

Hausdorffs Blick auf die entstehende algebraische Topologie

Erhard Scholz*

29. 05. 2007

1. Kombinatorische und algebraische Topologie in den 1920er Jahren

Die algebraischen Methoden der Topologie waren seit Poincarés ersten beiden *Compléments de l' Analysis Situs* (1899/1900) bis weit in die 1920er Jahre auf eine kombinatorische Charakterisierung der betrachteten Räume angewiesen. In der Homologietheorie wurde mit Ketten, Zyklen und Rändern wie mit Elementen kommutativer Gruppen gerechnet; der Gruppenaspekt wurde aber bis zum Beginn der eigentlichen Algebraisierung entweder verdrängt oder bestenfalls beiläufig erwähnt.¹ Für endliche Zellenkomplexe (Poincaré) und lineare simpliziale Komplexe (Brouwer) erfolgte die Berechnung von Betti- und Torsionszahlen, sowie der Fundamentalgruppe mit Standardmethoden der linearen Gleichungssysteme und Elementarteilertheorie. Man erwartete die Invarianz dieser numerischen Charakteristika, stützte sich dabei aber auf die ab 1926 (H. Kneser) als *Hauptvermutung* der kombinatorischen Topologie bezeichnete Annahme, dass je zwei Zellenzerlegungen desselben Raumes durch Verfeinerungen wechselseitig kombinatorisch ineinander überführt werden können. Gegenüber dem allgemeinen, auf mengentheoretische Methoden gestützten Zugang zum Studium topologischer Räume klaffte zu dieser Zeit eine kaum überbrückbare Kluft.

Hausdorff neigte bekanntlich gegenüber plausiblen geometrischen Erwartungen zu äußerster Skeptis. Er ging davon aus, dass in der Mengenlehre und der allgemeinen Theorie topologischer Räume “schlechthin nichts selbstverständlich und das Richtige häufig paradox, das Plausible falsch ist” (Hausdorff 1914, v). Entsprechend wenig wird er von einem von G. Nöbeling Mitte der 1930er Jahre publizierten angeblichen Beweis der Hauptvermutung für Mannigfaltigkeiten gehalten haben, falls er ihn überhaupt ernsthaft zur

*Unter Verwendung von Materialien und Hinweisen von F. Hirzebuch und E. Brieskorn

¹Poincaré verband das Gruppenkonzepts grundsätzlich mit “substitutions” als Objekten. Die Terminologie “homology group” findet sich zwar bei (Veblen 1922, 141), jedoch nur als Randbemerkung; vgl. (McLarty 2006).

Kenntnis nahm (Nöbeling 1935).² Spätere Arbeiten zeigten (am deutlichsten allerdings erst in den 1960er Jahren) wie angebracht Hausdorffs Vorsicht hinsichtlich solcher Erwartungen der kombinatorischen Topologie war. J. Milnor wies im Jahre 1961 nach, dass die Hauptvermutung nicht für alle Zellenkomplexe gilt, R. Kirby und L. Siebenmann, dass sie sogar für triangulierte (PL) Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 5$ falsch sein kann (Kuiper 1999, 497f.).³

So ist es kaum verwunderlich, dass Hausdorffs Interesse an der klassischen Analysis Situs bis weit in die 1920er Jahre gering blieb. In einem im Jahr 1940 an seinen ehemaligen Kollegen J.O Müller, früher Privatdozent und Extraordinarius in Bonn,⁴ verfassten Brief, den er zur Zeit einer erneuten Auseinandersetzung mit dem Invarianzbeweis für die simpliziale Homologie metrischer Räume schrieb, wies Hausdorff mit schmunzelnder Selbstironie rückblickend auf dieses mäßige Interesse hin:

Wissen Sie noch, wie wir in dem Büchelchen von Veblen gemeinsam bis Seite 2 vordrangen? (Hausdorff 6/6/1940)

Aus Sicht der strukturell und axiomatisch ausgerichteten “modernen” Mathematik war der Zustand der algebraischen Methoden in der Topologie um diese Zeit tatsächlich wenig zufriedenstellend. Veblens Buch (Veblen 1922) berief sich, ähnlich wie Poincarés Arbeiten, stark auf geometrische Anschauungselemente, besaß keine geklärten Grundlagen und arbeitete mit einer wenig ausgeprägten Algebraisierung.⁵

Anders verhielt es sich mit der kombinatorischen Topologie im eigentlichen Sinne. Schon Dehn und Heegard hatten in ihrem Enzyklopädieartikel eine abstrakte Definition von Komplexen und ihrer kombinatorischen Äquivalenz gegeben (Dehn 1907). Wenig später wies E. Steinitz auf die Hauptvermutung (zu diesem Zeitpunkt noch nicht so bezeichnet) als zentralen Baustein für eine systematische immanente Begründung der kombinatorischen Topologie

²Eine Besprechung dieser Arbeit findet sich in Hausdorffs Nachlass nicht. Eine andere Arbeit von Nöbeling (Mathematische Annalen 104 (1930), 71–80) erschien ihm aber als “ganz fehlerhaft” (NL Hausdorff, Fasz. 987). Alexandroff und Hopf erwähnten Nöbelings Publikation in der Endredaktion ihres Buches am Jahresende 1935 zurückhaltend, keinesfalls zustimmend (Alexandroff/Hopf 1935, 152, Anm. 1). Nöbelings Vortrag auf der Moskauer Topologie Konferenz scheint ihm nicht viel Vertrauen eingebracht zu haben (James 1999b, 843)

³In niedrigen Dimensionen, $n \leq 3$, ist die Hauptvermutung hingegen richtig, wie im Jahre 1963 von E.H. Brown bewiesen wurde.

⁴J.O. Müller (1877–1940), 1909 Habilitation Universität Bonn, 1931–1937 unbesoldeter Extraordinarius ebendort, wurde die Lehrbefugnis im Wintersemester 1937/38 entzogen, weil seine Frau aus einer jüdischen Familie kam. Er starb noch im Jahr 1940 an einer Krebserkrankung.

⁵In der historischen Literatur hat die interpretationsbedürftige Notation der frühen algebraisierenden Topologie zu einer Untersuchung der Texte aus semiotischer Sicht angeregt (Herreman 1997, Herreman 2000).

hin (Steinitz 1908). Durch L.E.J. Brouwers Arbeiten zur simplizialen Approximation entstand ab 1911 mit der später so genannten (PL) (*piecewise linear*) Struktur ein gut ausgebauter und folgenreicher geometrischer “Zwillingszweig” zur abstrakten kombinatorischen Topologie (Burde/Zieschang 1999).

Für die im Vergleich relativ zurückgebliebenen algebraischen Methoden der Topologie änderte sich die Situation erst ab Mitte der 1920er Jahre, zunächst durch die Arbeiten von L. Vietoris und W. Meyer in Wien, dann durch H. Hopf und P. Alexandroff aus E. Noethers Göttinger Kreis. In den 1930er Jahren wurden diese Impulse auf internationaler Ebene aufgenommen und fortgeführt, insbesondere durch E. Čech in Prag und die junge Generation der Topologen in Princeton, A.W. Tucker, N. Steenrod, S. Eilenberg und andere. In den erstgenannten (Wiener und Göttingen/Moskauer) Arbeiten wurden algebraische Homologietheorien formuliert, die sich an Emmy Noethers “mengentheoretischer” (strukturorientierter) Theorie der Ringe und Gruppen orientierten.⁶ Erst diese Auffassung ermöglichte es, Homologietheorien auch für allgemeinere Räume zu formulieren als für Mannigfaltigkeiten oder geometrische simpliziale Komplexe.

Vietoris begann in den Jahren 1926/27 mit dem Studium des Zusammenhangs kompakter metrischer Räume (Vietoris 1926, Vietoris 1927). Er startete mit Brouwers simplizialen Komplexen, führte unter expliziter Verwendung des Gruppenbegriffs deren “k-te Zusammenhangsgruppe” modulo 2 ein und übertrug die Konstruktion auf kompakte metrische Räume X mit gegebener Triangulierung. Dazu betrachtete er (über \mathbb{Z} oder $\mathbb{Z}/(2)$) gebildete Ketten, erzeugt von den Simplizes der Triangulierung. Falls diese (bezüglich der Metrik von X) ausschließlich aus Simplizes mit Kantenlängen $< \epsilon$ bestanden, bezeichnete er sie als “ ϵ - homolog 0” (ϵ -nullhomolog). Zwei in X gebildete Ketten C_1, C_2 betrachtete er als ϵ -homolog, $C_1 \sim_\epsilon C_2$, falls $C_1 - C_2$ im triangulierenden Komplex homolog zu einer ϵ -nullhomologen Kette \tilde{C} ist. Dann betrachtete er “Fundamentalfolgen” $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$ aus Zyklen C_i mit gegen Null konvergierenden Kantenlängen, die für jedes $\epsilon > 0$ bei ausreichend hoher Indexwahl untereinander ϵ -homolog sind. Solche, wie er formulierte, *Vollzyklen* bildeten die Zyklen seiner Theorie. Die zugehörigen Homologien definierte Vietoris entsprechend über *Vollränder*, das heißt Fundamentalfolgen A_1, A_2, \dots , aus Rändern seiner Punktkomplexe mit gegen Null konvergierenden maximalen Kantenlängen.

Ein Jahr später griffen auch Hopf und Alexandroff Emmy Noethers Vorschläge zur Charakterisierung des topologischen Zusammenhangs auf (Hopf 1928, Alexandroff 1928). Beide schlossen dabei an Brouwers simpliziale Zerlegungen und Approximation topologischer Räume an. Alexandroff verwendete die ursprünglich zum Studium der Dimensionstheorie eingeführte Systeme von Überdeckungen aus abgeschlossene Mengen nun auch zur Berechnung der Bettizahlen eines kompakten metrisierbaren Raumes. Er wies dabei auf

⁶(McLarty 2006), (Hirzebruch 1999), (Mac Lane 1986).

die Analogie geometrischer simplizialer Komplexe mit dem *Nerv* (Alexandroffs Terminologie) solcher abgeschlossener endlicher Überdeckungen von X hin und definierte dadurch die Bettizahlen des Raumes (“Brouwersche Zyklosezahlen”). Die Arbeiten von Vietoris waren ihm bekannt; sie erschienen ihm aber von begrenzter Reichweite und auf seinem Weg verbesserbar. Seine Methode wurde von E. Čech weiterentwickelt und auf Systeme offener Überdeckungen übertragen. So wurden Alexandroffs “Nerven” wenige Jahre später zum Ausgangspunkt für die Entwicklung der Čech-Homologie (Čech 1932).⁷

2. Hausdorffs Hinwendung zur kombinatorisch/algebraischen Topologie

Hausdorff erfuhr durch Alexandroff aus erster Hand von den neuesten Entwicklungen. Im Juli 1924 fand der erste Besuch P. Alexandroffs mit P. Urysohn bei Hausdorffs in Bonn statt. Es entstand eine wissenschaftliche und persönliche Freundschaft zwischen den beiden von Lebensweise und Generation her so unterschiedlichen Mathematikern. In den nächsten Jahren nutzte Alexandroff seine Reisen nach Göttingen, Frankreich und Holland für gelegentliche Besuche bei Hausdorff. So auch Ende Oktober/Anfang November 1925, bevor er zu einem längeren Aufenthalt im Winter 1925/26 bei Brouwer nach Blaricum weiterreiste.⁸ Es folgte ein intensiver wissenschaftlicher Briefwechsel zwischen Hausdorff und Alexandroff (Hausdorff/Alexandroff Korr), der erst 1935 nach der Machtübernahme durch die Nazis abbrach. Im Herbst 1932 hatten sich die beiden Mathematiker in Locarno zum letztenmal persönlich getroffen.⁹

Ein Ergebnis der Anregungen war, dass sich Hausdorff gegen Ende der 1920er Jahre der kombinatorischen und der entstehenden algebraischen Topologie zuwandte. Am 14. 06. 1928 schrieb er an Alexandroff, der sich ebenso wie H. Hopf zu dieser Zeit in Princeton aufhielt:

Ich muss wohl doch noch auf meine alten Tage (ich werde wirklich am 8. Nov. 60 Jahre alt!) Topologie lernen, was insofern eine

⁷Siehe dazu (Sklyarenko 1993).

⁸Im Dezember 1925 fand der für die moderne Algebraisierung entscheidende Besuch Emmy Noethers in Brouwers Kreis statt. Alexandroff und Vietoris waren zu dieser Zeit in Blaricum anwesend; (McLarty 2006), (Alexandroff 1935/1983, 9).

⁹Der letzte (überlieferte) Brief von Hausdorff an Alexandroff datiert vom 18. 2. 1933, der letzte von Alexandroff an Hausdorff vom 9. 3. 1935 (Hausdorff/Alexandroff Korr, Kaps. 61, 62). Aufgrund der Stalinisierung der Sowjetunion wurden in den 1930er Jahren Reisen nicht nur nach Nazi-Deutschland sondern auch in das demokratische westliche Ausland in steigendem Maße schwieriger. Für Alexandroff traten gesundheitliche Probleme hinzu. Den brieflichen Kontakt zu westlichen Kollegen, insbesondere zu H. Hopf, ließ er sich aber nicht nehmen. Bis auf eine kriegsbedingte Unterbrechung 1941/42 erhielt Alexandroff den Kontakt stets aufrecht und intensivierte ihn nach 1945 wieder. In seinem ersten Brief an H. Hopf nach Kriegsende erkundigte er sich sofort nach Hausdorffs Schicksal (Alexandroff an Hopf, 13. 4. 1946, Hs. 621:93).

Zeitverschwendung ist, als ich damit lieber bis zum Erscheinen Ihres Buches warten sollte. (Hausdorff/Alexandroff Korr, Kaps. 61, 14/6/1928)

Hausdorff war also früh über die Planungen zu dem gemeinsamen Buchprojekt von Alexandroff und Hopf informiert. Seine hier gewählte Verwendung des Ausdrucks “Topologie” ist aus heutiger Sicht allerdings kommentierungsbedürftig, rechnen wir ja einen wichtigen Teil der Hausdorffschen Arbeiten ab 1910 selber der Topologie zu. Die im heutigen Sprachgebrauch unter dem gemeinsamen Oberbegriff *Topologie* zusammengefassten Theorien der allgemeinen Topologie, der geometrischen Topologie, der kombinatorischen Topologie und der algebraischen Topologie wurden noch bis in die 1930er Jahre hinein in zwei große, deutlich voneinander unterschiedene Wissensgebiete zerlegt, die *Analysis Situs* oder auch “(kombinatorische) Topologie” im älteren Sinne und die Theorie der *Punktmengen* und der *allgemeinen Räume*. Die algebraische Topologie im modernen (strukturorientierten) Sinne entstand in dieser Zeit erst (James 1999a). Dabei stand nicht zuletzt die Zielsetzung Pate, die im kombinatorischen Kontext entwickelten Methoden auf “allgemeinere Räume von Punktmengen” zu übertragen.

Letzteres war die von Hausdorff in den *Grundzügen* bevorzugt verwendete Bezeichnung. Bei seiner allgemeineren Einführung der Fachterminologie eines *topologischen Raumes* für einen axiomatisch definierten Umgebungsraum war er sich der damit verbundenen Metonymie (Begriffsüberdehnung) wohl bewusst. In einer Anmerkung sprach er von einer bloßen Verwandtschaft des von ihm angewendeten Attributes “topologisch” zur bisher üblichen Sprachverwendung:

Der Ausdruck ist in einem verwandten Sinne bereits üblich; wir wollen damit andeuten, dass es sich um Dinge handelt, die ohne Maß und Zahl ausdrückbar sind (Hausdorff 1914, 213).

Tatsächlich wurde die Topologie im Sinne der *Analysis Situs* noch über längere Zeit als getrenntes Gebiet gegenüber der in Mengensprache ausgeführten Topologie der allgemeinen Räume angesehen. Lefschetz verwies zum Beispiel in seiner Monographie *Topology* (1930) lediglich in der Einleitung auf die Rahmung des Gesamtgebietes durch den axiomatischen Raumbegriff (Hausdorff-Raum). Der Haupttext blieb in Inhalt und Methode weiterhin der älteren geometrischen Tradition der *Analysis Situs* verhaftet.

Alexandroff und Hopf setzten sich in ihrem Lehrbuch von 1935 zum Ziel, eine ausgewogene und tiefgreifende Verbindung der beiden bis dahin weitgehend getrennten Forschungsfelder zu schaffen; aber selbst ihr groß angelegter Entwurf konnte die unterschiedlichen Forschungsgebiete nicht auf Dauer zu einer gemeinsamen, aus einheitlicher Perspektive bearbeiteten Teildisziplin zusammenführen. Dafür war die innere Fortentwicklung der topologischen Forschung zu rasch und die beteiligten Gruppen von Akteuren zu unterschiedlich. In modifizierter Form wirkt die Trennung bis heute fort, selbst

wenn wir uns daran gewöhnt haben, die unterschiedlichen Forschungsrichtungen subsumierend zu einer Teildisziplin der “Topologie” zusammenzufassen.¹⁰

Hausdorffs war bis tief in die 1920er Jahren hinein mit dem begrifflichen Präzisierungsniveau der älteren, kontextgebunden algebraisierenden (“kombinatorischen”) Topologie unzufrieden. Er brachte dies an verschiedenen Stellen in seinem Briefwechsel mit Alexandroff und in seinen Exzerpten und Studien deutlich zum Ausdruck.

Am schärfsten findet sich diese Einschätzung Hausdorffs in einer Klammerbemerkung am Ende von Fasz. 1049, der eine ausführlichen Wiedergabe von J.W. Alexanders Argumentation für die topologische Invarianz der “Homologiecharaktere” (Bettizahlen und Torsionskoeffizienten) einer triangulierten beschränkten Punktmenge des \mathbb{R}^n enthält (Alexander 1922). Alexander argumentierte dort mit der später nach ihm benannten (Alexander-) Dualität. Hausdorff fasste seinen Eindruck von der Arbeit für den Eigengebrauch in der drastischen Formulierung zusammen: “Für meine Ansprüche ist diese Arbeit äusserst wenig überzeugend!” (NL Hausdorff, Fasz. 1049, Bl. 19).

Ähnliche Bemerkungen finden sich an anderen Stellen des Nachlasses. Wir können die zitierte Bewertung daher als typisch für Hausdorffs Einschätzung auch der anderen topologischen Arbeiten von Veblen, Alexander und Lefschetz aus den 1920er Jahren lesen.¹¹ Deutlicher und mit konkreter ausgeführter Kritik finden sich an verschiedenen Stellen Kommentare zu dem von Alexander, Veblen und Lefschetz vorgeschlagenen problematischen Konzept der “Bettizahlen modulo m ”. Hier wies Hausdorff durch Angabe eines einfachen Gegenbeispiels nach, dass das Konzept selbst nicht konsistent definiert war (Abschnitt 5). Dies war ein (kleiner) Beitrag zum Stilwechsel der Topologie in Princeton, der mit dem Übergang zum neuen Jahrzehnt begann und sich während der 1930er Jahre vollzog.

Hausdorff blieb keineswegs bei einer “negativen” Kritik stehen. In einigen grundlegenden Fragen bildete er selbst eigene Auffassungen heraus und mischte sich in die entstehende strukturorientierte algebraische Topologie ein. Obwohl er sich nicht an deren Kernentwicklung beteiligte, eröffneten seine kritischen Anmerkungen zur zeitgenössischen Literatur und die Themenwahl seiner Ausarbeitungen einen aufschlussreichen, natürlich von seiner Perspektive geprägten, und damit auch selektiven Blick in die Werkstatt dieses neuen Wissenszweiges. Hausdorff selbst verwendete für das gesamte Feld allerdings weiterhin die traditionellere Bezeichnung “kombinatorische Topologie”.

¹⁰Dies kommt auch noch zum Ende des 20ten Jahrhunderts in den getrennten Projekten zur Darstellung der Entstehungsgeschichten der beiden Felder (Aull 1997–2001) und (James 1999) zum Ausdruck.

¹¹Hausdorff kommentierte etwa Alexanders Einführung degenerierter Simplexe in dessen Arbeit (Alexander 1926, 306) mit der Klammerbemerkung “... nicht genügend klar ...” (Fasz. 288, 2^v).

3. Lektüre von Alexandroff, Vietoris und anderen

Hausdorff begann seine Studien der neueren algebraischen Topologie mit Alexandroffs Arbeiten über abstrakte simpliziale Approximation topologischer Räume. Durch diesen Ansatz stellte Alexandroff eine grundsätzliche und allgemeine Beziehung zwischen mengentheoretisch charakterisierten, kompakten metrisierbaren topologischen Räumen X und verallgemeinerten simplizialen Komplexen her, die durch den Nerv abgeschlossener endlicher Überdeckungen von X gebildet werden. In Verallgemeinerung von Brouwers geometrischen Simplizes und ihrer Verwendung zur simplizialen Approximation von Mannigfaltigkeiten betrachtete Alexandroff hier sogar noch allgemeinere *abstrakte simpliziale Komplexe*, definiert über Inzidenz schemata von endlichen Untermengen einer endlichen oder unendlichen Menge. Unter (abstrakten) "simplizialen Approximationen" verstand er gewisse axiomatisch charakterisierte Folgen (\mathcal{K}_m) abstrakter simplizialer Komplexe, durch die die Punkte eines kompakten metrisierbaren Raumes charakterisierbar waren. Dazu gehörten etwa Komplexe, deren Simplizes aus Systemen abgeschlossener Mengen mit nichtleerem Durchschnitt bestanden. Diese bezeichnete er als die *Nerven* der Überdeckungen.¹²

Hausdorff studierte die Arbeiten (Alexandroff 1926) und (Vietoris 1927) im Detail, um sich ein Bild der neuen Perspektiven für die Homologietheorie zu machen.¹³ In Alexandroffs Axiomensystem für approximierende Systeme (simpliziale Approximationen) entdeckte er eine Ungenauigkeit, die eine Lücke im Beweis des Hauptsatzes der Arbeit zur Folge hatte. Er konstruierte ein Gegenbeispiel für die Satzaussage und schlug eine Verschärfung der Approximationsbedingungen vor, die einen einwandfreien Beweis des Hauptsatzes ermöglichte. Die Ergebnisse seiner kritischen Lektüre, insbesondere seine Verschärfung der Approximationsbedingungen, teilte er Alexandroff in dem schon erwähnten Brief vom 14. 6. 1928 mit. Anders als bei seinen Anmerkungen zu Alexander, Veblen und Lefschetz verband er mit seiner Kritik hier *keinen grundsätzlichen Einwand* gegen die gesamte Arbeitsweise. Er war im Gegenteil von Stil, Inhalt und Arbeitsmethoden Alexandroffs sehr beeindruckt und sogar begeistert. Seine Beweiskritik und seinen Verbesserungsvorschlag kommentierte er mit der Bemerkung:

Diese Rettungsmöglichkeit für Ihren Hauptsatz freut mich weit mehr als die Entdeckung des Versehens, denn es wäre schade gewesen, wenn sich Ihre schöne Idee, die gerade wegen ihrer abstrak-

¹²Alexandroff spitzte die Bedingungen später im Sinne der von ihm so genannten "Projektionsspektren" zu; (Alexandroff 1926, Alexandroff 1927a, Alexandroff 1927b, Alexandroff 1928, Alexandroff 1929). Hausdorffs Lektüre ist dokumentiert in (NL Hausdorff, Fasz. 257, 543, 639).

¹³Brief Hausdorffs an Alexandroff vom 14. 6. 1928 mit ausführlicher Beweiskritik, Fasz. 62. Zu Vietoris insbesondere die Studien in (NL Hausdorff, Fasz. 295, 287) vom 2. 8. 1928 und Februar 1929.

ten Fassung meinem Geschmack besonders zusagt, nicht hätte halten lassen. (Hausdorff/Alexandroff Korr, 14/6/1928)

Tatsächlich schien Alexandroffs Vorgehensweise zumindest die *Möglichkeit* zu eröffnen, die vorhandene Kluft zwischen der algebraisch-kombinatorischen Topologie und der Theorie der allgemeinen Räumen zu schließen.

Hausdorffs Interesse an den neuen und abstrakteren Homologietheorien gründete sich allerdings nicht allein darauf, dass nun die homologietheoretischen Methoden auch auf allgemeinere Räume als Mannigfaltigkeiten oder geometrische Simplicialkomplexe anwendbar wurden. Ihm erschien anscheinend genauso wichtig, dass durch sie Invarianzbeweise für die bekannten Charakteristiken simplicialer Komplexe (Bettizahlen und Torsionskoeffizienten) möglich wurden, die seinen Standards eher entsprachen als die zeitgenössischen Beweise etwa von J.W. Alexander.

In den Arbeiten von J.W. Alexander war zwar die Idee der singulären Homologie eingeführt worden (Alexander 1915). Diese offensichtlich topologisch invariante Methode wurde aber zunächst ohne eine mengentheoretisch abgestützte Algebraisierung formuliert und blieb ohne sichere Grundlagen. Bis in die 1930er Jahre hinein kam sie nicht ohne vage gehaltene geometrisch-semantische Bezüge aus. Sie wurde erst durch die nächste Generation von Topologen, Seifert/Threlfall (Seifert/Threlfall 1934) und Tuckers Nachweis, dass degenerierte Zyklen stets beranden (Tucker 1938), in Ordnung gebracht.¹⁴ Zwei weitere von Alexander in den 1920er Jahren vorgeschlagene Methoden basierten auf der Idee der Alexander-Dualität (Alexander 1922), beziehungsweise der simplicialen Approximation und einer Ergänzung der simplicialen Kettenkomplexe um degenerierte (simpliciale) Ketten (Alexander 1926).

Aus Hausdorffs Sicht war Alexanders zweiter Beweis (1922) “äusserst wenig überzeugend” (siehe Abschnitt 2) und auch mit Alexanders drittem Ansatz konnte er sich nicht anfreunden. Das war anscheinend seiner großen Distanz gegenüber Brouwers Methoden geschuldet; für die nächste Generation von Topologen, die Brouwer näher standen, war das anders. Alexandroff und Hopf etwa benutzten Alexanders Vereinfachung der simplicialen Approximation zum Nachweis der Homotopieinvarianz der Homologie und bauten darauf den ersten Invarianzbeweis in ihrem gemeinsamen Buch von 1935

¹⁴Für eine Skizze der Präzisierung der singulären Homologietheorie siehe (Dieudonné 1989, 37–49, 68ff.). Interessanterweise decken sich die von Dieudonné monierten Schwächen der halbgeometrischen singulären Homologietheorie inhaltlich weitgehend mit dem Hausdorffschen Unbehagen. “He (Alexander) never said when two images of different p -cells by two continuous mappings should be identified, nor what the boundary of a singular cell should be. This vagueness was only partly improved in the successive versions of Alexander’s proof given by Veblen (...), van der Waerden (...) and Lefschetz ...” (Dieudonné 1989, 45). Dieudonné sieht die singuläre Homologietheorie erst mit dem von Tucker 1938 und Eilenberg 1940 geleisteten Beitrag als methodologisch konsistent an. Er lässt die von Seifert und Threlfall (1934) erreichte Präzisierung an dieser Stelle außer Betracht.

auf. Hausdorffs Kommentare zu Alexanders Arbeit von 1926 bestanden dagegen ausschließlich aus (technisch zutreffenden) kritischen Randbemerkungen (NL Hausdorff, Fasz. 288). Dementsprechend erschien ihm Alexandroffs und Hopfs erster Invarianzbeweis später als “nicht leicht zugänglich” (siehe Abschnitt 7).

In ihren frühen Arbeiten erwähnten Alexandroff und Vietoris das Invarianzproblem zwar, maßen ihm aber zunächst keinen ähnlich hohen Stellenwert bei wie Hausdorff. Vietoris erklärte eher beiläufig und wie selbstverständlich, dass seine Homologietheorie dieselben Zusammenhangszahlen liefere wie die simpliziale Homologie triangulierter Mannigfaltigkeiten und die von Riemann (und Poincaré) betrachteten Bordanzhomologie von “Untervarietäten”.¹⁵ Für die Invarianz seiner Homologiegruppen verwies er auf die gleichmäßige Stetigkeit stetiger Abbildung in kompakten (metrisierten) Räumen, ergänzte allerdings in einer Anmerkung:

Diese Invarianz gilt in nicht kompakten abgeschlossenen Mengen nicht. (Vietoris 1927, 461, Anm. 11)

Hausdorff widmete diesem Thema (für den kompakten Fall) eine seiner ersten handschriftlichen Studien zu den neuen Homologietheorien (Fasz. 295 vom 2. 8. 1928). Eine für das Sommersemester 1933 angekündigte Vorlesung über kombinatorische Topologie gab ihm die Gelegenheit, einen ersten begrifflich klar ausgearbeiteten Invarianzbeweis der Homologie für kompakte metrische Räume auszuarbeiten. Er kam später verschiedentlich auf dieses Thema zurück, zuletzt in einer ausführlichen neuen Ausarbeitung verschiedener Invarianzbeweise in einem Manuskript von April bis Juli 1940, in dem er auch den nichtkompakten separablen Fall behandelte (siehe Abschnitt 7).

Zu dieser Zeit waren schon verschiedene andere Invarianzbeweise der Homologie publiziert. In der von Hausdorff hoch geschätzten Monographie von Alexandroff und Hopf gab es gleich mehrere Beweise. Der erste von diesen beiden Autoren gegebene Beweis für die topologische Invarianz der simplizialen Homologie geometrischer Komplexe basierte, wie schon erwähnt, entscheidend auf der Homotopieinvarianz der simplizialen Homologie. Damit bewie-

¹⁵Vietoris erklärte von seinen Zusammenhangszahlen, diese seien “. . . abgesehen davon, daß wir sie um 1 kleiner nehmen, genau die von O. Veblen [An application of modular equations in analysis situs. *Am Trans.* **14**, S. 86–94,] O. Veblen und J. W. Alexander [Manifolds of n dimensions. *Am. Trans.* **14**, S. 163–178], O. Veblen [Analysis situs. Cambridge Colloquium 1916] eingeführten. Wir haben nur die Definition derselben von der Darstellung durch Matrizes losgelöst. Sie können als die genaue Fassung der von Riemann, Fragment aus der *Analysis Situs*, Werke, S. 479–482 eingeführten Zusammenhangszahlen gelten” (Vietoris 1927, 456, Anm. 2). Vietoris umging damit auf seine Weise das bei Riemanns und Poincarés Methode auftretende Problem, wie die in den für ihre Homologiekonstruktionen verwendeten Unterobjekten auftretenden Singularitäten (ganzahlige Linearkombinationen aus “Untermannigfaltigkeiten” bei Poincaré oder “ n -Strecke” bei Riemann — vgl. (Sarkaria 1999)) zu behandeln sind. Die konkurrierende geometrische Theorie der singulären Komplexe der Princeton Gruppe erwähnte er an dieser Stelle nicht einmal.

sen sie einen “Produktsatz” für die von einer Komposition stetiger Abbildungen induzierten Verkettung der Homologiehomomorphismen, in modernerer Sprache also die funktorielle Eigenschaft der Homologie (Alexandroff/Hopf 1935, 323). Aus dem Produktsatz folgte die Invarianz der Homologie ohne größeren Aufwand (ibid., 327). In Untertreibung ihres eigenen Anteils stellten die beiden Autoren ihren Beweis als eine Weiterentwicklung der Alexander’schen Beweisstrategie von 1926 dar (Alexandroff/Hopf 1935, 313).

Natürlich hatte Alexandroff auch im weiteren eine völlig andere Ansicht von J.W. Alexander als Hausdorff.¹⁶ In einem aus Princeton an H. Hopf geschriebenen Brief beschrieb er den von Hausdorff so skeptisch kommentierten Alexander als Mathematiker, der mit “grosser Eleganz und Klarheit” über “abstrakte Topologie” vorzutragen wusste (Alexandroff an Hopf, 18.3.1931, p.3). Um diese Zeit war der Austausch zwischen der Princeton Gruppe der Topologie und der abstrakter ausgerichteten Göttingen/Moskauer Auffassung schon voll in Gang.¹⁷ Hausdorff mischte sich in diesem Austausch nur durch seine Kritik an den “Bettzahlen modulo m ” ein (Abschnitt 5). Seine Beobachtungen waren typisch für den Zustand der älteren Analysis Situs, standen aber nicht im Zentrum der neueren Algebraisierung.

Im kommenden Jahrzehnt verfolgte er die weitere Entwicklung der Homologietheorie mit großem Interesse. Anfang der 1930er Jahre studierte er die Arbeiten W. Mayers und E. Čechs. In einer wahrscheinlich im Jahre 1931 verfassten Notiz über “Summe und Durchschnitt von Komplexen” erarbeitete er sich die in (Mayer 1929) und (Vietoris 1930) vorgestellte Mayer-Vietoris Formel (Fasz. 402, pp. 5ff.).¹⁸ Eine andere Hausdorff’sche Studie (Fasz. 743) von Mayers Arbeit über “abstrakte Topologie” (Mayer 1929) wird von G. Bergmann auf April bis Juni 1940 datiert. Čechs entscheidende Arbeit zur Einführung seiner Homologietheorie (Čech 1932) studierte Hausdorff bis Frühjahr

¹⁶Das gilt wohl noch stärker für die Bewertung L.E.J. Brouwers.

¹⁷Alexandroff schrieb in dem zitierten Brief über Alexanders Vorträge zum Thema “elementare Sachen der abstrakten Topologie” weiter: “. . . die Anordnung des Stoffes war genau so, wie ich das zu machen pflege. Alexander sagte auch ausdruecklich, dass er im wesentlichen im Anschluss an meine alten Princetonor Vortraege die Sache darstellt.” (Alexandroff an Hopf, 18.3.1931, p. 3). Alexandroff und Hopf waren, wie oben erwähnt, im akademischen Jahr 1927/28 beide Gäste in Princeton gewesen.

¹⁸Der Faszikel besteht aus drei Teilen. Der erste Teil (pp. 1–4) behandelt das Rangproblem abelscher Gruppen, aufgefasst als Moduln über \mathbb{Z} oder $\mathbb{Z}/(m)$, und die Beobachtung, dass der Rang nur für m prim sinnvoll definiert werden kann, mit der Konsequenz, dass die Veblen/Alexander/Lefschetz’schen “Bettzahlen modulo m ” im allgemeinen Fall nicht wohldefiniert sind (siehe unten). Die entsprechende Seite ist datiert mit 15. 1. 1931. Der zweite Teil (pp. 5–8) behandelt unter der Überschrift “Summe und Durchschnitt von Komplexen” die Mayer-Vietoris Formel. Der dritte Teil (pp. 9–16) handelt vom “Produkt zweier Komplexe”. Die beiden letzten Teile gehören inhaltlich eng zusammen, nicht aber beide mit Teil 1. Die bei der Nachlasserschließung angegebene Tagesdatierung vom 15. 1. 1931 gilt in dieser Schärfe nur für die Schlusspassage des ersten Teils. Teil 1 schließt direkt an das Ende von Fas. 401 an und gehört inhaltlich dort hin (Datierung Hausdorffs 14. 1. 1931 auf p. 29 von Fasz. 401). Es gibt jedoch keinen Grund, die beiden anderen Teile in der Entstehung zeitlich weit entfernt vom ersten anzusetzen.

1934 (NL Hausdorff, Fasz. 463), wahrscheinlich begleitend zu seiner Vorlesung im Sommersemester 1933 oder im direkten Anschluss daran.¹⁹

Hausdorffs erhaltene Studien aus der Zeit zwischen 1928 und seiner Vorlesung von 1933 zeigen, dass er sich bis Januar 1931 eine eigenständige Auffassung abstrakter Komplexe der Moduln homogener “Formen” (Hausdorffs Terminologie) und ihrer Randoperatoren verschaffte, also in heutiger Sprache der elementaren homologischen Algebra algebraischer Kettenkomplexe.²⁰ In diese Zeit fallen auch Notizen zur Elementarteilertheorie, in der er die gruppentheoretische Fassung von Frobenius und Stickelberger mit der auf Weierstrass zurückgehenden der Normalformen ganzzahliger Matrizen verband, um ein angemessenes Verständnis des algebraischen Basiswerkzeuges zur Berechnung der Homologiegruppen zu gewinnen und sich insbesondere Klarheit über den Status der “Bettizahlen modulo m ” zu verschaffen (Fasz. 402, Bl. 1–4).²¹

4. Vorlesung Kombinatorische Topologie, Sommer 1933

Im Sommersemester 1933 hielt Hausdorff seine erste und einzige Vorlesung über *Kombinatorische Topologie* und arbeitete sie wie gewohnt in einem ausführlichen Manuskript aus (NL Hausdorff, Fasz. 55). Das Manuskript zeigt in klarer Weise, wie Hausdorff dieses Gebiet der Topologie zu Beginn der 1930er Jahre sah. Wie oben schon dargelegt, hatte er die meisten der hier behandelten Themen schon in kleineren Einzelstudien ab 1928 bearbeitet: Vietoris-Homologie Februar bis August 1928 (Fasz. 287, 295), abstrakte Komplexe, Januar 1931 (Fasz. 401, 402), Homologie von Komplexen und kompakten Räumen, März 1931 (Fasz. 449, 450), Gruppenfolgen März 1931 (Fasz. 451).

Das Vorlesungsmanuskript enthält eine in sich abgeschlossene, leicht lesbare Einführung in die Theorie endlicher, geometrischer (“euklidischer”) und abstrakter Simplizialkomplexe (§1), in die für die Homologietheorie notwendigen Teile der Theorie endlich erzeugter abelscher Gruppen (§2), die Homologie abstrakter simplizialer Komplexe und deren Anwendung auf geometrische Simplizialkomplexe und die Nerven von abgeschlossenen Überdeckungen (Alexandroffsche Homologie) (§3). Das Vorlesungsmanuskript endet mit einem Invarianzbeweis der simplizialen Homologie für kompakte, triangulierte metrische Räume (“endliche euklidische Punktkomplexe”) (§4). Eine ausgearbeitete Mitschrift von H. Schwerdtfeger, einem Hörer der Vorlesung enthält nur die ersten drei Paragraphen (Schwerdtfeger/Hausdorff 1933). Wir

¹⁹Hausdorff stellte in seiner Vorlesungsausarbeitung (NL Hausdorff, Fasz. 55) Alexandroffs Homologie ausführlich vor und erwähnte Čechs Fortentwicklung beiläufig (NL Hausdorff, Fasz. 55, Bl. 141). In seiner Wiederaufnahme des Invarianzbeweises der Homologie im Frühsommer 1940 bezog Hausdorff Čechs Ansatz ausdrücklich mit ein (NL Hausdorff, Fasz. 742, Bl. 36–40). Hausdorffs Studie (Fasz. 463) von Čechs Arbeit (1932) entstand anscheinend nach März 1933 (siehe unten, Abschnitt 7) .

²⁰(Fasz. 401, 6ff.)

²¹Vgl. Anm. 18.

können daher annehmen, dass Hausdorff seinen Invarianzbeweis von §4 des Vorlesungsmanuskriptes nicht vortrug und nur für den Eigengebrauch ausarbeitete. Im Sommer 1940 kam er noch einmal auf dieses Thema zurück.

Für die frühen 1930er Jahre höchst bemerkenswert war der in der Vorlesung vorgestellte strukturorientierte Zugang zur Homologietheorie. Vor jeder geometrischen Anwendung entwickelte Hausdorff eine rein algebraische Charakterisierung der Homologie eines endlichen abstrakten Komplexes Φ mit Eckenmenge $X = (x_1, \dots, x_r)$ und Simplexmenge $S \subset \mathcal{P}(X)$ als Unterstruktur der von X erzeugten freien Grassmannschen Algebra mit ganzzahligen Koeffizienten. Bezeichnen wir den freien \mathbb{Z} -Modul über X als V , arbeitete Hausdorff also zunächst mit der Grassmann-Algebra

$$\mathcal{G}V := \bigoplus_{m \geq 0} V_m \quad \text{mit} \quad V_m := \bigwedge^m V .$$

Dabei verwendete er eine einfache multiplikative Notation für das Grassmann-Produkt, also $xy = -yx$. Durch die Derivation $\partial_m : V_m \rightarrow V_{m-1}$ mit

$$\begin{aligned} \partial_m(x_{i_0} \dots x_{i_m}) &:= \sum_{j=0}^m (-1)^j (x_{i_0} \dots \hat{x}_{i_j} x_{i_m}), \\ \partial(xy) &= \partial x y + (-1)^p x \partial y, \quad \text{für } x \in V_p, y \in V_q, \end{aligned}$$

erklärte er einen Randoperator $\partial = (\partial_m)$ auf $\mathcal{G}V$ mit $\partial_0(x) = 1$ statt dem üblichen $\partial_0(x) = 0$. In späterer Sprechweise formuliert, arbeitete Hausdorff also mit einem freien, durch die leere Menge *augmentierten Koszul-Komplex*.²²

Zur Beschreibung der Topologie schränkte er auf einen spezielleren Kettenkomplex $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_m)$ ein. Die m -Ketten dieses Komplexes bestanden aus denjenigen homogenen Polynomen vom Grad $m+1$, die nur Monome $x_{i_0} \dots x_{i_m}$ besitzen, zu denen es in Φ ein entsprechendes (orientiertes) Simplex $\sigma = (x_{i_0} \dots x_{i_m})$ gibt. Deren Gesamtheit bezeichnete Hausdorff als die “ m -Formen” \mathcal{F}_m des abstrakten Komplexes Φ . Für die Einschränkung des Randoperators gilt

$$\partial_m : \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_{m-1} .$$

Daher waren in der Einschränkung die m -Zyklen \mathcal{Z}_m und m -Ränder \mathcal{R}_m leicht einzuführen, ebenso die m -te Homologiegruppe als Faktorgruppe $\mathcal{H}_m := \mathcal{Z}_m / \mathcal{R}_m$. So erhielt Hausdorff eine glasklare symbolische Einführung der Homologie $H_*^S(\Phi, \mathbb{Z})$ des abstrakten Simplicialkomplexes Φ , beschrieben durch die Moduln oder (abelschen) Gruppen \mathcal{H}_m (NL Hausdorff, Fasz. 55, §3).²³

Die Anwendung auf die Homologie $H_*^S([\Phi], \mathbb{Z})$ geometrischer Simplicialkomplexe, war nun direkt (Hausdorff notierte mit $[\Phi]$ den geometrischen Träger des abstrakten Komplexes Φ), (Fasz. 55, Bl. 74ff.). Ebenso ergab

²²Diese Interpretation geht auf E. Brieskorn zurück.

²³Beide Termini wurden von Hausdorff als Synonyme verwendet.

sich die Homologie H_*^A der (Alexandroffschen) Nerven endlicher abgeschlossener Überdeckungen als Spezifizierung der allgemeinen Theorie (Fasz. 55, Bl. 140). Hausdorffs Strategie des topologischen Invarianzbeweises basierte auf einer Auswertung der strukturellen Beziehung zwischen diesen beiden Homologietheorien (siehe unten, Abschnitt 7).

Im Vergleich zu allen zeitgenössischen Textbüchern oder Abhandlungen war dies eine höchst ausgereifte und begrifflich klare Einführung der Homologietheorie. In der Sprache der Koszulkomplexe ausgedrückt, handelte es sich bei Hausdorff um die Einführung des zum freien Koszulkomplex assoziierten speziellen Koszulkomplexes (*ante letteram*) bezüglich des durch die leere Menge augmentierten Komplexes $\hat{\Phi}$. Die Klarheit von Hausdorffs Darstellung hebt sich nicht nur im Rückblick gegen die Textbücher der 1930er Jahre positiv ab. Selbst aus heutiger Sicht erscheint sie nicht als grundsätzlich “veraltet” sondern als im guten Sinne elementar. Die geometrische Semantik der Ketten und Randbildungen spielte nur in den Anwendungen eine Rolle.

Vor die eigentliche Homologietheorie schaltete Hausdorff in seiner Vorlesung eine Einführung in die Theorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen und eine ganz auf diesen Kontext zugeschnittene, in sich abgeschlossene Darstellung der Elementarteilertheorie. Den Beweis für die Darstellbarkeit endlich erzeugter abelscher Gruppen als direktes Produkt (oder direkte Summe) zyklischer Gruppen, teils von unendlicher Ordnung, teils von endlicher Ordnung $\epsilon_i \in \mathbb{N}$ ($1 \leq i \leq l$),

$$G = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(\epsilon_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(\epsilon_l)$$

die durch die Teilbarkeitsbedingung $\epsilon_{j+1} | \epsilon_j$ ($1 \leq j < l$) invariant charakterisiert sind, führte Hausdorff durch eine einfache modultheoretische Argumentation über \mathbb{Z} , ohne Hinweis auf E. Noether oder van der Waerden.²⁴ Hausdorff stellte zunächst die auf Weierstrass zurückgehende klassische Elementarteilertheorie ganzzahliger Matrizen dar.²⁵ Daran konnte er in seinem Kapitel über Homologiegruppen anschließen; insbesondere auch bei einer Passage über “Homologie modulo m ”, in der er kurz erläuterte, warum Bettizahlen modulo m für allgemeines m keinen Sinn haben sondern nur für $m = p$ prim.

5. Homologiegruppen, Kritik an “Bettizahlen modulo m ”

Hausdorff betrachtete die k -Zykeln \mathcal{Z}_k , die k -Ränder $\mathcal{R}_k \subseteq \mathcal{Z}_k$ und die Homologiegruppen $\mathcal{H}_k := \mathcal{Z}_k/\mathcal{R}_k$ im Sinne der neueren algebraischen Bestrebungen der Topologie als “Moduln” (Hausdorffs Bezeichnung für endlich erzeugte

²⁴Van der Waerden wies im Noetherschen Stil nach, dass jeder Untermodul N eines freien Moduls M über einem nullteilerfreien Hauptidealring R selber frei ist und Basen u_1, \dots, u_m von M und v_1, \dots, v_k von N existieren mit $v_i = \epsilon_i u_i$ ($1 \leq i \leq k$) und $\epsilon_i | \epsilon_{i+1}$ ($i < k$) (van der Waerden Mod Alg. II (1931), 120ff.).

²⁵Vgl. etwa (Hawkins 1977).

abelsche Gruppen). Die Bettizahlen p_k waren damit durch $p_k = \text{rang } \mathcal{H}_k$ und die k -dimensionalen Torsionskoeffizienten durch die Invarianten (Elementarteiler) $\epsilon_i = \epsilon_{i,k}$ ($1 \leq i \leq l_k$) von \mathcal{H}_k bestimmt.

In einem eigenen Abschnitt der Vorlesung diskutierte Hausdorff Homologiegruppen modulo m und die auf ersten Blick naheliegende ‘‘Analogie’’ von Elementen maximaler Ordnung m zu den Elementen unendlicher Ordnung bei allgemeinen abelschen Gruppen. Er warnte jedoch, dass die erwähnte Analogie ‘‘leider nur ungefähr’’ sei. Bei zusammengesetztem m lieferte die Anzahl des Auftretens von m unter den Elementarteilern ϵ_i der Gruppe keinen vernunftigen Rangbegriff, der sich unter Quotientenbildung subtraktiv und unter direkter Summenbildung additiv verhält. Damit spielte Hausdorff auf die von Lefschetz, Alexander und Veblen verwendete, problematische Konzeption der ‘‘Bettizahlen modulo m ’’ an.

Er erläuterte das Problem an einem einfachen Gegenbeispiel. Setzt man etwa die maximale Anzahl von (unabhängigen) Elementen der Ordnung m als ‘‘Rang modulo m ’’ (rang_m) an, so gälte bei $m = 4$, $G = \mathbb{Z}/(4)$ und $H = \mathbb{Z}/(2)$ für die Ränge $\text{rang}_4 G = 1$ und $\text{rang}_4 H = \text{rang}_4 G/H = 0$. Damit wäre die von ihm geforderte Additivität des Ranges,

$$\text{rang}_m G = \text{rang}_m H + \text{rang}_m (G/H)$$

verletzt (NL Hausdorff, Fasz. 55, Bl. 204).

Dass das Konzept der ‘‘Bettizahlen modulo m ’’ Tücken hatte, war Hausdorff gleich zu Beginn seiner Studien der zeitgenössischen Arbeiten der kombinatorischen Topologie aufgefallen. In einer zwischen Sommer 1928 und Februar 1929 verfassten Studie von Alexanders Arbeit (Alexander 1926) kommentierte er eine auf Bettizahlen modulo m bezogene Passage mit der Bemerkung ‘‘Höchst zweifelhaft!’’ (Fasz. 288, 6v). Im Laufe der Einarbeitung in das neue Gebiet ging er der Frage weiter nach und kam im Januar 1931 zur Einsicht, dass für abelsche Gruppen (Moduln) eine Rangdefinition modulo m für zusammengesetzte m überhaupt nicht sinnvoll möglich ist. Ihm fiel auf, dass auch Lefschetz in dieser Hinsicht zu arglos verfuhr und eine Berechnung von Bettizahlen modulo m vorschlug, die im Widerspruch zu seiner eigenen Definition stand. Dazu merkte er an:

In Lefschetz, Topology (1930), ist das falsch dargestellt (wie zuvor noch falscher bei Alexander). (Hausdorff Fasz. 401, 32)

Diese Kritik teilte er samt Gegenbeispiel über Alexandroff, der sich im Winter 1930/31 wieder in Princeton aufhielt, an Alexander und Lefschetz mit. Hier arbeitete er, auf seinen gruppentheoretischen Kern reduziert, mit einem Gegenbeispiel vom Typ $m = 6$, $G = \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(6)$, also

$$\text{rang}_6 \mathbb{Z}/(6) = 1, \text{rang}_6 \mathbb{Z}/(2) = \text{rang}_6 \mathbb{Z}/(3) = 0, \text{ aber } \text{rang}_6 G = 2.$$

Er formulierte diesen Sachverhalt konkret in der Sprache von Zykeln und Berandungsrelationen modulo 6, allerdings ohne Angabe eines zugehörigen

geometrischen Komplexes (Fasz. 401, 31f.). In Princeton wurde Hausdorffs Gegenbeispiel im April 1931 in Lefschetz' Seminar besprochen. Wenig später erhob Čech einen ähnlichen Einwand.²⁶

Als Randeintrag ergänzte Hausdorff später:

“Meine Einwände (an Alexandroff mitgeteilt 14. 1. 31) haben den Erfolg gehabt, dass Alexander und Lefschetz die Sache überlegt haben. Vgl. A. W. Tucker, Modular homology characters, Proc. Nat. Ac. of Sc. 18 (1932), S. 471, Anm. 4.” (Hausdorff Fasz. 401, 32)

A. W. Tucker stellte in der zitierten Arbeit richtig, dass man in Princeton bisher “Bettizahlen modulo m ” mit zwei verschiedenen, unverträglichen Ansätzen berechnet hätte und diskutierte Vor- und Nachteile beider Berechnungsweisen. Ein grundsätzliches begriffliches Problem erblickte er darin anscheinend immer noch nicht (Tucker 1932).

Alexandroff sah die Problematik klarer. Am 1.11. 1931 schrieb er aus Göttingen vor einer weiteren Fahrt nach Princeton an Hausdorff, dass man Lefschetz' Berechnungsformel der Bettizahlen sowieso “eigentlich nie braucht”.

... [E]s ist nach meiner Ansicht kein besonderes Unglück, dass sie für den Fall mod eines zusammengesetzten m nicht gilt. Das einzige, was im Fall modulo m wichtig ist, ist, nach meiner Meinung der *Begriff* der Bettischen Gruppe modulo m , und die beiden Dualitätssätze — von Poincaré und von Alexander, samt der zugehörigen Verschlingungssätze, auf denen der Alexandersche Dualitätssatz beruht. *Das alles ist richtig*, auch für einen zusammengesetzten Modul und neuerdings von Hopf, Pontrjagin und von mir so einfach bewiesen worden, dass ... wirklich jeder Mathematiker [das] verstehen wird. ... Was aber durch Ihre Kritik wahrscheinlich hinfällig gemacht wird, ist die Euler-Poincarésche Formel für den Fall des zusammengesetzten Moduls, denn sie scheint mir wesentlich von der von Ihnen widerlegten Formel (bzw. ihrem Aequivalent für die Ränge der betreffenden Abelschen Gruppen) abhängig zu sein. (Hausdorff/Alexandroff Korr, 1/11/1931, Hervorhebung im Original)

Trotz Tuckers Verteidigung steuerte Lefschetz schließlich um. Das Problem der “Bettizahlen modulo m ” war ein Anlass unter anderen, die Verwendung von Homologiegruppen ernst zu nehmen. Der stärkste Anstoß dazu kam für Lefschetz allerdings aus seinen eigenen Forschungsarbeiten zur neuen Struktur der Kohomologie und ihrer Produkte (Massey 1999). Aus der Überarbeitung seines Buches von 1930 ging schließlich ein völlig verändertes Werk hervor, das nun zutreffend den Titel *Algebraic Topology* trug (Lefschetz 1942).

²⁶Vgl. (Tucker 1932, 471, Anm. 4).

Die “Bettizahlen modulo m ” wurden, wie von Alexandroff erwartet, durch die weitergehende Algebraisierung der Topologie schließlich obsolet gemacht. In der Mitte der 1930er Jahre war das aber noch keineswegs selbstverständlich. So sah etwa Hopf in seinem ersten Entwurf für die gemeinsame Monographie mit Alexandroff zunächst noch die Einführung von “Bettizahlen modulo m ” (m allgemein) vor. Seinen brieflichen Bemerkungen zufolge wurde auch er auf die damit verbundene Problematik erst durch Anmerkungen Hausdorffs aufmerksam. Daraufhin führte an verschiedenen Stellen als Fußnote die rettende Klausel “für m prim” ein.²⁷

Fast zeitgleich charakterisierte E. Čech die Homologie $H_n(X, G)$ mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe G durch $H_k(X, \mathbb{Z})$, die Gruppe G und $H_{k-1}(X, G)$ in einer Weise, die dem späteren universellen Koeffiziententheorem entsprach (Čech 1935).²⁸ Hausdorffs Anliegen wurde mit der Verbreitung der Strukturalgebra in Form der Einsicht, dass Moduln über Ringen mit Nullteilern “keinen Rang besitzen”, mathematisches Allgemeingut.

6. Alexandroff/Hopf und der “Bonner Uhrmacher”

Hausdorff beteiligte sich auf diese Weise als ein “teilnehmender Beobachter” am Übergang von der klassischen Analysis Situs zur modernen algebraischen Topologie. Seine Beiträge bestanden aus kritischen Beobachtungen und Klärungen in Grundsatzfragen. Die meisten von ihnen waren für den Eigengebrauch (inklusive den Hörern der Vorlesung vom SS 1933) bestimmt. Eigene Publikationen zu diesem Thema nahm er nicht mehr in Angriff. Lediglich über Alexandroff versuchte er in einigen Fragen auf die Teildisziplin im weiteren einzuwirken. Von seiner Fehlerkorrektur in Alexandroffs erster axiomatischer Charakterisierung der späteren “Projektionsspektren” war weiter oben kurz die Rede (Abschnitt 3), ebenso von seinen Gegenbeispielen zur Berechnung von “Bettizahlen modulo m ”, die er über P. Alexandroff an Lefschetz und Alexander übermitteln ließ.

In ähnlicher Weise versuchte er auch zur Verbesserung des ersten Entwurfes der Monographie von Alexandroff und Hopf beizutragen. Dabei war er nicht in jederlei Hinsicht erfolgreich, erhoffte sich aber von diesem Werk viel für die Schließung der Kluft zwischen den beiden großen Teilgebieten der Topologie. In einem Brief an Hopf erneuerte er im September 1934 ein Angebot zur Beteiligung an der Fahnenkorrektur:

Ihr Brief mit der Mitteilung, dass der Satz beginnen soll, hat mich natürlich sehr erfreut. Meine Mitwirkung beim Korrekturlesen halte ich, wie versprochen, aufrecht und hoffe, bei dieser Gelegenheit zu der Erkenntnis zu kommen, dass die kombinatorische

²⁷Etwa in (Alexandroff/Hopf 1935, 355, Anm. 2); mehr dazu in (Hopf an Alexandroff, 21.3.1935).

²⁸Vgl. (Sklyarenko 1993, 227).

Topologie eine glaubwürdige Wissenschaft ist! (Hausdorff/Hopf
Korr, 18/9/1934)

Ende 1934 oder zu Beginn des Jahres 1935 versandten die beiden Autoren erste Fahndrucke an verschiedenen Kollegen mit der Bitte um Anmerkungen. Hausdorff schickte im März 1935 ausführliche Korrekturanmerkungen zu den ihm zugeschickten Kapitelentwürfen an Alexandroff. Auf deren Inhalt lässt sich durch Alexandroffs Antwortbrief vom 9.3. 1935 und die Alexandroff-Hopf Korrespondenz rückschließen.²⁹

Wie wir einem Brief von Hopf an seinen Koautor entnehmen können, war Hausdorff mit den ersten Kapiteln des Buches offenbar sehr zufrieden und hatte nur kleinere Anmerkungen zu machen (Hopf an Alexandroff, 13.1.1935). Das Kapitel IX der Publikationsfassung (Kap. VI des damaligen Planungsstandes) über Modifikationen von simplizialen Zerlegungen eines Raumes und einen Invarianzbeweis der Homologie mittels Nerven von Überdeckungen lag Hausdorff besonders am Herzen. Ihm widmete er tiefer greifende und kritische Anmerkungen. Zunächst wies er die Autoren auf einige technische Mängel hin.³⁰ Darüberhinaus monierte er anscheinend ganz grundsätzlich, dass Alexandroff und Hopf die begriffliche Struktur der Alexandroffschen Homologietheorie selbst für einen kompakten Raum $X = F$ nicht so klar herausgearbeitet hatten, wie es möglich gewesen wäre.

Die beiden Autoren verwendeten nämlich keine Gruppenfolgen (Hausdorffs Formel (1), nächster Abschnitt) sondern betrachteten die Menge $M_B = \{B_r(F)\}$ von Gruppen $B_r(F)$ die für jedes $\epsilon > 0$ als r -te Homologie irgendeines Nerven einer ϵ -Überdeckung von F auftritt. Sie zeigten, dass es (bis auf Isomorphie) höchstens eine Gruppe aus M_B als Untergruppe aller anderen auftritt und definierten dann ad-hoc:

Falls sie existiert, nennen wir sie [die Untergruppe M_B , E.S.] die r -te Bettische N -Gruppe von F und bezeichnen sie mit $\mathcal{B}^r(F)$.
(Alexandroff/Hopf 1935, 356)

In einer Anmerkung erläuterten die Autoren die Klausel “falls sie existiert” durch Verweis auf ein Beispiel, bei dem die Existenz nicht gewährleistet ist!

Alexandroff akzeptierte Hausdorffs technische Detailkritik. Er bestellte, wie er schrieb “angeregt durch die Hausdorffsche Kritik”, einige Fahnen des

²⁹Hausdorffs Korrekturanmerkungen liegen uns nicht vor. Sein letzter erhaltener Brief an Alexandroff datiert vom 18. 2. 1933; vgl. Anm. (9). In der Hopf-Korrespondenz sind seine Korrekturanmerkungen nicht enthalten (Hausdorff/Hopf Korr).

³⁰Hausdorffs technische Kritik betraf die Ausführung der “kanonischen Eckpunktzuordnungen”, korrigiert in (Alexandroff/Hopf 1935, 349f.), den “3. Erhaltungssatz” bei Eckpunktmodifikationen (Alexandroff/Hopf 1935, 348f.) und wahrscheinlich auch ein logisches Detail der Definition von “Bettischen N -Gruppen” (siehe unten); vgl. (Hausdorff/Alexandroff Korr, Kapsel 61, 9/3/1935), (Hopf an Alexandroff, 2.3.1935).

ehemaligen Kapitels VI zurück, um alles noch einmal durchzusehen. Eine grundsätzliche Revision lehnte er hingegen ab.³¹

Hausdorffs Kritik an der Unausgereiftheit des Konzeptes der “Bettischen N -Gruppen” im Ganzen erschien ihm übertrieben. Er wies den Vorschlag einer begrifflichen Verbesserung freundlich aber bestimmt zurück, zumindest für den ersten Band des gemeinsamen Werks mit Hopf.

Dagegen teile ich nicht Ihre Abneigung gegen die “unter Umständen gar nicht existierende” Bettische Gruppe $\mathcal{B}^r(F)$ — sie wird jetzt in Analogie zu den Bettischen N -Zahlen die Bettische N -Gruppe genannt. Sie gehört zu einem anderen Ideenkreis als die “vollen” Bettischen Gruppen des Kompaktums.³² (Hausdorff/Alexandroff Korr, Kapsel 61, 9/3/1935)

In Anspielung auf eine Episode, die er bei einem seiner Bonner Besuche erlebt hatte, räumte Alexandroff ein, dass Hausdorffs begriffliche Kritik durchaus nachvollziehbar sei. Dennoch wollte er sie sich nicht zu eigen machen.

Sie können natürlich mir mit den Worten des alten Bonner Uhrmacher (lebt er noch?) antworten: „In ihrer Art mögen ja diese Gruppen ganz schön sein, aber die ganze Art ist Schunt und Mischt!“ Aber auch diesen Standpunkt würde ich nicht teilen. Die Bettischen N -Gruppen gehören genau zu derselben Kategorie der topologischen Invarianten, wie die Bettischen N -Zahlen . . . und überhaupt alles, was auf Nerven beliebig-feiner Überdeckungen beruht, andererseits aber vom Begriff des Projektionsspektrums noch keinen Gebrauch macht. (ibid.)

Demnach hatte Hausdorff wohl zu einer Vorgehensweise ähnlich der seiner Vorlesung von 1933 geraten, also vorgeschlagen, anstelle der etwas undurchsichtigen Untergruppe M_B — “falls sie existiert” — Limites von Gruppenfolgen zu bilden (“Fundamentalfolgen” in Hausdorffs Sprache der 1930er Jahre). Darauf wäre dann auch der topologische Invarianzbeweis besser aufzubauen. Alexandroff wandte dagegen ein:

Es ist dies [Bettische N -Gruppen etc.; E.S.] eine durchaus bemerkenswerte Kategorie von topologischen Begriffsbildungen. Den Satz, dass für ein Polyeder die Bettischen N -Gruppen überhaupt existieren, ist ein interessanter Satz (von Hopf). An seinem Interesse wird nichts geändert, wenn man auch noch so viele und

³¹(Alexandroff an Hopf, 9.3.1935, p. 6).

³²Man beachte die Anführungszeichen bei “ ‘unter Umständen gar nicht existierende’ Bettische Gruppe”. Die Möglichkeit, dass die Alexandroff/Hopf-sche Definition leer sein kann, scheint demnach ein Kritikpunkt Hausdorffs gewesen zu sein. Vermutlich ging der Existenzvorbehalt des Buches aus Hausdorffs Einwand hervor.

noch so einfache Invarianzbeweise für die Bettischen Gruppen von Polyedern hätte. Selbstverständlich wird auch der von Ihnen erwähnte Beweis in unserem Buche gebracht, aber er gehört in den zweiten Band des Buches, wo alles, was mit Voll- bzw. Projektionszyklen zusammenhängt, dargestellt wird. . . . Dagegen liegt den Methoden des ersten Bandes die Betrachtung der Projektionsspektren, -zyklen usw. noch fern. (ibid.)

Er vertröstete also seinen Korrespondenten für einen begrifflichen Zugang nach Art des “Bonner Uhrmachers” unter Verweis auf den systematischen Aufbau des Buches auf Band II des Werkes. Einen weiteren Umbau des Gemeinschaftswerkes wollte er auf keinen Fall in Kauf nehmen. Das Unternehmen “Alexandroff/Hopf” hatte sich sowieso schon über 5 Jahre hingezogen und mehrere Umbauten erlebt. Hopf hatte kurz vorher seinen Unmut über die häufigen Änderungsvorschläge Alexandroffs zum Ausdruck gebracht (Hopf an Alexandroff, 2.3.1935). Der Verleger protestierte noch heftiger.³³ Alexandroff hatte also starke pragmatische Gründe, sich nicht auf Hausdorffs grundsätzlichen Vorschlag einzulassen.

An Hopf schrieb er, er wolle in Zukunft lieber Markoff weiter Korrekturen lesen lassen. Markoff sei sehr gründlich und werde in “angenehmer Weise bescheiden” sein. Er ergänzte:

...er wird eben die Korrektur lesen und nach Fehlern suchen, und nicht Vorschläge machen, wie man ein Buch über Topologie anders schreiben könnte, als wir es nun einmal geschrieben haben!
(Alexandroff an Hopf, 64, p. 6)

Seine Antwort an Hausdorff war daher trotz aller Verbindlichkeit in dieser Hinsicht klar abweisend. Bezüglich dessen Ansprüchen an den in Kapitel IX (Druckfassung) geführten Invarianzbeweis glaubte Alexandroff auf die Zukunft verweisen zu können:

Im Ganzen werden im 1. Band vier, im zweiten Bande mindestens ein Beweis für die Invarianz der Bettischen Gruppen gebracht. Hoffentlich findet unter diesen fünf Beweisen jeder Leser einen, der seinem Geschmack entspricht; allerdings werden dabei manche Leser auf das Erscheinen des zweiten Bandes warten müssen (der aber wirklich schneller fertig sein wird als der erste!)
(Hausdorff/Alexandroff Korr, 9/3/1935)

³³Courant schrieb am 23.3.1935 an Hopf: “Von Springer erhielt ich händeringende Briefe über Ihre und Alexandroffs Korrekturen. Es scheint ja wirklich, als ob Sie einfach das ganze Buch nach dem Druck sozusagen noch einmal neu geschrieben haben. Springer erklärt, dass dieses Ausmass von Änderungen und Korrekturen ein noch nie dagewesenes Unikum darstellt.” (ETH Handschriftenabteilung, Nachlass Hopf, Kapsel Hs. 621:47)

Im letzten Punkt verschätzte sich Alexandroff. Der zweite Band erschien bekanntlich nie. Hausdorff gehörte zu denjenigen Lesern, die “auf das Erscheinen des zweiten Bandes” bis zum Sankt-Nimmerleins Tag hätten warten müssen. Das war nicht seine Sache. Gut vier Jahre nach Erscheinen des “ersten Bandes” von Alexandroff/Hopf, als abzusehen war, dass ein zweiter wohl kaum mehr folgen würde, machte er sich selbst daran, die Definition der Homologie durch Alexandroffsche Nerven und deren Invarianzbeweis neu zu formulieren.

7. Invarianzbeweise der Homologie

Hausdorffs erster Invarianzbeweis der Homologie im Vorlesungsmanuskript vom Sommer 1933 (NL Hausdorff, Fasz. 55) stützte sich auf Alexandroffs Homologietheorie mit starker Akzentuierung gruppentheoretischer Methoden einschließlich einer vereinfachten Aufnahme von Čechs Verallgemeinerung (Čech 1932).³⁴ Dabei arbeitete er insbesondere die Rolle von *Gruppenfolgen* G_i (Hausdorffs Bezeichnung) samt Homomorphismen

$$G_{i+1} \longrightarrow G_i \tag{1}$$

für jedes $i \in \mathbb{N}$ heraus (Symbolik so bei Hausdorff (NL Hausdorff, Fasz. 55, Bl 135)) und führte zunächst in diesem speziellen Fall deren inverse Limites (in der späteren Bezeichnung von N. Steenrod) ein. In Anspielung an die Analysis und an Vietoris sprach er von letzteren hier als “Fundamentalfolgen” (NL Hausdorff, Fasz. 55, Bl. 135ff.).

In einem Arbeitsmanuskript vom 26. 03. 1933 (NL Hausdorff, Fasz. 451) verallgemeinerte er die Gruppenfolgen zu *Gruppenscharen* (Hausdorffs Bezeichnung). Darunter verstand er eine durch eine Menge U indizierte Familie von Gruppen $(G_u)_{u \in U}$ zusammen mit einem System von Homomorphismen $G_v \longrightarrow G_u$ für gewisse $v, u \in U$, die (in späterer Sprache ausgedrückt) die Bedingungen eines *invers gerichteten Systems* erfüllen. Durch die Einführung *gebundener Elemente* (Hausdorffs Terminologie) der Form $(x_u)_{u \in U}$ mit $x_u \in G_u$ und $x_v = f_{uv}(x_u)$, falls im gegebene System ein Homomorphismus $f_{uv} : G_u \longrightarrow G_v$ existiert, konstruierte Hausdorff in diesem Manuskript das später als *inversen Limes* bezeichnete Objekt zu einer Gruppenschar.

In diesen Manuskripten macht er ausgiebig von der *Pfeilsymbolik* für Abbildungen Gebrauch. Zu diesem Zeitpunkt war das keineswegs üblich. Abbildungspfeile wurden in der zeitgenössischen Literatur bestenfalls sporadisch eingesetzt; zuweilen elementweise bei Randoperatoren der Homologietheorie, im Einzelfall auch für allgemeine Homomorphismen.³⁵ Für die Abbildung

³⁴Vgl. Anm. (19)

³⁵Für Randoperatoren elementweise siehe (Alexander 1926, Alexandroff 1928, Čech 1932, Pontrjagin 1931), für den allgemeinen Fall (van der Waerden *Mod Alg*, 1 (1930), 44f.).

ganzer Gruppen hatte sie H. Weyl zur Symbolisierung von Darstellungshomomorphismen eingesetzt (Weyl 1925, 544). Eine relativ systematische Verwendung wie hier für Gruppenfolgen, sowohl für die ganze Gruppe, als auch elementweise, war hingegen eine eigenständige Symbolwahl Hausdorffs. In einem Beispiel deutete er (in der Kopfzeile einer Tabelle) sogar eine ganze Gruppenfolge auf diese Weise graphisch an:

$$G_1 \leftarrow G_2 \leftarrow G_3 \leftarrow G_4 \dots \quad (\text{NL Hausdorff, Fasz. 55, Bl. 137})$$

In einer Notiz vom 20. 03. 1933 (NL Hausdorff, Fasz. 449) und anderen (Fasz. 571) symbolisierte Hausdorff die Eigenschaft der Funktorialität der Homologie (in späterer Terminologie) durch ein kommutatives Diagramm (vgl. Abbildung).

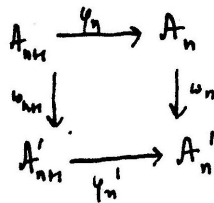


Abbildung 1: Kommutatives Diagramm von Homomorphismen zwischen Termen zweier Gruppenfolgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (NL Hausdorff Fasz. 451)

Wenige Jahre später führte Steenrod die Pfeilsymbolik für Gruppenhomomorphismen, topologische Abbildungen und simpliziale Abbildungen, je nach Kontext der jeweiligen Struktur (Kategorie) in die mathematische Literatur ein (Steenrod 1936). Mit der Herausbildung der kategoriellen Denkweise verbreitete sie sich in den folgenden beiden Jahrzehnten.

Hausdorffs erster Invarianzbeweis der Homologie arbeitete nun mit Folgen endlicher abgeschlossener Überdeckungen (“Zerlegungen”) \mathcal{X}_i eines kompakten metrischen Raumes, die sich schrittweise verfeinern, $\mathcal{X}_{i+1} \prec \mathcal{X}_i$, und deren Maximaldurchmesser gegen Null gehen, $d(\mathcal{X}_i) \rightarrow 0$. Eine solche Zerlegungsfolge $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_i)$ nannte er *kanonisch*. Die zugehörigen Homologiegruppen $H_m(\mathcal{X}_i, \mathbb{Z}) =: G_i$ bilden für jedes m eine “Gruppenfolge” im Sinne von (1). Die *Homologie einer Zerlegungsfolge* \mathcal{X} definierte er naheliegenderweise durch deren zugehörige “Fundamentalfolge” (deren inversen Limes),

$$H_*(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) = \lim_{i \rightarrow \infty} H_*(\mathcal{X}_i, \mathbb{Z}) \quad (2)$$

(in modernisierter Notation). Nach dem Nachweis, dass je zwei kanonische Zerlegungsfolgen eines kompakten Raumes X gleiche Homologien haben (Satz VII, Bl. 149), definierte er die in unserem Kommentar als *Alexandroffsche Homologie* des Raumes, H_*^A , bezeichnete Gruppen

$$H_m^A(X, \mathbb{Z}) := H_m(\mathcal{X}, \mathbb{Z}), \quad (3)$$

für irgendeine kanonische Zerlegungsfolge $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_i)$. Dann zeigte er, dass $H_*^A(X, \mathbb{Z})$ für kompakte metrische Räume topologisch invariant ist (Satz VIII, Bl. 151). Durch den Nachweis der Isomorphie

$$H_*^S([\Phi], \mathbb{Z}) \cong H_*^A(X, \mathbb{Z})$$

zog dies wiederum die topologische Invarianz der simplizialen Homologie $H_*^S([\Phi], \mathbb{Z})$ eines endlichen geometrischen Simplizialkomplexes $[\Phi]$ nach sich (Satz X).

Anfang der 1930er Jahre war dies eine bemerkenswerte begriffliche Zuspitzung. Zwar war die Grundidee dieser Vorgehensweise in den Arbeiten von Alexandroff und Čech als Möglichkeit angelegt; aber keiner dieser beiden Autoren arbeitete die in den eigenen Arbeiten angelegte Limeskonstruktion klar heraus. Wie wir oben sahen, wehrte sich Alexandroff sogar dagegen, Hausdorffs Vorschlag zur Klärung seiner Konstruktion der Homologiegruppen in Band I von (Alexandroff/Hopf 1935) aufzunehmen. Čech nahm in (1932) zwar eine detaillierte Analyse der induzierten Abbildungen der Zyklen und ihrer Homologien vor, charakterisierte aber die auftretenden Limes (als Moduln) nur implizit. Die bei ihm angelegte Struktur der *inversen Limes* wurde erst von Steenrod (1936) explizit herausgearbeitet.³⁶ Hausdorff lernte Steenrods Arbeit möglicherweise erst im letzten Jahr vor seinem Lebensende kennen. Eine Studie dazu findet sich in Hausdorffs Nachlass (Fasz. 750).³⁷

Seine eigene Auffassung von “Gruppenfolgen” und “Gruppenscharen” und ihrer Limes hatte er schon im März 1933 ausgearbeitet. Eine detaillierte Studie von Čechs Arbeit aus Hausdorffs Hand, im Nachlasskatalog datiert als “vermutlich 1932 bis Februar 1934” (NL Hausdorff, Fasz. 463) entstand allem Anschein nach später als März 1933. In einer Randnotiz zu Čechs Behandlung von Ketten $C^n(\mathcal{U})$ einer Überdeckung \mathcal{U} bemerkte Hausdorff nämlich:

Bei mir: $C^n(\mathcal{U})$ tritt in einer “Fundamentalfolge” oder in einem “gebundenen Element” als Glied auf (NL Hausdorff, Fasz. 463, Bl. 3^v)

Zum Zeitpunkt seiner detaillierten Studie der Čechschen Arbeit hatte Hausdorff seine Auffassung der Gruppenscharen und der inversen Limes also offenbar schon ausgearbeitet.

Im Laufe der 1930er Jahre wurden die Hilfsmittel der algebraischen Topologie so weit verfeinert, dass Hausdorff im Frühsommer 1940 seinen alten Beweis des *Fundamentalsatzes* (der topologischen Invarianz der Homologie) verbessern konnte. Zwischen Ende Mai und Juli 1940 bearbeitete er das Thema

³⁶Siehe dazu (Dieudonné 1989, 74ff.)

³⁷G. Bergmann datiert dieses Manuskript auf “vermutlich Oktober 1940”. Mir ist unbekannt, worauf sich diese Monatsdatierung stützt; aber selbst falls diese Datierung zutreffen sollte, zeigt Hausdorffs Terminologie und Symbolik in Fas. 742, dass er Steenrods Arbeit schon vorher, spätestens in der ersten Jahreshälfte 1940, zur Kenntnis genommen hatte.

noch einmal neu in einer Handschrift, überschrieben “Vereinfachte Umarbeitung des §4 meiner Vorlesung vom SS 1933 nebst Zusätzen” (NL Hausdorff, Fasz. 742). Die Handschrift besteht aus zwei (teilweise mehrfach geschriebenen) Teilen. Im ersten (§4A) arbeitete unser Autor den Invarianzbeweis für endliche geometrische Komplexe neu aus und ergänzte ihn um Überlegungen zur Čechschen und zur Vietoris-Homologie $H_*^V(X)$ allgemeinerer Räume X , samt Isomorphienachweis $H_*^V(X) \cong H_*^A(X)$ für X kompakt, metrisierbar (Bl. 61ff.). Der zweite (doppelt ausgeführte) Teil (§4B ~ §4C) behandelte den Fall abzählbarer, lokal endlicher geometrischer (Simplizial-) Komplexe.

In diesem späten Manuskript konnte Hausdorff außer auf die Ansätze von Alexandroff, Vietoris und Čech (1932) auch auf Kenntnis der Arbeiten von Pontrjagin (1931) und Steenrod (1935) zurückgreifen. Dennoch benutzte er auch in seinem neuen Beweis weiterhin entscheidend, dass die simpliziale Homologie $H_*^S([\Phi], \mathbb{Z})$ eines endlichen oder abzählbaren geometrischen Komplexes $[\Phi]$ mit der Alexandroff-Homologie $H_*^A([\Phi], \mathbb{Z})$, gebildet aus Zerlegungsfolgen von Überdeckungen aus Simplexsternen, isomorph ist. Čech folgend, verwendete er nun allerdings *offene* Überdeckungen (und entsprechend offene Simplexsterne). Die Beweisstrategie blieb aber ansonsten dieselbe wie 1933. Hausdorff führte den Beweis erneut und unter schrittweise allgemeineren Bedingungen aus, zunächst für endliche geometrische Simplizialkomplexe (NL Hausdorff, Fasz. 742, Bl. 25-28), dann für kompakte metrische Räume (Bl. 33ff.) und schließlich für abzählbar unendliche, lokal endliche geometrische Simplizialkomplexe.

Er blieb bei (gegenüber der Čech-Homologie) eingeschränkten, sich *in jedem Schritt verfeinernden* Überdeckungssystemen. Wie in der Vorlesung 1933 betrachtete er Gruppenfolgen (1) und konstruierte die zugehörige Limesgruppe (Fasz. 742, Bl. 31). Er vereinfachte damit Steenrods inverse Systeme, verwies aber darauf, dass eine allgemeinere Auffassung mit lediglich partialgeordneten Indexmengen möglich ist. An einigen Stellen verwendete er nun sogar die Formulierung des “inversen Systems” und dessen “Limesgruppe” (ibid., Bl. 37).

Eine Folge $\Phi = (\Phi_i)$ von Komplexen Φ_i der Nerven schrittweise feiner werdender Überdeckungen induziert eine Folge von zugehörigen Homologiegruppen. Deren (inversen) Limes bezeichnete Hausdorff ähnlich wie 1933 als *Homologie der Komplexfolge* $H_*(\Phi, \mathbb{Z})$ (ebda.). Mit der verbesserten Methode der Gruppenlimites wurde der Beweis, dass je zwei “kanonische” Zerlegungsfolgen eines kompakten Raumes gleiche Homologien haben, also die entscheidende Grundlage für die Einführung der Alexandroff-Homologie, beziehungsweise ihrer Hausdorffschen Variante wie in den Gleichungen (2), (3), eleganter führbar als 1933 (ibid., Bl. 33f.). Dasselbe galt für den Beweis der topologischen Invarianz (ibid. Bl. 34f.).

Für allgemeine topologische Räume fügte Hausdorff einen kurzen Exkurs zur Čech-Homologie ein. Diese sei “offenbar topologisch invariant” und stimmt im kompakten Fall mit der simplizialen Homologie überein (ibid.,

Bl. 36ff.). Für abzählbare, lokal endliche, geometrische Simplicialkomplexe $[\Psi]$ ging er jedoch wieder zu seiner an Alexandroff orientierten Beweisstrategie über und bewies die topologische Invarianz von $H_*^A([\Psi], \mathbf{Z})$ durch Betrachtung von Verfeinerungen abzählbarer offener Überdeckungen und ihrer Nerven (NL Hausdorff, Fasz. 742, Bl. 85ff.).³⁸

Hausdorff war mit dem Ergebnis seiner Verbesserungen nun offenbar zufrieden. In dem schon oben erwähnten Brief vom 6. 6. 1940 an J. O. Müller³⁹ schrieb er weiter:

Ich habe jetzt den Komplex-Komplex, d.h. befaße mich mit kombinatorischer Topologie. Wissen Sie noch, wie wir in dem Büchelchen von Veblen gemeinsam bis Seite 2 vordrangen? Leider sind auch die späteren Werke, Lefschetz, Threlfall-Seifert, Alexandroff-Hopf, gar nicht leicht zugänglich. Im Sommersemester 1933 habe ich noch eine zweistündige Einführungsvorlesung über diesen Gegenstand gehalten; den letzten Paragraphen davon, den Beweis der topologischen Invarianz der Bettischen Gruppen, habe ich jetzt doch so vereinfacht, dass ich ein gewisses ästhetisches Wohlgefallen daran habe. (Hausdorff 6/6/1940)

Diese Äußerungen zeigen, dass es Hausdorff als nunmehr fast 72-jährigem in seinen Ausarbeitungen zur algebraischen Topologie nicht mehr um neue *Ergebnisse* ging. Es lagen publizierte Beweise der topologischen Invarianz der Homologie vor, die den gängigen Kriterien standhielten, darunter die von ihm sachlich keineswegs infrage gestellten von Alexandroff und Hopf und einer von Seifert/Threlfall. Die Ausführungen der letztgenannten waren allerdings geometrischer im Stil als die von Alexandroff und Hopf und lagen schon deswegen seiner Denkweise ferner, abgesehen von ihrer Verwendung der (verbesserten) Methode der singulären Homologie.⁴⁰ Dass sich Hausdorff auch mit den Beweisen von Alexandroff und Hopf nicht gänzlich zufrieden geben wollte, wurde weiter oben schon dargestellt (Abschnitt 6).

Der Schritt zur Betrachtung unendlicher Komplexe und nichtkompakter Räume war zwischenzeitlich auch anderenorts geschehen. Schon (Lefschetz 1930) enthielt eine Darstellung der Homologie unendlicher Komplexe, wenn auch noch in vorläufiger Form. Čech zielte mit seiner Homologietheorie in all-

³⁸Der entsprechende Passus des Manuskriptes 4B (bzw. in anderer Zählung 4C liegt in zweifacher Ausfertigung vor, eine datiert vom 5. 5. 1940 (NL Hausdorff, Fasz. 742, Bl. 87–101), die andere auf den 10. 6. 1940 datiert (ibid. Bl. 72–86). In diesem Band ist nur die spätere Fassung ediert.

³⁹Vgl. Anm. (4).

⁴⁰Schon aus den Korrekturfahnen des ersten Teils von Seifert/Threlfall war Hausdorff die große Differenz in Stil und Denkweise zu diesen beiden Autoren ersichtlich geworden. In einem Brief vom 18. 02. 1933 schrieb er an Alexandroff: "Threlfall und Seifert haben mir einen Teil des Manuskripts eines Buches, das sie über komb. Top. schreiben wollen, zugeschickt; ich finde das Bisherige recht hübsch und klar. Aber meine Haupt-Hoffnung ist doch auf Sie und Hopf gerichtet." (Hausdorff/Alexandroff Korr, 18./2/1933)

gemeinen Räumen in dieser Hinsicht auf eine tragfähige Verallgemeinerung (Čech 1932). Es zeichnete sich allerdings ab, dass die ursprüngliche Fassung der Čech-Homologie für den nicht-kompakten Fall Probleme aufwarf, weil sie nicht homotopieinvariant war (Dowker 1937). Hausdorffs Vorsicht mag insofern durchaus als gerechtfertigt erscheinen (obwohl dies nicht sein Grund war). Sein Invarianzbeweis war klar aufgebaut und auch für diesen Fall verlässlich durchgeführt.

Ohnehin beschrieb er die Absicht seine neuen Studien eher in Stil Kategorien als durch Gültigkeitskriterien. Die vorhandenen Lehrbuchdarstellungen galten ihm als "gar nicht leicht zugänglich". Diese Formulierung ließ offen, ob schwierig obgleich möglicherweise logisch in Ordnung gemeint war, oder schwierig, weil logisch lückenhaft und methodologisch zweifelhaft. Es ist leicht zu erraten, wie Hausdorff die von ihm genannten Monographien in dieser Hinsicht beurteilte.

Er jedenfalls hatte für die Invarianz- und Isomorphiebeweise eine Form gefunden, die in seiner Sicht neben der logischen auch darstellungsmäßige ("aesthetische") Geltung beanspruchen konnte.

8. Ausblick

Nach seiner Emeritierung im Jahre 1935 verfolgte Hausdorff die Entwicklung der algebraischen Topologie in dem Maße weiter, wie es ihm unter den erschwerten Bedingungen des Literaturzugangs während dieser Zeit möglich war. Den erhaltenen Studien nach zu schließen, verfolgte er insbesondere die Arbeiten S. Eilenbergs W. Hurewicz und N. Steenrods mit großem Interesse (NL Hausdorff, Findbuch). Thematisch beschränkte er sich dabei weitgehend auf die Homologietheorie und ihre Eigenschaften. Die neu entstehenden Forschungsthemen der Kohomologietheorie und ihrer Produktstrukturen, sowie das in dieser Zeit begonnene Studium höherer Homotopiegruppen (Massey 1999, Dieudonné 1989, Henn/Puppe 1990) wurden, den erhaltenen Studien nach zu schließen, von Hausdorff nicht weiter beachtet. Lediglich ein sporadischer Hinweis auf "Fundamentalgruppen höherer Dimension: Hurewicz und Aronszajn" findet sich in einer einzeln stehenden Notiz (NL Hausdorff, Fasz. 688, Bl. 1).⁴¹ Anders ist das mit Fragen der Homotopieäquivalenz von Abbildungen und des Studiums von Retrakten bei Hurewicz und anderen. Diese Studien bleiben jenseits des Blickfeldes dieses Kommentars. Interessierte Leser werden hinsichtlich dieser Fragen auf das Findbuch (NL Hausdorff) [und ggfs. Kommentar XYZ in diesem Band???] verwiesen.

Ggfs. Verweis auf anderen Kommentar

⁴¹Nachman Aronszajn, Dissertation 1930 bei S. Marzurkiewicz und M. Fréchet.

Literatur

- Alexander, James W. 1915. A proof of the invariance of certain constants of analysis situs. *Transactions of the American Mathematical Society* **16**, 148–154.
- Alexander, James W. 1922. A proof and extension of the Jordan-Brouwer extension separation theorem. *Transactions of the American Mathematical Society* **23**, 333–349.
- Alexander, James W. 1926. Combinatorial analysis situs. *Transactions AMS* **28**, 301–329.
- Alexandroff, Pawel S. 1926. Simpliciale Approximationen in der allgemeinen Topologie. *Mathematische Annalen* **96**, 489–511.
- Alexandroff, Pawel S. 1927a. Une définition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque. *Comptes Rendus Ac. Sci. Paris* **184**, 317–319.
- Alexandroff, Pawel S. 1927b. Sur la décomposition de l'espace par des ensembles fermés. *Comptes Rendus Ac. Sci. Paris* **184**, 425–427.
- Alexandroff, Pawel S. 1928. Untersuchung über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension. *Annals of Mathematics* **30**, 101–187.
- Alexandroff, Pawel S. 1929. Bemerkungen zu meiner Arbeit "Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie". *Mathematische Annalen* **101**, 452–456.
- Alexandroff, Pawel S. 1935/1983. In memory of Emmy Noether. In *Emmy Noether Collected Papers*, ed. N. Jacobson. Berlin etc.: Springer pp. 1–11. Translation of 1935 speech at Moscow Mathematical Society, first translated into English in 1981.
- Alexandroff, Pawel S.; Hopf, Heinz. 1935. *Topologie*. Berlin etc.: Springer. Reprint 1972, New York: Chelsea.
- Alexandroff, Pawel S. an Hopf. Briefe an H. Hopf, 18. 04. 1923 ff.. ETH Bibliothek, Handschriftenabteilung, Nachlass Hopf, Hs. 621:19ff..
- Aull, Charles E.; Lowen, Robert (eds.). 1997–2001. *Handbook of the History of General Topology*, Vols. I, II, III. Dordrecht etc.: Kluwer.
- Burde, Gerhard; Zieschang, Heiner. 1999. Development of the concept of a complex. In (James 1999, 103–110).
- Čech, Eduard. 1932. Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque. *Fundamenta Mathematicae* 19:149–183. English in (Katětov 1993, 231–255).
- Čech, Eduard. 1935. Les groupes de Betti d'un complexe infini. *Fundamenta Mathematicae* 25:33–44. In English in (Katětov 1993, 256–264).
- Dehn, Max; Heegard, Poul. 1907. Analysis Situs. *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* III AB3:153–220.
- Dieudonné, Jean 1989. *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960*. Boston - Basel: Birkhäuser.
- Dieudonné, Jean 1994. Une brève histoire de la topologie. In J. Pier (Hrsg.): *Development of mathematics 1900 - 1950*, Basel: Birkhäuser, 35–155.

- Dowker, Clifford H. 1937. Hopf's theorem for non-compact spaces. *Proceedings National Academy of Sciences USA* 23:293–294.
- Epple, Moritz 1999. *Die Entstehung der Knotentheorie*. Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.
- Hausdorff, Felix. 1914. *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig: Veit. In (Hausdorff 2001ff., II (2002), 91–576).
- Hausdorff, Felix. 2001ff. *Gesammelte Werke einschließlich der unter dem Pseudonym Paul Mongré erschienenen philosophischen und literarischen Schriften und ausgewählte Texte aus dem Nachlass*, Hrsg. E. Brieskorn, F. Hirzebruch, W. Purkert, R. Remmert, E. Scholz. Berlin etc.: Springer. [9 volumes planned, published: II (2002), IV (2001), V (2005), VII (2004); content: <http://www.aic.uni-wuppertal.de/fb7/hausdorff/baende.htm>].
- Hausdorff, Felix. NL. Nachlass. Findbuch unter: <http://www.aic.uni-wuppertal.de/fb7/hausdorff/findbuch.asp>.
- Hausdorff, Felix. Korrespondenz Hausdorff an H. Hopf, 4 Briefe, 3. 7. 1931 bis 14. 11. 1938. ETH Bibliothek, Handschriftenabteilung, Nachlass Hopf, Hs. 621:658–661.
- Hausdorff, Felix. 6/6/1940. Brief an J. O. Müller, Bonn 6. 6. 1940. Universitätsbibliothek Bonn, Nachlass Bessel-Hagen, Kapsel Hausdorff.
- Hausdorff, Felix; Alexandroff, Pawel. Korrespondenz Hausdorff – Alexandroff, 18. 04. 1923 bis 09. 03. 1935. Nachlass Hausdorff, Kapsel 61/62.
- Hawkins, Thomas 1977a. Weierstrass and the theory of matrices. *Archive for History of Exact Sciences* 17, 119–163.
- Henn, Hans-Werner; Puppe, Dieter. 1990. Algebraische Topologie. In G. Fischer, F. Hirzebruch, W. Scharlau, Winfried e.a. (Hrsg.): *Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990 Festschrift zum Jubiläum der DMV*, Braunschweig: Vieweg, 673–716.
- Herreman, Alain. 1997. Le statut de la géométrie dans quelques textes sur l'homologie, de Poincaré aux années 1930. *Révue d'Histoire des Mathématiques* 3:241–293.
- Herreman, Alain. 2000. *La topologie et ses signes: Éléments pour une histoire sémiotique des mathématiques*. Paris: L'Harmattan.
- Hirzebruch, Friedrich 1999. Emmy Noether and topology. *Israel Conference Proceedings* 12, 57–65.
- Hopf, Heinz. 1928. Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel. *Nachrichten Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften* pp. 127–136.
- Hopf, Heinz an P. Alexandroff. Korrespondenz Hopf an P. Alexandroff. ETH Bibliothek, Handschriftenabteilung, Nachlass Hopf, Hs. 620, 99–146.
- James, Ioan (ed.). 1999. *History of Topology*. Amsterdam etc.: Elsevier.
- James, Ioan. 1999a. From combinatorial topology to algebraic topology. In (James 1999, 561–574).

- James, Ioan. 1999b. Topologists at conferences. In (James 1999, 837–848).
- Katětov, Miroslav; Simon, Petr (eds.). 1993. *The Mathematical Legacy of Eduard Čech*. Basel: Birkhäuser.
- Kuiper, Nicolaas H. 1999. A short history of triangulation and related matters. In (James 1999, 491–502).
- Lefschetz, Solomon. 1930. *Topology*. New York: American Mathematical Society.
²1956.
- Lefschetz, Solomon. 1942. *Algebraic Topology*. New York: American Mathematical Society.
- Mac Lane, Saunders 1986. Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether. *Journal of Pure and Applied Algebra* **39**, 305–307.
- Massey, William S.. 1999. A history of cohomology theory. In (James 1999, 579–603).
- Mayer, Walther. 1929. Über abstrakte Topologie. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **36**, 1–42.
- Nöbeling, Georg. 1935. Zur Topologie von Mannigfaltigkeiten. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **42**, 117–152.
- McLarty, Colin. 2006. Emmy Noether’s “set theoretic” topology: From Dedekind to the first functors. In *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy*, ed. J: Ferreira; J.J. Gray. Oxford: University Press pp. 187–208.
- Pontrjagin, Lew S. 1931. Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze. *Mathematische Annalen* **105**, 165–205.
- Sarkaria, K.S. 1999. The topological work of Henri Poincaré. In (James 1999).
- Schwerdtfeger/Hausdorff 1933. Hausdorff, Felix, Kombinatorische Topologie, Ausarbeitung von Schwerdtfeger, Hans. *Typoskript*, Kopie in Besitz E. Brieskorn.
- Seifert, K. J. Herbert; Threlfall, William R. M. H. 1934. *Lehrbuch der Topologie*. Leipzig: Teubner. Nachdruck New York: Chelsea 1947, 1968.
- Sklaryenko, E. G. 1993. Algebraic topology [introductory comments]. In: Katětov, Miroslav; Simon, Peter (eds.); *The Mathematical Legacy of Eduard Čech*; Basel etc.: Birkhäuser, 213–230
- Veblen, Oswald. 1922. *Analysis Situs*. New York: American Mathematical Society.
²1931.
- Steenrod, Norman E. 1936. Universal homology groups. *American Journal of Mathematics* **58**, 661–701.
- Steinitz, Ernst. 1908. Beiträge zur Analysis Situs. *Sitzungsberichte Berliner Mathematische Gesellschaft* **7**, 29–49.
- Tucker, Albert W. 1932. Modular homology characters. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **18**, 467–471.
- Tucker, Albert W. 1938. Degenerate cycles bound. *Math. Sbornik* **3**, 287–288.

- Veblen, Oswald. 1922. *Analysis Situs*. New York: American Mathematical Society.
²1931.
- Vietoris, Leopold. 1926. Ueber den höheren Zusammenhang von kompakten Räumen und eine Klasse von Abbildungen, welche ihn ungeändert lässt. *Proceedings Amsterdam, KNAW* 29:1008–1013.
- Vietoris, Leopold. 1927. Ueber den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. *Mathematische Annalen* 97:454–472.
- Vietoris, Leopold. 1930. Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **37**, 159–162.
- van der Waerden, Bartel Leendert. Mod Alg. *Moderne Algebra* Band **1** (1930), **2** (1931). Berlin: Springer. ²1936, ³1950, ⁴1955, ⁵1960, ⁶1964, ⁷1966. [Ab 4. Auflage unter dem Titel "Älgebra".]
- Weyl, Hermann. 1930. Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen I. *Mathematische Zeitschrift* **23**: 271–309. *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. II, 542–579.