralsymmetrisch sind [251, p. 118]. Dies schloss, zumindest aus der Sicht von Schoenflies, die bei Fedorov gebliebene Lücke.⁸²

1890 publizierte Fedorov ein von ihm entwickeltes System der Kristallformen (auf russisch), in dem 229 Symmetriesysteme (entsprechend 229 Gruppen) auftraten [133]. Zu diesem Zeitpunkt glaubt er, es wären 230; ein System tauchte jedoch zweimal auf. Etwa um diese Zeit las er Schoenflies' Arbeit von 1889 und trat mit diesem in Korrespondenz. 1891 entdeckte und beseitigte Fedorov in seiner Aufzählung die letzte Lücke; dadurch machte er die Angabe der 230 Transformationsgruppen der Kristallographie schließlich

⁸⁰Für einen detaillierten Kommentar aus heutiger Sicht zu Fedorovs früher Arbeit [132] von 1885 siehe [334].

⁸¹Nach dem Urteil von Alexandrov [1, p. 359]. Siehe dazu auch [67].

⁸²Nach der Darstellung von Schoenflies (Brief an Fedorov vom 3.6.1892) ging Minkowski in seinem Vortrag auf der DMV-Tagung 1892 in Halle zunächst von einem weiteren Typ von Paralleloedern aus, stellte dies aber wenig später richtig [68, p. 123]. Möglicherweise beruhte diese Darstellung jedoch auf einem Missverständnis von Seiten Schoenflies', vgl. die spöttischen Bemerkungen Minkowskis über seine Korrespondenz mit Schoenflies in dieser Sache [257, p. 47].

komplett (deutsche Zusammenfassung in [136]).

Die Übereinstimmung zwischen Fedorovs und Schoenflies' Arbeiten wurde noch um die unabhängig gewonnenen Ergebnisse des englischen Kristallographen *William Barlow* (1845–1934) ergänzt, der zwischen 1884 und 1894 beim Studium räumlicher Kugelpackungen bis auf Nuancen auf dieselben Raumgruppentypen stieß [66]. Im Jahr 1903 stellte *Harold Hilton* die Ergebnisse von Fedorov und Schoenflies in übersichtlicher Form zusammen [192], ergänzt um Symmetriekarten der Raumgruppen. Weitere Darstellungen von Kristallographen folgten bald unter dem Eindruck der neuen Röntgenstrahlbeugungsmethoden zur Bestimmung der Kristallstruktur, darunter insbesondere im Jahr 1919 die “Geometrische Kristallographie des Diskontinuums” von P. Niggli [273]. 1922 publizierte *R. W. G. Wyckoff* (1897–1994) eine analytische Charakterisierung aller Raumgruppen durch die explizite Angabe der Koordinaten sämtlicher Punkte des Orbits eines frei wählbaren Punktes p bezüglich einer Raumgruppe G in einer vorgegebenen Einheitszelle Z , also von $\tilde{\mathfrak{P}} = G \cdot p \cap Z$ in der Bezeichnung von Abschnitt 3.6 (S. 654) [386]. Dabei war die Angabe der Lage vom Punkten mit nichttrivialer Standgruppe von besonderer Bedeutung für die Bestimmung einfach Kristallstrukturen. Sie heißen bis heute *Wyckoff Lagen (Positionen)*.

Paralleloederteilungen in der geometrischen Zahlentheorie

Von ganz anderer Seite stieß der in Warschau lehrende ukrainisch-russische Mathematiker *Georgi F. Voronoi* (1868–1908) auf Paralleloederteilungen des Raumes. Bei ihm ging es um Studien über quadratische Formen in n Variablen in der zahlentheoretischen Tradition Dirichlets, Minkowskis und Zolotarevs. Er arbeitete im n -dimensionalen affinen Raum und betrachtete die später nach ihm benannten n -dimensionalen Verallgemeinerungen der Dirichlet-Bereiche (siehe S. 639). Sein Ziel war eine Klassifikation quadratischer Formen in n Variablen als Verallgemeinerung des binären ($n = 2$) Falls [359, p. 203]. Er vermutete, dass jeder Paralleloederteilung des \mathbb{R}^n eine Klasse positiv definiter quadratischer Formen mit n Unbestimmten entspricht und umgekehrt. Dabei fasste er neben unimodular äquivalenten Formen auch solche mit proportionalen Koeffizienten zu einer Klasse zusammen

[359, p. 211].

Beweisen konnte er im allgemeinen Fall, dass die Voronoi-Bereiche einer positiv definiten Form eine Paralleloederteilung im zugehörigen \mathbb{R}^n bilden. Die umgekehrte Richtung konnte er nur für sogenannte *primitive* Paralleloeder zeigen. Diese sind dadurch ausgezeichnet, dass jede k -Seite mit genau $n + 1 - k$ entsprechenden Seiten der Raumteilung inzidiert [360, p. 111ff.]. In der Ebene und im Raum gibt es genau ein primitives Paralleloeder, das 6-Eck für $n = 2$ und das gestutzte Oktaeder (“Heptaeder” in Fedorovs Bezeichnung) für $n = 3$.

Darüber hinaus analysierte Voronoi in den Dimensionen $n = 2, 3, 4$ die Voronoi-Bereiche der Gitter positiv definiten quadratischer Formen. Für $n = 2$ fand er genau ein nicht-primitives Paralleloeder (das Parallelogramm), für $n = 3$ genau 4 Typen nicht-primitiver. Dies stand in frappierender Übereinstimmung mit Fedorovs Ergebnis. Da er von der Vollständigkeit der Liste Fedorovs ausging, hatte er gute Gründe zu vermuten, dass jede Paralleloederteilung des \mathbb{R}^3 von einer positiv definiten ternären Form induziert wird.

Für $n = 4$ fand er drei Typen primitiver Paralleloeder und eine Liste nicht-primitiver Paralleloeder [360, p. 157ff.]. Diese Liste wurde 1929 von *Boris Nikolajewitsch Delone* (1890–1980, auch als *Delaney* transkribiert)⁸³ auf 51 ergänzt und durch dessen Schüler Štogrin (1973) zu insgesamt 52 Typen vervollständigt (siehe [116, p. 238]). Delone bewies, dass für $n = 3$ und 4 jede Paralleloederteilung durch quadratische Formen induziert wird [104, p. 7]. Im Anschluss an eine Bemerkung von Niggli argumentierte er, dass die Ergebnisse der Reduktionstheorie quadratischer Formen (bei ihm der Selling Reduktion) für die Bestimmung der Kristallstruktur hilfreich sind [99]. In dieser Arbeit stellte er auch seine Analyse der 24 Symmetriesorten vor, in denen sich die Lagen der Symmetrieelemente mit den Voronoi Typen kombinieren können (siehe S. 642)

⁸³Nicht zu verwechseln mit dem Namensgeber der Delaney-Symbole (S. 610).

Diskrete Gruppen, arithmetische Theorie der Raumgruppen

Die Entdeckung von *Karl Rohn* (1855–1920), dass eine diskrete Isometrie-Gruppe des euklidischen Raumes mit kompaktem Fundamentalbereich schon eine kristallographische Raumgruppe ist [306], zeigte, dass die Arbeiten von Schoenflies und Fedorov auch eine vollständige Klassifikation der diskreten euklidischen Isometrie-Gruppen enthielten. Daran schloss *David Hilbert* (1862–1943) in seiner berühmten Rede auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris an, in der er als 18. Problem die Frage stellte, ob auch in höheren Dimensionen $n > 3$ die Anzahl der “wesentlich verschiedenen” diskreten Fundamentalgruppen mit kompaktem Fundamentalbereich endlich ist (Haupttext S. 308ff.).

Die Antwort kam schneller als bei den meisten anderen Problemen. 1910 bewies *Ludwig Bieberbach*, dass die Antwort bei Interpretation von “wesentlich gleich” im Sinne algebraischer Isomorphie positiv ist [22, 23]. Kurz darauf folgte die Verschärfung der Endlichkeitsaussage auch für “wesentlich gleich” im Sinne affiner Konjugation durch *Georg Frobenius* (1849–1917) [145] und Bieberbach im zweiten Teil seiner Arbeit [23]. In seiner Arbeit gab Frobenius an, wie die diskreten Raumgruppen im arithmetischem Ansatz durch Kongruenzgleichungen charakterisiert werden können. Dadurch wurden sie zumindest im Prinzip einer algebraischen Berechnung zugänglich gemacht (siehe S. 651).

Durch einen Hinweis von A. Speiser in der 2. Auflage von dessen Buch über endliche Gruppen [338, p. 229] auf das Problem aufmerksam gemacht, arbeitete der damals junge Züricher Mathematiker *Johann Jakob Burckhardt* (1903–2006) die von Frobenius skizzierte Idee Anfang der 1930er Jahre zu einer algebraisch-arithmetischen Methode der Berechnung der Raumgruppentypen aus, zunächst für die Ebene [62], danach für den Raum [63]. Dabei führte er das in diesem Ansatz sehr natürliche Konzept der arithmetischen Kristallklasse ein (siehe S. 649). Letzteres wurde wenig später vom Züricher Mineralogen P. Niggli (siehe unten) und dessen Schüler Werner Nowacki in der kristallographisch-mineralogischen Literatur bekannt gemacht [274].

Dass die arithmetische Methode auch in höheren Dimensionen anwendbar ist, legte Burckhardt wenig später dar [64]. Eine monographische Dar-

stellung des Ansatzes, ursprünglich schon Anfang der 1940er Jahre für die gelbe Serie bei Springer geplant, erschien aufgrund des Krieges schließlich erst 1947 bei Birkhäuser [65].⁸⁴ In der Zwischenzeit war der Ansatz weiter bekannt geworden. 1938 verallgemeinerte *Hans Zassenhaus* (1912–1991) die arithmetisch-algebraische Methode zu einem Entwurf für einen Algorithmus, mit dem kristallographische Raumgruppen auch für höhere Dimensionen n berechnet werden können. Der wurde in Zusammenarbeit verschiedener Mathematiker zwischen 1950 und 1973 für $n = 4$ ausgearbeitet und über den Computer ausgeführt (Bülow, Neubüser, Wondratschek, Brown et al.) [272, 61, 380].⁸⁵

Die arithmetische Theorie der Raumgruppen wurden unabhängig und ohne gegenseitigen Austausch mit der im gleichen Zeitraum entstehenden allgemeinen Theorie der Gruppenerweiterungen entwickelt. Deren Anfänge kann man in einer Arbeit *Otto Hölders* aus dem Jahr 1893 zur Theorie der Sylow-gruppen sehen [196]. Aber erst in den 20er und 30er Jahren des 20. Jahrhunderts begannen *Otto Schreier* [321], später auch *Reinhold Baer* und andere ein systematisches und allgemeines Studium von Gruppenerweiterungen. Baer [13, p. 389] übernahm dabei aus der Algebrentheorie die Terminologie von *Faktorensystemes* $f : H \times H \rightarrow N$ zur Definition eines *verschränkten Produkts* zweier Gruppen H und N zu einer neuen $G = H \times_f N$.⁸⁶

Hier nehmen wir zur Vereinfachung N als abelsch $(N, +)$ und als H -Modul an. Die von f abhängige Komposition in G wird definiert als

$$(h, n) \cdot (h', n') = (hh', n + h(n') + f(h, h')). \quad (4.25)$$

Sie erfüllt die Gruppenaxiome (insbesondere die Assoziativität) genau dann, wenn f neben $f(1, h) = f(h, 1) = 1$ der Bedingung

$$f(h_1, h_2) = f(h_1, h_2 h_3) - f(h_1 h_2, h_3) + h_1(f(h_2, h_3)) \quad (4.26)$$

genügt (vgl. in leicht abweichender Notation [200, p. 87]).

⁸⁴Siehe dazu [69].

⁸⁵Siehe dazu [59, 327] und [332, p. 51].

⁸⁶Schreier verwendete die Bezeichnung “Faktorensystem” nicht, führte aber entsprechende Rechnungen aus.

In den 1940er Jahren wurden Konzepte der algebraischen Topologie, insbesondere der Kohomologie, auf Gruppen übertragen, zunächst auf Fundamentalgruppen spezieller Räume bald aber auch allgemeiner (siehe [363, p. 806ff.]). Dabei stellten *Samuel Eilenberg* (1913–1998) und *Saunders Mac Lane* (1909–2005), beide in den USA, schon 1942/43 fest, dass die Faktorensysteme – die bei unserer additiven Schreibweise der Komposition in N besser als “Summandensysteme” bezeichnet wären – die Kozykelbedingung der 2. Gruppenkohomologie $d^3f = 0$ erfüllen und die Äquivalenz von Faktorensystemen modulo einer Untergruppe charakterisiert werden kann [111, p. 770] (vgl. S. 652). Ein Jahr später führten sie die Bezeichnung $Ext(N, G)$ für die Gruppenerweiterungen von N durch G ein und bewiesen deren Isomorphie mit der zweiten Gruppenkohomologie [112, p. 157]:

$$Ext(N, G) \cong H^2(G, N) \quad (4.27)$$

Zu einem ähnlichen Ergebnis kam unabhängig im durch Kriegshandlungen von der wissenschaftlichen Kommunikation mit den USA abgeschnittenen Westeuropa *Beno Eckmann* (1917–2008) [110, §2] (vgl. [363, p. 806]).

Burckhardt verfasste das Manuskript seines Buches [65] im Jahr 1943. Die geplante Drucklegung bei Springer kam aber durch Kriegseinfluss nicht zustande. Als er das Buch nach Kriegsende bei Birkhäuser zum Druck einreichte, war mittlerweile unter Experten die gruppenkohomologische Erweiterungstheorie bekannt. Der Bezug zu ihr war blieb natürlich in Burckhardts Buchmanuskript ungeklärt.⁸⁷

Eine explizite Verwendung kohomologischer Argumentation und Rechnung findet man in der Literatur über kristallographische Raumgruppen auch noch zwei Jahrzehnte später nur vereinzelt und auf die zweite Kohomologiegruppe konzentriert [8, 326]. Seit den 1980er Jahren wird sie in mathematisch orientierten Monographien zu diesem Themengebiet häufiger vorgestellt (etwa [228, 116]), nun auch mit dem auf Seite 653 skizzierten Argument, dass hier die erste Kohomologie (mit Werten im Quotienten bei

⁸⁷Vielleicht spielte das eine Rolle dafür, dass der mathematischen Fachgutachter für Verlag das Buch ablehnte (vgl. [69])? Es erschien jedenfalls schließlich in der *Mineralogisch-Geotechnischen Reihe* bei Birkhäuser.

uns $\tilde{\Gamma}/\Gamma$) die zweite Kohomologie mit Werten in Γ bestimmt. Dies betonte auch H. Zassenhaus in einem Vortrag Anfang der 1980er Jahre [390, p. 10f.].

Röntgenstrukturanalyse kristalliner Materie

Um die Wende zum 20. Jahrhundert hatte die mathematische Theorie der Kristallstruktur eine über die unmittelbaren Anforderungen der empirischen Forschung weit hinausgehende innere Differenzierung erreicht. Die experimentellen Methoden gestatteten zu diesem Zeitpunkt lediglich eine einigermaßen sichere Bestimmung der Kristallklassen. Ein empirischer Nachweis der Gitterstruktur oder gar die Gewinnung von Daten zur Bestimmung des Raumgruppentyps war mit den zeitgenössischen optischen oder mechanischen Methoden nicht möglich [238]. Mit der Entdeckung der Röntgenstrahlbeugung an Kristallen durch *Walter Friedrich* (1883–1968), *Paul Knipping* (1883–1935) und *Max von Laue*⁸⁸ (1879–1944) änderte sich das ab 1912 grundlegend [144].

Laue und seine Mitarbeiter sahen darin eine unmittelbare Bestätigung sowohl der Wellennatur der Röntgenstrahlen als auch der Gitterstruktur der Kristalle. Dies wurde allerdings nicht von allen Wissenschaftlern sogleich so gesehen. Selbst *William Henry Bragg* (1842–1942), der zusammen mit seinem Sohn *William Lawrence Bragg* (1890–1971) an Laues Beobachtung anschließend für die Entwicklung einer Methode zur Bestimmung der Struktur und der Gitterkonstanten einfacher Kristalle entscheidende Beiträge lieferte, ging noch für kurze Zeit von einer Korpuskulartheorie der Röntgenstrahlung aus [12, p. 116ff.]. Sein Sohn stellte dem eine wesentlich auf der Wellenauffassung beruhende Argumentation entgegen. Er schloss, dass durch die Interferenz von an parallelen Gitterebenen gestreuten Strahlen positive Überlagerung (und dadurch Intensitätspeaks) nur bei einer diskreten Serie von Winkeln auftreten, die vom Abstand der Gitterebenen abhängen (*Bragg's law*) [37, 35, 40]. Der Erfolg dieses Ansatzes überzeugte viele, darunter auch seinen Vater, von der Wellennatur der Röntgenstrahlen. Den

⁸⁸1912 noch Max Laue.

beiden Braggs gelang unter anderem die Bestimmung der Struktur von Zinkblende (ZnS, dem von Friedrich/Knipping/Laue verwendeten Material) und Steinsalz (NaCl), wie in Abb. 1.76 dargestellt, sowie der von Diamant (C) und Pyrit (FeS).⁸⁹

Für den Diamant erhielten die beiden Braggs eine Anordnung der (Schwerpunkte der) Kohlenstoffatome auf den Ecken und Seitenmitten eines flächenzentrierten kubischen Gitters (Typ $Fm\bar{3}m$, vgl. Abb. 3.106) und zusätzlich vier weitere Atome auf den innenliegenden Ecken vier (kleiner) Tetraeder, von denen je drei Ecken durch nächstliegende Punkte des flächenzentrierten Gitters gebildet werden [37, 38] (siehe Haupttext S. 361 und Abb. 1.76). Diese Punktconfiguration schien ihnen von der Symmetrie her keine besondere Auffälligkeiten aufzuweisen, obwohl es sich um einen Symmetriotyp mit nicht-symmorpher Raumgruppe handelte. Anders war das beim Pyrit; dort fiel ihnen auf, dass die Schwefelatome nicht einmal mehr in den Mittelpunkten der 8 Teilwürfel der kubischen flächenzentrierten Einheitszelle liegen und “einige der trigonalen Achsen verschwinden”. Darüber hinaus mussten sie die zweizählige Achsen der kubischen Holoedrie als durch Schraubenachsen repräsentiert annehmen [41, p. 257]. Diese Abweichung erschien den Braggs zunächst als eine Anomalie gegenüber ihren ursprünglichen Symmetrieerwartungen. Das führte sie dazu, auch eher unkonventionell erscheinende Symmetriesysteme aus der Barlowschen Klassifikation der diskreten Raumsymmetriesysteme für die Kristallographie in Erwägung zu ziehen [12, p. 184]. Eine genauere Analyse und Bestimmung des Symmetriesystems war jedoch nicht ihr Anliegen.

Für A. Schoenflies war dies anders. Auf Anregung des Herausgebers der *Zeitschrift für Kristallographie*, Paul Groth, analysierte er 1914 die Braggschen Ergebnisse aus Sicht der Raumgruppensymmetrie. Er bemerkte, dass schon die Symmetrie der Diamantstruktur durch eine nicht-symmorphe Raumgruppe charakterisiert ist. Schoenflies beschrieb sie durch den Orbit eines Punktes in spezieller Lage der Gruppe O_h^7 innerhalb der flächenzentrierten kubischen Einheitszelle [318, p. 566f.]. Die von W.L.

⁸⁹Für eine ausführliche Darstellung der frühen Röntgenstrukturanalyse von Kristallen siehe [12]; Historische Reminiszenzen der ersten Generation findet man in [128].

Bragg ermittelte Kristallstruktur des Pyrit (FeS_2) identifizierte er als eine Zusammensetzung aus dem Orbit eines Punktes p_0 spezieller Lage der Gruppe T_h^6 für die Eisenatome und zwei Orbits zu speziellen Punkten p_1, p_2 für die beiden Schwefelatome [319, p. 343f.]. Das System $\{p_0, p_1, p_2\}$ bezeichnete er als einen “Atomkomplex”.⁹⁰

Ab 1915 begannen auch Mineralogen, sich für die Raumgruppenstruktur einzelner Kristalle zu interessieren, darunter insbesondere *Shoji Nishikawa* (1884–1952), *Arrien Johnsen* (1877–1934) und der schon erwähnte R. Wyckoff [275, 206, 382, 383, 384]. Wyckoff wies 1921 in einem Artikel auf die Schlüsselbedeutung der Kenntnis der speziellen Lagen (nichttriviale Isotropiegruppen) einer Raumgruppe für die Bestimmung der Struktur eines Kristalls hin [385]. Im folgenden Jahr erschien sein Buch mit einer detaillierten Angabe der speziellen Positionen für alle Raumgruppen [386]. Sie werden heute *Wyckoff Positionen* genannt. Im nachfolgenden Jahrzehnt übernahmen auch W.L. Bragg und andere diese Überlegungen in das Methodenarsenal der Röntgenstrukturanalyse. Zwei seiner Studierenden stellten darauf hin, anscheinend ohne die Arbeiten von Niggli oder Wyckoff zu kennen, eine auf den Gebrauch für die empirische Strukturbestimmung zugeschnittene Tabellierung der Raumgruppen zusammen [11].⁹¹

In den Anfangsjahren dieser Methode war es hilfreich, von einer Streuung an einem 3-fach periodischen diskreten System nahezu punktförmiger Oszillatoren ausgehen. Den Autoren, W.H. Bragg, W.L. Bragg und anderen, war klar, dass dies eine starke Idealisierung bedeutete. Sie orientierten sich anfangs an dem Barlowschen Modell der Kugelpackungen als Bild für die Wirkungssphären der Atome [12, p. 122]. W.H. Bragg deutete schon 1915 in einer (publizierten) Vorlesung an, dass man jeden einzelnen Streuterm

⁹⁰Schoenflies suchte welche der von ihm klassifizierten Raumgruppentypen des kubischen Systems windschiefe dreizählige Drehachsen und für alle drei Atome des FeS_2 -Moleküls Orbits innerhalb der Einheitszelle von je 4 Elementen besitzen, $|(G \cdot p_j \cap Z)/\Gamma| = 4$ ($j = 0, 1, 2$). Auf diese Bedingungen hatten die Braggs aufgrund ihrer Beobachtungsdaten geschlossen. Die erste Bedingung erfüllen nur die zur hemiedrischen Kristallklasse T_h gehörenden Raumgruppen T_h^6 und T_h^7 . Durch die zweite Bedingung wird T_h^7 ausgeschlossen, weil sie keine 6-zähligen spezielle Punktlagen besitzt ($6 \cdot 4 = 24 = |T_h|$).

⁹¹Daraus gingen die späteren *Internationalen Tabellen zur Bestimmung der Kristallstrukturen* 1935ff. hervor [12, p. 137, 173f.].

an Kristallen nach Art der harmonischen Analyse auffassen kann und die periodische Dichtefunktion eines streuenden Mediums durch Fourieranalyse in eine Reihe harmonischer Terme zerlegen kann [36]. Für die Fourieranalyse an Kristallstrukturen wurde im Laufe der Jahre das Konzept des dualen (“reziproken”) Gitters wichtig. Dessen konzeptionelle Rolle für das Zustandekommen des Spektrums der Röntgenstrukturanalyse wurde 1921 von *Paul P. Ewald* (1888-1985) herausgearbeitet [127]. Ewald hatte schon früh bei der Herausbildung der Laue-Friedrich-Knipping Experimente eine beratende Rolle gespielt und kurz nach den ersten Beugungsexperimenten das Konzept des reziproken Gitters verwendet, allerdings zunächst ohne es genauer zu untersuchen [126].⁹²

Besondere Bedeutung gewann diese Methode für Versuche, die Elektrodendichte im Kristallgitter (im zeitlichen Mittel) durch eine kontinuierliche Verteilung zu modellieren. Dieser Gesichtspunkt gewann während der 1920er Jahre durch die Quantenmechanik erheblich an Gewicht und führte nach 1945 zur Modellierung des Streuprozesses durch Fouriertransformationen ([352, p. 222f.], [174]). Noch vor der Formulierung der “neuen Quantenmechanik” von Schrödinger beziehungsweise Born/Heisenberg/Jordan arbeitete eine Reihe von Autoren an einer auf Prinzipien der frühen Quantenmechanik beruhenden Streutheorie der elektromagnetischen Strahlung an gitterförmig angeordneter diskontinuierlich verteilter Materie. *William Duane* (1872–1935) stellte der wellentheoretischen Analyse im Jahr 1923 eine Überlegung gegenüber, bei der die Richtungsablenkung der elektromagnetischen Strahlung, als einen Streuprozess mit quantisierter Impulsübertragung in Richtung der Gittervektoren betrachtet wurde. Aus Dimensionsgründen nahm Duane dabei in Richtung eines Vektors mit Gitterabstand eine Quantelung des Impulses $\Delta p = \frac{h}{a}$ an und argumentierte, dass die daraus folgende Ablenkung mit dem (aus der Wellentheorie der Strahlung abgeleiteten) Bragg’schen Gesetz verträglich sei [107]. Dieser Vorschlag wurde von *Arthur H. Compton* (1892–1962) ausdrücklich gutgeheißen und weiter untermauert [82].

Wenig später bauten *Paul Sophus Epstein* (1883–1966) und *Paul Eh-*

⁹²Siehe dazu [12, p. 97f., 114f.].

renfest (1880–1933) den Ansatz in ihrer gemeinsamen Arbeit [119] zu einer Fourierreihendarstellung der gestreuten Strahlung aus. Sie argumentierten dabei mit einer (durch das Bohrsche Korrespondenzprinzip gestützten) Zusatzannahme, dass eine sinusförmige eindimensionale periodische Dichteverteilung (“sinusoidal grating”) $\rho(x) = \sin(\frac{1}{a}x - \delta)$ lediglich zu einer Impulsänderung $\pm \frac{\hbar}{a}$ führen kann. Mittels einer etwas großzügig gehandhabten Zerlegung einer allgemeineren eindimensionalen Dichteverteilung $\rho(x)$ in Sinusterme, $\rho(x) = \sum_j A_j \sin(\frac{j}{a}x - \delta)$, schlossen sie auf Impulsübertragungen in den Quanta $\frac{j\hbar}{a}$ mit jeweiliger Wahrscheinlichkeit A_j^2 . Das alles sahen sie nicht als eine konkurrierende Analyse zur Wellentheorie der Beugung an, sondern als eine aufgrund des Korrespondenzprinzips mit ihr kompatible quantenphysikalische Betrachtung. Duane verallgemeinerte dies sogar zu einer (wieder nur aus Sinustermen zusammengesetzten) Fourierreihe im Dreidimensionalen [108], konnte sie allerdings zunächst nicht numerisch auswerten.

Während den 1920er Jahren schlossen in den USA weitere Autoren daran an und ergänzten die ursprünglichen kombinatorisch-geometrischen Überlegungen der beiden Braggs bei der Bestimmung der Strukturanalyse einfacher Kristalle durch erste Schritte in Richtung einer Verwendung der Fourieranalyse [180, 179, 83].⁹³ Ende der 1920er Jahre führte W.L. Bragg eine zweidimensional Fourieranalyse für die Elektronendichte an einem $CaMg(SO_3)_2$ Kristall mit 14 Parametern durch [42]. Er leitete daraus zweidimensionale Graphen (Niveaulinien) der Elektronendichte ab, die im Prinzip – wenn auch nicht in der Genauigkeit – den im Haupttext wiedergegebenen Graphen entsprachen (S. 343).

Dies war für damalige Verhältnisse an der Grenze des vertretbaren Rechenaufwandes. Erst mit dem Aufkommen der elektronischen Rechner in den 1950er Jahren wurde diese Grenze überwindbar. Damit rückten 3-dimensionale Fourieranalysen und die numerische Approximation von Fouriertransformationen für den nicht-periodischen Fall in den Bereich des rech-

⁹³Dabei setzte zumindest Havighurst die Koeffizienten der Fourierreihe von ρ etwas vorzeitig mit der Quadratwurzel der Intensität der entsprechenden Komponente der gebeugten Strahlung gleich. Einen von 1 abweichenden Strukturfaktor für die Intensität der entsprechenden Streuungskomponente stellte er nicht in Rechnung.

nerisch Möglichen. Allerdings musste dazu das Problem der Phasenunterbestimmtheit gelöst beziehungsweise umgangen werden. Die dazu eingesetzten Methoden entziehen sich meiner (Hrsg.) Kenntnis. Der Hinweis auf einen historischen Rückblick eines der beteiligten Akteure [174] muss hier genügen.

Im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts entstand somit ein dynamisches Feld empirischer Erforschung der Feinstruktur der kristallinen Materie. Das schlug sich auch in der Herausbildung professioneller Institutionen nieder. Mitte der 1930er Jahre wurde die erste internationale Zusammenstellung kristallographischer Tafeln organisiert [10]. Sie wurden nach dem Weltkrieg, beginnend mit [187] in englischer Sprache, regelmäßig neu bearbeitet und aufgelegt. Gegen Ende des Weltkrieges II begannen auch Vorbereitungen zur Gründung einer internationalen Vereinigung. Im Sommer 1948 wurde die *International Union for Crystallography* unter maßgeblicher Beteiligung von W.L. Bragg, P.P. Ewald, R.W.G Wyckoff gegründet und mit den *Acta Crystallographica* ein neues internationales Fachjournal gestartet.

Konzeptionell baute das neue Wissensfeld auf die gegen Ende des 19. Jahrhunderts entstandene Theorie der symmetrischen Kristallgitter auf. Die mathematische Strukturtheorie wurde nach innen weiterentwickelt (arithmetische Theorie der Raumgruppen, Voronoi-Bereiche, reguläre Raumteilungen) und nach außen (Raumgruppentabellierung, spezielle Lagen, duale Gitter, Fourieranalyse) für die empirische Forschung nutzbar gemacht. Die Abweichungen der Molekülanordnungen und der Elektronendichte vom strikten mathematischen Symmetrietyp führten dabei keineswegs zu einer Relativierung von deren Bedeutung. Gitterstrukturen, translative Raumteilungen und aus Punktorbits zusammengesetzte Punktsysteme stellten sich trotz solcher Abweichungen als wichtig für die Analyse und Beschreibung der Struktur kristalliner Materie heraus.

Insbesondere bilden die 230 Raumgruppen, ihre Raumteilungen und Punktorbits bis heute den Kern eines Kategorienrahmens der geometrischen Kristallographie, in dem ein bedeutender Teil der empirischen Daten geordnet und interpretiert werden kann und der bis heute nicht voll ausgeschöpft ist. Wir haben gute Gründe, diese Konzepte als einen wichtigen Aspekt auch der Materiestrukturen selbst anzusehen. Aus mathematischer Sicht enthält

insbesondere das kombinatorische Studium 3-dimensionaler regulärer euklidischer Raumteilungen noch viele ungelöste Fragen und bildet heute und in absehbarer Zukunft ein offenes Feld für weitergehende Forschung (siehe [332, p. 53f.]).

Abbildungsverzeichnis

Abbildungen ohne Quellennachweis: Rechte beim Autor	
Umschlag Schneekristalle, Foto: Zeiss Oberkochen	i
Musica und Pythagoras, Kloster Aldersbach, Codex Clm 2599, 103 ^r	iii
1.1 Dodekaeder von Monte Loffa (nach Lindemann 1896)	9
1.2 Eine Verzierung von AS 10 (nach Marshall 1976)	13
1.3 Neol. Steinkugeln, AS 13, AS 122, National Museums of Scotland	17
1.4 Neol. Steinkugel, AS 10, National Museums of Scotland	18
1.5 Neol. Steinkugeln, AS 16, AS 176, National Museums of Scotland	19
1.6 Neol. Steinkugeln, AS 29, AS 80, National Museums of Scotland	20
1.7 Neol. Steinkugel spiralförm. Dekor., National Museums of Scotland	21
1.8 Neol. Steinkugeln, AS 109, AS 116, National Museums of Scotland	22
1.9 Neol. Steinkugeln, AS 117, AS 178, National Museums of Scotland	23
1.10 Fläche vierten Grades, Foto: G. Fischer	24
1.11 Stratifikation des Sporoderms	31
1.12 Schema des Pollenkorns von <i>Cobea scandens</i>	32
1.13 Pollen, Glockenrebe, Foto: W. Punt	34
1.14 Pollen Lerchensporn, Foto: W. Punt	35
1.15 Pollen Königin d. Nacht, Sandmohn, Foto: W. Barthlott, W. Punt	36
1.16 Pollen <i>Crocus k.</i> , Sporoderm 7000–10 000 x, Bild: R. Below	37
1.17 Sporentetrade, Pollentetrade, Foto: W. Barthlott, W. Punt	38
1.18 Pollen Kürbis, Erdrach, Foto: W. Barthlott, W. Punt	39
1.19 Asselkaktus, 40x, 56x, Foto: W. Barthlott	40
1.20 Asselkaktus, 225x, 1125x, Foto: W. Barthlott	41
1.21 Asselkaktus, 5625x, 22500x Foto: W. Barthlott	42
1.22 Coccusphäre 8500x, Bild: S. Jafar	43
1.23 Schwammnadel 1500x, Bild: R. Below	44
1.24 Skelettfragment Kieselschwamm, Bild: R. Below	45
1.25 Pentagramm	47

1.26	Baryzentrische Unterteilung der platonischen Körper	66
1.27	Euklid, reg. Tetraeder, nach C. Clavius 1574	70
1.28	Konstruktion von Tetraeder, Oktaeder, Hexaeder bei Euklid	71
1.29	Konstruktion von Dodekeder, Ikosaeder bei Euklid	72
1.30	Die Archimedischen Polyeder	80
1.31	Ineinander einbeschriebene reguläre Polyeder	83
1.32	Sphärenteilung der 5 platonischen Poeder	86
1.33	Sphärenteilung baryzentrisch unterteilte platonische Poeder	87
1.34	Archimedische Flächenteilungen der Sphäre I	88
1.35	Archimedische Flächenteilungen der Sphäre II	89
1.36	Netz Archimedisches Polyeder, Dürer 1525	93
1.37	Marmoreinlegearbeit von Paolo Ucello, ca. 1425, Bild: L. Saffaro	94
1.38	Pultkasten, ca. 1570, Foto: Museum f. Kunsthandwerk, Frankfurt/M.	95
1.39	Gedrechselte Kunststücke, um 1900, Foto nach K. Maurice	96
1.40	Archimedisches Polyeder (5,6,6), Abb. XXIII, Leonardo da Vinci 1497	97
1.41	Archimedisches Polyeder (5,6,6), Abb. XXIV, Leonardo da Vinci 1497	98
1.42	Tafel III aus Keplers <i>Mysterium Cosmographicum</i>	104
1.43	Fig. zu Prop. 14 bis 18, Kepler <i>Harmonices Mundi</i> Buch II	114
1.44	Fig. zu Prop. 19 und 20, Kepler <i>Harmonices Mundi</i> Buch II	115
1.45	Fig. zu Prop. 20 und 25 Kepler <i>Harmonices Mundi</i> Buch II	116
1.46	Monoedrische Flächenteilungen der Ebene durch Rhomben	126
1.47	Die 11 Archimedischen Flächenteilungen der Ebene	138
1.48	Archimedische Flächenteilungen mit Eckensymbolen und duale Laves-Teilungen mit Delaney-Symbolen	146
1.49	Archimedische Flächenteilungen und duale Laves-Teilungen (Fortstzg.)	147
1.50	Keplers Figur Aa fortgesetzt	151
1.51	Die 6 Flächenelemente von Penrose	153
1.52	Die 5 Figuren von Penrose	154
1.53	Penrose Muster	158
1.54	Rhombenteilung der Ebene	166
1.55	Kleins geometrische Darstellung der Kettenbruchentwicklung	190
1.56	Chrysanthemum leucanthemum	195
1.57	Phyllotaxis Hieracium sabaudum – Savoyer Habichtskraut	198
1.58	Punkt- und Parallelgitter der Phyllotaxis	204
1.59	Dirichletzelle des ebenen Gitters der Phyllotaxis	221
1.60	7 Archimedische Polyeder, Kepler <i>Harmonices Mundi</i> Buch II	266

1.61	6 Archimedische Polyeder, Kepler <i>Harmonices Mundi</i> Buch II	267
1.62	Halbreguläre Polyeder und ihre dualen, Delaney-Symbole 1	270
1.63	Halbreguläre Polyeder und ihre dualen, Delaney-Symbole 2	271
1.64	Halbreguläre Polyeder und ihre dualen Delaney-Symbole 3	272
1.65	Quasikristalle 1, Bilder: J.M.Lang, M. Audier, B. Dubost, P. Sainfort	279
1.66	Quasikristalle 2, Bilder: J.M.Lang, M. Audier, B. Dubost, P. Sainfort	280
1.67	Modelle Quasikristalle, Bilder: J.M.Lang, M. Audier, B. Dubost, P. Sainfort	281
1.68	Elektronenbeugungsdiagramm Quasikristall, Bild K. Urban	282
1.69	Elektronenmikroskopie Quasikristall (hochauflösend), Bild K. Urban	283
1.70	Die 5 konvexen monoedrischen Polyeder	295
1.71	Bienenwaben, Granatäpfel, Foto: E. Brieskorn	297
1.72	Koordinationspolyeder und Zellen der kubisch und hexagonal dichte- testen Kugelpackungen	324
1.73	Kubisch und hexagonal dichteste Kugelpackungen	325
1.74	Tetraeder-Oktaeder-Kantennetz der kubisch und hexagonal dichte- sten Kugelpackungen	328
1.75	Einfache Kristallformen Fluorit, 20x bis 120x, Foto: E. Brieskorn . .	334
1.76	Einige einfache Kristallstrukturtypen	357
1.77	Facsimilie Bosse, p. 340	412
1.78	Bosse: Desargues Konfiguration	413
1.79	Die Desarguessche Konfiguration	425
1.80	Konfiguration von Pascal und Pappus	431
1.81	Graph der Konfiguration von Pascal und Pappus	432
1.82	Vollständige Pappus-Konfiguration	437
1.83	Die Konfigurationen von Desargues und Pascal	439
1.84	Möbiuskonfiguration	450
1.85	Die Möbiuskonfiguration als Teil des Wurzelsystems D_4	456
1.86	Die 4 invarianten Steinersysteme $S(5, 6, 12)$ auf dem Ikosaeder	463
1.87	Schema islamischer Ornamente, Flächenteilung (3, 4, 6, 4)	465
1.88	Oben: Lavesteilung (3, 3, 4, 3)* (links), krummlinige Vierecksteilung (rechts). Unten rechts: Variation einer Peltenteilung	473
2.89	Brückner: Vielecke und Vielfache, Tafel VI rechts	603
2.90	Brückner: Vielecke und Vielfache, Tafel VII links	604
2.91	Brückner: Vielecke und Vielfache, Tafel VII rechts	605
2.92	Beispiel einer Kammergeometrie der hyperbolischen Ebene	607

3.93 Die Symmetrielemente der 5 kubischen Klassen in räumlicher Ansicht; oben: O^* , O , T_d , unten: T_h , T	614
3.94 Symmetrie-Karten (ebene Projektion) und Schoenflies-Symbole der 32 Kristallklassen, Quelle (Scholz 1989, Fig 15)	614
3.95 Die 7 Kristallsysteme und die 32 Kristallklassen	615
3.96 Die 7 einfachen Formen der Klasse O^*	616
3.97 Übergänge zwischen den einfachen Formen der Klasse O^*	616
3.98 7 einfache Formen der Klassen O_h und T_d	617
Erläuterung zu Tafel 1	617
3.99 Die 13 Formen der tetraedischen Klassen T_d , T_h und T	618
3.100 Die 15 einfachen Formen des kubischen Systems	619
3.101 Einfache Kristallformen 1	620
3.102 Einfache Kristallformen 2	621
3.103 Einfache Kristallformen 3	622
3.104 Zusammenstellung der 47 einfachen Kristallformen (Kopie im Nachlass E.B., Quelle unbekannt)	623
3.105 7 Gittersysteme	625
3.106 14 Bravaisstypen	626
3.107 Symmetriekarte von T_h^1 mit Legende	630
3.108 Symmetriekarten T_h^6	631
3.109 Notizen E. Brieskorns zur Seeber Reduktion	635
3.110 Zusammenstellung reduzierte Basen der Kristallographie 1	637
3.111 Zusammenstellung reduzierte Basen der Kristallographie 2	638
3.112 Die 5 Voronoitypen	641
3.113 Die 24 Delone-Typen	643
3.114 21 Delone-Typen mit charakteristischen Parallelepipeden	645
3.115 Delonetypen I	646
3.116 Delone-Typen II	647
3.117 Partialordnung der 24 Delone-Typen nach E.B.	648
3.118 Ikosaedrische Teilstrukturen von Boron	656
3.119 Fahlerz, Rutil	663
3.120 Mimetesit, Pyrargyrit	664
3.121 Kristallformen des Diamants nach Goldschmidt	665
3.122 Kristallformen des Pyrits nach Goldschmidt	666
Legende zu Tafel 1	668
10 Tafeln mit Fotos ausgewählter Mineralien samt Legende (Quelle E.B.)	

Tafel 1 Einfache Formen des kubischen Systems 669
 Legende zu Tafel 2 670
 Tafel 2 Einfache Formen der hexakisoktaedrischen Klasse (O^*) 671
 Legende zu Tafel 3 672
 Tafel 3 Einfache Formen der disdodekaedrischen Klasse (T_h) 673
 Legende zu Tafel 4 674
 Tafel 4 Einfache Formen der hexakistetraedrischen Klasse (T_d) 675
 Legende zu Tafel 5 676
 Tafel 5 Einfache Formen des trigonalen Systems 677
 Legende zu Tafel 6 678
 Tafel 6 Einfache Formen des trigonalen und des hexagonalen Systems . . . 679
 Legende zu Tafel 7 680
 Tafel 7 Einfache Formen des tetragonalen Systems 681
 Legende zu Tafel 8 682
 Tafel 8 Einfache Formen des monoklinen und des triklinen Systems . . . 683
 Tabelle der auf Tafel 1 bis 9 abgebildeten Mineralien 684
 Tafel 9 Boracit xx mit den Formen 100, 110, 111 685
 Granat-Kristall und Novalis-Text 687
 Rückseite Umschlag, Foto: G. Fischer 775

Feingliederung (zu Kap. 1, 2 von E.B.)

1	Einleitung (zu LA III §13.7, unvollendet)	1
1.1	Platonische und Archimedische Polyeder	1
	— Konstruktionen der regulären Polyeder bei Euklid und bei Pappos 73 — Die Archimedischen Polyeder bei Pappos 74 — “Dualität” der regulären Polyeder im späten Hellenismus 81 — Archimedische Flächenteilungen der Sphäre bei den Arabern 84 — Flächenteilungen in Kunst und Natur 90 — Das Interesse der bildenden Künstler in der Renaissance an Platonischen und Archimedischen Polyedern 91	
1.2	Kepler: Geometrie als ein göttlicher “Widerschein”	100
	Johannes Kepler: “Die Geometrie ist einzig und ewig” 100 — Johannes Kepler: Das Mysterium Cosmographicum 101 — Harmonice Mundi 103 — Reguläre Figuren als weltbildende Verhältnisse 108 — Aufbau der Weltharmonik 110 — Keplers Ansatz im 2. Buch der Weltharmonik 113 — Vergleich von Keplers Ansatz mit Ansätzen der modernen Strukturmathematik 117 — Flächenteilungen 119 — Kombinatorische Struktur und Symmetrie einer Flächenteilung 121 — Monogonale und monoedrische, isogonale und isoedrische Flächenteilungen 123 — Reguläre Flächenteilungen 125 — Archimedische und uniforme Flächenteilungen 134 — Die Symmetriegruppen der Archimedischen Flächenteilungen 140 — Laves-Teilungen als duale Teilungen zu den Archimedischen Flächenteilungen 145 — “Gewisse Ungetüme” 148 — Keplers Figur Aa 150 — Pflasterungen der Ebene mit aperiodischen Pflastersteinen, insbesondere solche von Penrose 152 — Der Begriff des Gnomons, figurierte Zahlen und der goldenen Schnitt 171	
1.3	Exkurs: Kettenbrüche, diophantische Approximation	172
	— Fibonacci-Zahlen, der euklidische Algorithmus, Kettenbruchentwicklungen 177 — Approximation von Irrationalzahlen 181 — Der goldene Schnitt ist die am wenigsten irrationale Irrationalzahl 188 — Felix Kleins geometrische Interpretation der Kettenbruchentwicklung 189 — Zurück zu Kepler: Seine Spekulationen über die vollkommene Proportion des goldenen Schnitts und die Fortpflanzungsverhältnisse der Pflanzen 191	

1.4 Kepler über Fibonacci-Zahlen, Phyllotaxis	191
— Phyllotaxis 195 — Zusammenhang mit der Reduktionstheorie ebener Gitter 205 — Zur Geschichte der Phyllotaxis: Schimper, Braun, Goethe, Gauß. Seeber, Bravais 223 — Modelle zur Erklärung der Phyllotaxis 230 — Dichotome Verzweigungen und Folgen von 0,1-Worten 233 — Ein Problem von Johann Bernoulli III, Christoffels Charakteristik einer Irrationalzahl, Methoden zu ihrer Berechnung von Markoff, neuere Arbeiten dazu 241 — Periodische Kettenbruchentwicklungen und quadratische Irrationalitäten 244 — Zusammenhänge zwischen 0,1-Folgen, Penrosepflasterungen und der Geometrie von hochdimensionalen Gittern 247 — Die Schnittprojektionsmethode für Gitter 252	
1.5 Halbrekuläre und rhombisch monoedrische Polyeder	252
— Zurück zu Keplers Weltharmonik: Seine Behandlung regulärer Polyeder 252 — Sternpolyeder, Rhombendodekaeder, Rhombentriakontaeder 253 — Die 13 Archimedischen Polyeder bei Kepler 259 Beziehungen zwischen Keplers Sicht dieser Polyeder und einer modernen Systematik 261 — <i>Bildtafeln</i> : Einfache Kristallformen, Bienenwaben, Granatäpfel, Quasikristalle, Modelle von Quasikristallen, Elektronenbeugungsdiagramme von Quasikristallen 277 — Betrachtung der kubisch dichtesten und der hexagonal dichtesten Kugelpackung unter verschiedenen Gesichtspunkten 285 — Konvexe monoedrische Polyeder mit rhombischen Flächen, spitzes und stumpfes goldenes Rhomboeder, Goldenes Rhombendodekaeder, Rhombenikosaeder, Rhombentriakontaeder 289 — Raumteilungen durch Rhombendodekaeder und hexagonale Wabenzellen 296	
1.6 Raumteilungen, Kugelpackungen, Wurzelsysteme	296
— Die zugehörigen kubisch dichtesten und hexagonal dichtesten Kugelpackungen 304 — Dichte von Kugelpackungen 307 — Das 18. Hilbertsche Problem 307 — Anisoedrische Polyeder 308 — Gitterförmige Kugelpackungen 314 — Wurzelsysteme 317 — Das Gitter der kubisch dichtesten Kugelpackung ist ein flächenzentriertes kubisches Gitter 318 — Physik und Geometrie von Kristallstrukturen 332	
1.7 Kristallstrukturen, Tammes Problem	332
— Die Energie eines Kristallgitters als Wert einer zahlentheoretischen Zetafunktion 344 — Ableitung einiger einfacher Kristallstrukturen aus den kubisch oder hexagonal dichtesten Kugelpackungen 354 — Lagerungen von kongruenten Kugeln und maximale sphärische Kontaktzahl 362 — k -maximale Lagerungen von Punkten auf der Sphäre 364 — Zusammenhang mit den neolithischen Steinkugeln und mit der Anordnung der Öffnungen von Pollenkörnern: Tammes Problem 366 — Die Lösungen für $k = 2, \dots, 12$ 367	

1.8 Konfigurationsräume von Kugelpackungen	371
— Zurück zum Problem der Lagerungen von Kugeln im Raume: Konfigurationen von 12 Kugeln, die eine Kugel berühren 371 Die Zopfgruppen der Ebene als Fundamentalgruppen ihrer Konfigurationsräume 375 —Die Fundamentalgruppen der Konfigurationsräume der Sphäre383 —Zusammenhang mit den früheren Überlegungen zur Spingruppe 385 —Etwas zur Kulturgeschichte von Zöpfen 387 —Die kubisch dichteste, die hexagonal dichteste und die ikosaedrische Konfiguration liegen in der gleichen Komponente des Konfigurationsraumes der Lagerungen von 12 Kugeln, die eine Kugel berühren 390 —Die binäre Ikosaedergruppe als kanonische Untergruppe der Fundamentalgruppe dieser Komponente des Konfigurationsraumes mit der ikosaedrischen Konfiguration als Basispunkt 401 — Der Homomorphismus von der Fundamentalgruppe des Konfigurationsraumes auf die symmetrische Gruppe der Menge der 12 Punkte der Ikosaederkonfiguration ist surjektiv; Erzeugung der Alternierenden Gruppe A_{12} durch 12 Zyklen der Ordnung 5 405 — Scharf m -fach transitive Gruppen 407 — Die Mathiegruppen 407 — Mathiegruppen als Automorphismengruppen von Steinerschen Systemen 409	
1.9 Exkurs: Klassische geometrische Konfigurationen	410
Beginn eines langen Exkurses über geometrische Konfigurationen 410 — Geschichte: 1648, Desargues 410 — Betrachtung der vollständigen Vielseite unter verschiedenen Gesichtspunkten 414 — Die regula sex quantitatum: Historisches und “moderne” Interpretation als Determinantenbedingung für Kollinearität 419 — Die Konfiguration von Desargues 424 — Das Neue an der projektiven Betrachtungsweise von Desargues 428 — Die Konfigurationen von Pascal und von Pappus 429 — Die vervollständigten Konfigurationen von Pappus und Pascal 436 — Pascal als Mathematiker und als Denker 440 — Auszüge aus den Pensées 444 — Die Möbiuskonfiguration 449 — Sie kann als eine Vereinigung von Unterwurzelsystemen des Wurzelsystems D_4 oder des dualen Wurzelsystems aufgefasst werden 452 — Zusammenhang mit dem Wurzelsystem F_4 455 — Ausblick auf den Zusammenhang der Möbiuskonfiguration mit dem Steinersystem $S(5, 6, 12)$ auf der Eckenmenge eines Ikosaeders 462	
1.10 Nachtrag: Kleiner Exkurs zu Flächenornamenten	464
Flächenhafte Ornamente, die durch Aneinanderfügen regelmäßiger Vielecke entstehen 464 — Archimedische Flächenteilungen 466 — Schmuckfußböden: Plattenmosaik 466 — Römische Fußbodendekoration 467 — Medaillon-Stil 468 — Mittelalterliche Schmuckfußböden 471	

2 Kombinatorische Geometrie u. Topologie der Polyeder	
(LA III §13.7.1, Fragment)	475
2.1 Polytope und Polytopkomplexe	475
Zwei Grundideen: Konvexität und Erzeugung von Figuren aus der Grundfigur des Halbraums 475 — Polytope und Raumstücke im affinen Raum 477 — Stützebenen 480 — Abgeschlossene Mengen als Durchschnitt von Stützhalbräumen 486 — Der Verband der Seiten einer abgeschlossenen konvexen Menge 487 — Kanonische Darstellung von Raumstücken und die Struktur ihres Randes 490 — Polytopkomplexe 497 — Anordnung von affinen Hyperebenen und Polytopkomplexe 499 — Die Raumstücke sind genau die konvexen Polytope 505 — Konvexe Hüllen 506 — Kompakte konvexe Polytope als konvexe Hüllen ihrer Eckpunkte: Hauptsatz der elementaren Polyedertheorie 510 — Einfachste konvexe Polytope: simpliziale Kegel und Simplizes 513	
2.2 Simplicies und simpliziale Komplexe	516
— Simpliziale Komplexe 518 — Endliche und unendliche Polytopkomplexe 519 — Unterteilungen von Polytopkomplexen, insbesondere baryzentrische Unterteilung 522 — Triangulierbarkeit von Polytopen 529	
2.3 Kategorien von Polytopkomplexen	530
— Isometrische Kategorien von Polytopen 530 — Diskussion affin-linearer Kategorien von Polytopen 534 — Kombinatorische Morphismen von Polytopkomplexen 539 — Simpliziale Abbildungen 541 — Stückweise lineare Kategorien 542 — pl-Kugel und pl-Sphären 550 — Der sphärische Dodekaederraum 551	
2.4 Sphärischer Dodekaederraum, Ikosaedersingularität	551
— Der sphärische Dodekaederraum als Umgebungsrand der Ikosaedersingularität 557 — Die doppelte Suspension des sphärischen Dodekaederraums ist homöomorph zu S^5 , aber keine pl-Sphäre, ein Gegenbeispiel zur Hauptvermutung 566	
2.5 Kombinatorische und pl-Mannigfaltigkeiten	571
— Kombinatorische Mannigfaltigkeiten und pl-Mannigfaltigkeiten 571 — Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten, die keine kombinatorischen Mannigfaltigkeiten sind 577 — Abstrakte Polytopkomplexe und simpliziale Komplexe 578 — Abstrakte Polytopkomplexe ohne Realisierung 580 — Realisierung von abstrakten simplizialen Komplexen 587 — Definitionen von pl-Mannigfaltigkeiten 592 — Ein ganz oberflächlicher Bericht zu einer der wichtigsten Errungenschaften der Mathematik des 20. Jahrhunderts: Die Klärung der Beziehungen zwischen den drei Mannigfaltigkeitsstrukturen TOP, PL, DIFF (unvollständig) 598	

Inhalt Lineare Algebra und Analytische Geometrie I bis III

Inhalt Band I

Kapitel I Einführung in die lineare Algebra und analytische Geometrie

§1 Wovon handelt die Mathematik §2 Gruppen §3 Wovon handelt die lineare Algebra? §4 Wovon handelt die analytische Geometrie?

Kapitel II Die Kategorie der Vektorräume

§5 Körper §6 Vektorräume §7 Matrizen

Kapitel III Affine Räume und lineare Gleichungssysteme

§8 Affine Geometrie §9 Lineare Gleichungssysteme

Kapitel IV Determinanten

§10 Determinanten

Inhalt Band II

Kapitel V Klassifikation der Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume

§11 Normalformen

Kapitel VI Vektorräume mit einer Sesquilinearform

§12 Vektorräume mit Hermiteschen Formen und ihre Endomorphismen

Inhalt Band III (geplant, nur teilweise realisiert)

Kapitel VII Geometrie im Euklidischen Raum

§13 Euklidische Geometrie §14 Geometrische Kristallographie

Inhalt des realisierten Teiles von Band III

13.1 Euklidische affine Räume und ihre Isometriegruppen 13.2 Die Länge von Kurven 13.3 Winkel 13.4 Spiegelungen und Drehungen 13.5 Die Klassifikation der Isometrien 13.6 Kegelschnitte

Inhalt des Nachlassfragments von Band III

13.7 Reguläre Polyeder

Einleitung 13.7.1 Kombinatorische Geometrie und Topologie der Polyeder (bis hier Fragment, nachfolgende Teile geplant)

13.7.2 Dualität, Eulerscher Polyedersatz 13.7.3 Endliche Untergruppen von $SO(3)$, $SU(2)$ und reguläre Polyeder 13.7.4 Kammergeometrien 13.7.5 Flächenteilungen

13.7.6 Der Hauptsatz der konvexen Typen 13.7.7 Delaney-Symbole

§14 Geometrische Kristallographie

Literaturverzeichnis

- [1] Alexandrov, Aleksandr D. 2000. *Convex Polyhedra*. Heidelberg: Springer. English translation from the Russian original 1950 by N.S. Dairbekov, S.S. Kutateladze and A.B. Sossinsky. 640, 705
- [2] Archimedes. 1962. Über das Gleichgewicht ebener Flächen oder über den Schwerpunkt ebener Flächen. In *Werke. Im Anhang: Kreismessung und Methodenlehre, übersetzt und herausgegeben von A.Czwalina, F. Rudio, H.G. Zeuthen*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft pp. 177–210. 65, 527
- [3] Aristophanes. 1861. *Die Wolken*. In *Die Lustspiele des Aristophanes*, Deutsch von J. J. C. Donner, Band 1. Leipzig/Heidelberg: Wintersche Verlagshandlung. 46
- [4] Arnold, Vladimir I.; Avez, André. 1968. *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. Amsterdam/Philadelphia: Benjamin. Reprint 1989 Addison Wesley. 185
- [5] Artin, Emil. 1925. “Theorie der Zöpfe.” *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 4(1):47–72. 375
- [6] Artin, Emil. 1947. “Theory of braids.” *Annals of Mathematics* 48:101–126. 378
- [7] Artin, Emil. 1957. *Geometric Algebra*. New York etc.: Interscience Publishers. 431
- [8] Ascher, Edgar; Janner, Aloysio. 1965. “Algebraic aspects of crystallography: Space groups as extensions.” *Helvetica Physica Acta* 38:551–572. 710
- [9] Ashley, Clifford W. 1944. *The Ashley Book of Knots*. New York: Doubleday, Doran and Co. 389
- [10] Astbury, William T., John D. Bernal, Carl Hermann, Paul Niggli and Ralph W.G. Wyckoff. 1935. *Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen*. Paris: Hermann. 716
- [11] Astbury, William T.; Yardley, Katherine. 1924. “Tabulated data for the examination of the 230 space-groups by homogeneous X-rays.” *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 232:333–394. 713

- [12] Authier, André. 2013. *Early Days of X-ray Crystallography*. International Union of Crystallography Oxford: University Press. 660, 661, 702, 711, 712, 713, 714
- [13] Baer, Reinhold. 1934. "Erweiterungen von Gruppen und ihren Isomorphismen." *Mathematische Zeitschrift* 38:375–416. 709
- [14] Baker, Alan. 1975. *Transcendental Number Theory*. Cambridge, New York: Cambridge University Press. 188
- [15] Balmelle, C. et al. 1985. *Le Décor géométrique de la Mosaïque Romaine*. Paris: Picard. 468
- [16] Barlow, William. 1883/84. "Probable nature of the internal symmetry of crystals." *Nature* 29:186–188, 205–207, 404. 332
- [17] Barlow, William. 1894. "Über die geometrischen Eigenschaften homogener starrer Strukturen." *Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie* 23:1–63. 332
- [18] Barlow, William. 1898. "Geometrische Untersuchung über eine mechanische Ursache der Homogenität der Structur und der Symmetrie; mit besonderer Anwendung auf Krystallisation und chemische Verbindung." *Zeitschrift für Kristallographie und Mineralogie* 29:433–588. 333
- [19] Becatti, Giovanni. 1961. *Scavi di Ostia, IV, Mosaici e pavimenti marmorei*. Roma: Istituto poligrafico dello Stato. 468
- [20] Becker, Otto (Hrsg.). 1965. *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft. 745
- [21] Bender, C. 1874. "Bestimmung der größten Anzahl gleich großer Kugeln, welche sich auf eine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen, auflegen lassen." *Archiv für Mathematik und Physik* 56:302–306. 365
- [22] Bieberbach, Ludwig. 1910. "Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume mit einem endlichen Fundamentalbereich." *Nachrichten Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften* pp. 75–84. 708
- [23] Bieberbach, Ludwig. 1910/1912. "Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume, Teil I, II." *Mathematische Annalen* 70, 72:70 297–336, 72 400–412. 708
- [24] Bilinski, Stanko. 1960. "Über die Rhombenisoeder (russ.)." *Glasnik Mat.-Fiz. I Astr* 15:251–262. 285
- [25] Bindel, Ernst. 1964. *Harmonien im Reiche der Geometrie in Anlehnung an Keplers 'Weltharmonik'*. Stuttgart: Verlag Freies Geistesleben. 149

- [26] Biot, Jean-Baptiste; Cauchy, Augustin-Louis et al. 1849. "Rapport sur un Mémoire de M. Bravais relatif à certains systèmes ou assemblages de points matériels." *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* 29:133–137. 230
- [27] Birman, Joan. 1974. *Braids, links, and mapping class groups*. Vol. 82 of *Annals of Mathematics Studies* Princeton: Universtiy Press. 375, 403
- [28] Birman, Joan; Libogor, Anatoly (eds.). 1988. *Braids, Proceedings of a Summer Research Conference held July 13-26, 1986*. Vol. 78 of *Contemporary Mathematics* Providence, R.I.: American Mathematical Society. 375
- [29] Böll, Heinrich. 1959. *Billard um halb zehn*. Köln: Kiepenheuer & Witsch. Diverse Neuauflagen; hier zitiert nach dtv: Frankfurt/M. 1974, 21. neu durchgesehene Auflage 1997. 363
- [30] Bonnesen, Tommy; Fenchel, Werner. 1934. *Theorie der konvexen Körper*. Berlin: Springer. 476
- [31] Borwein, David; Borwein, Jonathan H.W.; Taylor Keith F. 1985. "Convergence of lattice sums and Madelung's constant." *Journal for Mathematical Physics* 26:2999–3009. 350
- [32] Bosse, Abraham. 1648. *Manière universelle de M^r Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le géométral*. Paris: Des-Haye. Facsimile Ausgabe "Manière universelle de Monsieur Desargues", Archival Facsimiles Limited, Alburgh 1987. 410, 411
- [33] Bourbaki, Nicolas. 1968. *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6*. Paris etc.: Masson. Réimpression 1981. 317, 452, 458
- [34] Bradwardine, Thomas. 1989. *Geometria speculativa (Speculative Geometry)*. Latin text and English translation with an introduction and a commentary by George Molland. Vol. 18 of *Boethius* Wiesbaden/Stuttgart: Steiner. 91
- [35] Bragg, William Henry. 1913a. "The reflection of X-rays by crystals, part II." *Proceedings Royal Society London A* 89:246–248. 711
- [36] Bragg, William Henry. 1915. "X-rays and crystal structure. Bakerian Lecture." *Proceedings Royal Society London A* 215:523–537. 714
- [37] Bragg, William Henry; Bragg, William Lawrence. 1913b. "The reflection of X-rays by crystals." *Proceedings Royal Society London A* 88:428–438. 711, 712
- [38] Bragg, William Henry; Bragg, William Lawrence. 1913c. "The structure of diamond." *Proceedings Royal Society London A* 89:277–291. Deutsch in [39]. 712, 734

- [39] Bragg, William Henry; Bragg, William Lawrence. 1914a. "Die Struktur des Diamanten." *Zeitschrift für anorganische und allgemeine Chemie* 90(1):219–234. Deutsch von [38]. 733
- [40] Bragg, William Lawrence. 1914b. "The analysis of crystals by the X-ray spectrometer." *Proceedings Royal Society London A* 89:249–489. Deutsch in [41]. 711, 734
- [41] Bragg, William Lawrence. 1914c. "Die Analyse von Kristallen mit den Röntgen-Strahlenspektrometer." 90(1):246–269. Deutsch von [40]. 712, 734
- [42] Bragg, William Lawrence. 1929. "The determination of parameters in crystal structures by means of Fourier series." *Proceedings Royal Society London A* 123:537–559. 715
- [43] Braun, Alexander. 1831. "Vergleichende Untersuchung über die Ordnung der Schuppen an den Tannenzapfen, als Einleitung zur Untersuchung der Blattstellung überhaupt." *Acta Physico-Medica Academiae Caesariae Leopoldino-Carolinae Naturae Curiosum* 14(1):195–402. 224
- [44] Bravais, August. 1866. *Études crystallographiques*. Paris: Gauthiers-Villars. 734, 735
- [45] Bravais, Auguste. 1837. "Mémoires sur les lignes formées sur un plan par les points dont les coordonnées sont des nombres entiers." *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* 5:27. (Seulement le titre du mémoire et les noms des commissaires: Poisson, Sturm). 229
- [46] Bravais, Auguste. 1848. "Sur les propriétés géométriques des assemblages de points régulièrement distribués dans l'espace." *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* 27:601–604. 230
- [47] Bravais, Auguste. 1849a. "Mémoire sur les polyèdres de forme symétriques." *Journal de mathématiques* 14:141–180. Wiederabdruck in [44, IXX–LXII]. 701
- [48] Bravais, Auguste. 1849b. "Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie." *Journal de mathématiques* 14:137–140. Wiederabdruck in [44, XIII–XVII]. 701
- [49] Bravais, Auguste. 1849c. "Sur les applications de la théorie des assemblages à la cristallographie." *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* 28:289. (Seulement le titre du mémoire et les noms des commissaires: Poisson, Sturm). 230
- [50] Bravais, Auguste. 1850. "Mémoire sur systèmes formées par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace." *Journal de l'École Polytechnique* 19:1–128. 230, 701, 702

- [51] Bravais, Auguste. 1851. “Études cristallographiques.” *Journal de l’Ecole Polytechnique* 20:101–278. In [44, 101–278 (sic!)]. 701
- [52] Bravais, Auguste. 1897. *Abhandlung von regelmäßig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkte*. Dtsch. von C. und E. Blasius. Vol. 90 of *Ostwalds Klassiker* Leipzig: Teubner. 701
- [53] Bravais, Louis F.; Bravais, Auguste. 1839. *Über die geometrische Anordnung der Blätter und Blüthenstände*. Aus dem Französischen übersetzt von F. Wolpers. Breslau: Grass, Barth und Co. 228, 237
- [54] Breton, Philippe. 1845. “Théorie géométrique des centres multiples.” *Journal de Mathématiques* 10:430–434. 700
- [55] Brieskorn, Egbert. 1983/1985. *Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Bd. I, II*. Wiesbaden: Vieweg. v, 201, 552, 587
- [56] Brieskorn, Egbert. 1988. Automorphic sets and braids and singularities. In *Braids, Proceedings of a Summer Research Conference held July 13-26, 1986*, ed. J. Birman; A. Liboger. Vol. 78 of *Contemporary Mathematics* Providence, R.I.: American Mathematical Society pp. 45–115. 375, 382, 462
- [57] Brieskorn, Egbert. 2019. *Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Bd. III*. Abschnitte 13.1 bis 13.6 aus dem Nachlass herausgegeben von Andreas Beschorner et al. Berlin etc.: Springer. [Digitale Version auf Imaginary]. v, vii, 140, 385, 475, 531, 534, 552, 553, 556, 585
- [58] Brieskorn, Egbert, Knörrer Horst. 1981. *Ebene algebraische Kurven*. Basel: Birkhäuser. vi, 559, 563
- [59] Brown, Harold; Bülow, Rolf; Neubüser Joachim; Wondratschek Hans; Zassenhaus Hans. 1978. *Crystallographic Groups of 4-Dimensional Space*. Vol. 5 of *Wiley Monographs in Crystallography* New York: Wiley. 709
- [60] Brückner, Max. 1900. *Vielecke und Vielflache: Theorie und Geschichte*. Leipzig: Teubner. 602
- [61] Bülow, Rolf; Neubüser, Joachim; Wondratschek Hans. 1971. “On crystallography in higher dimensions. II. Procedure of computation in \mathbb{R}^4 .” *Acta Crystallographica Section A* 27:517–535. 709
- [62] Burckhardt, Johann Jakob. 1930. “Bemerkungen zur arithmetischen Theorie der Bewegungsgruppen.” *Commentarii Mathematici Helvetici* 2:91–98. 708

- [63] Burckhardt, Johann Jakob. 1933. "Zur Theorie der Bewegungsgruppen." *Commentarii Mathematici Helvetici* 6:159–164. 650, 708
- [64] Burckhardt, Johann Jakob. 1936. "Die Bewegungsgruppen in mehrdimensionalen Räumen." *Commentarii Mathematici Helvetici* 9:284–302. 708
- [65] Burckhardt, Johann Jakob. 1947. *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*. Vol. 2 of *Mineralogisch-Geotechnische Reihe* Basel: Birkhäuser. 2. Auflage 1966. 651, 653, 709, 710
- [66] Burckhardt, Johann Jakob. 1967/68. "Zur Geschichte der Entdeckung der 230 Raumgruppen." *Archive for History of Exact Sciences* 4:235–246. 704, 706
- [67] Burckhardt, Johann Jakob. 1969. "Über die Entdeckung der Paralleloeder." *Janus Organe de la société historique Néerlandaise des sciences médicales, exactes et naturelles* 56:241–243. 705
- [68] Burckhardt, Johann Jakob. 1970. "Der Briefwechsel von E.S. Fedorow und A. Schoenflies." *Archive for History of Exact Sciences* 7:91–141. 705
- [69] Burckhardt, Johann Jakob. 1985. "Paul Niggli Verdienste um die Herausgabe des Buches 'Die Bewegungsgruppen der Kristallographie'." *Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 130(1):115–117. 654, 709, 710
- [70] Burckhardt, Johann Jakob. 1988. *Die Symmetrie der Kristalle. Von René-Just Haüy zur kristallographischen Schule in Zürich*. Basel: Birkhäuser. 697, 704
- [71] Burke, John. 1966. *Origin of the Science of Crystals*. Berkeley/Los Angeles: University of California Press. 694
- [72] Burnet, Ioannes. 1905. *Platonis Opera, Tomus IV*. Clarendon. 57
- [73] Calvino, Italo. 1985. *Herr Palomar*. Aus dem Italienischen von Burkhard Kroeber. München: dtv. 33
- [74] Cannon, J.W. 1979. "Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimension three." *Annals of Mathematics* 110:83–112. 567
- [75] Cantor, Moritz. 1880–1908. *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 4 Bände*. Leipzig: Teubner. 74, 440, 442
- [76] Cappeler, Moritz Anton. 1723. *Prodromus Crystallographiae De Crystallis Improprae Sic Dictis Commentarium*. Luzern: Wyssing. 692
- [77] Capra, Fritjof. 1982. *Das Tao der Physik*. München: Scherz. 390

- [78] Carathéodory, Constantin. 1911. "Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen." *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 32:193–217. 509
- [79] Cartier, Pierre. 1980. "Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de géométrie combinatoire." *Séminaire Bourbaki* Exposé 561. 500
- [80] Caspar, Max. 1958. *Johannes Kepler*. Stuttgart: . 3. Auflage. 103
- [81] Cassels, J.W.S. 1957. *An Introduction to Diophantine Approximation*. Cambridge: University Press. 187
- [82] Compton, Arthur H. 1923. "The quantum integral and diffraction by a crystal." *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 15(11):359–362. 714
- [83] Compton, Arthur H. 1926. *X-Rays and Electrons. An Outline of Recent X-Ray Theory*. New York: Van Norstrand. 715
- [84] Conway, John H.; Sloane, Neil J.A. 1988. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Berlin etc.: Springer. 406
- [85] Conway, John H.; Sloane, Neil J.A. 1991. "Low dimensional lattices. VI. Voronoi reduction of three-dimensional lattices." *Proceedings of the Royal Society London A* 436:55–68. 640
- [86] Corner, Edred J.H. 1964. *The Life of Plants*. Chicago: University of Chicago Press. 232, 236
- [87] Cornford, Francis M. 1935. *Plato's Cosmology. The Timaeus of Plato*. Routledge. Reprint Indianapolis: Hackett 1997. 57, 63
- [88] Coxeter, Harold S.M. 1930. "The polytopes with regular-prismatic vertex figures." *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 229:329–425. 262
- [89] Coxeter, Harold S.M. 1948. *Regular Polytopes*. London and New York: Methuen and Pitman. 2nd edition London/New York: MacMillan 1963. 77, 82, 255, 273, 285, 364, 462, 478
- [90] Coxeter, Harold S.M. 1981. *Unvergängliche Geometrie*. Birkhäuser. Zweite Auflage; aus der zweiten englischen Ausgabe, New York: Wiley 1969, übersetzt von J.J. Burckhardt. 196, 305
- [91] Coxeter, Harold S.M.; Donchin, P.S. 1935. "An n -dimensional extension of Pythagoras' theorem." *Mathematical Gazette* 19:206ff. 285

- [92] Critchlow, Keith. 1979. *Time Stands Still - New Light on Megalithic Science*. London: Gordon Fraser. 14
- [93] Danzer, Ludwig. 1986. "Finite point-sets on S^2 with minimum distance as large as possible." *Discrete Mathematics* 60:3–66. 368, 371
- [94] de Bruijn, Nicolaas G. 1981a. "Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane." *Indagationes Mathematicae* 43:39–66. 161
- [95] de Bruijn, Nicolaas G. 1981b. "Sequences of zeros and ones generated by special production rules." *Indagationes Mathematicae* 43:27–37. 246
- [96] Deas, Herbert. 1959. "Crystallography and crystallographers in England in early nineteenth century. A preliminary survey." *Centaurus* 6:129–148. 696
- [97] Delafosse, Gabriel. 1840. "Recherches relatives à la cristallisation, considérée sous les rapports physiques et mathématiques." *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l' Académie des Sciences* 11:394–400. 700
- [98] Delafosse, Gabriel. 1843. "Recherches sur la cristallisation considérée sous les rapports physiques et mathématiques." *Mémoires des diverses savants* 8:641–690, 2 pl. 700
- [99] Delauney, Boris. 1933. "Neue Darstellung der geometrischen Kristallographie." *Zeitschrift für Kristallographie* 84:109–149. 640, 642, 707
- [100] Dickson, Leonhard E. 1921. *History of the Theory of Numbers, vol. II: Diophantine Analysis*. Washington: Carnegie Institution. 348
- [101] Diels, Hermann; Kranz, Walther, ed. 1903/1960. *Die Fragmente der Vorsokratiker*. Vol. 1 Berlin: Weidmannsche Buchhandlung. 9. Auflage (1960). 50, 58
- [102] Dirichlet, Peter Gustav Lejeune. 1850. "Ueber die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40:209–227. 634, 636, 700
- [103] Dobat, Klaus. 1985. *Blüten und Fledermäuse*. Frankfurt/M.: Kramer. 31
- [104] Dolbilin, Nikolai P. 2011. "Boris Nikolaevich Delone (Delaunay): Life and work." *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 275:1–14. 707
- [105] Dress, Andreas W.M. 1985. Regular polytopes and equivariant tessellations from a combinatorial point of view. In *Algebraic Topology*, ed. Larry Smith. Vol. 1172 Berlin etc.: Springer pp. 56–72. 608, 610

- [106] Du Val, Patrick. 1964. *Homographies, Quaternions and Rotations*. Oxford: Clarendon Press. 552
- [107] Duane, William. 1923. "The transfer in quanta of radiation momentum to matter." *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 9:158–164. 714
- [108] Duane, William. 1925. "The calculation of the X-ray diffracting power at points in a crystal." *Proceedings National Academy of Sciences* 11:489–493. 715
- [109] Dürer, Albrecht. 1525. *Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt, in Linien, ebnen unnd gantzen corporen*. Nürnberg: Hieronymus Andreae. 91
- [110] Eckmann, Beno. 1945–1947. "Der Cohomologiering einer beliebigen Gruppe." *Commentarii Mathematici Helvetici* 18:232–282. 710
- [111] Eilenberg, Samuel; Mac Lane, Saunders. 1942. "Group extensions and homology." *Annals of Mathematics* 43:757–831. 710
- [112] Eilenberg, Samuel; Mac Lane, Saunders. 1943. "Relations of homology and homotopy groups." *Proceedings National Academy of Sciences* 29:155–158. 710
- [113] Eisenstein, Gotthold. 1847. "Note sur la représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés." *Journal für reine und angewandte Mathematik* 35:368. 348
- [114] Emde, Helmut. 1978. *Geometrie der Knoten-Stab-Tragwerke*. Würzburg: Struktur-forschungszentrum e.V. 327
- [115] Emersleben, Otto. 1951. "Über die Konvergenz der Reihen Epsteinscher Zetafunktionen." *Mathematische Nachrichten* 4:468–480. 347
- [116] Engel, Peter. 1986. *Geometric Crystallography: An Axiomatic Introduction to Crystallography*. Dordrecht: Reidel. 636, 707, 710
- [117] Epple, Moritz. 1999. *Die Entstehung der Knotentheorie*. Braunschweig: Vieweg. 375
- [118] Epstein, Paul. 1903. "Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen." *Mathematische Annalen* 56:615–644. 347
- [119] Epstein, Paul Sophus; Ehrenfest, Paul. 1924. "The quantum theory of the Fraunhofer diffraction." *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 10(4):133–139. 715
- [120] Erdtmann, G. 1969. *Handbook of Palynology: Morphology, Taxonomy, Ecology*. Hafner Publ. Co., N.Y. 26

- [121] Euklid. 1883–1888. *Euclidis Elementa. Editio et latine interpretatus est I. L. Heiberg.* Leipzig: Teubner. 53
- [122] Euklid. 1933–37. *Die Elemente, Buch I–XIII.* Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von C. Thaer. Leipzig: Teubner. Reprint Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1973. 54, 256
- [123] Euler, Leonhard. 1911. *Opera Omnia. Series 1; Opera mathematica, vol. 1: Vollständige Anleitung zur Algebra mit den Zusätzen von Joseph Louis Lagrange.* Basel: Birkhäuser. 189
- [124] Evans, Robert C. 1976. *Einführung in die Kristallchemie.* Berlin: de Gruyter. 333
- [125] Evjen, H.M. 1932. “On the stability of certain heteropolar crystals.” *Physical Review* 39:675–687. 351
- [126] Ewald, Paul Peter. 1913. “Zur Theorie der Interferenzen der Röntgenstrahlen in Kristallen.” *Physikalische Zeitschrift* 14:465–472. 714
- [127] Ewald, Paul Peter. 1921. “Das reziproke Gitter in der Strukturtheorie.” *Zeitschrift für Kristallographie. International Journal for structural, physical and chemical aspects of crystalline materials* 56:129–156. 714
- [128] Ewald, Peter Paul (ed.). 1962. *Fifty Years of X-Ray Diffraction. Dedicated to the International Union of Crystallography on the Occasion of the Commemoration Meeting in Munich July 1962.* Utrecht: Oosthoek 712
- [129] Fadell, E.; Neuwirth, L. 1962a. “Homotopy groups of configuration spaces and the string problem of Dirac.” *Duke Mathematical Journal* 29:231–242. 374
- [130] Fadell, Edward; Neuwirth, Lee. 1962b. “Mathematica Scandinavica.” *Duke Mathematical Journal* 10:111–118. 374
- [131] Fadell, Edward; van Burskirk, James. 1962c. “The braid groups of E^2 und S^2 .” *Duke Mathematical Journal* 29:243–258. 378
- [132] Fedorov, Evgraph S. 1885. “Načala učenija o figurach (Elemente der Gestaltenlehre).” *Verhandlungen der Russisch-Kaiserlichen Mineralogischen Gesellschaft zur St. Petersburg* (2) 21:1–279. Zusammenfassung und Auszüge in [134]. 277, 705, 741
- [133] Fedorov, Evgraph S. 1890/91. *Simmetrija pravil'nych figur.* St.-Petersburg: (Sonderdruck 1890). In *Zapiski Imperatorskago St.-Peterburgskogo Mineralogičeskogo Obščestva* 28: 1891, 1—146. Englisch in [137, 50–131]. 705

- [134] Fedorov, Evgraph S. 1893. "Elemente der Gestaltenlehre." *Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie* 21:679–694. Deutsche Zusammenfassung von [132]. 277, 285, 740
- [135] Fedorov, Evgraph S. 1895–1905. "Theorie der Krystalstruktur. Einleitung, Teil I – III." *Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie* 24, 25, 36, 40:24 (1895), 209–252; 25 (1896), 113–224; 36 (1902), 209–233; 40 (1905), 117–315. Englisch in [137, 177–315]. 705
- [136] Fedorov, Evgraph S. 1896. "Einige Betrachtungen über die Grundformen der Krystallographie." *Sitzungsberichte Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften, math.phys. Klasse* 24:499–530. 706
- [137] Fedorov, Evgraph S. 1971. *Symmetry of Crystals*. Translated by David and Katherine Harker. Vol. 7 of *ACA Monographs* New York: American Crystallographic Association (ACA). 740, 741
- [138] (Fibonacci), Leonardo Pisano. 1857. *Il liber abbaci di Leonardo Pisano, secondo la lezione del codige magliabechiano C. 1, 2616, Badia Fiorentina, no. 73*. ed. Baldassarre Boncompagni. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche. 177
- [139] Fischer, Emil. 1956. *Einführung in die geometrische Kristallographie*. Berlin: Akademie-Verlag. 611
- [140] Fischer, Gerd. 1986. *Mathematische Modelle*. Braunschweig: Vieweg. 16
- [141] Forster, Otto. 1984. *Analysis 3. Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen*. Braunschweig: Vieweg. 658
- [142] Fraenkel, Aviezri S.; Mushkin, Mordechai; Tassa Uzi. 1978. "Determination of $[n\Theta]$ by its sequence of differences." *Canadian Mathematical Bulletin* 21:441–446. 244
- [143] Frankenheim, Moritz Ludwig. 1826. "Crystallonomische Aufsätze." *Isis* 19:497–515, 542–565. 696
- [144] Friedrich, Walter; Knipping, Paul; Laue Max von. 1912. "Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen." *Sitzungsberichte Bayerische Akademie der Wissenschaften* pp. 303–322, 363–373. Nachdruck *Naturwissenschaften* 39 (1952), 361–372. 711
- [145] Frobenius, Georg. 1911. "Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen." *Sitzungsberichte Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften Berlin* pp. 654–665. In *Gesammelte Abhandlungen* Berlin 1968, 507ff. 651, 708
- [146] Gauss, Carl Friedrich. 1801. *Disquisitiones Arithmeticae*. Leipzig: Gerhard Fleischer. In *Werke*, Bd. 1 Göttingen 1863. Dtsch. v. H. Maser 1889, Nachdruck New York 1965. 168, 633

- [147] Gauss, Carl Friedrich. 1831. "Recension der 'Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen' von Ludwig August Seeber." *Göttinger gelehrte Anzeigen* 108. In [148, Bd. 2, pp. 188–196]. 228, 634, 699
- [148] Gauss, Carl Friedrich. 1866–1933. *Werke* 12 Bände. Göttingen: Akademie der Wissenschaften: 1863–1927. Nachdruck Hildesheim: Olms 1973. 742
- [149] Glaser, Leslie C. 1970. *Geometrical Combinatorial Topology, vol. 1*. New York: Van Nostrand. 590
- [150] Goethe, Johann Wolfgang von. 1947–1998. *Die Schriften zur Naturwissenschaft. I. Abteilung Texte* (11 Bände, LA I 1–11). Hrsg. D. Kuhn, I. Müller, W. von Engelhardt, F. Steinle. Halle: Leopoldina. 742
- [151] Goethe, Johann Wolfgang von. 1954. *Morphologische Hefte*. Hrsg. Dorothea Kuhn. Leopoldina. In [150, Bd. 8] (LA I 8). 225, 226, 227
- [152] Goldschmidt, Victor M. 1913–1923. *Atlas der Krystallformen, 9 Bde. Text, 9 Bde. Tafeln*. Heidelberg: Carl Winters Universitätsbuchhandlung. 662
- [153] Goldstein, Catherine; Schappacher, Norbert; Schwermer Joachim (eds.). 2007. *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's "Disquisitiones arithmeticae"*. Berlin etc.: Springer. 633, 700
- [154] Gombrich, Ernst H. 1982. *Ornament und Kunst – Schmucktrieb und Ordnungssinn in der Psychologie des dekorativen Schaffens*. Stuttgart: Klett-Cotta. 464
- [155] Goursat, Édouard. 1887. "Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier." *Annales scientifique de l'École normale supérieure* 4(3):159–200. 16
- [156] Graßmann, Hermann Günther. 1839. "Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeine Gesetz der Krystallbildung." Stettin: Programm der Ottoschule Stettin. In [159, Bd. 2.2, 115–146]. 698
- [157] Graßmann, Hermann Günther. 1844. *Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik: Dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch der Statik der Mechanik die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*. Leipzig: Wigand. In [159, Bd. 1.1, 4–312]. 698
- [158] Graßmann, Hermann Günther. 1862. *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet*. Berlin: Ensslin. In [159, Bd. 1.2, 1–383]. 698
- [159] Graßmann, Hermann Günther. 1894–1911. *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*. Hrsg. Friedrich Engel. 3 Bände in 6 Teilbänden. Leipzig: Teubner. Reprint New York: Johnson 1972. 742

- [160] Graßmann, Justus Günther. 1833. “Combinatorische Entwicklung der Krystallgestalten.” *Annalen der Physik* (Ergänzungsheft):1–43. Figurentafel in Bd. 30 (1836). 698
- [161] Greuel, Gert-Martin; Purkert, Walter. 2016. “Leben und Werk von Egbert Brieskorn (1936–2013).” *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 118:143–178. vii
- [162] Groth, Paul von. 1926. *Entwicklungsgeschichte der mineralogischen Wissenschaften*. Berlin: Springer. Neudruck Wiesbaden: Sändig 1970, Saarbrücken VDM Dr. Müller Verlag 2008. 691, 693, 696
- [163] Grünbaum, Branko. 1967. *Convex Polytopes*. London etc.: Interscience. 2nd edition 2000, Berlin etc: Springer. 580, 600, 608
- [164] Grünbaum, Branko, Senechal Marjorie. 1991. “Review: Symmetrie – Gruppe – Dualität, by Erhard Scholz. Basel (Birkhäuser). 1989.” *Historia Mathematica* pp. 377–380. 640
- [165] Grünbaum, Branko; Shephard, Geoffrey C. 1980. “Tilings with congruent tiles.” *Bulletin of the American Mathematical Society, New Series* 3:951–973. 312
- [166] Grünbaum, Branko; Shephard, Geoffrey C. 1986. *Tilings and Patterns*. San Francisco: Freeman. 118, 122, 129, 608
- [167] Günther, S. 1875. “Ein stereometrisches Problem.” *Archiv für Mathematik und Physik* 57:209–215. 365
- [168] Guthrie, Kenneth S; Fideler, David R. 1987. *The Pythagorean Sourcebook and Library: An Anthology of Ancient Writings which Relate to Pythagoras and Pythagorean Philosophy*. Phanes Press. 46
- [169] Habicht, Walter; van der Waerden, Baartel L. 1951. “Lagerungen von Punkten auf der Kugel.” *Mathematische Annalen* 123:223–234. 368
- [170] Hahn, Theo (ed.). 1984. *International Tables for Crystallography*. Vol. A: Space-Group Symmetry Dordrecht: Reidel. First edition 1983, Reprint with corrections 1984.
- [171] Hahn, Theo (ed.). 2002. *International Tables for Crystallography*. Vol. A: Space-Group Symmetry Berlin etc.: Springer. First edition 1983, 5th ed. 2002, corrected reprint. 632
- [172] Hales, Thomas. 2005. “A proof of the Kepler conjecture.” *Annals of Mathematics* 162:1063–1183. 307

- [173] Hardy, Geoffrey H. 1940. *A Mathematicians Apology*. Cambridge: University Press. 2
- [174] Hauptman, Herbert A. 1990. "History of X-ray crystallography." *Structural Chemistry* 1(6):617–620. 661, 714, 716
- [175] Hausdorff, Felix. 1927. *Mengenlehre*, zweite umgearbeitete Auflage. Berlin: de Gruyter. Überarbeitete 3-te Auflage 1935. English translation by J.R. Auman e.a., New York: Chelsea 1957, 1962. In [176, Bd. 3]. 476
- [176] Hausdorff, Felix. 2001ff. *Gesammelte Werke einschließlich der unter dem Pseudonym Paul Mongré erschienenen philosophischen und literarischen Schriften und ausgewählte Texte aus dem Nachlass* (9 Bände). Hrsg. E. Brieskorn, F. Hirzebruch, W. Purkert, R. Remmert, E. Scholz. Berlin etc.: Springer. vii, 744
- [177] Haüy, René-Just. 1815. "Mémoire sur une loi de cristallisation, appelée loi de symétrie." *Mémoire du Muséum d'Histoire Naturelle* 1:81–101, 206–225, 273–298, 341–3352. Auch in *Journal des Mines* 37 (1815), 215–235, 347–369, **38** 5–34, 161–174. 694
- [178] Haüy, René-Just. 1822. *Traité de cristallographie, suivi d'une application des principes de cette science à la détermination des espèces minérales et d'une nouvelle méthode pour mettre les forme cristallines en projection, 2 tomes*. Paris: Bachelier/Huzard. 693
- [179] Havighurst, Robert J. 1925a. "The distribution of diffracting power in certain crystals." *Proceedings National Academy of Sciences* 11:507–512. 715
- [180] Havighurst, Robert J. 1925b. "The distribution of diffracting power in sodium chloride." *Proceedings National Academy of Sciences* 11:502–507. 715
- [181] Heath, Thomas. 1921. *A History of Greek Mathematics, vol 1. From Thales to Euclid*. Oxford: Clarendon. 46, 53, 54, 172, 174
- [182] Heesch, Heinrich. 1935. "Aufbau der Ebene aus kongruenten Bereichen." *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen, Neue Folge* 1:115–117. 311
- [183] Heiberg, Johan L. 1883–1888. *Euclidis elementa, 5 vols*. Teubner. 81
- [184] Heisenberg, Werner. 1984ff. *Gesammelte Werke. Collected Works (Hrsg. von Walter Blum). Abteilung C: Allgemeinverständliche Schriften*, 5 Bände. Berlin etc.: Springer. 68
- [185] Hellenkemper-Salies, Gisela. 1986. "Römische Mosaiken in Griechenland." *Bonner Jahrbücher des Rheinischen Landesmuseums* 186:241–284. 467

- [186] Heller, Siegfried. 1958. "Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer." *Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Math., Physik und Technik* (6). Nachdruck in [20, 319–354]. 52, 174
- [187] Henry, Norman F.M., ed. 1952. *International Tables of Crystallography*. Birmingham: Kynoch Press. 716
- [188] Herman, Michael R. 1978. Résultats récents sur la conjugaison différentiable. In *Proceedings International Congress of Mathematicians Helsinki 1978*. Vol. 2 pp. 811–810. 185
- [189] Hessel, Johann Friedrich C. 1830. *Krystall*. (Separatdruck unter dem Titel: *Krystallonometrie oder Krystallometrie und Krystallographie, auf eigenthümliche Weise und mit Zugrundelegung neuer allgemeiner Lehren der reinen Gestaltenkunde, sowie mit vollständiger Berücksichtigung der wichtigsten Arbeiten und Methoden anderer Krystallographen bearbeitet*). In *Johann Samuel Traugott Gehlers Physikalisches Wörterbuch*, ed. H.W. Brandes et al. Vol. 8 Leipzig: Schwickert pp. 1023–1340, Tafeln XIX–XXIII. Separat Leipzig 1831. Neudruck Ostwalds Klassiker 88, 89 (2 Bde.), Leipzig: Teubner 1897. Seitenangaben nach Ostwalds Klassiker. 697, 698
- [190] Hilbert, David. 1900. "Mathematische Probleme." *Nachrichten Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse* (3) 1:253 – 297. Auch in *Archiv für Mathematik und Physik* (3) 1 (1901), 44–63. In [191, Bd. 3, pp. 291–329]. 308
- [191] Hilbert, David. 1932–1935. *Gesammelte Abhandlungen, 3 Bde.* Berlin etc.: Springer. 745
- [192] Hilton, Harold. 1903. *Mathematical Crystallography and the Theory of Groups of Movement*. Oxford: Clarendon. Reprint New York: Dover 1963. 706
- [193] Hirzebruch, Friedrich. 1953. "Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen." *Mathematische Annalen* 126(1):1–22. In *Gesammelte Abhandlungen*, Band 1, 11–32. 189
- [194] Hoare, M.R. 1979. "Structures and dynamics of simple microclusters." *Advances in Chemical Physics* 40:49–135. 655
- [195] Hoffmann, Frank. 2016. *Faszination Kristalle und Symmetrie. Einführung in die Kristallographie*. Berlin etc.: Springer. 632
- [196] Hölder, Otto. 1893. "Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4 ." *Mathematische Annalen* 43:301–412. 709
- [197] Hoppe, Reinhold. 1874. "Bemerkungen der Redaktion." *Archiv für Mathematik und Physik* 56:307–312. 365

- [198] Hoppe, Reinhold. 1882. "Die regelmässigen linear begrenzten Figuren jeder Anzahl von Dimensionen." *Archiv für Mathematik und Physik* 68:151–165. 478
- [199] Hudson, John F.P. 1969. *Piecewise Linear Topology*. New York: Benjamin. 574, 592, 596
- [200] Huppert, Bertram. 1967. *Endliche Gruppen I*. Vol. 134 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* Berlin etc.: Springer. 709
- [201] Huppert, Bertram; Blackburn, Norman. 1982. *Finite Groups III*. Berlin: Springer. 407
- [202] Hurwitz, Adolf. 1891. "Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten." *Mathematische Annalen* 39:1–61. 374
- [203] Huygens, Christiaan. 1690. *Traité de la lumière*. Leyden: Pierre van der Aa. In [204, t. 19], deutsch von E. Lommel, Leipzig: Engelmann 1903. 691
- [204] Huygens, Christiaan. 1888–1950. *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, 22 vols. Den Haag: Nijhoff. Reprint Amsterdam: Swets & Zeitlinger 1967. 746
- [205] Jean, Roger V. 1984. *Mathematical Approach to Pattern and Form in Plant Growth*. New York etc.: Wiley. 231
- [206] Johnsen, Arrien. 1915. "Die Beschaffenheit der Atome in Kristallen." *Physikalische Zeitschrift* 16:269–272. 713
- [207] Johnson, Norman W. 1966. "Convex polyhedra with regular faces." *Canadian Journal of Mathematics* 18:169–200. 261
- [208] Jordan, Camille. 1869. "Mémoire sur les groupes de mouvements." *Annali di Matematica* 2:167–215, 322–345. In [210, t. 4, 231–302]. 703
- [209] Jordan, Camille. 1872. "Recherches sur les substitutions." *Journal de mathématiques pures et appliquées* (2) 17:351–367. 408
- [210] Jordan, Camille. 1961–1964. *Oeuvres de Camille Jordan, t. 1 – t. 4*. Ed. G. Julia, J. Dieudonné. Paris: Gauthiers-Villars. 746
- [211] Kepler, Johannes. 1596. *Prodromus Dissertationum Cosmographicum continens Mysterium Cosmographicum, de admirabili proportione orbium coelestium, deque causis coelorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis et propriis, demonstratum, per quinque regularia corpora Gemetrica*. Graz: Georg Gruppenbach. Gesammelte Werke Bd. 1, München 1938. 99, 101, 102

- [212] Kepler, Johannes. 1611. *Strena seu de Nive Sexangula*. Gesammelte Werke Bd. 4 (Hrsg. M. Caspar, F. Hammer), 1941, 261–280. 296, 322, 691
- [213] Kepler, Johannes. 1619. *Harmonices mundi libri V*. Linz: Johann P'lanck. Gesammelte Werke Bd. 6 unter dem Titel *Harmonice Mundi* (Hrsg. M. Caspar), München 1940. Reprint München: Beck 1990. 105, 108, 109, 110, 111, 112, 117, 123, 194, 255, 259, 690
- [214] Kepler, Johannes. 1939. *Welt-Harmonik* übersetzt und eingeleitet von Max Casper. München: Oldenbourg. 100, 108, 149, 175, 296, 690
- [215] Kepler, Johannes. 1943. *Neujahrgabe oder Vom sechseckigen Schnee*. Übertragen ins Deutsche von F. Roßmann unter Mitwirkung von M. Caspar und F. Neuhart. Berlin: . 296, 298, 304
- [216] Kepler, Johannes. 1949. *Gesammelte Werke. Band 14: Briefe 1599–1604*. Hrsg. Max Caspar. München: Becksche Verlagsbuchhandlung. 106, 109, 298
- [217] Kepler, Johannes. 1987. *Vom sechseckigen Schnee: Strena seu de Nive sexangula*. Ins Deutsche übertragen, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Dorothea Goetz. Vol. 273 of *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften* Leipzig: Geest und Portig. 296, 298, 304
- [218] Khinchin, Aleksandr Y. 1997. *Continued Fractions*. Dover Publications. 178, 184
- [219] Kier, Hiltrud. 1970. *Der mittelalterliche Schmuckfußboden*. Düsseldorf: Rheinland Verlag. 471
- [220] Kirby, Rob C., Scharlemann Martin G. 1979. Eight faces of the Poincare homology 3-sphere. In *Proceedings Georgia Topology Conference, Athens, 1977*. New York etc: Academic Press pp. 113–146. 552
- [221] Klee, Victor L. (ed.). 1963. *Convexity*. Vol. 7 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* Providence, R.I.: American Mathematical Society. 476
- [222] Klein, Felix. 1872. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen. Erlangen: Deichert. In [227, 1, 460–497]. 118
- [223] Klein, Felix. 1878. “Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.” *Mathematische Annalen* 14:111–172. In [227, 3, 13–75]. 67
- [224] Klein, Felix. 1883. “Neue Beiträge zur Riemann’schen Funktionentheorie.” *Mathematische Annalen* 21:141–218. In [227, 3, 630–710]. 67

- [225] Klein, Felix. 1884. *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Leipzig: Teubner. Neu herausgegeben mit Kommentaren von Peter Slodowy, Basel: Birkhäuser 1993. 85, 558
- [226] Klein, Felix. 1895. “Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung.” *Nachrichten Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* pp. 357–359. In [227, Bd. 2, 209–213]. 189
- [227] Klein, Felix. 1921–1923. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. 3 Bände. Berlin etc.: Springer. 747, 748
- [228] Klemm, Michael. 1981. *Symmetrien von Ornamenten und Kristallen*. Berlin etc.: Springer. 652, 653, 710
- [229] Krafft, Fritz. 1971. *Geschichte der Naturwissenschaft I. Die Begründung einer Wissenschaft von der Natur durch die Griechen*. Freiburg: Rombach. 689, 690
- [230] Kramer, Peter. 1982. “Symmetriestrukturen der Physik.” *Naturwissenschaften* 69(3):114–122. 296
- [231] Kreck, Matthias. 1986. “Exotische Strukturen auf 4-Mannigfaltigkeiten.” *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 88:124–145. 598
- [232] Kunz, Ernst. 1980. *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*. Wiesbaden: Vieweg. 564
- [233] Lagrange, Joseph Louis. 1768. “Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques.” *Mémoires de l’académie royale des sciences* 24:111–180. *Oeuvres* 2, p.581–652. 246
- [234] Lagrange, Joseph Louis. 1773. “Recherches arithmétiques.” *Nouveaux mémoires de l’Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, années 1773 et 1775* pp. 265–312. In *Oeuvres complètes*, tome. 3, pp. 695–795. 189
- [235] Lamotke, Klaus. 1986. *Regular Solids and Isolated Singularities*. Wiesbaden: Vieweg. 552
- [236] Leech, John. 1956. “The problem of the thirteen spheres.” *The Mathematical Gazette* 40:22–23. 364, 365
- [237] Levi, Fritz. 1929. *Geometrische Konfigurationen*. Leipzig: Hirzel. 410, 450
- [238] Liebisch, Theodor; Schoenflies, Arthur; Mügge Otto. 1905. Kristallographie. In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*. Vol. V.1 Leipzig: Teubner chapter 7, pp. 396–493. 711

- [239] Lindemann, Ferdinand. 1896/97. "Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen." *Bayerische Akademie der Wissenschaften, Math.-Phys. Kl.* 26(4):625–783. 9, 689
- [240] Löckenhoff, H.D.; Hellner, E. 1971. "Die Wirkungsbereiche der invarianten kubischen Gitterkomplexe." *Neues Jahrbuch für Mineralogie – Monatshefte* 4:155–174. 312
- [241] Lucian. 1896. *Pro lapsu inter salutandum. Opera vol. 1* Ed. K. Jacobitz. Leipzig: Teubner. 46
- [242] Madelung, Erwin. 1918. "Das elektrische Feld in Systemen von regelmäßig angeordneten Punktladungen." *Physikalische Zeitschrift* 19:524–531. 345
- [243] Markoff, A. 1882. "Sur une question de Jean Bernoulli." *Mathematische Annalen* 19:27–36. 242
- [244] Marshall, Dorothy N. 1976. "Carved Stone Balls." *Proceedings of the Society of Antiquaries of Scotland* 108:40–72. 10
- [245] Marx, Carl. 1825. *Geschichte der Crystallkunde*. Karlsruhe: . Neudruck Wiesbaden (Sändig) 1970. 690, 691, 692, 693, 694
- [246] Mathieu, Émile. 1861. "Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, sur la manière de les former et sur les substitutions qui les laissent invariables." *Journal de mathématiques pures et appliquées* (2) 6:241–323. 407
- [247] Miller, Jeffrey C.P. 1910/11. "Polyhedron." *Encyclopedia Britannica, 11th edition* . 262
- [248] Milnor, John. 1961. "Two complexes that are homeomorphic but combinatorially distinct." *Annals of Mathematics* 74:575–590. 569
- [249] Milnor, John. 1976. "Hilberts Problem 18: on crystallographic groups, fundamental domains, and on sphere packing." *Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society, Held at Northern Illinois University (ed. F. Browder)* 28:491–506. 308
- [250] Minkowski, Hermann. 1887. "Über den Begriff der arithmetischen Äquivalenz und über die endliche Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* pp. 449–458. In [255, Bd. 1, 203–211]. 634, 700
- [251] Minkowski, Hermann. 1897. "Allgemeine Lehrsätze über konvexe Polyeder." *Nachrichten Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen, math-phys- Klasse* pp. 198–219. In [255, Bd. 2, 103–121]. 476, 480, 634, 639, 705

- [252] Minkowski, Hermann. 1904. "Zur Geometrie der Zahlen." *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg* pp. 164–173. In [255, Bd. 2, 43–52]. 476, 634, 700
- [253] Minkowski, Hermann. 1905. "Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 129:220–274. In [255, Bd. 2, 53–100]. 700
- [254] Minkowski, Hermann. 1910. *Geometrie der Zahlen*. Leipzig: Teubner. 191, 634, 700
- [255] Minkowski, Hermann. 1911*a*. *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski* unter Mitwirkung von Andreas Speiser und Hermann Weyl herausgegeben von David Hilbert, 2 Bde. Leipzig/Berlin: Teubner. 749, 750
- [256] Minkowski, Hermann. 1911*b*. "Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs." In [255, Bd. 2, 131–229] (vorher unveröffentlicht). 476, 480
- [257] Minkowski, Hermann. 1973. *Briefe an David Hilbert*. Herausgegeben von L. Rüdberg und H. Zassenhaus. Berlin etc.: Springer. 705
- [258] Minningerode, Bernhard. 1887. "Untersuchungen über das Symmetrieverhalten der Krystalle." *Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie, Beilagenband* 5:145ff. 704
- [259] Möbius, August Ferdinand. 1828. "Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und einbeschrieben zugleich heißen?" *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 3:273–278. 449
- [260] Möbius, August Ferdinand. 1849. "Über das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und die Anwendung dieses Gesetzes auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme." *Berichte der Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, math-phys. Klasse* 1:65ff. Auch in *Journal für reine und angewandte Mathematik* 43. In [262, Bd. 2, 349–360]. 699
- [261] Möbius, August Ferdinand. 1851. "Über symmetrische Figuren." *Berichte der Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, math-phys. Klasse* 3:19–28. Auch in *Journal für reine und angewandte Mathematik* 44. In [262, Bd. 2, 361–372]. 699
- [262] Möbius, August Ferdinand. 1885–1887. *Gesammelte Werke*, 4 Bände. Leipzig: Hirzel. Neudruck Wiesbaden: Sändig 1967. 750
- [263] Möbius, August Ferdinand. 1886. "Theorie der symmetrischen Figuren. Aus dem Nachlass herausgegeben von C. Reinhardt." In [262, Bd. 2, 561–708]. 699

- [264] Mohs, Friedrich. 1822/23. *Grundriss der Mineralogie, 2 Bde.* Dresden: Arnold. Engl. von W. Haidinger, 3 Bde., Edinburgh 1825. 695
- [265] Mugler, Charles. 1950. "Platon et la recherche mathématique de son époque." *Revue Philosophique de Louvain* 48(17). 6, 57
- [266] Mugler, Charles. 1960. "Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs." *Revue belge de philologie et d'histoire* 38(3):867–869. 4, 63
- [267] Müller, Hieronymus (Übersetzung); Steinhart, Kurt (Einleitung). 1850ff. *Platon's sämtliche Werke.* Leipzig: Brockhaus. 57
- [268] Müller, J.H.T. 1860. "Zur Geschichte des Dualismus in der Geometrie." *Archiv der Mathematik und Physik (Hrsg. Grunert)* 34:1–6. 82
- [269] Mumford, David; Kempf, George; Knudsen Finn et alii. 1973. *Toroidal Embeddings I.* Vol. 339 of *Lecture Notes in Mathematics* Springer. 516
- [270] Naumann, Carl Friedrich. 1830. *Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie.* Leipzig: Brockhaus. 695
- [271] Nestle, Wilhelm. 1908. *Die Fragmente der Vorsokratiker. In Auswahl übersetzt.* Jena: Diederichs. Diverse Auflagen und Neudrucke, u.a. von der 4. Auflage Düsseldorf (Scientia) 1956. 58
- [272] Neubüser, Jürgen; Wondratschek, Hans; Bülow Rolf. 1971. "On crystallography in higher dimensions. I. General definitions." *Acta Crystallographica A* 27:517–520. 654, 709
- [273] Niggli, Paul. 1919. *Geometrische Kristallographie des Diskontinuums.* Berlin: Borntraeger. 654, 706
- [274] Niggli, Paul; Nowacki, Werner. 1935. "Der arithmetische Begriff der Kristallklasse und die darauf fußende Ableitung der Raumgruppen." *Zeitschrift fh(=—h)—r Kristallographie* 91:321–. 708
- [275] Nishikawa, Shijo. 1915. "Structure of some crystals of spinel group." *Proceedings of the Tokyo Mathematico-Physical Society* 8:199–209. 713
- [276] Novalis, Friedrich von Hardenberg. 1978. *Schriften, Bd.1: Das dichterische Werk, Tagebücher und Briefe.* Herausgegeben von Richard Samuel. München/Wien: Carl Hanser. 364
- [277] Oda, Tadao. 1988. *Convex Bodies and Algebraic Geometry – An Introduction to the Theory of Toric Varieties.* Vol. (3) 15 of *Ergebnisse der Mathematik* Berlin etc.: Springer. 516

- [278] Pappus. 1876. *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt. Volumen I. Insunt librorum II III Iv V reliquiae.* Ed. Friedrich Otto Hultsch. Berlin: Weidmann. 75, 78, 421, 430
- [279] Parlasca, Klaus. 1959. *Die römischen Mosaiken in Deutschland.* Berlin: De Gruyter. 470
- [280] Pascal, Blaise. 1639. “Essay pour les coniques. Par B.P.” Oeuvres de Pascal, ed. L. Brunschwig, P. Boutroux, Paris 1908, I, 243-260. 430
- [281] Pascal, Blaise. 1961. *Pensées. Texte de l'édition Brunschwig.* Paris: Garnier. 444
- [282] Pauling, Linus. 1964. *Die Natur der chemischen Bindung.* Weinheim: Verlag Chemie. 2. Auflage. 333
- [283] Penrose, Roger. 1978. “Pentaplexity – A class of non-periodic tilings of the plane.” *Eureka* 39:16–22. Reprint in *Mathematical Intelligencer* 2 (1979), 32–37, *Geometrical Combinatorics*, Pitman, London 1984. 153
- [284] Pernice, E. 1938. *Pavimente und figürliche Mosaiken.* Vol. 6 of *Die hellenistische Kunst in Pompeji* Berlin: . 467, 468
- [285] Perron, Oskar. 1913. *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* Teubner. 178, 246
- [286] Platon. 1973. *Werke in acht Bänden griechisch und deutsch.* Bearbeitet von H. Hoffmann. Wissenschaftliche Buchgesellschaft. Griechischer Text von A. Croiset, L. Bodin, M. Croiset; deutsche Übersetzung F. Schleiermacher, 2. Auflage 2005. 752
- [287] Platon. 2005a. *Menon.* In [286, Bd. 2, 505–600]. 6
- [288] Platon. 2005b. *Parmenides.* In [286, Bd. 4, 195–320]. 107
- [289] Plinius (secundus), Gaius. 1967. *Naturalis Historia Libri XXXVII.* Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana Stuttgart: Teubner. 689
- [290] Plücker, Julius. 1831. *Analytisch-geometrische Entwicklungen, 2 Bde.* Essen: G.D. Baedeker. 436
- [291] Poincaré, Henri. 1895. “Analysis situs.” *Journal de l'École Polytechnique* 1:1–121. In [293, t. 6, 193-288]. 570
- [292] Poincaré, Henri. 1904. “Cinquième complément à l'analysis situs.” *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* 18:45–110. In [293, t. 6, 435–498]. 551
- [293] Poincaré, Henri. 1951ff. *Oeuvres des Henri Poincaré.* Nouveau tirage. Paris: Gauthier-Villars. 752

- [294] Poisson, Simeon D.; Sturm, Jacques C.F. 1837. "Rapport sur une mémoire de M. Bravais, ayant pour titre: Recherches sur les ligne formées dans un plan par des points dont les coordonnées sont des nombres entiers." *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l' Académie des Sciences* 5:867–869. 229
- [295] Portmann, Adolf. 1960. *Neue Wege der Biologie*. München: Piper. 238
- [296] Portmann, Adolf. 1970. *Entläßt die Natur den Menschen?* München: Piper. 238
- [297] Ramdohr, Paul; Strunz, Hugo. 1967. *Klockmann's Lehrbuch der Mineralogie*. Stuttgart: Ferdinand Enke. 611
- [298] Rao, Michaël. 2017. "Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane." *Preprint Lyon* . arXiv:1708.00274. 129
- [299] Reidemeister, Kurt. 1953. *Topologie der Polyeder und kombinatorische Topologie der Komplexe*. Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik A, Bd. 17 Leipzig: Geest u. Portig. 478, 503
- [300] Reinhardt, Karl. 1918. *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*. Dissertation Naturwissenschaftlichen Fakultät Universität Frankfurt. Borna-Leipzig: Rober Noske. 606
- [301] Riemann, Bernhard. 1892. *Gesammelte Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, Hrsg. H. Weber, R. Dedekind. Leipzig: Teubner. Neu herausgegeben von Raghavan Narasimhan, Berlin: Springer 1990. 33
- [302] Ringel, Gerhard. 1952. "Farbensatz für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechts." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 190(3/4):129–147. 583
- [303] Roberts, D. W. 1987. "The chemical contact pressure model for phyllotaxis – Application to phyllotaxis changes in seedlings and to anomalous phyllotaxis aystems." *Journal of Theoretical Biology* 125:141–161. 231
- [304] Robinson, Raphael M. 1971. "Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane." *Inventiones mathematicae* 12:177–209. 152
- [305] Röd, Wolfgang. 1982. *Descartes – Die Genese des Cartesianischen Rationalismus*. München: C.H. Beck. 2. völlig überarbeitete und erweiterte Auflage von *Die innere Genesis des cartesianischen Systems*, München: Reinhardt 1964. 443
- [306] Rohn, Karl. 1900. "Einige Sätze über regelmässige Punktgruppen." *Mathematische Annalen* 53:440–449. 708

- [307] Romé de l'Isle, Jean Baptiste Louis. 1783. *Cristallographie, ou description des formes propres à tous les corps du règne minéral dans l'état de combinaison saline, pierreuse ou métallique*. Paris: Didot jeune. 692, 693
- [308] Rourke, Colin P.; Sanderson, Brian J. 1972. *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Vol. 69 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* New York: Springer. 585
- [309] Sachs, Eva. 1917. *Die fünf platonischen Körper: Zur Geschichte der Mathematik und der Elementenlehre Platons und der Pythagoreer*. Berlin: Weidmann. 54
- [310] Salies, Gisela. 1974. "Untersuchungen zu den geometrischen Gliederungsschemata römischer Mosaiken." *Bonner Jahrbücher des Rheinischen Landesmuseums* 174:1–178. 467
- [311] Salzmann, Dieter. 1982. *Untersuchungen zu den antiken Kieselmosaiken. Von den Anfängen bis zum Beginn der Tesseratechnik*. Archäologische Forschungen Berlin: Gebr. Mann. 467
- [312] Schad, Wolfgang; Schweppenhäuser, Ekkehard. 1975. *Blütenspaziergänge. Übungen im Naturbetrachten*. Dornach: Verlag am Goetheanum. 237
- [313] Schäfer, Carl. 1901. *Die Abtei Eberbach im Mittelalter*. Text und Tafelband. Berlin: Wasmuth. 471
- [314] Schimper, Karl. F. 1830. "Beschreibung des Symphytum Zeyheri und seiner zwei deutschen Verwandten, des *S. bulbosum* Schimper und *S. tuberosum* Jacq., nebst Erläuterungen über die Asperifolien überhaupt, namentlich über deren Blattstellung und Inflorescenz, und das Pflanzenei." *Magazin für Pharmacie und die dahin einschlagenden Wissenschaften, von Dr. Geiger* 29:1ff. 224
- [315] Schoenflies, Arthur. 1887. "Über Gruppen von Bewegungen." *Mathematische Annalen* 28, 29:28 319–342, 29 50–80. 704
- [316] Schoenflies, Arthur. 1889. "Über Gruppen von Transformationen des Raumes." *Mathematische Annalen* 34:172–203. 704
- [317] Schoenflies, Arthur. 1891. *Krystallsysteme und Krystallstruktur*. Leipzig: Teubner. 602, 704
- [318] Schoenflies, Arthur. 1914. "Über Kristallstruktur." *Zeitschrift für Kristallographie* 54:545–569. 712
- [319] Schoenflies, Arthur. 1915. "Über Kristallstruktur II." *Zeitschrift für Kristallographie* 55:321–352. 713

- [320] Scholz, Erhard. 1989. *Symmetrie - Gruppe - Dualität*. Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts. Vol. 1 of *Science Networks* Basel: Birkhäuser. vi, 640, 693, 694, 695, 697, 702
- [321] Schreier, Otto. 1926. "Über die Erweiterung von Gruppen I." *Monatshefte für Mathematik und Physik* 34:165–180. 709
- [322] Schrödinger, Erwin. 1955. *Die Natur und die Griechen*. Wien: Zsolnay. 68
- [323] Schütte, Kurt; van der Waerden, Baartel L. 1951. "Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz?" *Mathematische Annalen* 123:96–124. 368
- [324] Schütte, Kurt; van der Waerden, Baartel L. 1953. "Das Problem der dreizehn Kugeln." *Mathematische Annalen* 125:325–334. 365
- [325] Schwarz, Hermann Amandus. 1872. "Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 75:292–335. In *Gesammelte Math. Abh.* Bd 2, pp. 211–259. 558
- [326] Schwarzenberger, Rolph L.E. 1974. "Crystallography in spaces of arbitrary dimensions." *Proceedings Cambridge Philosophical Society* 76:23–32. 710
- [327] Schwarzenberger, Rolph L.E. 1980. *N-Dimensional Crystallography*. London: Pitman. 709
- [328] Seeber, Ludwig A. 1824. "Versuch einer Erklärung des innern Baues der festen Körper." *Gilberts Annalen der Physik* 76(3, 4):229–248, 349–372. 699
- [329] Seeber, Ludwig A. 1831. *Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen*. Mannheim: Löffler. 633, 636, 699
- [330] Seifert, Herbert; Threlfall, William. 1934. *Lehrbuch der Topologie*. Leipzig: Teubner. 552
- [331] Selling, Eduard. 1874. "Über binäre und ternäre quadratische Formen." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 77:143–222. 634
- [332] Senechal, Marjorie. 1990a. Brief history of geometrical crystallography. In *Historical Atlas of Crystallography*, ed. J. Lima-de Faria. Dordrecht etc.: Kluwer pp. 43–60. 617, 654, 655, 689, 709, 717
- [333] Senechal, Marjorie. 1990b. *Crystalline Symmetries. An Informal Mathematical Introduction*. Bristol etc.: Adam Hilger. 611, 632, 658

- [334] Senechal, Marjorie; Galiulin, Ravil V. 1984. "An introduction to the Theory of Figures: the geometry of E.S. Fedorov." *Structural Topology* 10:5–22. 705
- [335] Snow, Marjorie; Snow, William. 1973. *Step-by-Step Tablet Weaving*. New York: Golden Press. 388
- [336] Sohncke, Leonhard. 1879. *Entwicklung einer Theorie der Krystallsysteme*. Leipzig: Reubner. 704
- [337] Spanier, Edwin H. 1966. *Algebraic Topology*. New York etc: Springer. 556, 566, 567, 589, 590
- [338] Speiser, Andreas. 1923/1927. *Die Theorie der Gruppen endlicher Ordnung mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Berlin etc.: Springer. 2. Auflage 1927. 708
- [339] Steiner, Jacob. 1826. "Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1:349–364. 500
- [340] Steiner, Jacob. 1881/82. *Gesammelte Werke* herausgegeben von K. Weierstrass. Berlin: Reimer. 436
- [341] Steinitz, Ernst. 1907. "Beiträge zur analysis situs." *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft* 7:29–49. 569
- [342] Steinitz, Ernst. 1910. Konfigurationen der projektiven Geometrie. In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Vol. III 1.1 AB Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie, Abschnitt 5a Leipzig: Teubner pp. 481–516. 410
- [343] Steinitz, Ernst. 1916. Polyeder und Raumeinteilungen. In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Vol. III AB 12 Leipzig: Teubner pp. 1–139. 608
- [344] Stolarsky, Kenneth B. 1976. "Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators." *Canadian Mathematical Bulletin* 19:473–481. 244
- [345] Struik, Dirk. 1969. *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press. 410, 411
- [346] Szabó, Arpad. 1969. *Anfänge der griechischen Mathematik*. München: Oldenbourg. 51, 54
- [347] Tammes, Pieter M.L. 1930. "On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen grains." *Recueil des travaux botaniques néerlandais* 27:1–84. 366

- [348] Taylor, Alfred E. 1928. *A Commentary on Plato's Timaeus*. Oxford: Clarendon. 57
- [349] Tóth, Fejes L. 1943. "Über die Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugel liegenden Punktsystems." *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 53:66–68. 368
- [350] Tóth, Fejes L. 1965. *Reguläre Figuren*. Budapest: Ungarische Akademie der Wissenschaften. 46, 77, 366, 371
- [351] Tóth, Fejes L. 1972. *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. Berlin etc.: Springer. 2. Auflage. 314, 371
- [352] Vainshtein, Boris K.; Fridkin, Vladimir M.; Indenbom Vladimir L. 1981. *Modern Crystallography I – Fundamentals of Crystals. Symmetry, and Methods of Structural Crystallography*. Berlin etc.: Springer. Second, enlarged edition 1991. 660, 714
- [353] Vainshtein, Boris K.; Fridkin, Vladimir M.; Indenbom Vladimir L. 1982/83. *Modern Crystallography II – Structure of Crystals*. Berlin etc.: Springer. 333, 337, 339, 343, 349, 655, 660
- [354] van der Waerden, Baartel L. 1952. "Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze." *Mathematische Annalen* 125.:213–222. 368
- [355] van der Waerden, Baartel L. 1956. *Erwachende Wissenschaft*. Basel: Birkhäuser, Basel. 46, 54, 84
- [356] Van Kampen, Egbert. 1933. "On the connection between the fundamental groups of some connected spaces." *American Journal of Mathematics* 55:261–267. 567
- [357] Venkov, Boris A. 1970. *Elementary Number Theory*. Translated from the Russian and edited by Helen Alderson. Groningen: Wolters-Noordhoff. 243
- [358] Voronoi, George. 1908a. "Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques I. Quelques propriétés des forme quadratiques positives parfaites." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 134:97–178. 634, 700
- [359] Voronoi, George. 1908b. "Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques II. Recherches sur les paralléloèdres primitifs." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 134:198–287. 634, 639, 640, 700, 706, 707
- [360] Voronoi, George. 1909. "Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques II. Recherches sur les paralléloèdres primitifs. Seconde partie. Domaines de formes quadratiques correspondant au différents types d paralléloèdres primitifs." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 136:67–181. 634, 639, 700, 707

- [361] Waterhouse, William C. 1972/73. "The discovery of the regular solids." *Archive for History of Exact Sciences* 9:212–221. 54
- [362] Weber, Heinrich. 1898. *Lehrbuch der Algebra*. Friedrich Vieweg und Sohn. 178, 564
- [363] Weibel, Charles A. 1999. History of homological algebra. In *History of Topology*, ed. Ioan James. Amsterdam: Elsevier pp. 797–836. 710
- [364] Weischedel, Wilhelm. 1979. *Blaise Pascal – Größe und Elend des Menschen*. Frankfurt/M.: Insel. 444, 448
- [365] Weiß, Christian Samuel. 1818. "Übersichtliche Darstellung der verschiedenen natürlichen Abtheilungen der Krystallisationssysteme." *Abhandlungen Königliche Akademie der Wissenschaften Berlin aus den Jahren 1815* pp. 289–336. 694, 695
- [366] Weiß, Christian Samuel. 1819. "Über eine verbesserte Methode für die Bezeichnung der verschiedenen Flächen eines Krystallisationssystemes." *Abhandlungen Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften Berlin aus dem Jahr 1817* pp. 286–336. 695
- [367] Weizsäcker, Carl Friedrich von. 1971*a*. *Die Einheit der Natur*. München: Hanser. Diverse weitere Auflagen, Reprint München dtv. 100, 101, 758
- [368] Weizsäcker, Carl Friedrich von. 1971*b*. *Parmenides und die Quantentheorie*. Hanser. In [367, Kap. IV.6]. 107
- [369] Weizsäcker, Carl Friedrich von. 1977. *Der Garten des Menschlichen*. München: Hanser. 3. Auflage. 57
- [370] Weizsäcker, Carl Friedrich von. 1985. *Aufbau der Physik*. München: Hanser. Diverse weitere Auflagen, Reprint München dtv 2002. 5
- [371] Werner, Abraham Gottlob. 1774. *Von den äusseren Kennzeichen der Fossilien*. Leipzig: S.L. Crusius. 692
- [372] Weyl, Hermann. 1935. "Elementare Theorie der konvexen Polyeder." *Commentarii mathematici Helvetici* 7:290–306. In [373, Bd. 3, 517–533]. 511
- [373] Weyl, Hermann. 1968. *Gesammelte Abhandlungen*, 4 Bde. Ed. K. Chandrasekharan. Berlin etc.: Springer. 758
- [374] Wilmowsky, Johann N. 1874. *Der Dom zu Trier in seinen drei Hauptperioden: der Römischen, der Fränkischen, der Romanischen*. Beschrieben und durch XXVI Tafeln erläutert. Trier: Verlag der Fr. Lintz'schen Buchhandlung. 470

- [375] Witt, Ernst. 1938a. "Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu." *Abhandlungen Mathematisches Seminar Universität Hamburg* 12:256–264. 409
- [376] Witt, Ernst. 1938b. "Über Steinersche Systeme." *Abhandlungen Mathematisches Seminar Universität Hamburg* 12:265–275. 409
- [377] Wittgenstein, Ludwig. 1998. *Logisch-philosophische Abhandlung, Tractatus logico-philosophicus*. Kritische Edition. Frankfurt: Suhrkamp. Erstpublikation *Annalen der Naturphilosophie* 14 (1921), 185–262. 99
- [378] Woepcke, Franz. 1855. *Recherches, sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux, d'après des traités inédits arabes et persans. Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ*. Paris: Imprimerie Impériale. 84
- [379] Wolchover, Natalie. 2017. "Pentagon tiling proof solves century-old math problem." *Quantamagazine* . <https://www.quantamagazine.org/pentagon-tiling-proof-solves-century-old-math-problem-20170711/>. 129
- [380] Wondratschek, Hans; Bülow, Rolf; Neubüser Joachim. 1971. "On crystallography in higher dimensions. III. Results in R_4 ." *Acta Crystallographica A* 27:523–535. 654, 709
- [381] Wussing, Hans. 1969. *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*. Berlin: Verlag der Wissenschaften. 633
- [382] Wyckoff, Ralph W.G. 1920a. "The crystal structure of cesium dichloro-iodide." *Journal of the American Chemical Society* 42:1100–1116. 713
- [383] Wyckoff, Ralph W.G. 1920b. "The crystal structure of sodium nitrate." *Physical Review* 16:149–157. 713
- [384] Wyckoff, Ralph W.G. 1920c. "The crystal structures of some carbonates of the calcite group." *American Journal of Science* 50:317–360. 713
- [385] Wyckoff, Ralph W.G. 1921. "Outline of the application of the theory of space groups to the study of the structure of crystals." *American Journal of Science* (Series 5) 1:127–137. 654, 713
- [386] Wyckoff, Ralph W.G. 1922. *The Analytical Expression of the Results of the Theory of Space Groups*. Washington: Carnegie Institution. 706, 713
- [387] Zachariasen, William H. 1945. *Theory of X-Ray Diffraction in Crystals*. New York: John Wiley. Reprint New York: Dove 1967. 661

- [388] Zalgeller, Vladimir A. 1969. *Convex Polyhedra with Regular Faces*. Vol. 2 of *Seminars in Mathematics, V.A.Steklov Mathematical Institute Leningrad* New York: Consultants Bureau. 55
- [389] Zassenhaus, Hans. 1948. "Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen." *Commentarii Mathematici Helvetici* 21:117–141. 649
- [390] Zassenhaus, Hans. 1982. Über die konstruktive Behandlung mathematischer Probleme. In *Nordrhein-Westfälische Akademie der Wissenschaften Vorträge*. Vol. N 307 Opladen: Westdeutscher Verlag pp. 7–44. 711
- [391] Zeeman, E. Christopher. 1962. Polyhedral n -manifolds. I. Foundations. In *Topology of 3-manifolds and related topics*. Proceedings The University of Georgia Institute Prentice-Hall: pp. 57–64. 521

Namensverzeichnis

- Abū-l-Wafā, 84, 90
Agricola, G., 690
Anaximander, 689
Anthemios von Tralles, 81
Apollonios, 74
Archimedes, 65, 74, 448, 527
Aristaios, 73
Aristophanes, 46
Artin, E., 375, 377, 378, 387, 431
Ashley, C.W., 389
- Bäsell, P., ix
Böll, H., 363
Bülow, R., 709
Baer, R., 709
Bardeli, R., 129
Barlow, W., 332, 706, 712, 713
Berger, R., 152
Bernoulli, Johann III, 241–243, 247,
248, 250, 252
Beschoner, A., vii
Bieberbach, L., 308, 335, 708
Bilinski, S., 285, 293
Bindel, E., 149
Birman, J.S., 375, 403
Bombelli, R., 188
Born, M., 345, 714
- Borwein, D. (und) J.M., 350
Bosse, A., 410–412, 426, 428
Bourbaki, N., 317, 452, 456,
458–460, 500
Bradwardine, T., 90
Bragg, W.H., 333, 711, 713, 715
Bragg, W.L., 333, 711, 713, 715, 716
Brahe, T., 103
Braun, A, 224
Bravais, A., 227–230, 700, 703
Bravais, L., 227–230
Breton, P., 700
Brewster, D., 696
Brieskorn, E., ix, 297, 307, 311, 334,
375, 382, 462, 559
Brieskorn, H., ix, 165
Brown, H., 709
Burckhardt, J.J., 650, 652, 653,
708–711
- Cannon, J.W., 567
Cantor, M., 74, 440
Capra, F., 390
Carathéodory, C., 509
Cardano, G., 690
Cartier, P., 500
Caspar, M., 100

- Cataldi, P.A., 188
 Cayley, A., 189
 Chasle, M., 411
 Compton, A.H., 714
 Conway, J., 246
 Conway, J.H., 308, 322, 331, 364,
 406, 408, 409
 Corner, E.J.H., 232, 235
 Coxeter, H.S.M., 76, 77, 181, 196,
 255, 262, 273, 285, 305, 321,
 364, 462, 463, 478
 Critchlow, K., 14

 Dürer, A., 91, 93
 Danzer, L., 368, 369, 371, 394
 de Bruijn, N.G., 161, 167, 170, 171,
 192, 246, 247
 de La Hire, P., 411
 Delafosse, G., 700
 Delaney (\neq Dalauney), *siehe*
 Delaney-Symbol
 Dalauney, *siehe* Delone, B.N.
 Delone, B.N., 640, 707
 Demokrit, 48–61
 Desargues, G., 410, 411, 421, 440
 Descartes, R., 99, 254, 410, 429, 443
 Dirichlet, P.G.L., 189, 205, 208, 214,
 229, 348, 633, 700
 Dress, A., 119, 145, 269, 608
 Duane, W., 714

 Eckmann, B., 710
 Edwards, R.D., 567
 Ehrenfest, P., 715
 Eilenberg, S., 710
 Einstein, A., 100
 Eisenstein, G., 348
 Emde, H., 327

 Emersleben, O., 347, 352
 Empedokles, 57–59
 Epstein, P.S., 715
 Eudoxos, 51, 54
 Euklid, 4–7, 51–56, 65, 67–77, 175,
 192, 239, 256, 257, 292, 307,
 399, 421, 430, 506, 522, 523,
 690
 Euler, L., 189, 241, 246, 463
 Evjen, H.M., 351
 Ewald, P.P., 714, 716

 Fadell, E., 374, 378
 Fedorov, E.S., 277, 285, 293, 310,
 312, 639, 704–706, 708
 Fischer, G., 16, 25
 Frankenheim, M.L., 696, 699
 Fresnel, A.J., 696
 Fricke, R., 309
 Friedel, G., 96
 Friedrich, W., 711
 Frobenius, G., 708

 Galilei, G., 99, 690
 Gardner, M., 153
 Gauß, C.F., 168, 189, 205, 217, 228,
 229, 348, 633, 634, 699
 Geminus, 54
 Goethe, J.W. von, 224–227
 Gosset, T., 264
 Goursat, E., 16
 Grünbaum, B., 118, 121, 129, 149,
 312, 500, 580, 600, 640
 Graßmann, H.G., 698
 Graßmann, J.G., 698, 699
 Gregory, D., 364
 Greuel, G.-M., vii
 Groth, P., 712

- Hölder, O., 709
 Haüy, R.-J., 229, 693, 694, 700
 Hao Wang, 152
 Hardy, G.H., 2
 Hausdorff, F., vii, 476
 Havighurst, R.J., 715
 Heath, T., 46, 53, 54, 172, 174
 Heesch, H., 311, 312
 Heiberg, J.L., 53, 81
 Heisenberg, W., 68, 390
 Heller, S., 52, 174
 Hellner, E., 312
 Hermite, C., 633
 Heron von Alexandria, 172, 173
 Hessel, J.F.C., 697, 698
 Hessel, J.F.C. , 601
 Hilbert, D., 308–312, 314, 335, 708
 Hilton, H., 706
 Hirzebruch, F., 189
 Hohenburg, Georg H. von, 148
 Hurwitz, A., 189, 374, 387
 Huyghens, C., 188, 691
 Hypsicles, 74
 Ibn Sina, 690
 Isidorus von Milet, 81–84, 392
 Jamitzer, W., 91, 690
 Jean, R.V., 231, 236
 Jesus Christus, 444, 448
 Johnsen, A., 713
 Jordan, C., 309, 408, 601, 699, 703
 Jordan, P., 714
 Kepler, J., 99–175, 215, 252–276,
 285, 291–337, 466
 (Harmonice Mundi), 51, 100,
 117, 143, 148, 175, 192–195,
 265–269
 (Mysterium Cosmographicum),
 103
 Kerschner, R.B., 312
 Khinchin, A.Y., 178, 189
 Klein, F., 67, 85, 117, 189–191, 209,
 210, 248, 250, 309, 557, 558,
 699, 704
 Knörrer, H., 559
 Knipping, P., 711
 Kramer, P., 296
 Kreck, M., 598
 Löckenhoff, H.D., 312
 Lagrange, J.L., 189, 205, 209, 214,
 228, 241, 633
 Laue, M. von, 711
 Leech, J., 364, 365
 Leibniz, G.W., 430, 440, 442
 Leonardo da Vinci, 97–99
 Leonardo von Pisa, 177, 188
 Leukippos, 60
 Lindemann, F. , 8–10
 Liouville, J., 188, 189
 Mästlin, M., 102, 148, 298
 Möbius, A.F., 449, 699, 701
 Mac Lane, S., 710
 Mackay, A.L., 192
 Madelung, E., 345
 Markoff, A., 242–244
 Marshall, D.N. , 10–14
 Mathieu, E., 407
 Matt, A., ix
 Maurice, K., 96
 Maurolycus, F., 82
 Menelaus von Alexandria, 419
 Milnor, J., 308, 311, 569

- Minkowski, H., 189, 191, 476, 480,
 481, 506, 634, 700, 705
 Minnigerode, B., 704
 Mohs, F., 695
 Mugler, C., 4–6

 Naumann, C.F., 695
 Neubüser, J., 709
 Neumann, F., 696
 Neuwirth, L., 374
 Newton, I., 364
 Niggli, P., 654, 707, 708, 713
 Nishikawa, S., 713
 Novalis, 364, 687
 Nowacki, W., 708

 Pacioli, Luca, 91, 92, 97
 Pappos, 54, 74–77
 Parmenides, 57
 Pascal, B., 429, 440–449
 Penrose, R., 152–171, 192, 246
 Perron, O., 178, 189
 Philolaus, 48, 173
 Photius, 50
 Piero della Francesca, 91
 Plücker, J., 436
 Platon, 1, 5–7, 55, 65, 68, 73, 101,
 110, 113, 133, 690
 (Parmenides), 107
 (Timaios), 56–64
 Poincaré, H., 551, 552, 556, 557, 570
 Poisson, S.D., 229
 Portmann, A., 237–238
 Proclus, 107, 111
 Ptolemaios, C., 110
 Punt, W., 25
 Pythagoras, 48–50

 Rao, M., 129

 Reidemeister, K., 478, 503
 Reinhardt, K., 311
 Rohn, K., 708
 Romé de l'Isle, J.B.L., 690, 692
 Roth, K., 188
 Rudolf II, Kaiser, 296

 Sachs, E., 54
 Saffaro, L., 94
 Salies, G., 467
 Salzmann, D., 467
 Schütte, K., 364, 365, 368, 369, 371
 Schelling, F.W.J., 694
 Schimper, K.F., 224
 Schmickler-Hirzebruch, U., ix, 662
 Schoenflies, A., 310, 600, 612, 629,
 632, 639, 651, 704–706, 708,
 712
 Schrödinger, E., 68, 714
 Schreier, O., 709
 Schwarz, H.A., 557, 558
 Schwenter, D., 188
 Schwermer, J., 700
 Seeber, L.A., 228, 633, 699
 Selling, E., 634
 Senechal, M., 611, 640
 Shephard, G.C., 118, 121, 129, 149,
 312
 Sheridan, A., 11
 Shtogrin, M.I., 707
 Siegel, C.L., 188
 Simson, R., 181
 Sloane, N.J.A., 308, 322, 331, 364,
 406, 408, 409
 Sohncke, L., 333, 703
 Speiser, A., 708
 Steiner, J., 436, 500
 Steinitz, E., 92, 569, 600

- Stensen, N., 691
Struik, D., 410, 411, 429
Sturm, J., 229
Suzuki (Zen-Lehrer), 236
Szabó, A., 51, 54
Tóth, F. , 46, 77, 314, 364, 366–368,
371, 394
Tammes, P.M.L., 366–368
Thaer, C., 51, 53
Theaitetos, 53, 54, 690
Thue, A., 188
Turnbutt, H.W., 364
Ucello, P., 91, 94
Vainshtein, B.K., 333, 336, 339, 343,
349, 354, 358
van der Waerden, B.L., 46, 48, 54,
84, 364, 365, 368, 369, 371
van Kampen, E., 567
Venkov, B.A., 243, 244
Voronoi, G., 634, 639, 640, 700, 706
Wackenfels, J.M.W. von, 296
Waterhouse, W.C., 54
Wecker, G., 96
Weiss, C.S., 696
Weizsäcker, C.-F. von, 5, 57, 100, 107
Weiß, C.S., 694–696
Werner, A.G., 690, 692, 694
Wieringa, R.M.A., 165–171
Wilmowsky, J.N. von, 470
Witt, E., 409
Wittgenstein, L., 100
Woepcke, F., 84
Wondratschek, H., 709
Wyckoff, R.W.G., 654, 706, 713, 716
Zassenhaus, H., 649, 654, 709
Zeeman, C., 521, 522, 592, 594, 596

Sachverzeichnis

- Abstand Punkt – konvexe Teilmenge
(definiert), 482
- affin-algebraische Varietät, 563, 564
- affin-lineare Abb. (definiert), 536
- Anordnung (von Hyperebenen), 499
- Arrangement, *siehe* Anordnung
- baryzentrische Unterteilung, 65–67,
85–87, 133
- baryzentrischer Kalkül, 449
- Baryzentrum (erklärt), 526
- Bienenwaben, 297, 298, 302, 303
- Boron, 655, 656
- Braggs Reflexionsgesetz, 661, 711
- Bravaisystem, *siehe* Gittersystem
- Bravaistyp, 624, 626–629, 632, 636,
649, 654, 655, 700–702
- chemische Bindung, 341–362
- Coxeterdiagramm, 321, 456
- Delaney-Symbol, 145, 146, 269–272
definiert, 608
- Delone-Typ, 642–649
- Diamant, 632, 662, 668–671, 689, 691
-struktur, 343, 361, 712
Raumgruppe, 632, 650, 653
- dichotome Verzweigung, 232–239,
245, 246, 252
- Dirichletreihe, 352
- Dirichletzelle, 205, 207, 212, 216,
219, 220, 228, 315, 331, 636,
siehe auch Voronoi-Bereich
definiert, 205
- Disheptaeder, 362, 391, 394–396,
398, 404
- Dodekaeder, 7–9, 13, 14, 27, 32, 53,
67, 69–82, 92, 102, 155, 258,
265, 273, 298, 551, 552, 554,
567, 580, 692
- Dodekaederraum, sphärischer,
551–569
- Doppelbrechung, 691
- Dualität von
- Figuren, 92, 123
 - Flächenteilung, 143–148,
467–473
 - Konfigurationen, 416, 438
 - Polyeder, *siehe* Polyeder, duale
 - Raumteilung, 326–360
 - Wurzelsystem, 452–462
- Dynkindiagramm, *siehe*
Coxeterdiagramm

- Eckenfigur, 124, 134, 135, 144, 164,
165, 167, 255, 258, 262, 263,
268
- Eckenkegel (definiert), 514
- Eilenberg-MacLane-Raum, 390
- Einheitszelle, 336, 624, 629, 653–655,
660, 661
erklärt, 627
- enantiomorph, 143, 624, 649
- Epsteinsche Zetareihe, 347, 352
- euklidischer Algorithmus, 178–181,
192
- Eulerscher Polyedersatz, 289
- Fahne eines Polytops (erklärt), 525
- Fahne, maximale, 133
- Faktorensystem, 709, 710
- Fibonacci-Zahlen, 177, 182, 186, 193,
195, 197, 199, 210, 214, 216,
217, 219, 220, 222, 228, 233
- Flächenfigur, 123, 124, 127, 128, 130,
132–134
- Flächenorbit, 615, 696
- Flächenornament, 464–472
- Flächenteilung, 110, 118–171, 700
archimedische, 134–150, 466,
469
Laves-, 145–150
- Fourieranalyse, 657–659, 661, 715
- Fundamentalebene, 67, 84, 85, 308,
319–320, 335
- Fundamentalgruppe, 373, 374, 380,
382, 383, 385, 386, 390,
401–403, 552
- Fußpunktabbildung (definiert), 483
- gerengesetzlich, 698
- Gitter, 12, 139, 203, 205–207, 220,
228, 248–252, 314, 329, 612,
613, 624–661, 701, 711, 716
duales, 657, 658, 702
- Gitterkomplex, 654
- Gittersystem, 612, 624–628, 701
- Gittertyp, *siehe* Bravaistyp
- Gleitspiegelung, 629, 632, 651
- Gnomon, 4, 172–176, 181, 192, 233,
239, 240, 252, 292
- goldener Schnitt, 52, 74, 82, 92, 161,
165, 175, 176, 222, 252, 275,
278, 280, 281, 293, 294, 392
- Goniometer, 693, 696
- Granat, 662, 670, 671, 687
- Gruppe, 118
binäre endliche, 601
endliche einfache, 408
endliche orthogonale, 532, 601,
612, 628
Fundamental-, *siehe*
Fundamentalgruppe
Mathieu-, 407–409
Ornament-, 142–143, 148
Spin-, 401
Symmetrie-, *siehe*
Symmetriegruppe
Weyl-, 317, 418, 452, 457–462
Zopf-, 374–387, 390, 403
- Gruppenerweiterung, 652, 709, 710
- Gruppenkohomologie, 652, 710, 711
- Hülle, affine (definiert), 479
- Hauptvermutung, 569
- hemiedrisch, 617, 695, 697
erklärt, 613
- hexagramma mysticum, 430
- Hilberts 18. Problem, 308
- holoedrisch, 695, 697

- erklärt, 612, 613
- Homologiesphäre, 550, 552, 557, 567
- Ikosaeder, 7, 8, 32, 53, 60–63, 65, 69, 74–78, 81, 82, 85, 92, 102, 257, 258, 268, 269, 273, 282, 283, 287, 290–293, 298, 368, 369, 371, 391–399, 404, 552, 655, 656, 692
- Ikosaedergruppe, 399–405, 552, 554
binäre, 402–565
- Ikosaedersingularität, 565
- isoedrisch, 125, 126, 128, 129, 131, 132, 143, 144, 255, 258, 265, 269, 311, 312, 314
definiert, 124
- isogonal, 131, 134, 144, 255, 258, 259, 261, 264, 269, 273, 293
definiert, 124
- Isometriegruppe eines Polytops
(definiert), 530
- Join, *siehe* konvexe Verbindung
- Kammersystem, 67
- Kategorien von Polytopen
isometrische, 530–534
lineare, 534–542
stückweise linear, 542–551
- Kegel (definiert), 571
- Kepler Gesetze, 112
- Kettenbruchentwicklung, 178–192
- kombinatorischer Morphismus, *siehe* Morphismus, komb.
- kombinatorischer Typ, *siehe* Struktur, kombinatorische
- Komplex
derivierter (definiert), 529
Polytop-, *siehe* Polytopkomplex
- simplicialer, *siehe* simplicialer
Komplex
- Konfiguration, 156, 287, 290, 291, 293, 316, 318, 321, 390–392, 400, 403, 409–411, 414–417
von Desargues, 413, 416, 424–429
von Möbius, 450–462
von Pappus, 430–435, 449
von Pappus (vollständige), 438
von Pascal, 430–435, 439
von Pascal (vollständige), 440
von Reye, 462
- Konfigurationsraum, 374, 375, 379, 380, 383, 386, 390, 394, 395, 398, 399, 401, 402
- Kongruenz (im Keplerschen Sinn), 113, 123, 137, 691
- Konsonanz, 106, 192
- Kontaktzahl (maximale sphärische), kissing number, 363–365, 371
- konvexe Hülle (definiert), 507
- konvexe Linearkombination
(definiert), 507
- konvexe Verbindung (definiert), 508
- Konvexität, 476
- Koordinationspolyeder, 319, 323, 326, 330, 337, 343, 358–360, 362, 655
- Kristallform, 8, 662–685
einfache, 334, 602, 615–617, 662, 668, 669, 697
- Kristallklasse, 612–617, 698, 711
arithmetische, 649, 650
hexakisoktaedrische, 612, 662, 671

- hexakistetraedrische, 612, 662, 675
- Kristallstruktur, 229, 310, 332–346, 353–356, 361, 362, 654–657, 701
- Kristallsystem, 612–617, 694–695, 701
- Kugelpackung, 304–307, 314, 315, 320–323, 326, 327, 331–333, 353–355, 358, 360, 362, 390
- Link, *siehe* Sternrand
- Madelung-Konstante, 345, 346, 349–352, 361
- Mannigfaltigkeit, 118–551
 - differenzierbare, 597
 - kombinatorische, 568, 570
 - kombinatorische (definiert), 574
 - pl-, 521, 570, 574–577
 - pl- (abstrakte), 577, 591, 593, 594, 596, 597
 - pl- (definiert), 574, 593
 - topologische, 597
 - zweidimensionale komplexe, 558
- Markoff Prozess, 244
- Medaillon-Stil, 469–471
- Mengenring (definiert), 477
- meriedrisch, 613, 697
- Millersche Indizes, 615, 658
- Modell/Modellierung, 16, 223, 230–233, 236, 238, 239, 245, 262, 280, 281, 304, 327, 333, 336, 338, 341, 344, 353, 355, 359, 360, 366, 378
- Modifikation (einer Kristallstruktur), 353, 356, 362
- Modulfigur, 217
- molécule intégrante, 693
- Monochord, 50
- monoedrisch, 124, 125, 127–130, 144, 255, 257, 258, 262, 289, 294, 311
 - definiert, 124
- monogonal, 124, 130, 134, 255, 257, 258, 261, 262
 - definiert, 124
- Monoid, freies, 235
- Morphismus (von Polytopen)
 - kombinatorischer, 539
 - pl-, 545
- morphogenetisches Feld, 230
- Paralleloeder, 639, 640, 705–707
 - definiert, 639
- Pascalsches Dreieck, 441
- Peltemuster, -teilung, 470, 473
- Penrosepflasterung, 152–171, 192
- Pentagramm, 46–53, 119, 155–157, 253
- Phyllotaxis, 194–203, 205, 208, 210, 220–233
- pl- (piecewise linear)
 - Abbildung (definiert), 544
 - Kugel, Sphäre (definiert), 550
 - Mannigfaltigkeit, *siehe* Mannigfaltigkeit, pl-
 - Raum, 592
 - Sphäre, 568
- Platonismus, 100
 - Neu-, 51
 - Renaissance-, 51
- Pollenkorn, 25–39, 366, 367
 - Cobea scandens, 31–32
- Poly-Karte, 592
- Polyeder, 3, 27, 28, 46

- archimedisches, 32, 74, 77–80, 84, 99, 110, 259–276, 691
- archimedisches (definiert), 264
- duales, 14, 32, 76, 84, 265–275, 287, 323, 392
- halbreguläres, *siehe* Polyeder, archimedisches
- kombinatorische Theorie, 475
- reguläres, 3–7, 53–103, 110, 112–113, 133, 252–259, 690, 691
- reguläres (vorplatonisch), 8–10
- polyedrischer konvexer Kegel (definiert), 513
- Polytop (definiert), 477
- euklidisches, 531
- metrisches (definiert), 530
- Polytopkomplex, 497–586 (erklärt), 497
- abstrakter, 578–591
 - ohne Realisierung, 579–584
 - Realisierung, 579
- homogener (definiert), 504
- lokal endlich (definiert), 498
- pseudoradiale Projektion (erklärt), 550
- Punktgitter, *siehe* Gitter
- Pyrit, 653, 662, 668, 669, 672, 673, 689, 693, 712
- q-Gerüst (definiert), 499
- quadratische Form, 205, 228, 633, 700, 707
- quadratische Irrationalität, 245–247
- Quartik von Goursat, 16, 28
- Quasikristall, 8, 278, 280–283
- quasiregulär, 274
- Quaternionen, 553
- Röntgenstrukturanalyse, 657, 659–661, 711
- Rationalitätsgesetz, 695, 697
- Raumgruppe
 - arithmetische, 649–654
 - kristallographische, 139, 335, 624–632, 702, 711, 716
- Raumgruppentyp, erklärt, 624
- Raumstück, 478, 490, 493
- Raumteilung, 110, 133, 700, 716
- Reduktionstheorie (ebener Gitter), 189, 191, 193, 205, 208, 209, 217, 222, 223, 228, 229
- reduzierte Basis, 634, 636, 637
- regula sex quantium, 419, 421–424, 427
- Rhombendodekaeder, 259, 265, 268, 273, 275, 276, 285–287, 289, 291, 293, 294, 296, 299–305, 315, 326, 327, 331, 334, 360, 691, 693
- Rhombenikosaeder, 277, 281, 285, 286, 289, 293, 294
- Rhombentriakontaeder, 259, 265, 268, 273, 275, 279–281, 286, 287, 289, 291, 294, 691, 693
- Rhomboeder, 276, 277, 280, 281, 284, 286, 289, 291, 293, 294, 299, 320
- Schneekristall, 296, 331, 691
- Schnitt-Projektions-Methode, 252
- Schnittzahl, 563
- Schraubenbewegung, 629, 632, 651
- Seeber Basis, *siehe* reduzierte Basis
- Seeber-Reduktion, 634, 636

- Seite, eigentliche/uneigentliche
(definiert), 486
- semiregulär, 264
- semiregulär (definiert), 264
- Simplex/Standardsimplex
(definiert), 516
- simpliziale Abbildung (definiert), 541
- simplizialer Komplex
(definiert), 518
- simplizialer Komplex (abstrakter),
578
Realisierung, 584–586
Standardrealisierung, 586, 588
top. Standardrealisierung, 590
- simplizialer Standardkegel
(definiert), 515
- Singularität, 516, 558, 565
- Skelett, *siehe* q -Gerüst
- Sphärenteilung, 84–90
- Sporodermis, 26, 30–33, 37
- stückweise linear, *siehe* pl-
Stützebene (definiert), 480
- Standardfehler (pl-Topologie), 548
- Steinersche System, 409, 440
- Steinersystem, 462
- Steinkugeln, neolithische, 10–15
- Stern/Sternrand
eines Polytops, 571
- Sterndodekaeder, 91, 258, 259, 691
- Streuvektor, 660
- Struktur auf Mannigfaltigkeiten
(top, pl-, diff), 597
- Struktur, kombinatorische, 7, 8, 121,
122, 125, 130, 131, 143, 145,
269, 273, 277, 289, 293, 312
auf S^n , 576, 597
pl- (Nicht-Eindeutigkeit), 597
- Struktur, Kristall-, *siehe*
Kristallstruktur
- Suspension, 566, 567
- Symmetrie (elementare)
Polyeder-, 3–33
kombinatorische, 55
metrische, 55
Raumteilung, 301
von Polyedern, 699
- Symmetriebegriff
19. Jhd., 697
griechisch, 56–64
modern, 13, 122, *siehe auch*
Symmetriegruppe
- Symmetriediagramm, 141, 142, 615,
629, 706
- Symmetriegesetz von Haüy, 694
- Symmetriegruppe
binäre, 403
- Symmetriegruppe von ...
Flächenteilung, 122–125,
132–133, 139–150
Ikosaeder, *siehe*
Ikosaedergruppe
Konfiguration, 391, 415–419,
427–438, 451–452, 458–462
Polyeder, 55, 64–76, 82–85,
255–273
Raumteilung, 311–319, 335
- Symmetriegruppe von Polytop
affine (definiert), 534
euklidische (definiert), 531
kombinatorische (def.), 540
topologische (def.), 542
- Symmetriegruppe, binäre, 402
- Symmetriekarte, *siehe*
Symmetriediagramm

Symmetriesorte (Delone), *siehe*
 Delone-Typ
 Symmetriesorten (Delone), 648, 707
 symmorph, 629, 632, 650, 702
 erklärt, 628
 Tammes' Problem, 367, 368
 tetartoedrisch, 697
 erklärt, 613
 Theta-Reihe, 348, 349, 352
 Tonarten, 110, 112, 175, 192
 Topologie
 algebraische, 521, 556, 566, 569
 kanonische (erklärt), 588
 kombinatorische, 521–597
 metrische (erklärt), 589
 schwache (erklärt), 589
 Träger eines Polytopkomplexes
 (definiert), 497
 Tragwerk, 327
 Transzendenzbeweis, 188
 Triangulierung, 529, 544, 576, 596
 Triangulierung, lineare (definiert),
 529
 Triangulierungssatz, 596
 Verband (definiert), 487
 verschränkter Homomorphismus, 651
 vollständige Induktion, 441
 Voronoi-Bereich, 636, 707, 716
 definiert, 639
 Voronoitypen, 641

 Wellenfunktion, 338
 Weylgruppe, *siehe* Gruppe, Weyl-
 Weylkammer, 606
 Wurzelsystem, 317, 318, 321, 418,
 419, 452–462, 606
 Wyckoff Position, 706

 Zähligkeit
 definiert, 654
 Zellenkomplex, *siehe*
 Polytopkomplex
 Zentrierung eines Komplexes
 (erklärt), 526
 Zone, 257, 260, 275, 285–287, 289,
 299, 302
 definiert, 285
 Zopfgruppe, *siehe* Gruppe, Zopf-



