Zur Regularität der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf komplexen Räumen

Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von
Jean Ruppenthal
aus
Darmstadt

Bonn 2006

- *Zur Regularität der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf komplexen Räumen*, Dissertation, Bonner Math. Schriften **380** (2006).

Abstract: We develop a new class of weighted L^∞ and Hölder estimates for the well-known $\overline{\partial}$ homotopy formula on the ball, and show how these estimates can be used to solve the $\overline{\partial}$ equation with Hölder estimates on singular analytic sets. Particularly, we give a $\overline{\partial}$ solution operator on some strictly pseudoconvex sets in certain analytic sets, which contain various types of singularities. Furthermore, we establish a weak Bochner-Martinelli-Koppelman formula for L^p-forms by the use of a generalized Young's Theorem that we prove. This dissertation contains a comprehensive introduction to the state of the art of the $\overline{\partial}$ problem on singular complex spaces.

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Referent: Prof. Dr. Ingo Lieb

2. Referent: Prof. Dr. Werner Müller

Tag der Promotion: 27.10.2006

Für meine Großmutter
Selma Ruppenthal

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

1.1 Das $\overline{\partial}$-Problem auf singulären komplexen Räumen 7

1.2 Die Methode nach Fornæss und Gavosto 14

1.3 Zusammenfassung und Diskussion 21

2 Funktionenräume auf analytischen Mengen **24**

2.1 Geometrie des $\mathbb{C}^n$ 25

2.2 Komplexe Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{C}^n$ 29

2.3 Analytische Mengen in $\mathbb{C}^n$ 34

3 Die Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel für L^p-Formen **35**

3.1 Die klassische BMK-Formel 36

3.2 L^p-Regularität des BMK-Operators $\mathbf{B}_q^D$ 37

3.3 L^p-Regularität des BMK-Randoperators $\mathbf{B}_q^{bD}$ 39

3.4 Randwerte von L^p-Formen 51

3.5 Die BMK-Formel für L^p-Formen 67

3.6 Vergleich mit Homotopieformeln 68

4 Fortsetzungssätze für die $\overline{\partial}$-Gleichung **70**

4.1 Regularität holomorpher L^p-Funktionen 71

4.2 Die Riemannschen Hebbarkeitssätze für L^2-Funktionen 72

4.3 Ein Fortsetzungssatz für die $\overline{\partial}$-Gleichung 74

5 Die grundlegende Homotopieformel für die Kugel **81**

5.1 Cauchy-Fantappiè-Formen 82

5.2 Die grundlegende Homotopieformel für die Kugel 84

5.3 Die Hauptteile $\widehat{T}_q$ und $\widehat{S}_q$ der Integralkerne T_q und S_q 90

6 Hölder-Regularität **97**

6.1 Hölder-Regularität der Cauchy-Integralformel 104

6.2 Hölder-Regularität des BMK-Operators $\mathbf{B}_q^D$ 112

6.3 Lokale Integrationskoordinaten für die Kugel 131

6.4 Hölder-Regularität der Operatoren $\widehat{\mathbf{T}}_q$ und $\widehat{\mathbf{S}}_q$ 140

6.5 Funktionen mit kompaktem Träger 160

7 Die $\overline{\partial}$-Gleichung auf $X = \{z^m = w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}\}$ **164**

7.1 Die analytische Überlagerung $\Pi : X \to \mathbb{C}^n$ 169

7.2 Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung auf $Y = \Pi^{-1}(\mathbb{D}) \cap \operatorname{Reg} X$ 182

7.3 Hölder-Abschätzungen für den Lösungsoperator $\mathbf{L}_0$ 199

Literaturverzeichnis **214**

1 Einleitung

1.1 Das $\overline{\partial}$-Problem auf singulären komplexen Räumen

1.1.1 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

In der komplexen Analysis spielen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\overline{\partial} u = \omega \tag{1}$$

eine zentrale Rolle. Fundamentale Fragen wie die Cousinschen Probleme oder das Levi-Problem können mit ihrer Hilfe auf komplexen Mannigfaltigkeiten gelöst werden. In vielen Anwendungen genügt es aber nicht, nur die Lösbarkeit der $\overline{\partial}$-Gleichung in der C^∞-Kategorie sicherzustellen, sondern es sind zusätzlich quantitative Abschätzungen in verschiedenen Funktionenräumen nötig.
Typischerweise spielt die Geometrie der Ränder der betreffenden Gebiete bei der Lösbarkeit der Gleichung und der Güte der Abschätzungen eine entscheidende Rolle. Dabei sind Konvexitätsbegriffe in der Funktionentheorie von besonderer Bedeutung. Im $\mathbb{C}^n$ sind sämtliche Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genau in pseudokonvexen Gebieten lösbar.
Für allgemeine Gebiete mit glattem pseudokonvexen Rand im $\mathbb{C}^n$ existiert aber kein Lösungsoperator T zu (1) mit

$$\|Tf\|_{L^\infty(D)} \lesssim \|f\|_{L^\infty(D)},$$

wie Sibony in [Si] gezeigt hat. Allerdings hat Hörmander bewiesen, dass für jedes beschränkte pseudokonvexe Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Lösungsoperator

$$S : L^2_{0,q}(G) \to L^2_{0,q-1}(G)$$

existiert mit

$$\overline{\partial}(Sf) = f \text{ für } \overline{\partial} f = 0$$

und

$$\|Sf\|_{L^2(G)} \leq C_G \|f\|_{L^2(G)},$$

wobei die Konstante C_G nur vom Durchmesser des Gebietes G abhängt [Hoe].
Während Hörmanders L^2-Theorie auf funktionalanalytischen Methoden beruht, haben sich seit Beginn der 70er Jahre Integralformel-Methoden als besonders fruchtbar erwiesen.[1] Insbesondere gelang es, für glatte, streng pseudokonvexe Gebiete einen beschränkten Lösungsoperator zu (1) vom Raum der beschränkten $(0,1)$-Formen in den Raum der 1/2-hölderstetigen Funktionen zu konstruieren (Henkin-Romanov [HeRo]).

[1] Die Theorie der Integralformeln ist in den Monographien [Ra], [LiMi], [HeLe1] und [HeLe2] dargestellt.

Zwischen den beiden Extremfällen glatter streng pseudokonvexer und allgemeiner pseudokonvexer Ränder sind viele andere Situationen mit Hilfe von Integralformeln untersucht worden, die in Abhängigkeit von der Geometrie des Randes mehr oder minder gute Ergebnisse liefern.

1.1.2 Singuläre komplexe Räume

Komplexe Räume, die lokal als Nullstellenmenge holomorpher Funktionen gegeben sind, stellen die natürliche Verallgemeinerung komplexer Mannigfaltigkeiten dar. Daher muss die $\overline{\partial}$-Theorie auch auf singulären komplexen Räumen betrieben werden. Tatsächlich ist die $\overline{\partial}$-Theorie bisher allerdings im Wesentlichen auf glatte Mannigfaltigkeiten beschränkt geblieben, insbesondere weil etwa Integralformeln für singuläre Räume kaum entwickelt sind. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Weiterentwicklung dieser Theorie.
Eine erste bedeutende Schwierigkeit dabei ist, dass es nicht klar ist, wie Differentialformen, also der Dolbeault-Komplex, in solchen Räumen zu definieren sind. Es gibt folgende Möglichkeiten:

1. Man kann die Singularitäten aufblasen und auf der entstehenden glatten Mannigfaltigkeit arbeiten. Will man die Lösung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen allerdings auf dem ursprünglichen Raum weiterverwenden, so ist dieser Ansatz in der Regel wenig hilfreich.

2. Eine zweite, extrinsische Möglichkeit ist folgendes Vorgehen, das auf dem Formenbegriff für Varietäten beruht, der in der Algebra üblich ist: Für eine in den $\mathbb{C}^n$ eingebettete analytische Varietät X betrachtet man eine (p, q)-Differentialform ω, die in einer Umgebung der Varietät definiert ist und für die $\overline{\partial}\omega$ auf X verschwindet. Als Lösung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sehen wir nun eine $(p, q-1)$-Form u an, die in einer (eventuell kleineren) Umgebung von X definiert ist und für die $\overline{\partial}u = \omega$ auf X gilt. In [Rp] wird gezeigt, dass dieses Problem nicht immer lösbar ist, das heißt das Lemma von Dolbeault gilt nicht unbedingt. Damit stellt dann aber der Dolbeault-Komplex

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\iota} C^\infty \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,2} \to ...$$

keine Auflösung der Strukturgarbe $\mathcal{O}$ dar, und es kann nicht

$$H^q(X, \mathcal{O}) = H^{0,q}_{\overline{\partial}}(X)$$

geschlossen werden, wobei $H^q(X, \mathcal{O})$ die q-te Kohomologiegruppe der Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf X und

$$H^{0,q}_{\overline{\partial}}(X) = \frac{\{\omega \in \Lambda^{0,q} : \overline{\partial}\omega = 0\}}{\overline{\partial}\Lambda^{0,q-1}}$$

die $\overline{\partial}$-Kohomologie der Differentialformen auf X bezeichnet. Daher erscheint auch dieses Setup nicht besonders attraktiv.

3. Henkin und Polyakov haben in [HePo] ein ähnliches, extrinsisches Setup untersucht: Sei $\overline{B} \subset \mathbb{C}^n$ die abgeschlossene Einheitskugel, $g_1, ..., g_k$ holomorphe Funktionen in einer Umgebung Ω von $\overline{B}$, also $\widetilde{M} := \{z \in \Omega : g_1(z) = ... = g_k(z) = 0\}$ eine analytische Menge in Ω, und $M := \widetilde{M} \cap \overline{B}$. Dann gilt:

Theorem 1.1.1. (Henkin-Polyakov [HePo]) *Sei M ein vollständiger Durchschnitt, also $\dim_{\mathbb{C}} M = n - k$, $\mathrm{Reg}(M)$ überall dicht in M*[2]*, ω eine Differentialform vom Typ $(0, r)$ mit Koeffizienten in $C^\infty(\Omega)$ und*

$$\overline{\partial}\omega|_{\mathrm{Reg}(M)} = 0.$$

Dann existiert eine Differentialform u vom Typ $(0, r-1)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}^\infty(\overline{B} \setminus \mathrm{Sing}(M))$ mit

$$\overline{\partial}u|_{\mathrm{Reg}(M)} = \omega|_{\mathrm{Reg}(M)}.$$ [3]

Auch Ergebnisse dieser Methode sind leider nicht völlig zufriedenstellend: In [Rp] wird am Beispiel der „Parabeln" $X_{m,n} := \{z : z_1^m = z_2^n\} \subset \mathbb{C}^2$ gezeigt, dass in diesem extrinsischen Setup kein stetiger Lösungsoperator zu $\overline{\partial}$ vom Raum der beschränkten $(0, 1)$-Formen in den Raum der δ-hölderstetigen Funktionen für $\delta > m/n$ existiert. Bei diesen Parabeln handelt es sich aber um komplexe Räume der Dimension 1 und in diesem Spezialfall erwarten wir bessere quantitative Ergebnisse als in allgemeinen Situationen: Etwa für relativ kompakte offene Teilmengen Riemannscher Flächen existiert ein Lösungsoperator zur $\overline{\partial}$-Gleichung in den Raum der δ-hölderstetigen Funktionen für jedes $\delta < 1$.

Und dieses Ergebnis überträgt sich auch tatsächlich auf singuläre komplexe Kurven, wenn wir folgendes intrinsische Setup zu Grunde legen:

4. Man betrachte $\overline{\partial}$-geschlossene (in Dimension 1 ist diese Bedingung natürlich überflüssig) Formen auf der Mannigfaltigkeit der regulären Punkte und löse die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ebendort.

Diese Situation haben Fornæss und Gavosto in [FoGa] untersucht: Sei X eine steinsche komplexe Kurve, $D \subset\subset X$ eine relativ kompakte zusammenhängende offene Teilmenge. Da X steinsch ist, kann die Kurve in einen $\mathbb{C}^n$ eingebettet werden. Einschränkung der euklidischen Metrik liefert eine Metrik auf X und wir definieren den Abstand zweier Punkte in X als das Infimum der Längen verbindender Kurven, die in allen regulären Punkten glatt sind. Wir bezeichnen mit $L^\infty_{(0,1)}(D \cap \mathrm{Reg}(X))$ die beschränkten $(0, 1)$-Formen auf der komplexen Mannigfaltigkeit der regulären Punkte in D und mit $C^\alpha_X(D)$ die α-hölderstetigen Funktionen auf D (bzgl. des Abstandsbegriffes auf X).[4]

[2]Das heißt: M sei ein reduzierter komplexer Raum.
[3]Das Problem ist offen für allgemeinere analytische Mengen.
Vgl. dazu [FoSi], Question 3.1, bzw. [HeLe2], Problem 5.
[4]Eine ausführliche Erklärung dieser Funktionenräume findet sich in Kapitel 2.

Dann gilt:

Theorem 1.1.2. (Fornæss-Gavosto [FoGa]) *Sei X eine steinsche komplexe Kurve und $D \subset\subset X$ eine relativ kompakte, zusammenhängende, offene Teilmenge. Dann existiert zu gegebenem $\alpha \in (0,1)$ ein linearer Operator*

$$T : L^\infty_{(0,1)}(D \cap \mathrm{Reg}(X)) \to C^\alpha_X(D)$$

mit $\overline{\partial} Tf = f$ im Distributionssinne für $f \in L^\infty_{(0,1)}(D \cap \mathrm{Reg}(X))$, und es gilt

$$\|Tf\|_{C^\alpha_X(D)} \leq C\|f\|_{L^\infty_{(0,1)}(D)}$$

für eine Konstante $C > 0$, die unabhängig von f ist.

In [Rp] findet sich ein zweiter Beweis dieser Aussage, der von der Arbeit von Fornæss und Gavosto unabhängig ist. Weiterhin wird in [Rp] gezeigt, dass die Lösbarkeit des $\overline{\partial}$-Problems in diesem intrinsischen Setup die Lösbarkeit in dem extrinsischen Setup von Henkin und Polyakov impliziert. Dabei ist zu bemerken, dass die Aussage über die Hölderstetigkeit der Lösung in Theorem 1.1.2 nicht im Widerspruch zu dem oben genannten Gegenbeispiel $X_{m,n} := \{z : z_1^m = z_2^n\}$ steht, da wir nun mit einer anderen Metrik arbeiten, die die Geometrie des komplexen Raumes berücksichtigt.

Damit sind bereits einige Vorteile des intrinsischen Setups, das heißt des Lösens der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf der Mannigfaltigkeit der regulären Punkte, klar geworden. Außerdem aber verspricht dieser Ansatz meiner Ansicht nach den größten Beitrag zum Verständnis der $\overline{\partial}$-Theorie:
So wie auf Mannigfaltigkeiten die Geometrie des Randes wesentlich für die Regularität der $\overline{\partial}$-Gleichung ist, so ist in singulären Räumen die Geometrie der Singularitäten von besonderer Bedeutung, wenn man das intrinsische Setup zu Grunde legt.
Daher werden wir uns in der vorliegenden Arbeit auf das intrinsische Setup beschränken.

1.1.3 Stand der Forschung im intrinsischen Setup

Sei ab sofort X ein reduzierter[5] komplexer Raum. Weiterhin nehmen wir an, X sei steinsch[6], da ohne diese Voraussetzung (schon im Falle komplexer Mannigfaltigkeiten) keine globale Lösbarkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erwartet werden kann. Somit kann weiter angenommen werden, dass es sich bei X um eine abgeschlossene analytische Menge in einem komplexen Zahlraum $\mathbb{C}^N$ handelt.[7]

[5] Damit ist die Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf X eine Untergarbe der Keime stetiger Funktionen. Sämtliche in dieser Arbeit betrachteten Räume seien reduziert.

[6] Ein komplexer Raum ist steinsch genau dann, wenn er pseudokonvex ist, also eine streng plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion besitzt (vgl. [Na2]).

[7] Dieses Resultat geht auf Remmert zurück (vgl. [Re], [Na1]).

Auf der komplexen Mannigfaltigkeit $Y = \operatorname{Reg} X$ ist der übliche C^∞-Dolbeault-Komplex

$$0 \to \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\iota} C_Y^\infty \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda_Y^{0,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda_Y^{0,2} \to \ldots$$

nach dem Lemma von Dolbeault eine exakte Auflösung der Strukturgarbe $\mathcal{O}_Y$, und mit dem abstrakten Theorem von de Rham folgt:

$$H^q(Y, \mathcal{O}_Y) = H_{\overline{\partial}}^{0,q}(Y).$$

Da X steinsch ist, gilt nach Cartans Theorem B[8] andererseits

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0 \quad \text{für alle} \;\; q \geq 1.$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen $H^q(X, \mathcal{O}_X)$ und $H^q(Y, \mathcal{O}_Y)$ für die Untersuchung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in der C^∞-Kategorie von besonderem Interesse. Tatsächlich gilt folgender Fortsetzungssatz für Kohomologieklassen:

Theorem 1.1.3. (Scheja [Sch1, Sch2])
Es sei X eine reindimensionale abgeschlossene analytische Teilmenge einer offenen Menge in $\mathbb{C}^N$, die lokal ein vollständiger Durchschnitt[9] ist. Sei weiterhin A eine abgeschlossene analytische Teilmenge von X. Dann ist die Einschränkungsabbildung

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) \to H^q(X \setminus A, \mathcal{O}_{X \setminus A})$$

bijektiv für alle

$$0 \leq q \leq \dim X - \dim A - 2.^{10}$$

Weiteres scheint in diesem Zusammenhang nicht bekannt zu sein.[11]

Verlassen wir die C^∞-Kategorie, so sind (analog zur Situation auf komplexen Mannigfaltigkeiten) im Wesentlichen zwei Forschungsgegenstände zu unterscheiden:

1. Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung mit L^2-Abschätzungen (bzw. L^p-Abschätzungen).

2. Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung mit Hölder-Abschätzungen (bzw. $C^{k+\alpha}$-Abschätzungen).

---

[8] Ein komplexer Raum X ist steinsch genau dann, wenn $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$ für jede kohärente analytische Garbe $\mathcal{S}$ auf X und alle $q \geq 1$.

[9] Eine solche Menge ist ein perfekter komplexer Raum. Der Zusammenhang zwischen vollständigen Durchschnitten, perfekten und normalen komplexen Räumen ist in [Sch2] dargestellt. Ein Punkt $x \in X$ heißt perfekt, falls die homologische Kodimension $\operatorname{codh} \mathcal{O}_x$ des lokalen Ringes $\mathcal{O}_x$ mit der Dimension $\dim \mathcal{O}_x = \dim_x X$ übereinstimmt. Theorem 1.1.3 folgt damit sofort aus den Überlegungen in [Sch1] (Sätze 5.I-III).

[10] Für $q = 0$ ergibt sich der 2.Riemannsche Hebbarkeitssatz.

[11] Vgl. dazu die Darstellung in [HeLe1], Problem 5.

Die L^2-Theorie im intrinsischen Setup ist in den letzten Jahren in einer Reihe von Arbeiten von Diederich, Fornæss, Øvrelid und Vassiliadou untersucht worden (vgl. [Fo], [DFV], [FOV1] und [FOV2]), die teils auf Hörmanders L^2-Theorie, teils auf kohomologischen Methoden basieren.

Wir wollen hier nur das aktuellste Hauptresultat aus [FOV2] zitieren: Es sei X eine reduzierte rein n-dimensionale analytische Menge in $\mathbb{C}^N$ mit einer isolierten Singularität im Punkt 0 und $X^* = X \setminus \{0\}$. Seien weiterhin $(z_1, ..., z_N)$ die Koordinaten in $\mathbb{C}^N$, $\|z\|^2 = \sum_{j=1}^N |z_j|^2$ und identifiziere $i\partial\overline{\partial}\|z\|^2$ mit der euklidischen Metrik in $\mathbb{C}^N$. Die komplexe Mannigfaltigkeit der regulären Punkte $\operatorname{Reg} X$ sei versehen mit der durch Einschränkung der euklidischen Metrik induzierten Metrik. Da diese Metrik nicht vollständig ist, existieren verschiedene abgeschlossene L^2-Fortsetzungen des gewöhnlichen $\overline{\partial}$-Operators. Die wichtigsten sind die minimale und die maximale Fortsetzung (vgl. dazu [LiMi], Kapitel V.2):

Definition 1.1.4. *Sei Y eine hermitesche Mannigfaltigkeit*[12] *und $U \subset Y$ offen. Eine Form $f \in L^2_{p,q}(U)$ liegt im Definitionsbereich von $\overline{\partial}_{max}$, falls $\overline{\partial} f$ (definiert im Distributionssinne) in $L^2_{p,q+1}(U)$ liegt.*
Eine Form $f \in L^2_{p,q}(U)$ liegt im Definitionsbereich von $\overline{\partial}_{min}$, falls eine Form $g \in L^2_{p,q+1}(U)$ und eine Folge $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ in $C^\infty_{p,q}(\overline{U})$ existieren mit $f_j \to f$ in $L^2_{p,q}(U)$ und $\overline{\partial} f_j \to g$ in $L^2_{p,q+1}(U)$.

Für die Untersuchung des $\overline{\partial}$-Problems auf beschränkten Gebieten mit glattem Rand in komplexen Mannigfaltigkeiten ist diese Unterscheidung nicht notwendig, denn es gilt (vgl. [LiMi], Theorem V.2.6):

Theorem 1.1.5. (Friedrichs Fortsetzungssatz)
Sei Y eine hermitesche Mannigfaltigkeit und $U \subset\subset Y$ ein relativ kompaktes Gebiet mit glattem Rand. Dann existiert für jede Form $f \in L^2_{p,q}(U)$ im Definitionsbereich von $\overline{\partial}_{max}$ eine Folge $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset C^\infty_{p,q}(\overline{U})$ mit $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ und $\lim_{j\to\infty} \overline{\partial} f_j = \overline{\partial}_{max} f$ in den entsprechenden L^2-Räumen.

Im Allgemeinen muss zwischen $\overline{\partial}_{max}$ und $\overline{\partial}_{min}$ unterschieden werden. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir stets die maximale Fortsetzung $\overline{\partial} = \overline{\partial}_{max}$.

Auch Fornæss, Øvrelid und Vassiliadou untersuchen diesen Operator. Es sei noch $R > 0$ ausreichend klein fest gewählt, und für $0 < r < R$ sei

$$X_r^* = \{z \in X^* : \|z\| < r\}.$$

Dann gilt folgendes Theorem:

[12] Eine hermitesche Mannigfaltigkeit ist ein Paar (Y, ds^2) bestehend aus einer komplexen Mannigfaltigkeit Y und einer C^∞-glatten hermiteschen Metrik ds^2.

Theorem 1.1.6. (Fornæss-Øvrelid-Vassiliadou [FOV2])
I. *Ist $p+q < n$ und $q > 0$, so existiert ein abgeschlossener Unterraum H endlicher Kodimension in $Z_{p,q} := \{f \in L^2_{p,q}(X_r^*) : \overline{\partial} f = 0\}$ und eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $f \in H$ eine Lösung $u \in L^2_{p,q-1}(X_r^*)$ existiert mit $\overline{\partial} u = f$ auf X_r^* und*

$$\int_{X_r^*} \|z\|^{-2}(-\log \|z\|^2)^{-4}|u|^2 dV \leq C \int_{X_r^*} |f|^2 dV.$$

Ist in dieser Situation $p+q \leq n-2$, so gilt für u die stärkere Abschätzung

$$\int_{X_r^*} \|z\|^{-2}(-\log \|z\|^2)^{-2}|u|^2 dV \leq C \int_{X_r^*} |f|^2 dV$$

und u kann approximiert werden durch eine Folge glatter Formen u_j mit kompaktem Träger in $\overline{X_r} \setminus \{0\}$, so dass $u_j \to u$ und $\overline{\partial} u_j \to f$ in den entsprechenden L^2-Räumen.
II. *Ist $p+q > n$ und $f \in Z_{p,q}$, so existiert eine Lösung $u \in L^2_{p,q-1}(X_r^*)$ mit $\overline{\partial} u = f$ auf X_r^* und*

$$\int_{X_r^*} \|z\|^{-2\alpha}|u|^2 dV \leq C(r_0, \alpha) \int_{X_r^*} |f|^2 dV$$

für alle $0 < r_0 < r$ und $0 < \alpha < 1$ mit einer Konstanten $C(r_0, \alpha) > 0$, die von r_0 und α abhängt. Ist in dieser Situation $p+q \geq n+2$, so kann die Lösung u so gewählt werden, dass sie der folgenden stärkeren Abschätzung genügt:

$$\int_{X_r^*} \|z\|^{-2}(-\log \|z\|^2)^{-2}|u|^2 dV \leq C(r_0) \int_{X_r^*} |f|^2 dV.$$

Weiter zeigen die Autoren: Existiert eine Lösung mit L^2-Abschätzungen in einer kleineren Umgebung der Singularität, so ist die $\overline{\partial}$-Gleichung mit L^2-Abschätzungen auf X_r^* lösbar. Außerdem finden sich in [FOV2] umfangreiche Überlegungen zum bisher besprochenen Problemkreis.

Soviel zum Stand der Forschung in der L^2-Theorie. Wir interessieren uns für Hölder-Abschätzungen. Hier ist uns außer der Arbeit [FoGa] von Fornæss und Gavosto kein weiteres Resultat bekannt. Neben Theorem 1.1.2 wird darin im Spezialfall der komplexen Fläche $\{w_1 w_2 = z^2\}$ Folgendes gezeigt:

Theorem 1.1.7. (Fornæss-Gavosto [FoGa])
Sei X der Schnitt von $\{(w_1, w_2, z) : w_1 w_2 = z^2\}$ mit der Einheitskugel in $\mathbb{C}^3$. Sei weiterhin λ eine gleichmäßig beschränkte, stetige, $\overline{\partial}$-geschlossene $(0,1)$-Form auf $\mathrm{Reg}(X)$. Dann existiert eine Funktion g auf X mit $\overline{\partial} g = \lambda$ auf dem Schnitt von X mit dem Ball vom Radius $1/2$. Weiterhin ist g η-hölderstetig für jedes η streng kleiner $1/2$.

Dabei ist die Metrik auf X wieder gegeben durch die Einschränkung der euklidischen Metrik, und der Abstand zweier Punkte in X ist definiert als das Infimum der Längen verbindender Kurven, die in allen regulären Punkten glatt sind.

1.2 Die Methode nach Fornæss und Gavosto

Ein komplexer Raum X kann in jedem irreduziblen Punkt $p \in X$ lokal als endlich-blättrige Überlagerung einer offenen Menge in einem komplexen Zahlraum $\mathbb{C}^n$ dargestellt werden. Genauer: Sei X im Punkt $p \in X$ irreduzibel[13] und $n = \dim_p X$. Dann kann eine Umgebung $U(p) \subset X$ derart in einen komplexen Zahlraum $\mathbb{C}^e = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^k$ eingebettet werden, dass die orthogonale Projektion

$$\Pi : \mathbb{C}^e \to \mathbb{C}^n$$

als Abbildung

$$\Pi : U(p) \to V = \Pi(U(p))$$

eine endlich-blättrige analytische Überlagerung[14] liefert. Es existiert eine nirgends dichte analytische Teilmenge $K \subset V$, so dass die eingeschränkte Abbildung $\Pi : U(p) \setminus \Pi^{-1}(K) \to V \setminus K$ lokal biholomorph ist, und $U(p) \setminus \Pi^{-1}(K)$ zerfällt in disjunkte komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension n. Insbesondere gilt auch $\operatorname{Sing} X \cap U(p) \subset \Pi^{-1}(K)$.[15]

Der Beweis von Theorem 1.1.7 beruht auf der folgenden allgemeinen Idee: Sei ω eine beschränkte $\overline{\partial}$-geschlossene $(0,q)$-Form auf $\operatorname{Reg} U(p)$. Man projiziere diese Form auf $V \subset \mathbb{C}^n$, löse das $\overline{\partial}$-Problem ebendort mit bekannten Methoden und ziehe die Lösung zurück. Dabei treten unmittelbar folgende Schwierigkeiten auf:

- Die Form ω muss in Komponenten zerlegt werden, die auf den Fasern von Π konstant sind, damit das Problem nach V projiziert werden kann.
- Man erhält auf diese Weise Formen auf $V \setminus K$, die in der Regel nicht mehr gleichmäßig beschränkt sind. Man benötigt aber $\overline{\partial}$-geschlossene Fortsetzungen dieser Formen.
- Das Zurückziehen der Lösungen der $\overline{\partial}$-Gleichung ist wieder nur außerhalb der Verzweigungsmenge möglich. Es ist zu zeigen, dass man eine Lösung der ursprünglichen $\overline{\partial}$-Gleichung auf $\operatorname{Reg} U(p)$ erhält.

In der vorliegenden Arbeit werden wir auf diese Probleme eingehen und so das $\overline{\partial}$-Problem auf gewissen streng pseudokonvexen Modellgebieten in steinschen komplexen Räumen mit Hölder-Abschätzungen lösen. Dazu werden die Techniken aus [FoGa] wesentlich weiterentwickelt.

---

[13] Damit ist X im Punkt p auch reduziert, und somit reduziert in einer Umgebung von p, da die Menge der nicht reduzierten Punkte in X analytisch ist.

[14] Eine endliche surjektive holomorphe Abbildung $\Pi : X \to Y$ zwischen reduzierten komplexen Räumen heißt analytische Überlagerung, falls eine dünne Teilmenge $K \subset Y$ existiert mit:
a) Die Menge $\Pi^{-1}(K)$ ist dünn in X.
b) Die eingeschränkte Abbildung $X \setminus \Pi^{-1}(K) \to Y \setminus T$ ist lokal biholomorph.
Dabei heißt eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ dünn, falls A lokal in nirgends dichten analytischen Teilmengen von X enthalten ist.

[15] Vgl. dazu [GrRe], 3.4. Local Description of Complex Subspaces in $\mathbb{C}^n$

Wir illustrieren das Verfahren anhand des einfachen Beispiels

$$X = \{(z, w_1, w_2) \in \mathbb{C}^3 : z^2 = w_1 w_2\} \subset \mathbb{C}^3$$

mit $\operatorname{Reg} X = X \setminus \{0\}$.[16] Hier ist

$$\Pi : X \to \mathbb{C}^2 \quad , \; (z, w_1, w_2) \mapsto (w_1, w_2)$$

eine 2-blättrige verzweigte analytische Überlagerung mit der Menge der kritischen Werte $K = \{(w_1, w_2) : w_1 w_2 = 0\}$. Sei weiterhin $\mathbb{D} = \{(w_1, w_2) : |w_1|^2 + |w_2|^2 < 1\}$ die Einheitskugel in $\mathbb{C}^2$. Damit ist $D := \Pi^{-1}(\mathbb{D})$ ein streng pseudokonvexes Gebiet in X. Wir setzen noch

$$Y = \operatorname{Reg} D = D \setminus \{0\} = \Pi^{-1}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$$

und $Z = Y \cap \Pi^{-1}(\mathbb{C}^2 \setminus K) = \{(z, w_1, w_2) \in Y : z \neq 0\}$.

Sei nun $\omega \in L^\infty_{0,1}(Y)$ mit $\overline{\partial}\omega = 0$. Dann besitzt ω eine Darstellung

$$\omega = \iota^* \left(g_0 d\overline{z} + g_1 d\overline{w_1} + g_2 d\overline{w_2} \right)$$

mit beschränkten Funktionen $g_j \in L^\infty(\mathbb{C}^3)$ und $|g_j| \leq \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)}$, wobei $\iota : Y \hookrightarrow \mathbb{C}^3$ die Einbettungsabbildung bezeichne.[17]

Jetzt zerlegen wir ω in zwei Formen, die auf den Fasern von Π konstant sind. Sei dazu

$$\Phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \quad , \; (z, w_1, w_2) \mapsto (-z, w_1, w_2)$$

und

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega + \Phi^*\omega \; , \\ \omega_1 &= z\left(\omega - \Phi^*\omega\right) \; . \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\omega_0 + \frac{\omega_1}{z}\right) \; ,$$

und wegen $\Phi^*\omega_0 = \omega_0$ bzw. $\Phi^*\omega_1 = \omega_1$ sind die Formen ω_0 und ω_1 auf den Fasern über $\mathbb{D} \setminus K$ konstant. Also existieren $(0,1)$-Formen

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \eta_{0,1} d\overline{w_1} + \eta_{0,2} d\overline{w_2} \; , \\ \eta_1 &= \eta_{1,1} d\overline{w_1} + \eta_{1,2} d\overline{w_2} \end{aligned}$$

auf $\mathbb{D} \setminus K$ mit $\Pi^*\eta_j = \omega_j$. Da Π lokal biholomorph ist, gilt $\overline{\partial}\eta_j = 0$ auf $\mathbb{D} \setminus K$.

[16] Das hier skizzierte Programm ist in Kapitel 7 detailliert ausgeführt.

[17] Die genauen Definitionen finden sich in Kapitel 2.

Wegen
$$\iota^* d\overline{z} = \iota^* \left(\frac{\overline{w_2}}{2\overline{z}} d\overline{w_1} + \frac{\overline{w_1}}{2\overline{z}} d\overline{w_2} \right) \quad \text{auf } Z$$
gilt:
$$\begin{aligned}
|\eta_{0,1}(w_1, w_2)| &\leq \left(2 + \frac{|w_2|^{1/2}}{|w_1|^{1/2}} \right) \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)} \ , \\
|\eta_{0,2}(w_1, w_2)| &\leq \left(2 + \frac{|w_1|^{1/2}}{|w_2|^{1/2}} \right) \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)} \ , \\
|\eta_{1,1}(w_1, w_2)| &\leq |w_1 w_2|^{1/2} \left(2 + \frac{|w_2|^{1/2}}{|w_1|^{1/2}} \right) \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)} \ , \\
|\eta_{1,2}(w_1, w_2)| &\leq |w_1 w_2|^{1/2} \left(2 + \frac{|w_1|^{1/2}}{|w_2|^{1/2}} \right) \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)} \ .
\end{aligned}$$

Die Formen η_j sind also in der Regel nicht gleichmäßig beschränkt. Setzen wir die η_j mit 0 nach K fort, gilt aber dennoch $\overline{\partial}\eta_j = 0$. Das leistet der Fortsetzungssatz

Satz 4.3.3 *Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ offen und $A \subset V$ eine abgeschlossene l-dimensionale analytische Teilmenge der Kodimension $k = n - l > 0$.*
Seien weiterhin $f \in L^{\frac{2k}{2k-1}}_{(0,q),loc}(V)$ und $g \in L^1_{(0,q+1),loc}(V)$ mit
$$\overline{\partial} f = g$$
auf $V \setminus A$ im Distributionssinne.
Dann gilt $\overline{\partial} f = g$ im Distributionssinne auf ganz V.[18]

Die Kapitel 3 und 4 dieser Arbeit dienen unter anderem der Entwicklung dieses wichtigen Hilfsmittels. Der Beweis von Satz 4.3.3 ist aber unabhängig vom Rest der Arbeit. Die vorangehenden Betrachtungen in Kapitel 3 und 4 sollen das Fortsetzungs-Problem in einen allgemeineren Rahmen stellen. Dabei ist die BMK-Formel für L^p-Formen aus Kapitel 3 für sich selbst von Interesse.

Jetzt kann die bekannte grundlegende Homotopieformel für die Kugel verwendet werden, um die $\overline{\partial}$-Gleichung
$$\overline{\partial} v_j = \eta_j$$
auf $\mathbb{D}$ zu lösen. Dazu präsentieren wir die Homotopieformel nach Lieb und Michel (vgl. [LiMi]) in Kapitel 5. Da die bekannten Abschätzungen für die $\overline{\partial}$-Lösungsoperatoren aus der Homotopieformel unseren Bedürfnissen nicht genügen, entwickeln wir in Kapitel 6 neue L^∞ und (singuläre) Hölder-Abschätzungen für diese Operatoren. Diesbezüglich sei auf die Einleitung von Kapitel 6 verwiesen.

[18] In sämtlichen in dieser Arbeit betrachteten Konstellation liegen die Formen, die den η_j entsprechen, mindestens in L^2.

Mit den Abschätzungen aus Kapitel 6 ergibt sich:

$$v_0 \in C^{1/4}(\mathbb{D})$$

und

$$v_0 \in C^{1/2}(B_r(0))$$

für alle $0 < r < 1$, und es existieren (von ω unabhängige) Konstanten $C_0 > 0$ bzw. $C_0(r) > 0$ mit

$$\begin{aligned} \|v_0\|_{C^{1/4}(\mathbb{D})} &\leq C_0\|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)}, \\ \|v_0\|_{C^{1/2}(B_r(0))} &\leq C_0(r)\|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)}. \end{aligned}$$

Analog gilt für v_1 die klassische 1/2-Hölder-Abschätzung. Die Funktion v_1 wird unseren Bedürfnissen aber nicht gerecht. Das hat folgende Ursache: Zieht man die Formen v_j durch Π auf Z zurück, so ergibt sich

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\omega_0 + \frac{\omega_1}{z}\right) = \overline{\partial}\frac{1}{2}\left(\Pi^* v_0 + \frac{\Pi^* v_1}{z}\right) \quad \text{auf} \;\; Z,$$

wobei sich der Term $\Pi^* v_1/z$ für $z \to 0$ nicht hinreichend regulär verhält. Es gibt prinzipiell zwei Strategien, diesem Problem zu begegnen. Die erste Idee ist, von v_1 eine holomorphe Funktion zu subtrahieren, so dass die modifizierte Lösung v_1' für $z \to 0$ verschwindet. Diesen Weg wählen Fornæss und Gavosto in [FoGa]. Dieses Verfahren hat aber den Nachteil, dass es in allgemeineren Situation sehr unhandlich wird[19] und Hölder-Abschätzungen für Quotienten der Art $\Pi^* v_1/z$ kaum durchführbar sind. Daher wählen wir eine andere Strategie: Statt

$$\overline{\partial} v_1 = \eta_1$$

lösen wir die Gleichung

$$\overline{\partial} u_1 = \frac{\eta_1}{w_1 w_2}.$$

Dazu ist natürlich sicherzustellen, dass η_1/w_1w_2 noch $\overline{\partial}$-geschlossen ist. Mit

$$f = \frac{1}{2}(f_0 + f_1) = \frac{1}{2}\left(\Pi^* v_0 + \frac{w_1 w_2}{z}\Pi^* u_1\right)$$

ist dann $\overline{\partial} f = \omega$ auf Z. Das ist die gesuchte Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung. Der Summand $f_0 = \Pi^* v_0$ ist wegen $\Pi^* v_0(z, w_1, w_2) = v_0(w_1, w_2)$ hinreichend regulär. $\Pi^* v_0$ besitzt unmittelbar eine stetige Fortsetzung auf $\overline{D}$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \|\Pi^* v_0\|_{C^{1/4}_X(D)} &\leq \|v_0\|_{C^{1/4}(\mathbb{D})} \leq C_0\|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)}, \\ \|\Pi^* v_0\|_{C^{1/2}_X(\Pi^{-1}(B_r(0)))} &\leq \|v_0\|_{C^{1/2}(B_r(0))} \leq C_0(r)\|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)} \end{aligned}$$

für alle $0 < r < 1$.

[19] Dann sind holomorphe Taylor-Entwicklungen höherer Ordnung zu subtrahieren.

Betrachten wir nun $\Pi^* u_1(z, w_1, w_2) = u_1(w_1, w_2)$ etwas genauer. Die L^∞-Abschätzungen aus Kapitel 6 liefern die Existenz einer Konstanten $C_{1,\infty} > 0$ mit

$$|u_1(w_1, w_2)| \leq \frac{C_{1,\infty}}{|w_1|^{1/2}} \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)} \quad \text{und} \quad |u_1(w_1, w_2)| \leq \frac{C_{1,\infty}}{|w_2|^{1/2}} \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)} \qquad (2)$$

für alle $(w_1, w_2) \in \mathbb{D}$. Wegen $|w_1 w_2 / z| = |w_1 w_2|^{1/2}$ für $(z, w_1, w_2) \in X$ erhalten wir:

$$|f_1(z, w_1, w_2)| = \left| \frac{w_1 w_2}{z} \Pi^* u_1(z, w_1, w_2) \right| \leq C_{1,\infty} \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)}.$$

für alle $(z, w_1, w_2) \in Z$. Setzt man f_1 mit 0 nach $Y \cap \Pi^{-1}(K)$ fort, so folgt: $f \in L^\infty(Y)$ und

$$\|f\|_{L^\infty(Y)} \leq \frac{1}{2} \left(C_0 + C_{1,\infty} \right) \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)}.$$

Nach dem bereits zitierten Fortsetzungssatz 4.3.3 für die $\overline{\partial}$-Gleichung im Distributionssinne ist damit

$$\overline{\partial} f = \omega \quad \text{auf } Y.$$

Etwas kniffliger gestalten sich die Hölder-Abschätzungen für das Produkt

$$f_1 = \frac{w_1 w_2}{z} \Pi^* u_1.$$

Seien dazu $P = (z, w_1, w_2), Q = (z', w_1', w_2') \in Z$. Wir unterscheiden drei Fälle unter Verwendung von $c(X) = \sin(\pi/8)$:

1. Es gilt $|w_1| \leq c(X)^{-1} |w_1 - w_1'|$ oder $|w_2| \leq c(X)^{-1} |w_2 - w_2'|$. Wir können ersteres annehmen, und es gilt auch die grobe Abschätzung $|w_1'| \leq 2c(X)^{-1} |w_1 - w_1'|$. Unter Verwendung der L^∞-Abschätzung (2) für u_1 folgt:

$$\begin{aligned}
|f_1(P) - f_1(Q)| &\leq |f_1(P)| + |f_1(Q)| \\
&\leq \left| \frac{w_1 w_2}{z} \right| \frac{C_{1,\infty}}{|w_2|^{1/2}} + \left| \frac{w_1' w_2'}{z'} \right| \frac{C_{1,\infty}}{|w_2'|^{1/2}} \\
&= C_{1,\infty} (|w_1|^{1/2} + |w_1'|^{1/2}) \\
&\leq C_{1,\infty}' |w_1 - w_1'|^{1/2} \\
&\leq C_{1,\infty}' \operatorname{dist}_X(P, Q)^{1/2}.
\end{aligned}$$

2. Es gilt $|w_1 - w_1'| < c(X)|w_1|$ und $|w_2 - w_2'| < c(X)|w_2|$ und $\measuredangle(z, z') > \pi/4$. Hier muss nun die Geometrie von X beachtet werden. Nach Lemma 7.3.1 liegt Q nicht im Zweig von P und es gilt:

$$\min\{|w_1|, |w_2|\} \leq c(X)^{-1} \operatorname{dist}_X(P, Q).$$

Damit kann $|f_1(P) - f_1(Q)|$ genau wie in Fall 1 abgeschätzt werden, wobei die passende L^∞-Abschätzung (2) zu wählen ist.

3. Es gilt $|w_1 - w_1'| < c(X)|w_1|$ und $|w_2 - w_2'| < c(X)|w_2|$ und $\measuredangle(z, z') \le \pi/4$. Wegen $c(X) << 1$ bedeutet dies

$$|w_1| \sim |w_1'| \quad \text{und} \quad |w_2| \sim |w_2'|. \tag{3}$$

Hier geben wir jeweils gewichtete Hölder-Abschätzungen für die beiden Faktoren $w_1 w_2/z$ und $\Pi^* u_1(z, w_1, w_2) = u_1(w_1, w_2)$. In Kombination mit dem anderen Faktor ergeben sich dann die gewünschten Abschätzungen.

Einerseits existiert eine Konstante $C'' > 0$ (die nicht von den Punkten P und Q abhängt) mit

$$\left| \frac{w_1 w_2}{z} - \frac{w_1' w_2'}{z'} \right| \le C'' \left(|w_2|^{1/2} |w_1 - w_1'|^{1/2} + |w_1'|^{1/2} |w_2 - w_2'|^{1/2} \right)$$

für alle $(z, w_1, w_2), (z', w_1', w_2') \in Y$ mit $\measuredangle(z, z') \le \pi/2$.[20]
Unter Verwendung von (2) und (3) folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{w_1 w_2}{z} - \frac{w_1' w_2'}{z'} \right| |u_1(w_1, w_2)| &\lesssim \left(|w_1 - w_1'|^{1/2} + |w_2 - w_2'|^{1/2} \right) \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)} \\ &\lesssim \operatorname{dist}_X(P, Q)^{1/2} \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)}. \end{aligned}$$

Andererseits liefern die singulären Hölder-Abschätzungen aus Kapitel 6 Konstanten $C_1' > 0$ bzw. $C_1'(r) > 0$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} |u_1(w_1, w_2) - u_1(w_1', w_2')| \le C_1' \Bigg(&\frac{|w_1 - w_1'|^{1/4}}{|w_2|^{1/2} (\min\{|w_1|, |w_1'|\})^{1/2}} \\ &+ \frac{|w_2 - w_2'|^{1/4}}{|w_1'|^{1/2} (\min\{|w_2|, |w_2'|\})^{1/2}} \Bigg) \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)} \end{aligned}$$

für alle $(w_1, w_2), (w_1', w_2') \in \mathbb{D} \setminus K$, bzw.

$$\begin{aligned} |u_1(w_1, w_2) - u_1(w_1', w_2')| \le C_1'(r) \Bigg(&\frac{|w_1 - w_1'|^{1/2}}{|w_2|^{1/2} (\min\{|w_1|, |w_1'|\})^{1/2}} \\ &+ \frac{|w_2 - w_2'|^{1/2}}{|w_1'|^{1/2} (\min\{|w_2|, |w_2'|\})^{1/2}} \Bigg) \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)} \end{aligned}$$

für alle $(w_1, w_2), (w_1', w_2') \in B_r(0) \setminus K$ mit $0 < r < 1$. Unter Beachtung von $|w_1 w_2/z| = |w_1 w_2|^{1/2}$ auf X und unter Verwendung von

$$|w_1| \sim |w_1'| \sim \min\{|w_1|, |w_1'|\}$$

sehen wir, dass sich die Nenner dieser beiden Abschätzungen durch Multiplikation mit dem Faktor $w_1 w_2/z$ herauskürzen. Somit erhalten wir auch in Fall 3 die gewünschten Hölder-Abschätzungen.

[20] Das ist in allgemeiner Form in Lemma 7.3.2 festgehalten.

Also existieren (von ω unabhängige) Konstanten $C_1 > 0$ bzw. $C_1(r) > 0$ mit

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{C^{1/4}(\mathbb{D})} &\leq C_1\|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)}, \\ \|f_1\|_{C^{1/2}(B_r(0))} &\leq C_1(r)\|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)}. \end{aligned}$$

Damit ist insbesondere auch Theorem 1.1.7 bewiesen. Man beachte, dass wir zusätzlich die 1/2-Hölderstetigkeit der Lösung im Inneren und globale Abschätzungen gezeigt haben. In Kapitel 7 verwenden wir dieses Verfahren, um Theorem 1.1.7 zu verallgemeinern. Zunächst gilt:

Theorem 7.2.8 *Es seien $n, q, m, k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 2$, $1 \leq q \leq n$, $m \geq 2$ und $k_j \geq 1$ fest gewählt. Weiterhin sei*

$$\begin{aligned} X &= \{(z, w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : z^m = w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}\} \subset \mathbb{C}^{n+1}\ , \\ D &= \{(z, w) \in X : |w_1|^2 + ... + |w_n|^2 < 1\} \end{aligned}$$

und $Y = \operatorname{Reg} D$. Dann existiert ein stetiger linearer Operator

$$\mathbf{L}_{q-1} : L^\infty_{0,q}(Y) \to L^\infty_{0,q-1}(Y)$$

mit $\overline{\partial}\mathbf{L}_{q-1}\omega = \omega$ im Distributionssinne, falls $\overline{\partial}\omega = 0$ im Distributionssinne. Außerdem ist

$$\mathbf{L}_{q-1}\omega \in C^0_{0,q-1}(Y)$$

für alle $\omega \in L^\infty_{0,q}(Y)$.

Weiterhin untersuchen wir die Hölder-Regularität des Operators $\mathbf{L}_0$.
Diesbezüglich ergibt sich:

Theorem 7.3.4 *Unter den Voraussetzungen von Theorem 7.2.8 gelte zusätzlich $k_j \leq m$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$. Weiterhin sei*

$$\begin{aligned} \vartheta &= \min_{1\leq t\leq n}\{\frac{k_t}{2m}\}, \\ \vartheta_k &= \min_{1\leq t\leq n}\{1, \{k\frac{k_t}{m}\}^* : \{k\frac{k_t}{m}\}^* > 0\}, \\ \vartheta^* &= \min_{0\leq k\leq m-1}\{\vartheta, \vartheta_k\}. \end{aligned}$$

Dann liefert der Operator $\mathbf{L}_0$ aus Theorem 7.2.8 eine stetige lineare Abbildung

$$\mathbf{L}_0 : L^\infty_{0,1}(Y) \to C^{\vartheta^*}_X(\overline{Y})$$

mit $\overline{\partial}\mathbf{L}_0\omega = \omega$ im Distributionssinne, falls $\overline{\partial}\omega = 0$ im Distributionssinne.

Dabei setzen wir $[x]^* = \min\{l \in \mathbb{Z} : x \leq l\}$ und $\{x\}^* = [x]^* - x$. Man beachte $\vartheta_k \geq 1/m$ und $\vartheta^* = \vartheta$, falls $k_t = 1$ oder $k_t = 2$ für ein $t \in \{1, ..., n\}$.

1.3 Zusammenfassung und Diskussion

In der vorliegenden Arbeit werden neue L^∞ und Hölder-Abschätzungen für die bekannte grundlegende $\overline{\partial}$-Homotopieformel auf der Kugel $\mathbb{D}$ in $\mathbb{C}^n$ entwickelt. Unter Verwendung dieser Abschätzungen konstruieren wir dann einen Lösungsoperator für die $\overline{\partial}$-Gleichung auf gewissen streng pseudokonvexen Gebieten singulärer komplexer Räume.

Die Arbeit kann in drei Teile gegliedert werden. Den ersten Teil bilden die Kapitel 3 und 4. In Kapitel 3 entwickeln wir die Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel für L^p-Formen mit L^p-Randwerten. Diese Formel wird nicht zur Konstruktion des $\overline{\partial}$-Lösungsoperators auf singulären komplexen Räumen benötigt, ist aber für sich genommen von Interesse und ein schönes Hilfsmittel zum Nachweis der C^∞-Glattheit holomorpher (im Distributionssinne) L^1-Funktionen, was wir einsetzen, um die klassischen Riemannschen Hebbarkeitssätze für L^p-Funktionen zu zeigen. Der Beweis der BMK-Formel beruht im Wesentlichen auf dem Youngschen Theorem 3.3.4, das die Stetigkeit des BMK-Randoperators liefert. Die Aussage von Theorem 3.3.4 geht weit über die Erfordernisse dieser Arbeit hinaus.[21]
In Kapitel 4 untersuchen wir Fortsetzungssätze für die $\overline{\partial}$-Gleichung, was wir durch die klassischen Riemannschen Hebbarkeitssätze motivieren. Von Bedeutung für den Rest der Arbeit ist der Fortsetzungssatz für die $\overline{\partial}$-Gleichung 4.3.3.

Den zweiten Teil bilden die Kapitel 5 und 6, in denen neue L^∞ und Hölder-Abschätzungen für die grundlegende Homotopieformel auf der Kugel entwickelt werden. In Kapitel 5 zitieren wir die Entwicklung der Homotopieformel nach Lieb und Michel ([LiMi]) und geben eine für unsere Belange günstige Darstellung der Hauptteile der involvierten Integraloperatoren. In Kapitel 6 definieren wir zunächst eine neue Klasse gewichteter Funktionenräume:

$$L^{\infty,\alpha}(\mathbb{D}) = \{f \in L^1(\mathbb{D}) : |z_1|^{\alpha_1} \cdots |z_n|^{\alpha_n} f \in L^\infty(\mathbb{D})\}$$

für $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $0 \leq \alpha_j < 2$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$. Es handelt sich also um Funktionen mit vorgegebener Singularität. Wir geben gewichtete Abschätzungen für die $\overline{\partial}$-Lösungsoperatoren auf diesen Räumen.

Den dritten Teil der Arbeit bildet Kapitel 7. Hier lösen wir die $\overline{\partial}$-Gleichung mit Hölder-Abschätzungen auf der komplexen Mannigfaltigkeit der regulären Punkte im streng pseudokonvexen steinschen Raum

$$D = \{(z, w_1, ..., w_n) : z^m = w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n} \text{ und } |w_1|^2 + ... + |w_n|^2 < 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

mit dem Verfahren nach Fornæss und Gavosto. Die hier zu Grunde liegenden Definitionen der Funktionenräume auf analytischen Mengen in $\mathbb{C}^N$ werden in Kapitel 2 gegeben, das ansonsten noch einige elementare Bezeichnungen erklärt.

[21] Ausführliche Zusammenfassungen und Erläuterungen finden sich jeweils in der Einleitung der einzelnen Kapitel.

Die Definition der Funktionenräume in Kapitel 2 ist durch [FoGa] motiviert, wo äquivalente Konzepte verwendet werden. Das Youngsche Theorem 3.3.4 und die BMK-Formel für L^p-Formen sind uns aus der Literatur nicht bekannt. Die Idee zu Theorem 3.3.4 geht auf Diskussionen mit Prof. Dr. Ingo Lieb zurück. Auch die Charakterisierung schwacher Randwerte durch Approximation (Theorem 3.4.4) scheint neu zu sein. Der $\overline{\partial}$-Fortsetzungssatz 4.3.3 ist eine leichte Verallgemeinerung der klassischen Riemannschen Hebbarkeitssätze. Die Entwicklung der grundlegenden Homotopieformel für den Ball ist [LiMi] entnommen. Neu sind die gewichteten L^∞ und Hölder-Abschätzungen aus Kapitel 6. Die in Kapitel 7 verwendete Methode zur Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung auf singulären komplexen Räumen geht auf die Ideen von Fornæss und Gavosto zurück, stellt aber eine wesentliche Weiterentwicklung des Verfahrens aus [FoGa] dar.

Fornæss und Gavosto verwenden die inhomogene Cauchy-Integralformel, um eine Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung für $(0,1)$-Formen lokal in einer Umgebung der Singularität von $X = \{z^2 = w_1 w_2\}$ abzuschätzen. Diese Vorgehensweise kann einerseits nicht auf Formen höheren Grades angewandt werden, scheint andererseits auch wenig geeignet, um das Verhalten am Rand eines Gebietes in einer analytischen Menge zu untersuchen, insbesondere, falls die Singularität den Rand schneidet. Diesen Problemen begegnen wir, indem wir die Homotopieformel nutzen, um eine Lösung zum $\overline{\partial}$-Problem zu entwickeln und abzuschätzen.
Neu ist auch die folgende Strategie: Nachdem das Problem auf die Kugel $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$ projiziert ist, dividieren wir die erhaltenen Formen durch ein geeignetes holomorphes Monom, bevor die $\overline{\partial}$-Gleichung gelöst wird.[22] Dies hat den Vorteil, dass die Lösung später wieder mit dieser Funktion multipliziert wird, was das Verhalten in der Verzweigungsmenge der Projektion Π verbessert.

Es stellt sich die Frage, in wie weit unser Verfahren auch in allgemeineren Situationen eingesetzt werden kann. Wie bereits angesprochen, kann ein komplexer Raum X in jedem irreduziblen Punkt lokal als endlich-blättrige Überlagerung einer offenen Menge in einem komplexen Zahlraum $\mathbb{C}^n$ dargestellt werden. Da jede holomorphe Funktion nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz lokal in ein Produkt aus einem Weierstraßpolynom und einer nullstellenfreien holomorphen Funktion faktorisiert werden kann, sollte man zunächst annehmen, X sei durch Polynome gegeben. Wir vermuten, dass das $\overline{\partial}$-Problem auch in dieser Situation unter Verwendung geeigneter symmetrischer Kombinationen nach $\mathbb{C}^n$ projiziert werden kann, so dass die resultierenden Formen noch quadratintegrabel und damit $\overline{\partial}$-geschlossen sind. Dann müssen die $\overline{\partial}$-Gleichungen in $\mathbb{C}^n$ mit geeigneten Abschätzungen gelöst werden. Unsere Theorie der gewichteten L^∞ und Hölder-Abschätzungen wird den Anforderungen dieser Situation nach geeigneter Verallgemeinerung in weitem Maße gerecht.[23]

[22] Vgl. dazu Abschnitt 1.2, wo die $\overline{\partial}$ Gleichung für η_1/w_1w_2 statt η_1 gelöst wird.
[23] Vgl. dazu die Ausführungen in der Einleitung zu Kapitel 6.

Durch Verkleben der lokalen Lösungen läßt sich dann eine Parametrix zum $\overline{\partial}$-Operator auf streng pseudokonvexen Gebieten in X konstruieren. Anschließend könnte man (falls X steinsch ist) mit Hilfe eines der bekannten Verfahren, wie der Grauertschen Beulenmethode, einen Lösungsoperator erhalten.

Bezüglich der Hölder-Abschätzungen treten in der vorliegenden Arbeit zwei Probleme zu Tage, auf die in weiterführenden Untersuchungen eingegangen werden muss:

1. In der Ermittlung der Hölder-Regularität des Operators $\mathbf{L}_0$ verursachen die Faktoren N_k/z^k die Verschlechterung des Hölder-Exponenten zu $\vartheta^* \leq \vartheta$ (vgl. Theorem 7.3.4). Es scheint sich um ein verfahrenstechnisches Problem ohne tiefere mathematische Ursache zu handeln. Nähere Erläuterungen finden sich in Kapitel 7. Hier scheinen zwei Ansätze hilfreich: Zum einen kann die Koordinate $w_0 = z$ in die Abschätzung von N_k/z^k (vgl. Lemma 7.3.2) einbezogen werden. Zum anderen könnte man sich zunächst auf normale komplexe Räume beschränken. Dann wäre N_k/z^k eine holomorphe Funktion auf X.

2. Die Untersuchung der Hölder-Regularität der Operatoren $\mathbf{L}_q$ für $q \geq 1$ bringt eine zusätzliche Schwierigkeit mit sich: Da es sich bei $\mathbf{L}_q\omega$ in diesem Fall nicht mehr um Funktionen handelt, müssen die Koeffizienten der kanonischen Darstellung $\pi^*\mathbf{L}_q\omega = \mathbf{L}_q\omega \oplus 0$ abgeschätzt werden. Dabei treten zusätzliche Faktoren auf, die sich unangenehm verhalten können (vgl. Lemma 7.2.6). Hier hilft es, die analog auftretenden Koeffizienten der kanonischen Darstellung von ω zu berücksichtigen. Diese Koeffizienten haben keine Bedeutung für die Regularität des Operators $\mathbf{L}_0$.

Insgesamt ist unser Verfahren nach Fornæss und Gavosto geeignet, die $\overline{\partial}$-Gleichung im intrinsischen Setup für beschränkte Formen mit Hölder-Abschätzungen in allgemeineren Situationen zu lösen. Dies soll Thema späterer Untersuchungen werden.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Ingo Lieb für die interessante Themenstellung und die Freude an der Mathematik, die er mir vermittelt hat. Vielen herzlichen Dank auch an Herrn Prof. Dr. Ingo Lieb und Herrn Dr. Torsten Hefer für die ausgezeichnete und stets freundliche Betreuung während der letzten Jahre, sowie an Bettina Herrchen, Christine Rogg und Emanuel Nipper für die nette Atmosphäre in unserer Abteilung. Ferner danke ich Herrn Prof. Dr. Werner Müller für die Übernahme des Korreferats.

Ganz besonders möchte ich mich bei meinen Eltern Roselinde und Egon Ruppenthal und meinen Großeltern Gerda und Karl Rausch bedanken. Ohne ihre Liebe und langjährige Unterstützung wäre diese Arbeit nie möglich geworden.

Ein besonders herzliches Dankeschön auch an meine Freundin Julia für die stetige Ermutigung und liebevolle Unterstützung.

2 Funktionenräume auf analytischen Mengen

In diesem Kapitel erklären wir die Funktionenräume auf einer analytischen Menge $X \subset \mathbb{C}^n$, die wir in dieser Arbeit benötigen. Räume von Differentialformen definieren wir auf offenen Untermannigfaltigkeiten der komplexen Mannigfaltigkeit der regulären Punkte $\operatorname{Reg} X$. Hier können wir nicht den üblichen Weg über lokale Koordinatensysteme gehen, da eine solche Mannigfaltigkeit $M \subset \operatorname{Reg} X$ nicht unbedingt mit endlich vielen lokalen Koordinatensystemen überdeckt werden kann. Wir nutzen stattdessen die Einbettung $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ und verfahren folgendermaßen: Sei $\Lambda\mathbb{C}T^*M$ die Graßmann-Algebra komplexwertiger Formen auf M und $\Lambda\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^n|_M$ die Einschränkung der Graßmann-Algebra komplexwertiger Formen über $\mathbb{C}^n$ auf M. Die euklidische Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^n}$ induziert durch Einschränkung die Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ auf $\Lambda\mathbb{C}T^*M$. Nun existiert ein kanonischer trivialer Fortsetzungsoperator

$$\pi^* : \Lambda\mathbb{C}T^*M \hookrightarrow \Lambda\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^n|_M$$

mit $\iota^* \circ \pi^*(\eta) = \eta$ für alle Schnitte η in $\Lambda\mathbb{C}T^*M$. π^* ist eindeutig bestimmt durch $\langle\pi^*\eta(p), \pi^*\eta(p)\rangle_{\mathbb{C}^n,p} = \langle\eta(p), \eta(p)\rangle_{M,p}$ für alle $p \in M$ (Lemma 2.2.1). Damit besitzt $\pi^*\eta$ eine eindeutige Darstellung

$$\pi^*\eta = \sum_{J,K} a_{JK} dz_J \wedge d\overline{z_K}$$

bezüglich der kartesischen Koordinaten $z_1, ..., z_n$ in $\mathbb{C}^n$. Sei nun $\mathcal{F}(M)$ ein Funktionenraum auf M. Dann sagen wir, eine (s,t)-Form η liegt in $\mathcal{F}_{s,t}(M)$ genau dann, wenn alle Koeffizienten a_{JK} in $\mathcal{F}(M)$ liegen. Ist $(\mathcal{F}(M), \|\cdot\|_{\mathcal{F}(M)})$ ein normierter Raum, so versehen wir $\mathcal{F}_{s,t}(M)$ mit der Norm

$$\|\eta\|_{\mathcal{F}_{s,t}(M)} = \sqrt{\sum_{J,K} 2^{s+t} \|a_{JK}\|_{\mathcal{F}(M)}}.$$

Ist X mit einer Metrik $d_X(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ versehen, so erhalten wir auf diese Weise auch Hölder-Räume von Differentialformen. Dazu verfahren wir folgendermaßen: Wir definieren $d_X(p,q)$ für zwei Punkte $p, q \in X$ als das Infimum der Länge verbindender Wege $\gamma : [0,1] \to X$, die als Wege in $\mathbb{C}^n$ stückweise stetig differenzierbar sind. Mit Länge meinen wir die Länge von γ in $\mathbb{C}^n$. Etwa für $X = \{z^m = w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ (mit $1 \le m, k_j \in \mathbb{Z}$) existiert immer ein solcher Weg endlicher Länge, so dass d_X in diesem Fall wohldefiniert ist. Für $U \subset X$ offen, $f \in L^\infty(U)$ und $0 < \alpha < 1$ ist dann

$$\|f\|_{C^\alpha_X(U)} = \|f\|_{L^\infty(U)} + \sup_{p,q \in U,\ p \neq q} \frac{|f(p) - f(q)|}{d_X(p,q)^\alpha}$$

und $C^\alpha_X(U) = \{f \in L^\infty(U) : \|f\|_{C^\alpha_X(U)} < \infty\}$. Für $U \subset \operatorname{Reg} X$ sind damit nach dem oben beschriebenen Verfahren auch die Hölderräume $C^\alpha_{(s,t),X}(U)$ definiert.
Unsere so eingeführten Räume $L^\infty_{s,t}(U)$ und $C^\alpha_X(U)$ sind äquivalent zu den entsprechenden Räumen, die Fornæss und Gavosto in [FoGa] verwenden.

2.1 Geometrie des $\mathbb{C}^n$

In dieser Arbeit bezeichen wir mit $\mathbb{C}^n$ den n-dimensionalen komplexen Zahlraum

$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, ..., z_n) : z_j \in \mathbb{C}\}$$

versehen mit dem Standard-Skalarprodukt

$$(a, b) = \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j},$$

der induzierten Norm $|a| = \sqrt{(a, a)}$ und der euklidischen Metrik $d(a, b) = |a - b|$. Damit ist

$$B_r(p) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - p| < r\}$$

die Kugel vom Radius $r > 0$ mit Mittelpunkt $p \in \mathbb{C}^n$. Eine offene Menge $D \subset \mathbb{C}^n$ bezeichnen wir als Gebiet. Eine Teilmenge $\Omega \subset D$ heißt relativ kompakt, notiert $\Omega \subset\subset D$, falls der Abschluss $\overline{\Omega}$ von Ω eine kompakte Teilmenge von D ist. Für eine beliebige Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ bezeichnen wir mit bA den topologischen Rand. Für ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}^n$ heißt bD differenzierbar $\in C^k$, falls bD lokal als Nullstellenmenge einer C^k-Funktion mit nicht verschwindendem Gradienten dargestellt werden kann.

Wir identifizieren $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$: Für $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ notieren wir $z_j = x_j + iy_j$ mit $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$. Damit liefert die Abbildung

$$z \mapsto (x_1, y_1, ..., x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

einen $\mathbb{R}$-linearen Isomorphismus.

Der reelle Tangentialraum $T_p\mathbb{C}^n$ an $\mathbb{C}^n$ im Punkt p trägt in jedem Punkt $p \in \mathbb{C}^n$ die Struktur eines komplexen Vektorraumes, wobei die Multiplikation mit der imaginären Einheit i durch die $\mathbb{R}$-lineare Strukturabbildung

$$J_p : T_p\mathbb{C}^n \to T_p\mathbb{C}^n,$$

$$J_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p \quad , \quad J_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p\right) = -\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \tag{4}$$

gegeben ist. Nähere Erläuterungen zu dieser komplexen Struktur finden sich auch in Abschnitt 6.3.

$T_p\mathbb{C}^n$ sei versehen mit dem reellen Standard-Skalarprodukt, dass wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n,p}$ bezeichnen. Damit ist das Tangentialbündel $T\mathbb{C}^n$ mit der üblichen Metrik versehen. Das Skalarprodukt induziert wie gewohnt das Skalarprodukt im Kotangentialraum $T_p^*\mathbb{C}^n$, indem wir verlangen, dass die duale Basis zu einer Orthonormalbasis wieder orthonormal ist.

Das komplexifizierte Tangentialbündel $\mathbb{C}T\mathbb{C}^n$ ist definiert als

$$\mathbb{C}T\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T\mathbb{C}^n.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ und $v \in T\mathbb{C}^n$ notieren wir kurz zv statt $z \otimes v$. Nun setzt sich die durch (4) gegebene Strukturabbildung J_p zu einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung

$$J_p : \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$$

fort, und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n,p}$ induziert die ebenfalls mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n,p}$ bezeichnete hermitesche Metrik gegeben durch

$$\langle av, bw \rangle_{\mathbb{C}^n,p} = a\bar{b}\langle v, w \rangle_{\mathbb{C}^n,p}$$

auf $\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$. Analog ist das komplexifizierte Kotangentialbündel

$$\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T^*\mathbb{C}^n$$

gegeben und $\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$ mit der Fortsetzung des Skalarproduktes von $T_p^*\mathbb{C}^n$ versehen, das wir ebenfalls $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n,p}$ bezeichnen.

Für jeden Punkt $p \in \mathbb{C}^n$ ist $\{\frac{\partial}{\partial x_j}|_p, \frac{\partial}{\partial y_j}|_p\}_{j=1}^n$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$ und $\{dx_j|_p, dy_j|_p\}_{j=1}^n$ orthonormale Basis von $\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$. Für die Komplexe Analysis sind aber andere Basen nützlicher: Es seien

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

sowie

$$dz_j = dx_j + idy_j \quad \text{und} \quad d\overline{z_j} = dx_j - idy_j.$$

Nun ist

$$\langle \frac{\partial}{\partial z_j}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial z_k}\bigg|_p \rangle_{\mathbb{C}^n,p} = \langle \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\bigg|_p \rangle_{\mathbb{C}^n,p} = \frac{1}{2}\delta_{jk}\ , \quad \langle \frac{\partial}{\partial z_j}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\bigg|_p \rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 0,$$

und

$$\langle dz_j|_p, dz_k|_p \rangle_{\mathbb{C}^n,p} = \langle d\overline{z_j}|_p, d\overline{z_k}|_p \rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 2\delta_{jk}\ , \quad \langle dz_j|_p, d\overline{z_k}|_p \rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 0.$$

Damit ist $\{\frac{\partial}{\partial z_j}|_p, \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}|_p\}_{j=1}^n$ orthogonale Basis von $\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$ und $\{dz_j|_p, d\overline{z_j}|_p\}_{j=1}^n$ orthogonale Basis von $\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$. Wir bezeichnen mit $T_p^{1,0}\mathbb{C}^n$ den Unterraum, der von $\{\frac{\partial}{\partial z_j}|_p\}_{j=1}^n$ aufgespannt wird, und mit $T_p^{0,1}\mathbb{C}^n$ den Span von $\{\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}|_p\}_{j=1}^n$. Damit besitzt $\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$ die orthogonale Zerlegung

$$\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n = T_p^{1,0}\mathbb{C}^n \oplus T_p^{0,1}\mathbb{C}^n,$$

und es ist $\overline{T_p^{1,0}\mathbb{C}^n} = T_p^{0,1}\mathbb{C}^n$. Dabei sind $T_p^{1,0}\mathbb{C}^n$ und $T_p^{0,1}\mathbb{C}^n$ genau die Eigenräume der Abbildung J_p zu den Eigenwerten i und $-i$.

Analog sei $\Lambda^{1,0}T_p^*\mathbb{C}^n$ der von $\{dz_j|_p\}_{j=1}^n$ und $\Lambda^{0,1}T_p^*\mathbb{C}^n$ der von $\{d\overline{z_j}|_p\}_{j=1}^n$ erzeugte Unterraum in $\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$. Damit ist $\Lambda^{0,1}T_p^*\mathbb{C}^n = \overline{\Lambda^{1,0}T_p^*\mathbb{C}^n}$,

$$\begin{aligned}\Lambda^{1,0}T_p^*\mathbb{C}^n &= \{\omega \in \mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n : \omega(Jv) = i\omega(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n\} \\ &= \{\omega \in \mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n : \omega \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear}\},\end{aligned}$$

und wir erhalten die orthogonale Zerlegung

$$\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n = \Lambda^{1,0}T_p^*\mathbb{C}^n \oplus \Lambda^{0,1}T_p^*\mathbb{C}^n.$$

Nun setzt sich das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n,p}$ auch auf die Graßmann-Algebra komplexwertiger Formen im Punkt $p \in \mathbb{C}^n$, die wir mit

$$\Lambda\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n = \bigoplus_{r\geq 0} \Lambda^r\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$$

bezeichnen, in gewohnter Weise fort: Formen $\omega, \eta \in \Lambda\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$ besitzen eindeutige Darstellungen $\omega = \sum_{J,K} a_{JK} dz_J \wedge d\overline{z_K}$ bzw. $\eta = \sum_{J,K} b_{JK} dz_J \wedge d\overline{z_K}$, wobei wir über streng aufsteigend sortierte Indexmengen summieren (sonst ist die Darstellung nicht eindeutig), und die Multiindexschreibweise

$$dz_J = dz_{j_1} \wedge ... \wedge dz_{j_p}$$

für eine geordnete Menge $J = \{j_1, ..., j_p\}$ verwenden. Damit ist

$$\langle \omega, \eta \rangle_{\mathbb{C}^n,p} = \sum_{J,K} 2^{|J|+|K|} a_{JK} \overline{b_{JK}}.$$

Der Faktor $2^{|J|+|K|}$ ergibt sich aus $\langle dz_j, dz_j \rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 2$. Sei nun

$$\Lambda^{s,t}T_p^*\mathbb{C}^n = \{\omega \in \Lambda^{s+t}\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n : \omega = \sum_{\substack{|J|=s \\ |K|=t}} a_{JK} dz_J \wedge d\overline{z_K}\}.$$

Damit erhalten wir für den Raum der Formen vom Grad r die orthogonale Zerlegung in Formen vom Typ (s,t) mit $s + t = r$:

$$\Lambda^r\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n = \bigoplus_{s+t=r} \Lambda^{s,t}T_p^*\mathbb{C}^n.$$

Wir bezeichnen die entsprechenden Vektorraumbündel mit $\Lambda^r\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^n$ bzw. $\Lambda^{s,t}T^*\mathbb{C}^n$. Ist $V \subset \mathbb{C}^n$ und $\mathcal{F}(V)$ ein Funktionenraum auf V, so bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_r(V)$ bzw. $\mathcal{F}_{s,t}(V)$ die Menge der Formen ω vom Typ r bzw. (s,t) auf V, deren Koeffizienten $a_{j_1...j_s k_1...k_t}$ der eindeutigen Darstellung

$$\omega = \sum_{\substack{1\leq j_1<...<j_s\leq n \\ 1\leq k_1<...<k_t\leq n}} a_{j_1...j_s k_1...k_t} dz_{j_1} \wedge ... \wedge dz_{j_s} \wedge d\overline{z_{k_1}} \wedge ... \wedge d\overline{z_{k_t}}$$

in $\mathcal{F}(V)$ liegen. Die Menge aller Formen auf V mit Koeffizienten in $\mathcal{F}(V)$ wird mit $\mathcal{F}_*(V)$ bezeichnet.

Ist etwa $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\omega \in C^1_{p,q}(U)$, so lässt sich die äußere Ableitung $d\omega$ eindeutig zerlegen in lineare Operatoren

$$\begin{aligned} \partial: &\quad C^1_{p,q}(U) \to C^0_{p+1,q}(U), \\ \overline{\partial}: &\quad C^1_{p,q}(U) \to C^0_{p,q+1}(U) \end{aligned}$$

mit $d = \partial + \overline{\partial}$, und $\partial^2 = 0$, $\overline{\partial}^2 = 0$ und $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$ auf $C^2_*(U)$.

Ist $(\mathcal{F}(V), \|\cdot\|_{\mathcal{F}(V)})$ ein normierter Raum, so normieren wir $\mathcal{F}_{s,t}(V)$ durch

$$\|\omega\|_{\mathcal{F}_{s,t}(V)} = \sqrt{2^{s+t} \sum \|a_{j_1\ldots j_s k_1 \ldots k_t}\|^2_{\mathcal{F}(V)}}.$$

Der Normierungsfaktor 2^{s+t} trägt der Tatsache $\langle dz_j|_p, dz_j|_p\rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 2$ Rechnung. Analog sei für $\mathcal{F}_r(V)$ und $\mathcal{F}_*(V)$ verfahren.

Eine Volumenform auf $\mathbb{C}^n$ ist eine reelle stetige $2n$-Form $dV \in C^0_{2n}(\mathbb{C}^n)$ mit

$$\langle dV, dV\rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 1$$

für alle $p \in \mathbb{C}^n$. Wir entscheiden uns in dieser Arbeit für

$$\begin{aligned} dV_{\mathbb{C}^n} &= dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1 \wedge d\overline{z_1} \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z_n}. \end{aligned}$$

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Dann ist das innere Produkt $(\omega, \eta)_U$ für zwei Differentialformen durch

$$(\omega, \eta)_U = \int_U \langle \omega(p), \eta(p)\rangle_{\mathbb{C}^n,p} \, dV_{\mathbb{C}^n}(p)$$

gegeben, falls das Integral existiert. Ist $\omega \in L^2_r(U)$, so folgt

$$\begin{aligned} (\omega, \omega)_U &= \int_U \langle \omega(p), \omega(p)\rangle_{\mathbb{C}^n,p} dV_{\mathbb{C}^n}(p) \\ &= \int_U \sum 2^r |a_{JK}|^2(p) dV_{\mathbb{C}^n}(p) \\ &= \sum 2^r \|a_{JK}\|^2_{L^2(U)} = \|\omega\|^2_{L^2_r(U)}. \end{aligned}$$

Ist $D \subset \mathbb{C}^n$ offen mit differenzierbarem Rand $bD \in C^k$, so trägt bD eine eindeutige Riemannsche Struktur durch die Einschränkung des Skalarproduktes in $T_p\mathbb{C}^n$ auf $T_pbD \subset T_p\mathbb{C}^n$, und es existiert eine eindeutige Volumenform dS auf bD, die die auf bD induzierte Orientierung repräsentiert. dS heißt Flächenelement bzw. $(2n-1)$-dimensionales Lebesgue-Maß induziert auf bD.

2.2 Komplexe Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{C}^n$

Nun sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit, $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ die Einbettungsabbildung und $p \in M$. Dann induziert ι die Tangentialabbildung

$$\iota_*(p) : T_pM \to T_p\mathbb{C}^n.$$

Wegen der Injektivität von $\iota_*(p)$ können wir T_pM als Untervektorraum des $T_p\mathbb{C}^n$ ansehen. Wir bezeichnen mit $N_p\mathbb{C}^n$ das orthogonale Komplement und erhalten:

$$T_p\mathbb{C}^n = T_pM \oplus N_pM.$$

Gehen wir zur Komplexifizierung der beteiligten reellen Vektorräume über, so ergibt sich die Zerlegung

$$\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n = \mathbb{C}T_pM \oplus \mathbb{C}N_pM,$$

die bezüglich der Fortsetzung von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n,p}$ zu dem hermiteschen Skalarprodukt auf $\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$ wieder orthogonal ist. Die Einbettungsabbildung $\iota_*(p)$ setzt sich ebenfalls fort zur Einbettungsabbildung

$$\iota_*(p) : \mathbb{C}T_pM \hookrightarrow \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n.$$

In diesem Kontext kann $\iota_*(p)$ als Fortsetzung mit 0 angesehen werden:

$$\iota_*(p) : v \mapsto v \oplus 0.$$

Sei weiterhin

$$\pi_*(p) : \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}T_pM$$

die orthogonale Projektion. $\pi_*(p)$ ist linksinvers zu $\iota_*(p)$:

$$\pi_*(p) \circ \iota_*(p) = Id_{\mathbb{C}T_pM}.$$

Sei nun $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M,p}$ das von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n,p}$ durch Einschränkung induzierte hermitesche Skalarprodukt auf $\mathbb{C}T_pM$ gegeben durch

$$\langle v, w \rangle_{M,p} = \langle \iota_*(p)v, \iota_*(p)w \rangle_{\mathbb{C}^n,p}.$$

Wir setzen $|\cdot|_{\mathbb{C}^n}(p) = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n,p}}$ und $|\cdot|_M(p) = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{M,p}}$.
Damit ist

$$|v|_M(p) = |\iota_*(p)v|_{\mathbb{C}^n}(p)$$

für alle $v \in \mathbb{C}T_pM$, und für $w \in \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$ gilt

$$|w|_{\mathbb{C}^n}(p) = |\pi_*(p)w|_M(p)$$

genau dann, wenn $w \in \mathbb{C}T_pM$ ist.

Betrachten wir nun die komplexifizierten Kotangentialräume $\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$ und

$$\mathbb{C}T_p^*M = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_p^*M.$$

Dann ist $\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n)^*$ und $\mathbb{C}T_p^*M \cong (\mathbb{C}T_pM)^*$ via

$$z \otimes \omega(a \otimes v) = za\omega(v).$$

Wir definieren duale Abbildungen zu $\iota_*(p)$ und $\pi_*(p)$:

$$\iota^*(p) : \mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}T_p^*M$$

sei gegeben durch

$$\iota^*(p)(\omega)(v) = \omega(\iota_*(p)v),$$

und

$$\pi^*(p) : \mathbb{C}T_p^*M \to \mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$$

durch

$$\pi^*(p)(\eta)(w) = \eta(\pi_*(p)w).$$

$\iota^*(p)$ liefert die übliche Zurückziehung von Differentialformen bezüglich der Abbildung $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{C}^n$. Für π^* müsste eine Projektion $\Pi : \mathbb{C}^n \to M$ mit Tangentialabbildung $\Pi_*(p) = \pi_*(p)$ für $p \in M$ konstruiert werden, die aber in der Regel nicht existiert. Wegen

$$\begin{aligned} \iota^*(p) \circ \pi^*(p)(\eta)(v) &= \pi^*(p)(\eta)(\iota_*(p)v) \\ &= \eta(\pi_*(p) \circ \iota_*(p)v) = \eta(v) \end{aligned}$$

für alle $\eta \in \mathbb{C}T_p^*M$ und alle $v \in \mathbb{C}T_pM$ ist

$$\iota^*(p) \circ \pi^*(p) = Id_{\mathbb{C}T_p^*M}$$

und $\pi^*(p)$ ist injektiv. Damit fassen wir $\mathbb{C}T_p^*M$ ab sofort als Unterraum von $\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$ auf. Wir bezeichnen das orthogonale Komplement mit $\mathbb{C}N_p^*M$ und erhalten die (von der Metrik abhängige) orthogonale Zerlegung

$$\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n = \mathbb{C}T_p^*M \oplus \mathbb{C}N_p^*M.$$

Bezüglich dieser Zerlegung ist $\iota^*(p)$ die orthogonale Projektion und $\pi^*(p)$ kann als triviale Fortsetzung mit 0 verstanden werden:

$$\pi^*(p) : \eta \mapsto \eta \oplus 0.$$

Sei hier $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M,p}$ das von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n,p}$ durch Einschränkung induzierte hermitesche Skalarprodukt auf $\mathbb{C}T_p^*M$ gegeben durch

$$\langle \omega, \eta \rangle_{M,p} = \langle \pi^*(p)\omega, \pi^*(p)\eta \rangle_{\mathbb{C}^n,p}.$$

Wir setzen auch hier $|\cdot|_{\mathbb{C}^n}(p) = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n,p}}$ und $|\cdot|_M(p) = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{M,p}}$.

Damit ist

$$|\eta|_M(p) = |\pi^*(p)\eta|_{\mathbb{C}^n}(p)$$

für alle $\eta \in \mathbb{C}T_p^*M$, und für $\omega \in \mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$ gilt

$$|\omega|_{\mathbb{C}^n}(p) = |\iota^*(p)\omega|_M(p)$$

genau dann, wenn $\omega \in \mathbb{C}T_p^*M$ ist.

Es sei nun $U \subset M$ (relativ) offen. Wir setzen

$$\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^n|_U = \bigcup_{p\in U} \mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$$

und

$$\mathbb{C}T^*U = \bigcup_{p\in U} \mathbb{C}T_p^*M \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{C}N^*U = \bigcup_{p\in U} \mathbb{C}N_p^*M.$$

Es handelt sich um die üblichen $\mathbb{C}$-Vektorraumbündel. Nach den vorangegangenen Betrachtungen ist

$$\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^n|_U = \mathbb{C}T^*U \oplus \mathbb{C}N^*U \ ,$$

und die faserweise definierten Abbildungen $\iota^*(p)$ und $\pi^*(p)$ liefern Abbildungen

$$\begin{aligned} \iota^* &: \ \mathbb{C}T^*\mathbb{C}^n|_U \to \mathbb{C}T^*U, \\ \pi^* &: \ \mathbb{C}T^*U \hookrightarrow \mathbb{C}T^*\mathbb{C}^n|_U \, . \end{aligned}$$

Dabei kann ι^* als Projektion und π^* als triviale Fortsetzung mit 0 verstanden werden. Diese Konstruktion überträgt sich analog auf Formen höheren Grades. Für $\omega \in \Lambda^r\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$ setzen wir

$$\iota^*(p)(\omega)(v_1, ..., v_r) = \omega(\iota_*(p)v_1, ..., \iota_*(p)v_r),$$

und für $\eta \in \Lambda^r\mathbb{C}T_p^*M$ ist

$$\pi^*(p)(\eta)(v_1, ..., v_r) = \eta(\pi_*(p)v_1, ..., \pi_*(p)v_r).$$

Wieder sei $\langle\cdot,\cdot\rangle_{M,p}$ das von $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^n,p}$ durch Einschränkung induzierte hermitesche Skalarprodukt auf $\Lambda^r\mathbb{C}T_p^*M$ gegeben durch

$$\langle\omega,\eta\rangle_{M,p} = \langle\pi^*(p)\omega, \pi^*(p)\eta\rangle_{\mathbb{C}^n,p}.$$

Wir setzen auch hier $|\cdot|_{\mathbb{C}^n}(p) = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^n,p}}$ und $|\cdot|_M(p) = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_{M,p}}$ und bemerken wieder:

$$|\eta|_M(p) = |\pi^*(p)\eta|_{\mathbb{C}^n}(p)$$

für alle $\eta \in \Lambda^r\mathbb{C}T_p^*M$, und für $\omega \in \Lambda^r\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$ gilt

$$|\omega|_{\mathbb{C}^n}(p) = |\iota^*(p)\omega|_M(p)$$

genau dann, wenn $\omega \in \Lambda^r\mathbb{C}T_p^*M$ ist.

Das Konzept überträgt sich auf die Graßmann-Algebren $\Lambda\mathbb{C}T_p^*M$, $\Lambda\mathbb{C}T_p^*\mathbb{C}^n$ und die entsprechenden Vektorraumbündel.

Zusammengefasst ergibt sich:

Lemma 2.2.1. *Es sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit, $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ die Einbettungsabbildung und $U \subset M$ (relativ) offen. Dann existiert ein kanonischer trivialer Fortsetungsoperator*

$$\pi^* : \Lambda\mathbb{C}T^*U \hookrightarrow \Lambda\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^n|_U$$

mit

$$\iota^* \circ \pi^*(\eta) = \eta$$

für alle Schnitte η in $\Lambda\mathbb{C}T^*U$. π^* ist eindeutig bestimmt durch

$$|\pi^*\eta(p)|_{\mathbb{C}^n}(p) = |\eta(p)|_M(p)$$

für alle $p \in U$. Wir bezeichnen $\pi^*\eta$ auch mit $\eta \oplus 0$.

Man beachte, dass $\Lambda\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^n|_U$ nicht die Zurückziehung von $\Lambda\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^n$ bezeichnet, und dass in der Regel $\pi^* \circ \iota^*(\omega) \neq \omega$ ist.

Interpretieren wir $\Lambda\mathbb{C}T^*U$ als Unterraum von $\Lambda\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^n|_U$, so überträgt sich auch das Konzept der (s,t)-Formen auf die komplexe Untermannigfaltigkeit U:

$$\Lambda^{s,t}T^*U = \Lambda\mathbb{C}T^*U \cap \Lambda^{s,t}T^*\mathbb{C}^n\big|_U .$$

Es kann überprüft werden, dass diese Zerlegung mit der komplexen Struktur auf U verträglich ist. Dies liegt daran, dass für komplexe Untermannigfaltigkeiten die Einbettungsabbildung $\iota : U \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ holomorph ist, und $\overline{\partial} \circ \iota^* = \iota^* \circ \overline{\partial}$ gilt.

Eine (s,t)-Form η auf U ist nun eine Abbildung

$$\eta : U \to \Lambda^{s,t}T^*U$$

mit $\eta(p) \in \Lambda^{s,t}T_p^*U$ für alle $p \in U$. Wir notieren verkürzt $|\eta|_M(p)$ statt $|\eta(p)|_M(p)$ und setzen

$$\|\eta\|_{\infty,U} = \operatorname*{ess\,sup}_{p\in U} |\eta|_M(p).$$

Durch $\pi^* \circ \eta : U \to \Lambda^{s,t}T^*\mathbb{C}^n|_U$ besitzt η eine triviale Fortsetzung zu einer Abbildung nach $\Lambda^{s,t}T^*\mathbb{C}^n|_U$, die wir auch mit $\pi^*\eta$ oder $\eta \oplus 0$ bezeichnen, und es gilt

$$|\eta|_M(p) = |\pi^*\eta|_{\mathbb{C}^n}(p) = |\eta \oplus 0|_{\mathbb{C}^n}(p).$$

Dies hat folgenden Vorteil: $\pi^*\eta = \eta \oplus 0$ besitzt eine eindeutige Darstellung bezüglich der kartesischen Koordinaten des $\mathbb{C}^n$, und es kann auf lokale Darstellungen bezüglich lokaler Koordinatensysteme auf der komplexen Mannigfaltigkeit U verzichtet werden:

$$\pi^*\eta = \sum_{\substack{1\le j_1<\ldots<j_s\le n\\ 1\le k_1<\ldots<k_t\le n}} a_{j_1\ldots j_s k_1\ldots k_t} dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_s} \wedge d\overline{z_{k_1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{z_{k_t}}$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen $a_{j_1\ldots j_s k_1\ldots k_t}$, die wir als die Koeffizienten von η bezeichnen.

Unter Verwendung dieser eindeutigen Koeffizienten können auch für Differentialformen auf der komplexen Mannigfaltigkeit U Funktionenräume eingeführt werden. Ist $\mathcal{F}(U)$ ein Funktionenraum auf U, so bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_r(U)$ bzw. $\mathcal{F}_{s,t}(U)$ die Menge der Formen η vom Typ r bzw. (s,t) auf U, deren Koeffizienten $a_{j_1\dots j_s k_1\dots k_t}$ in $\mathcal{F}(U)$ liegen. Die Menge aller Formen auf U mit Koeffizienten in $\mathcal{F}(U)$ wird mit $\mathcal{F}_*(U)$ bezeichnet.

Ist $(\mathcal{F}(U), \|\cdot\|_{\mathcal{F}(U)})$ ein normierter Raum, so normieren wir $\mathcal{F}_{s,t}(U)$ durch

$$\|\eta\|_{\mathcal{F}_{s,t}(U)} = \sqrt{2^{s+t}\sum \|a_{j_1\dots j_s k_1\dots k_t}\|^2_{\mathcal{F}(U)}}.$$

Der Normierungsfaktor 2^{s+t} trägt der Tatsache $\langle dz_j|_p, dz_j|_p\rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 2$ Rechnung. Analog sei für $\mathcal{F}_r(V)$ und $\mathcal{F}_*(V)$ verfahren. Für $\eta \in L^\infty_{s,t}(U)$ ist etwa

$$\|\eta\|^2_{L^\infty_{s,t}(U)} = 2^{s+t}\sum \operatorname*{ess\,sup}_{p\in U} |a_{JK}|^2(p).$$

Wir wollen dies mit $\|\eta\|^2_{\infty,U}$ vergleichen. Wegen

$$\begin{aligned}\|\eta\|^2_{\infty,U} &= \operatorname*{ess\,sup}_{p\in U} |\eta|^2_M(p) = \operatorname*{ess\,sup}_{p\in U} |\pi^*\eta|^2_{\mathbb{C}^n}(p)\\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{p\in U} 2^{s+t}\sum |a_{JK}|^2(p)\end{aligned}$$

ist

$$\|\eta\|^2_{\infty,U} \leq \|\eta\|^2_{L^\infty_{s,t}(U)}.$$

Da für η über maximal $\binom{n}{s}\binom{n}{t}$ Summanden summiert wird, gilt andererseits:

$$\|\eta\|^2_{L^\infty_{s,t}(U)} \leq \left(\binom{n}{s}\binom{n}{t}\right)\|\eta\|^2_{\infty,U}.$$

Das zeigt die Äquivalenz der beiden Normen. Zuletzt vergleichen wir noch $\|\cdot\|_{\infty,U}$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$, die Fornæss und Gavosto in [FoGa] für (s,t)-Formen einführen: In einem Punkt $p \in M$ sei $\{d\zeta_j|_p, d\overline{\zeta_j}|_p\}_{j=1}^k$ orthonormale Basis von $\mathbb{C}T^*_pM$ in $\mathbb{C}T^*_p\mathbb{C}^n$, wobei wir mit k die komplexe Dimension von M im Punkt p bezeichnet haben. Für $\eta \in \Lambda^{s,t}T^*_pM$ mit $0 \leq s,t \leq k$ ist dann

$$\pi^*\eta = \sum_{\substack{1\leq j_1<\dots<j_s\leq k\\ 1\leq k_1<\dots<k_t\leq k}} a'_{JK}\, d\zeta_J|_p \wedge d\overline{\zeta_K}|_p.$$

Fornæss und Gavosto setzen

$$|\eta|(p) = \sqrt{\sum_{J,K} |a'_{JK}(p)|^2} \quad \text{und} \quad \|\eta\|_\infty = \operatorname{ess} \sup_{p\in Dom(\eta)} |\eta|(p).$$

Da $\{d\zeta_j|_p, d\overline{\zeta_j}|_p\}_{j=1}^k$ in $\mathbb{C}T^*_p\mathbb{C}^n$ orthonormal ist, folgt $|\eta|(p) = |\eta|_M(p)$ und $\|\eta\|_\infty = \|\eta\|_{\infty,U}$ für $U = Dom(\eta)$. Das heißt, unsere Definition von $L^\infty_{s,t}(U)$ ist äquivalent zur Definition von Fornæss und Gavosto.

2.3 Analytische Mengen in $\mathbb{C}^n$

Betrachten wir nun eine analytische Menge $X \subset \mathbb{C}^n$. Wir nehmen an, X sei mit einer Metrik $d_X(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ versehen. Für eine beliebige Teilmenge $U \subset X$, $f \in L^\infty(U)$ und $0 < \alpha < 1$ sei

$$\|f\|_{C_X^\alpha(U)} = \|f\|_{L^\infty(U)} + \sup_{\substack{p,q \in U \\ p \neq q}} \frac{|f(p) - f(q)|}{d_X(p,q)^\alpha}.$$

Der Raum der (bezüglich der Metrik auf X) α-hölderstetigen Funktionen in U sei nun

$$C_X^\alpha(U) = \{f \in L^\infty(U) : \|f\|_{C_X^\alpha(U)} < \infty\}.$$

Wir wollen diese Definition auf Differentialformen ausdehnen. Dazu müssen wir uns auf komplexe Untermannigfaltigkeiten $U \subset X$ beschränken. Sei also nun spezieller $U \subset \operatorname{Reg} X$ eine offene Teilmenge von $\operatorname{Reg} X$, also selbst eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann ist $C_{(s,t),X}^\alpha(U)$ nach den Überlegungen im letzten Abschnitt wohldefiniert. Für $\eta \in L_{s,t}^\infty(U)$ gilt

$$\begin{aligned} \|\eta\|^2_{C^\alpha_{(s,t),X}(U)} &= 2^{s+t} \sum \|a_{JK}\|^2_{C_X^\alpha(U)} \\ &= 2^{s+t} \sum \left(\|a_{JK}\|_{L^\infty(U)} + \sup_{\substack{p,q \in U \\ p \neq q}} \frac{|a_{JK}(p) - a_{JK}(q)|}{d_X(p,q)^\alpha} \right)^2 \end{aligned}$$

bezüglich der eindeutigen Darstellung

$$\pi^* \eta = \sum_{\substack{1 \le j_1 < \ldots < j_s \le n \\ 1 \le k_1 < \ldots < k_t \le n}} a_{j_1 \ldots j_s k_1 \ldots k_t} dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_s} \wedge d\overline{z_{k_1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{z_{k_t}}.$$

In dieser Arbeit versehen wir eine analytische Menge $X \subset \mathbb{C}^n$ stets mit der durch die euklidische Metrik induzierten Metrik: Für zwei Punkte $p, q \in X$ sei $d_X(p,q)$ das Infimum der Länge verbindender Wege $\gamma : [0,1] \to X$, die als Kurve in $\mathbb{C}^n$ stückweise stetig differenzierbar sind. Mit Länge meinen wir die Länge der Kurve in $\mathbb{C}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik. Dies ist konsistent mit einem Begriff der Länge des Weges in X, wenn X (dort, wo möglich) mit der Einschränkung der euklidischen Metrik versehen ist. Um eine Metrik auf X zu erhalten, muss sichergestellt sein, dass stets ein verbindender Weg endlicher Länge existiert. Es reicht, wenn sich jeder Punkt p in X mit einem festen Punkt $q_0 \in X$ durch einen Weg endlicher Länge verbinden lässt. Sei beispielsweise

$$X = \{z^m = w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

für $1 \le m, k_j \in \mathbb{Z}$. Dann ist für $q_0 = 0 \in X$ und $p = (p_0, p_1, \ldots, p_d) \in X$ etwa

$$\gamma(t) = (t^{k_1 + \ldots + k_n} p_0, t^m p_1, \ldots, t^m p_d)$$

ein solcher Weg endlicher Länge, und $d_X(\cdot,\cdot)$ ist wohldefiniert. Unsere Definition von Hölderräumen für Funktionen stimmt mit der aus [FoGa] genau überein.

3 Die Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel für L^p-Formen

Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein relativ kompaktes Gebiet mit C^1-Rand und $0 \leq q \leq n$. Dann gilt für jede differenzierbare Differentialform $f \in C^1_{0,q}(\overline{D})$ die klassische Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel (Theorem 3.1.2):

$$f = \mathbf{B}_q^{bD} f - \mathbf{B}_q^D(\overline{\partial} f) - \overline{\partial}_z \mathbf{B}_{q-1}^D f.$$

Diese Integraldarstellung bildet den Ausgangspunkt für viele wichtige Entwicklungen der komplexen Analysis, wie zum Beispiel der Homotopieformeln für streng pseudokonvexe Gebiete (vgl. Abschnitt 3.6). So findet sich in dieser Arbeit etwa die bekannte Herleitung der grundlegenden Homotopieformel für die Einheitskugel $\mathbb{D}$ in $\mathbb{C}^n$ aus der BMK-Formel (vgl. Kapitel 5).

Wir zeigen nun, dass die BMK-Formel auch für Differentialformen $f \in L^1_{0,q}(D)$ mit $\overline{\partial} f \in L^1_{0,q+1}(D)$ und Randwerten $f_b \in L^1_q(bD)$ gilt. Dabei heißt $f_b \in L^p_q(bD)$ L^p-Randwert von f, falls die Stokessche Formel

$$\int_{bD} f_b \wedge \iota^*(\varphi) = \int_D \overline{\partial} f \wedge \varphi + (-1)^q \int_D f \wedge \overline{\partial} \varphi$$

für alle $\varphi \in C^\infty_{n,n-q-1}(\overline{D})$ erfüllt ist (siehe Definition 3.4.2).
$\iota : bD \to \mathbb{C}^n$ bezeichnet die Einbettungsabbildung.

Der wesentliche Punkt im Beweis der Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel für L^p-Formen ist die Untersuchung der L^p-Regularität der Operatoren $\mathbf{B}_q^D$ und $\mathbf{B}_q^{bD}$, die durch

$$\mathbf{B}_q^X f(z) = \int_X f(\zeta) \wedge B_{nq}(\zeta, z)$$

für $X = D$ bzw. $X = bD$ gegeben sind. B_{nq} bezeichnet den Bochner-Martinelli-Koppelman-Kern (vgl. Definition 3.1.1). Nach Lemma 3.2.2 liefert $\mathbf{B}_q^D$ einen stetigen linearen Operator

$$\mathbf{B}_q^D : L^p_{0,q+1}(D) \to L^r_{0,q}(D)$$

für alle $1 \leq p, r \leq \infty$ mit $1/r > 1/p - 1/(2n)$. Dieses klassische Resultat folgt unmittelbar aus einer bekannten Youngschen Ungleichung für Faltungsintegrale (Theorem 3.2.1). Wir erweitern Theorem 3.2.1 zum allgemeineren Theorem 3.3.4 und zeigen damit: Der Randoperator $\mathbf{B}_q^{bD}$ liefert eine stetige lineare Abbildung

$$\mathbf{B}_q^{bD} : L^p_q(bD) \to L^p_{0,q}(D)$$

für alle $1 \leq p < \infty$ (Lemma 3.3.5). Nachdem die L^p-Stetigkeit der Integraloperatoren in der BMK-Formel gezeigt ist, kann die BMK-Formel für L^p-Formen aus der klassischen Formel mit einem Approximationsargument (vgl. Lemma 3.4.3 und Theorem 3.4.4) abgeleitet werden.

3.1 Die klassische BMK-Formel

Wir zitieren zunächst die klassische Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel für differenzierbare Differentialformen. Dazu benötigen wir den BMK-Kern:

Definition 3.1.1. *Für $0 \leq q \leq n$ ist der Bochner-Martinelli-Koppelman-Kern B_{nq} für $(0,q)$-Formen in $\mathbb{C}^n$ gegeben durch:*

$$B_{nq}(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{2^{q+1}\pi^n} \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n}} \sum_{\substack{j,J,\\|L|=q+1}} \epsilon^L_{jJ}(\overline{\zeta_j} - \overline{z_j})(*d\zeta^L) \wedge d\overline{z}^J.$$

Außerdem sei

$$B_{n,-1} \equiv 0.$$

Dabei verwenden wir folgende Notation: Für zwei geordnete Teilmengen $A, B \subset M := \{1, ..., n\}$ bezeichne $|A|$ die Kardinalität von A, $A' := M \setminus A$ das Komplement von A in der durch M induzierten Ordnung und

$$\epsilon^A_B := \begin{cases} \text{sign } \pi & \text{, falls } A = B \text{ als Mengen und } \pi \\ & \text{ eine Permutation mit } B = \pi A, \\ 0 & \text{ in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Weiterhin erinnern wir daran, dass für den Hodge-$*$-Operator gilt: Für $J \subset M$ und $|J| = q$ ist:

$$*dz^J = \frac{(-1)^{q(q-1)/2}}{2^{n-q}i^n} dz^J \wedge \left(\bigwedge_{\nu \in J'} d\overline{z_\nu} \wedge dz_\nu \right). \tag{5}$$

Für die Rechnung vgl. etwa [Ra], Lemma III.3.3. Damit ergeben sich unmittelbar folgende Eigenschaften des BMK-Kerns: $B_{nn} \equiv 0$, B_{nq} ist eine reell analytische Doppeldifferentialform auf $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \{\zeta = z\}$, vom Typ $(n, n-q-1)$ in ζ und vom Typ $(0,q)$ in z.

Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand $bD \in C^1$. Für eine $(0,q+1)$-Form g auf D bezeichnen wir mit $\mathbf{B}^D_q g$ die $(0,q)$-Form gegeben durch

$$\mathbf{B}^D_q g(z) := \int_D g(\zeta) \wedge B_{nq}(\zeta, z),$$

und für eine q-Form f auf bD mit $\mathbf{B}^{bD}_q f$ die $(0,q)$-Form

$$\mathbf{B}^{bD}_q f(z) := \int_{bD} f(\zeta) \wedge B_{nq}(\zeta, z),$$

vorausgesetzt, die Integrale existieren.

Nun gilt:

Theorem 3.1.2. (Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel [Ko])
Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit C^1-Rand und $0 \leq q \leq n$. Dann gilt für jede Differentialform $f \in C^1_{0,q}(\overline{D})$ die Darstellung

$$f(z) = \mathbf{B}_q^{bD} f(z) - \mathbf{B}_q^D(\overline{\partial} f)(z) - \overline{\partial}_z \mathbf{B}_{q-1}^D f(z), \tag{6}$$

wobei $\mathbf{B}_{q-1}^D f \in C^1_{0,q-1}(D)$ ist.

Wir werden zeigen, dass (6) noch unter folgenden schwächeren Voraussetzungen gilt:

$$\begin{array}{rcl} f & \in & L^1_{0,q}(D) \cap Dom(\overline{\partial}), \\ \overline{\partial} f & \in & L^1_{0,q+1}(D), \\ f & & \text{besitzt Randwerte } f_b \in L^1_q(bD). \end{array}$$

Die entsprechenden Definitionen finden sich in Abschnitt 3.4.

3.2 L^p-Regularität des BMK-Operators $\mathbf{B}_q^D$

Wir benötigen die folgende Verallgemeinerung der Youngschen Ungleichung für Faltungs-Integrale. Dieses bekannte Resultat (vgl. etwa [Ra]) wird häufig zur Abschätzung von Integral-Operatoren verwendet:

Theorem 3.2.1. *Es seien $M < \infty$, $s \geq 1$ fest gewählt, (X, μ) und (Y, ν) Maßräume und K eine $\mu \times \nu$-messbare Funktion auf $X \times Y$ mit:*

$$\int_X |K(x,y)|^s d\mu(x) \leq M^s \quad \textit{für fast alle } y \in Y \tag{7}$$

$$\int_Y |K(x,y)|^s d\nu(y) \leq M^s \quad \textit{für fast alle } x \in X. \tag{8}$$

Dann ist der ν-fast überall definierte lineare Operator $f \mapsto \mathbf{T}f$ definiert durch

$$\mathbf{T}f(y) = \int_X K(x,y) f(x) d\mu(x)$$

beschränkt von $L^p(X)$ nach $L^r(Y)$ mit Norm $\leq M$ für alle $1 \leq p, r \leq \infty$ mit

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} - 1, \tag{9}$$

wobei wir in (9) mit $1/\infty = 0$ rechnen.

Beweis. Der Beweis beruht auf einer geschickten Anwendung der Hölder-Ungleichung und den Sätzen von Fubini und Tonelli und kann bei [Ra] nachgelesen werden. Wir verwenden ähnliche Methoden, um das allgemeinere Theorem 3.3.4 zu beweisen. Theorem 3.2.1 folgt dann als Spezialfall aus Theorem 3.3.4 mit $s = t$ und $a = b = \infty$. Die Bedeutung der Konstanten M kann im Beweis zu Theorem 3.3.4 rekonstruiert werden. $\square$

Mit Hilfe des Youngschen Lemmas können wir nun die Regularität der BMK-Operatoren untersuchen.

Lemma 3.2.2. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann definiert $\mathbf{B}_q^D$ einen beschränkten linearen Operator*

$$L^p_{0,q+1}(D) \to L^r_{0,q}(D)$$

für alle $1 \leq p, r \leq \infty$ mit

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{2n-1}{2n} - 1,$$

also insbesondere für $r = p$.

Beweis. Nach Definition 3.1.1 ist der BMK-Kern $B_{nq}(\cdot, z) \in L^s(D)$ für alle

$$1 \leq s < \frac{2n}{2n-1},$$

und $\|B_{nq}(\cdot, z)\|_{L^s(D)}$ ist gleichmäßig beschränkt in z.
Gleiches gilt in ζ, so dass Theorem 3.2.1 anwendbar ist für

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{2n-1}{2n} - 1,$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

Analog wollen wir nun den Operator für das Randintegral $\mathbf{B}_q^{bD}$ untersuchen. Hierfür müssen wir etwas mehr Arbeit investieren, da

$$\|B_{nq}(\cdot, z)\|_{L^s(bD)}$$

nicht unabhängig von z beschränkt ist, und wir somit Theorem 3.2.1 nicht anwenden können.

3.3 L^p-Regularität des BMK-Randoperators $\mathbf{B}_q^{bD}$

Wir untersuchen im folgenden immer ein beschränktes Gebiet $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ mit differenzierbarem Rand $bD \in C^1$ und bezeichnen für $z \in D$ mit

$$\delta(z) := \text{dist}(z, bD)$$

den Abstand von z zum Rand.

Um für den Integraloperator $\mathbf{B}_q^{bD}$ eine analoge Aussage zum Youngschen Theorem 3.2.1 treffen zu können, schätzen wir das Randintegral zunächst in Abhängigkeit von $\delta(z)$ ab:

Lemma 3.3.1. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ mit differenzierbarem Rand $bD \in C^1$. Dann existieren Konstanten $C_0, C_1 > 0$, die nur vom Gebiet D abhängen, so dass*

$$I(z) := \int_{bD} \frac{dS(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-1}} < C_0 + C_1 \cdot |\log \delta(z)|$$

für alle $z \in D$ gilt.

Beweis. Da der Rand des Gebietes bD differenzierbar ist, kann er gerade gebogen werden: Wir überdecken bD mit N Bällen

$$A_j := B_{r_j}(z_j) \ , \ z_j \in bD \ , \ j = 1, ..., N$$

so dass die inneren Bälle

$$B_j := B_{r_j/2}(z_j)$$

noch ganz bD überdecken, wobei wir $r_j < 1$ für $j = 1, ..., N$ annehmen können. Weiterhin können wir annehmen, dass Diffeomorphismen Ψ_j existieren mit:

$$\begin{aligned}
\Psi_j(B_{2r_j}(z_j)) &= B_2(0) \subset \mathbb{C}^n, \\
\Psi_j(A_j) &= B_1(0) \subset \mathbb{C}^n, \\
\Psi_j(A_j \cap bD) &= B_1(0) \cap \{x_1 = 0\}, \\
\Psi_j(A_j \cap D) &= B_1(0) \cap \{x_1 > 0\},
\end{aligned}$$

wobei wir den $\mathbb{C}^n$ mit den Koordinaten $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, ..., n$ versehen haben. Für die (endlich vielen) Ψ_j existiert eine Konstante $K > 1$ mit

$$K^{-1} \leq \| \det \text{Jac}\Psi_j^{-1} \|_{\infty, B_1(0)} \leq K.$$

Für $\zeta, z \in B_j$ sei $\gamma : [0,1] \to B_j,\ t \mapsto t\zeta + (1-t)z$. Damit verbindet der Weg $\Psi_j \circ \gamma$ der Länge $L(\Psi_j \circ \gamma)$ die Punkte $\Psi_j(\zeta)$ und $\Psi_j(z)$ und es folgt:

$$\|\Psi_j(\zeta) - \Psi_j(z)\| \leq L(\Psi_j \circ \gamma) \leq \int_0^1 \|(\Psi_j \circ \gamma)'(t)\| dt \leq K\|\zeta - z\|.$$

Sei

$$U_\epsilon = \{z \in D : \operatorname{dist}(z, bD) < \epsilon\}.$$

Dann existiert $\epsilon_0 > 0$ mit $U_{\epsilon_0} \subset \bigcup_{j=1}^N B_j$.
Sei

$$D_0 := D \setminus U_{\epsilon_0} \quad \text{und} \quad bD_j := bD \setminus A_j.$$

Es existieren Konstanten $M_0, M_j > 0$ für $j = 1, ..., N$ mit

$$\begin{aligned} I(z) &\leq M_0 \text{ für alle } z \in D_0, \\ \int_{bD_j} \frac{dS(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-1}} &\leq M_j \text{ für alle } z \in B_j. \end{aligned}$$

Sei $M = \max_j\{M_0, M_j\}$. Für $z \in B_j$ bleibt

$$I_j(z) := \int_{bD \cap A_j} \frac{dS(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-1}} \leq K^{2n} \int_{B_1(0)\cap\{x_1=0\}} \frac{dS(\xi)}{\|\xi - \Psi_j(z)\|^{2n-1}}$$

abzuschätzen. Hier können wir $\Psi_j(z) \in \{y_1 = z_2 = ... = z_n = 0\}$ annehmen, wenn wir das Integrationsgebiet zu $B_2(0) \cap \{x_1 = 0\}$ erweitern.
Wir setzen $t_j(z) := x_1(\Psi_j(z))$ und notieren vereinfacht t_j. Dabei verbindet der Weg $\Psi_j^{-1}([0, t_j])$ der Länge $L \leq K t_j$ den Punkt z mit dem Rand bD, so dass

$$t_j \geq \delta(z)/K > 0$$

gilt. Mit Pythagoras und Integration in Polarkoordinaten folgt:

$$\begin{aligned} I_j(z) &\leq K^{2n} \int_{B_2(0)\cap\{x_1=0\}} \frac{dS(\xi)}{\|\xi - t_j\|^{2n-1}} \\ &= K^{2n} \int_{B_2(0)\cap\{x_1=0\}} \frac{dS(\xi)}{(\|\xi\|^2 + t_j^2)^{n-1/2}} \\ &= K^{2n}(2n-1)2^{2n-1}\omega_{2n-1} \int_0^2 \frac{r^{2n-2}dr}{(r^2 + t_j^2)^{n-1}\sqrt{r^2 + t_j^2}} \\ &\leq K^{2n}(2n-1)2^{2n-1}\omega_{2n-1} \int_0^2 \frac{dr}{\sqrt{r^2 + t_j^2}} \\ &= K' \left[\log(r + \sqrt{r^2 + t_j^2})\right]_0^2 \leq K'(\log 6 - \log t_j) \\ &\leq K'(\log 6 - \log \delta(z)/K) \\ &= K'(\log 6 + \log K - \log \delta(z)), \end{aligned}$$

wobei ω_{2n-1} das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^{2n-1}$ bezeichnet. Mit

$$C_0 = M + K'(\log 6 + \log K) \quad \text{und} \quad C_1 = K'$$

ergibt sich die Behauptung. $\square$

Nun ist weiterhin die Funktion $\log \delta(z)$ in beliebigen Potenzen über D integrierbar, da D beschränkt ist:

Lemma 3.3.2. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ mit differenzierbarem Rand $bD \in C^1$. Dann gilt: Für festes $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ ist*

$$I_k := \int_D |\log \delta(z)|^k dV(z) < \infty.$$

Beweis. Wir verwenden wieder das Verfahren aus dem Beweis von Lemma 3.3.1. Diesmal wählen wir für die B_i Gebiete, so dass $B_i \cap D$ diffeomorph zum Einheitswürfel

$$W := \{0 < x_1, y_1, ..., x_n, y_n < 1\}$$

in $\mathbb{C}^n$ sind, wobei der Rand bD wieder auf $\{x_1 = 0\}$ abgebildet wird.
Die Aussage folgt dann aus:

$$\begin{aligned}
\int_W |\log x_1|^k dV(z) &= \int_0^1 |\log x_1|^k dx_1 = \pm \int_0^1 \log^k t \; dt \\
&= \pm \left[t \log^k t\right]_0^1 \mp k \int_0^1 \log^{k-1} t \; dt \\
&= \pm \left[t \log^k t - kt \log^{k-1} t + ... \pm k!t\right]_0^1 = k! < \infty
\end{aligned}$$

□

Es folgt:

Lemma 3.3.3. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ mit differenzierbarem Rand $bD \in C^1$. Dann gilt: Für festes $s \geq 0$ ist*

$$I_s := \int_D |\log \delta(z)|^s dV(z) < \infty.$$

Beweis. Wir unterteilen D in zwei Integrationsgebiete:

$$\begin{aligned}
D_0 &:= \{z \in D : |\log \delta(z)| < 1\}, \\
D_1 &:= \{z \in D : |\log \delta(z)| \geq 1\}.
\end{aligned}$$

Der Beweis folgt direkt aus Lemma 3.3.2: Sei k eine ganze Zahl mit $s \leq k$. Für $|\log \delta(z)| \geq 1$ ist dann

$$|\log \delta(z)|^s \leq |\log \delta(z)|^k,$$

also

$$\begin{aligned}
I_s &= \int_{D_0} |\log \delta(z)|^s dV(z) + \int_{D_1} |\log \delta(z)|^s dV(z) \\
&\leq \int_{D_0} dV(z) + \int_D |\log \delta(z)|^k dV(z) \\
&\leq Vol(D) + I_k.
\end{aligned}$$

□

Analog zu Theorem 3.2.1 gilt das Youngsche Theorem:

Theorem 3.3.4. *Es seien $1 \leq t \leq s < \infty$ und $1 \leq a, b \leq \infty$ fest gewählt, (X, μ) und (Y, ν) Maßräume mit $\mu(X) < \infty$ und $\nu(Y) < \infty$, und K eine $\mu \times \nu$-messbare Funktion auf $X \times Y$ mit*

$$\int_X |K(x,y)|^t d\mu(x) \leq g(y) \quad \text{für fast alle } y \in Y, \tag{10}$$

$$\int_Y |K(x,y)|^s d\nu(y) \leq h(x) \quad \text{für fast alle } x \in X, \tag{11}$$

wobei $g \in L^a(Y)$ und $h \in L^b(X)$ sei. Dann gilt:
I. Der ν-fast überall definierte lineare Operator $f \mapsto \mathbf{T}f$ gegeben durch

$$\mathbf{T}f(y) = \int_X K(x,y) f(x) d\mu(x)$$

ist beschränkt von $L^p(X)$ nach $L^r(Y)$ für alle $1 \leq p, r \leq \infty$ mit

$$p \geq \begin{cases} \frac{t}{t-1} & , \text{ falls } \quad t > 1, \\ \infty & , \text{ falls } \quad t = 1, \end{cases} \tag{12}$$

und

$$r \leq at.$$

II. Der Operator $f \mapsto \mathbf{T}f$ ist beschränkt von $L^p(X)$ nach $L^1(Y)$ für $1 \leq p < \infty$ mit

$$p \geq \begin{cases} \frac{sb}{sb-1} & , \text{ falls } \quad 1 < sb < \infty, \\ 1 & , \text{ falls } \quad b = \infty. \end{cases} \tag{13}$$

III. Gilt (13) und ist $sb \neq t$, so ist $f \mapsto \mathbf{T}f$ beschränkt von $L^p(X)$ nach $L^r(Y)$ für alle $1 \leq r \leq \infty$ mit

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{sb}{sb - t}\right)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{t} - 1\right) \tag{14}$$

und

$$r \leq t\left(a\frac{s-t}{s} + 1\right). \tag{15}$$

Dabei vereinbaren wir folgende Konventionen:
In (14) rechnen wir mit $1/r = 0$ für $r = \infty$.
Ist $b = \infty$, so liest sich (14) als

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{t} - 1.$$

Ist $a = \infty$, so wird (15) zu

$$r \leq \infty.$$

Beweis. I. Es sei p gemäß (12) gewählt und $f \in L^p(X)$. Wir verwenden die Hölder-Ungleichung mit den Exponenten

$$\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1.$$

Für $p = \infty$ sei $(p-1)/p = 1$. Dies liefert:

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}f(y)| &\leq \int_X |K(x,y)||f(x)|\, d\mu(x) \\ &\leq \|f\|_{L^p(X)} \left(\int_X |K(x,y)|^{\frac{p}{p-1}} d\mu(x) \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

für alle $y \in Y$. Für $t \neq 1$ ist

$$p \geq \frac{t}{t-1},$$

also auch

$$\frac{p}{p-1} \leq t,$$

und die Jensensche Ungleichung (vgl. [Alt], Ü 2.9) liefert im Fall $t \neq 1$ unter Beachtung der Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ weiter:

$$\begin{aligned} &\lesssim \|f\|_{L^p(X)} \left(\int_X |K(x,y)|^t d\mu(x) \right)^{\frac{p}{p-1} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{p-1}{p}} \\ &\leq \|f\|_{L^p(X)} g^{1/t}(y) \end{aligned}$$

für fast alle $y \in Y$. Im Fall $t = 1$ ist

$$\frac{p}{p-1} = 1 = t,$$

und es gilt ebenfalls

$$|\mathbf{T}f(y)| \lesssim \|f\|_{L^p(X)} g^{1/t}(y)$$

für fast alle $y \in Y$. Wegen $g \in L^a(Y)$ folgt:

$$\|\mathbf{T}f\|_{L^r(Y)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)} \|g\|_{L^a(Y)}$$

für alle r mit $r/t \leq a$, und das war zu zeigen.

Wir werden die Jensensche Ungleichung im weiteren ungenannt in ähnliche Abschätzungen einfließen lassen.

II. Wir betrachten ab sofort (und im Rest des Beweises) die Situation $p < \infty$, wobei p die Bedingung (13) erfülle.

Sei $f \in L^p(X)$ und weiterhin $1 \leq q < \infty$ mit

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{sb} = 1.$$

Wegen (13) ist dann $q \leq p$ und mit den Sätzen von Fubini und Tonelli und der Hölder-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned}
\int_Y |\mathbf{T}f(y)| d\nu(y) &\leq \int_Y \int_X |K(x,y)||f(x)| d\mu(x) d\nu(y) \\
&= \int_X |f(x)| \int_Y |K(x,y)| d\nu(y) d\mu(x) \\
&\lesssim \int_X |f(x)| h(x)^{1/s} d\mu(x) \\
&\leq \|f\|_{L^q(X)} \begin{cases} \left(\int_X (h(x)^{1/s})^{sb} d\mu(x)\right)^{1/sb} & \text{, falls } b < \infty \\ \|h\|_{L^\infty(X)}^{1/s} & \text{, falls } b = \infty \end{cases} \\
&= \|h\|_{L^b(X)}^{1/s} \|f\|_{L^q(X)} \\
&\leq \|h\|_{L^b(X)}^{1/s} \mu(X)^{1/q-1/p} \|f\|_{L^p(X)}.
\end{aligned}$$

Damit ist die zweite Behauptung gezeigt, also $f \mapsto \mathbf{T}f$ stetig von $L^p(X)$ nach $L^1(Y)$ für p groß genug.

III. Sei nun weiterhin $sb \neq t$ und r so gewählt, dass (14) und (15) gelten.
Wir unterscheiden die drei Fälle $r = \infty$, $t < r < \infty$ und $1 \leq r \leq t$.

a) Sei zunächst $r = \infty$. Damit kann (15) nur für

$$a = \infty$$

gelten. Wegen (14) ist weiterhin

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{t} - 1 = 0,$$

so dass mit der Hölder-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{T}f(y)| &\leq \|f\|_{L^p(X)} \|K(\cdot, y)\|_{L^t(X)} \\
&\leq \|f\|_{L^p(X)}\, g(y) \leq \|f\|_{L^p(X)} \|g\|_{L^\infty(Y)}
\end{aligned}$$

für fast alle $y \in Y$, und das war zu zeigen.

b) Sei nun $t < r < \infty$.
Wir wählen eine Konstante

$$\alpha := \begin{cases} p(1 - t/sb) = p\frac{sb-t}{sb} & \text{, falls } b < \infty, \\ p & \text{, falls } b = \infty. \end{cases} \tag{16}$$

Damit gilt

$$\frac{\alpha}{rp} = \frac{p}{p} \cdot \frac{sb-t}{sb} \cdot \frac{sb}{sb-t} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{t} - 1 \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{t} - 1$$

und

$$\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{rp} = 1 - \frac{1}{t}. \tag{17}$$

Wegen $t \geq 1$ folgt auch:

$$\alpha < r.$$

Wir verwenden die Zerlegung

$$Kf = \left(K^t f^\alpha\right)^{1/r} \left(K^t\right)^{1/t-1/r} \left(f^p\right)^{1/p-\alpha/rp}$$

und wollen die Hölder-Ungleichung mit den drei Exponenten

$$\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{rp} \right) = 1 \tag{18}$$

anwenden, wobei wir (17) für die Summation in (18) beachten.

Dazu klären wir zunächst die Voraussetzungen. Wegen $t \leq s$, (11) und (16) gilt mit den Sätzen von Fubini und Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_Y \int_X |K(x,y)|^t |f(x)|^\alpha d\mu(x) d\nu(y) &= \int_X |f(x)|^\alpha \left(\int_Y |K(x,y)|^t d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &\lesssim \int_X |f(x)|^\alpha h^{t/s}(x) d\mu(x) \\ &\leq \left(\int_X |f(x)|^{\alpha \frac{sb}{sb-t}} d\mu(x) \right)^{1-t/sb} \|h\|_{L^b(X)}^{t/s} \\ &= \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1-t/sb} \|h\|_{L^b(X)}^{t/s} \\ &= \|f\|_{L^p(X)}^{p-pt/sb} \|h\|_{L^b(X)}^{t/s} < \infty. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\left(K(\cdot,y)^t f^\alpha(\cdot)\right)^{1/r} \in L^r(X)$$

für fast alle $y \in Y$.

Weiterhin gilt nach (10):

$$K(\cdot, y)^{t(1/t-1/r)} = K(\cdot, y)^{t\frac{r-t}{tr}} \in L^{\frac{tr}{r-t}}(X)$$

für fast alle $y \in Y$, und nach Voraussetzung an f ist

$$f^{p(1/p-\alpha/rp)} = f^{p\frac{r-\alpha}{rp}} \in L^{\frac{rp}{r-\alpha}}(X).$$

Nun liefert die Hölder-Ungleichung mit den drei Exponenten aus (18):

$$\begin{aligned}
& \int_Y |\mathbf{T}f(y)|^r d\nu(y) \\
= \quad & \int_Y \left| \int_X \left(K^t(x,y) f^\alpha(x)\right)^{1/r} \left(K^t(x,y)\right)^{1/t-1/r} \left(f^p(x)\right)^{1/p-\alpha/rp} d\mu(x) \right|^r d\nu(y) \\
\leq \quad & \int_Y \left(\int_X |K(x,y)|^t |f(x)|^\alpha d\mu(x) \right) \\
& \left(\int_X |K(x,y)|^t d\mu(x) \right)^{r/t-1} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{r/p-\alpha/p} d\nu(y)
\end{aligned}$$

Mit (10) und dem Satz von Fubini, dessen Anwendung sich erst im Nachhinein als berechtigt herausstellen wird, folgt weiter:

$$\begin{aligned}
= \quad & \|f\|_{L^p(X)}^{r-\alpha} \int_Y \int_X |K(x,y)|^t |f(x)|^\alpha g(y)^{r/t-1} d\mu(x) d\nu(y) \\
= \quad & \|f\|_{L^p(X)}^{r-\alpha} \int_X |f(x)|^\alpha \int_Y |K(x,y)|^t g(y)^{r/t-1} d\nu(y) d\mu(x).
\end{aligned}$$

Sei nun zunächst $s = t$. Damit gilt nach Voraussetzung (15):

$$r \leq t \quad \text{oder} \quad a = \infty.$$

Da wir gerade den Fall $r > t$ behandeln, ist für $s = t$ also $a = \infty$. Mit (11) folgt dann weiter:

$$\begin{aligned}
\leq \quad & \|f\|_{L^p(X)}^{r-\alpha} \int_X |f(x)|^\alpha \left(\int_Y |K(x,y)|^s d\nu(y) \right) d\mu(x) \|g\|_{L^\infty(Y)}^{r/t-1} \\
\lesssim \quad & \|f\|_{L^p(X)}^{r-\alpha} \int_X |f(x)|^\alpha h(x) d\mu(x),
\end{aligned}$$

im Fall $s = t$.

Für $t < s$ verwenden wir die Hölder-Ungleichung mit den beiden Exponenten

$$c = \frac{s}{t} \quad \text{und} \quad d = \frac{s}{s-t}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_Y |\mathbf{T}f(y)|^r \, d\nu(y) \\
\lesssim \; & \|f\|_{L^p(X)}^{r-\alpha} \int_X |f(x)|^\alpha \left(\int_Y |K(x,y)|^s d\nu(y) \right)^{t/s} \left(\int_Y g(y)^{(\frac{r}{t}-1)d} d\nu(y) \right)^{1/d} d\mu(x) \\
\leq \; & \|f\|_{L^p(X)}^{r-\alpha} \int_X |f(x)|^\alpha h^{t/s}(x) \left(\int_Y g(y)^{(\frac{r}{t}-1)d} d\nu(y) \right)^{1/d} d\mu(x)
\end{aligned}$$

Nun ist nach (15) aber

$$\left(\frac{r}{t} - 1 \right) d = \left(\frac{r}{t} - 1 \right) \frac{s}{s-t} \leq a.$$

Also folgt weiter:

$$\lesssim \; \|f\|_{L^p(X)}^{r-\alpha} \int_X |f(x)|^\alpha h(x)^{t/s} d\mu(x).$$

Wir fassen das bisher Erreichte zusammen:

In Fall III.b), also für $t < r < \infty$, ist

$$\int_Y |\mathbf{T}f(y)|^r \, d\nu(y) \lesssim \|f\|_{L^p(X)}^{r-\alpha} \int_X |f(x)|^\alpha h(x)^{t/s} d\mu(x).$$

Nun verwenden wir die Hölder-Ungleichung mit den Exponenten

$$\frac{sb-t}{sb} + \frac{t}{sb} = 1.$$

Unter Beachtung von

$$\alpha \cdot \frac{sb}{sb-t} = p \quad \text{und} \quad \frac{t}{s} \cdot \frac{bs}{t} = b$$

sowie $h \in L^b(X)$ gilt also:

$$\begin{aligned}
\int_Y |\mathbf{T}f(y)|^r \, d\nu(y) \; &\lesssim \; \|f\|_{L^p(X)}^{r-\alpha} \int_X |f(x)|^\alpha h(x)^{t/s} d\mu(x) \\
&\lesssim \; \|f\|_{L^p(X)}^{r-\alpha} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1-t/sb} \\
&= \; \|f\|_{L^p(X)}^{r-\alpha} \|f\|_{L^p(X)}^{\alpha} = \|f\|_{L^p(X)}^{r},
\end{aligned}$$

und das war zu zeigen, wobei die letzte Betrachtung auch für $b = \infty$ und $\alpha = p$ richtig bleibt.

c) Wir betrachten nun den Fall $1 \le r \le t$. Hier wählen wir die Konstante

$$\beta = pr\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{p} - 1\right).$$

Wegen $r \le t$ und (14) ist

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{p} - 1\right) \ge \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{p} - 1\right) \ge 0,$$

also auch

$$\beta \ge 0.$$

Weiterhin gilt

$$\frac{\beta}{p} = 1 + r\left(\frac{1}{p} - 1\right) \le 1,$$

also

$$\beta \le p$$

und

$$\beta = p \quad \text{genau für} \quad p = 1. \tag{19}$$

Außerdem ist

$$\frac{1}{p} - \frac{\beta}{pr} = 1 - \frac{1}{r} \ge 0$$

und daher auch

$$\beta \le r.$$

Hier verwenden wir die Zerlegung

$$Kf = \left(K^r f^\beta\right)^{1/r} \left(f^p\right)^{1/p - \beta/pr}$$

und die Hölder-Ungleichung mit den Exponenten

$$\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{p} - \frac{\beta}{pr}\right) = 1.$$

Damit gilt unter Verwendung der Sätze von Fubini und Tonelli, sowie der Hölder- und der Jensenschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\int_Y |\mathbf{T}f|^r \, d\nu(y) &= \int_Y \left| \int_X \left(K^r(x,y) f^\beta(x)\right)^{1/r} \left(f^p(x)\right)^{1/p - \beta/pr} d\mu(x) \right|^r d\nu(y) \\
&\le \int_Y \left(\int_X |K(x,y)|^r |f(x)|^\beta d\mu(x) \right) \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{r/p - \beta/p} d\nu(y) \\
&= \|f\|_{L^p(X)}^{r-\beta} \int_X |f(x)|^\beta \int_Y |K(x,y)|^r d\nu(y) d\mu(x) \\
&\lesssim \|f\|_{L^p(X)}^{r-\beta} \int_X |f(x)|^\beta h^{r/s}(x) d\mu(x).
\end{aligned}$$

Sei nun zunächst $\beta = p$. Nach (19) gilt dann $\beta = p = 1$. Das ist nach (13) aber nur im Fall $b = \infty$ möglich. Es folgt also:

$$\begin{aligned} &\leq \|f\|_{L^p(X)}^{r-p} \|h\|_{L^\infty(X)}^{r/s} \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \\ &= \|f\|_{L^p(X)}^{r} \|h\|_{L^\infty(X)}^{r/s}. \end{aligned}$$

Ist $\beta < p$, so verwenden wir die Hölder-Ungleichung mit den Exponenten

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \frac{\beta}{p} + \frac{p-\beta}{p} = 1.$$

Nach der Definition von β ist

$$\frac{1}{\delta} = 1 - \frac{\beta}{p} = 1 - 1 - \frac{r}{p} + r = r - \frac{r}{p} = r\left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{20}$$

und wegen (13) gilt:

$$p \geq \frac{sb}{sb-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{p-1} \leq sb. \tag{21}$$

Aus (20) und (21) ergibt sich:

$$\delta \cdot \frac{r}{s} = \left(\frac{p}{p-1}\right)\frac{1}{r} \cdot \frac{r}{s} = \left(\frac{p}{p-1}\right)\frac{1}{s} \leq sb\frac{1}{s} = b.$$

Wir nehmen die Abschätzung an der Stelle

$$\int_Y |\mathbf{T}f|^r \, d\nu(y) \lesssim \|f\|_{L^p(X)}^{r-\beta} \int_X |f(x)|^\beta h^{r/s}(x) d\mu(x)$$

wieder auf. Nun liefert die Hölder-Ungleichung mit den Exponenten γ und δ weiter:

$$\begin{aligned} &\leq \|f\|_{L^p(X)}^{r-\beta} \left(\int_X |f(x)|^{\beta\gamma} d\mu(x)\right)^{1/\gamma} \left(\int_X |h(x)|^{\delta\cdot\frac{r}{s}} d\mu(x)\right)^{1/\delta} \\ &= \|f\|_{L^p(X)}^{r-\beta} \left(\int_X |f(x)|^{p} d\mu(x)\right)^{\beta/p} \left(\int_X |h(x)|^{b} d\mu(x)\right)^{1/\delta} \\ &= \|f\|_{L^p(X)}^{r-\beta} \|f\|_{L^p(X)}^{\beta} \|h\|_{L^b(X)}^{b/\delta} \\ &\lesssim \|f\|_{L^p(X)}^{r}, \end{aligned}$$

und damit ist auch der Beweis von Teil III abgeschlossen. □

Wir folgern die Regularität des Randoperators:

Lemma 3.3.5. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet mit differenzierbarem Rand $bD \in C^1$. Dann definiert $\mathbf{B}_q^{bD}$ einen beschränkten linearen Operator*

$$L_q^p(bD) \to L_{0,q}^p(D)$$

für alle $1 \leq p < \infty$.

Beweis. Wir wollen Theorem 3.3.4 auf den Operator $\mathbf{B}_q^{bD}$ anwenden.
Es ist also $X = bD$, $Y = D$ und

$$|K(x,y)| = |B_{nq}(x,y)| \leq \frac{A}{|x-y|^{2n-1}},$$

mit einer Konstanten $A > 0$, die nur von D, q und n abhängt.

Es sei $t = 1$. Wegen Lemma 3.3.1 ist

$$\int_X |K(x,y)|^t d\mu(x) \leq C_0 + C_1 |\log \delta(y)| =: g(y).$$

Nach Lemma 3.3.3 ist $g \in L^a(Y)$ für alle $1 \leq a < \infty$.

Sei weiterhin $s > 1$ mit

$$1 = t < s < \frac{2n}{2n-1}$$

fest gewählt. Damit ist

$$h(x) := \int_Y |K(x,y)|^s d\nu(y)$$

unabhängig von x gleichmäßig beschränkt, also $h \in L^\infty(X)$.

Die Voraussetzungen von Theorem 3.3.4 sind also erfüllt für $X = bD$, $Y = D$, $\mathbf{T} = \mathbf{B}_q^{bD}$, $1 = t < s$, $h \in L^\infty(X)$, dass heißt $b = \infty$, und $g \in L^a(Y)$ für alle $1 \leq a < \infty$.

Damit liefert $\mathbf{B}_q^{bD}$ also einen beschränkten linearen Operator von $L_q^p(bD)$ nach $L_{0,q}^r(D)$ für alle $1 \leq p, r < \infty$ mit

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{t} - 1 = \frac{1}{p},$$

und das war zu zeigen. $\square$

3.4 Randwerte von L^p-Formen

Wir wollen die Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel auf L^p-Formen übertragen. Dies ist nur möglich für Formen mit schwachen $\overline{\partial}$-Ableitungen und Randwerten. Als solche wollen wir nur integrierbare Formen zulassen und auf allgemeinere Konzepte (wie z. B. Ströme) verzichten. Daher setzen wir:

Definition 3.4.1. *Für ein Gebiet $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ und $f \in L^1_{0,q}(D)$ ist $f \in Dom(\overline{\partial})$, falls eine Differentialform $g \in L^1_{(0,q+1),loc}(D)$ existiert mit*

$$\int_D f \wedge \overline{\partial}\varphi = (-1)^{q+1} \int_D g \wedge \varphi$$

für alle glatten $(n, n-q-1)$-Formen mit kompaktem Träger in D: $\varphi \in C^\infty_{(n,n-q-1),c}(D)$. In diesem Fall heißt g die $\overline{\partial}$-Ableitung von f und wir bezeichnen g mit $\overline{\partial} f$.

Als L^p-Randwert von $f \in L^1_{0,q}(D) \cap Dom(\overline{\partial})$ bezeichnen wir nun eine Differentialform $f_b \in L^p_q(bD)$, für die folgende Stokessche Formel erfüllt ist:

Definition 3.4.2. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit differenzierbarem Rand $bD \in C^1$. Sei weiterhin $f \in L^1_{0,q}(D)$ mit $\overline{\partial} f \in L^1_{0,q+1}(D)$.*
Dann heißt eine Differentialform $f_b \in L^p_q(bD)$ L^p-Randwert von f, falls

$$\int_{bD} f_b \wedge \iota^*(\varphi) = \int_D \overline{\partial} f \wedge \varphi + (-1)^q \int_D f \wedge \overline{\partial}\varphi \tag{22}$$

für alle $\varphi \in C^\infty_{n,n-q-1}(\overline{D})$ gilt.
Dabei bezeichnet $\iota : bD \to \mathbb{C}^n$ die Einbettungsabbildung.

Tatsächlich hängt die rechte Seite in (22) nur von der Zurückziehung $\iota^*(\varphi)$ von φ auf bD ab und definiert daher einen Strom auf bD. Allgemein bezeichnet man diesen Strom als Randwert von f, und f besitzt Randwerte in L^p, falls dieser Strom durch eine Differentialform mit Koeffizienten in L^p dargestellt werden kann. Weiteres zu diesem Thema findet sich in [He2]. Randwerte nach Definition 3.4.2 sind nicht unbedingt eindeutig bestimmt (vgl. dazu Lemma 3.4.5).

Integralformeln, die auf dem Satz von Stokes beruhen, können nun für solche Formen gezeigt werden. So könnten wir die Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel mit Hilfe von (22) neu herleiten. Diesen Weg wollen wir aber nicht einschlagen, sondern direkt das Ergebnis verallgemeinern. Dazu bemerken wir:

Lemma 3.4.3. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit differenzierbarem Rand $bD \in C^1$, $f \in L^p_{0,q}(D)$ und $\overline{\partial} f \in L^p_{0,q+1}(D)$ für $1 \leq p < \infty$.*
Dann existiert eine Folge von glatten Differentialformen $f_\epsilon \in C^\infty_{(0,q),cpt}(\mathbb{C}^n)$ mit kompaktem Träger, so dass

$$\begin{aligned} f_\epsilon &\to f \text{ in } L^p_{0,q}(D), \\ \overline{\partial} f_\epsilon &\to \overline{\partial} f \text{ in } L^p_{0,q+1}(D) \end{aligned}$$

für $\epsilon \to 0$.

Beweis. Der Beweis wird geführt mit Hilfe von Approximation durch Faltung mit einer geschickt gewählten Dirac-Folge und verläuft völlig analog zum Beweis von Lemma A 6.7 aus [Alt]. Es sind lediglich die richtigen partiellen Ableitungen zu betrachten. Wir führen den Beweis in Theorem 3.4.4. □

Mit Hilfe dieser approximierenden Folge bringen wir die Definition von L^p-Randwerten in eine äquivalente Form, die es uns ermöglicht, Integralformeln direkt zu verallgemeinern:

Theorem 3.4.4. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit differenzierbarem Rand $bD \in C^1$ und $\iota : bD \to \mathbb{C}^n$ die Einbettungsabbildung.*
Sei weiterhin $f \in L^p_{0,q}(D)$ mit $\overline{\partial} f \in L^p_{0,q+1}(D)$ (für $1 \leq p < \infty$) und $1 \leq r \leq \infty$. Dann verfügt f über L^r-Randwerte $f_b \in L^r_q(bD)$ gemäß Definition 3.4.2 genau dann, wenn die für die Folge f_ϵ aus Lemma 3.4.3 folgendes gilt:

$$\iota^*\big(f_\epsilon \wedge \varphi\big) \to f_b \wedge \iota^*(\varphi) \quad \textit{in } L^1_{2n-1}(bD)$$

für alle $\varphi \in C^\infty_{n,n-q-1}(\overline{D})$.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, die Folge $\iota^*(f_\epsilon \wedge \varphi)$ konvergiere in $L^1_{2n-1}(bD)$ gegen $f_b \wedge \iota^*(\varphi)$ für alle $\varphi \in C^\infty_{n,n-q-1}(\overline{D})$.

Für die f_ϵ gilt nach dem Satz von Stokes:

$$\int_{bD} \iota^*(f_\epsilon \wedge \varphi) = \int_D \overline{\partial} f_\epsilon \wedge \varphi + (-1)^q \int_D f_\epsilon \wedge \overline{\partial}\varphi \tag{23}$$

für alle $\varphi \in C^\infty_{n,n-q-1}(\overline{D})$. Nun konvergieren

$$\begin{array}{rcl} f_\epsilon & \to & f \\ \overline{\partial} f_\epsilon & \to & \overline{\partial} f \end{array}$$

in L^1, da D beschränkt ist. Wegen φ, $\overline{\partial}\varphi \in L^\infty$ folgt aus (23) mit der Hölder-Ungleichung und der Voraussetzung:

$$\int_{bD} f_b \wedge \iota^*(\varphi) = \int_D \overline{\partial} f \wedge \varphi + (-1)^q \int_D f \wedge \overline{\partial}\varphi$$

für alle $\varphi \in C^\infty_{n,n-q-1}(\overline{D})$, das heißt f besitzt die Randwerte $f_b \in L^r_q(bD)$ gemäß Definition 3.4.2.

Nehmen wir nun umgekehrt an, f besitze die Randwerte $f_b \in L^r_q(bD)$ gemäß Definition 3.4.2, das heißt, es gelte

$$\int_{bD} f_b \wedge \iota^*(\varphi) = \int_D \overline{\partial} f \wedge \varphi + (-1)^q \int_D f \wedge \overline{\partial}\varphi$$

für alle $\varphi \in C^\infty_{n,n-q-1}(\overline{D})$.

Ziel ist die Konstruktion einer Folge von Formen $f_\epsilon \in C^\infty_{0,q}(\mathbb{C}^n)$ mit

$$\begin{aligned} f_\epsilon &\to f \quad \text{in } L^p_{0,q}(D), \\ \overline{\partial} f_\epsilon &\to \overline{\partial} f \quad \text{in } L^p_{0,q+1}(D), \\ \iota^*(f_\epsilon \wedge \varphi) &\to f_b \wedge \iota^*(\varphi) \quad \text{in } L^1_{2n-1}(bD). \end{aligned}$$

Unter Verwendung einer passend gewählten Zerlegung der Eins können wir uns auf die folgenden beiden Fälle beschränken:

1. $\operatorname{supp} f \subset\subset D$ und $f_b \equiv 0$.

2. $\operatorname{supp} f \subset\subset U \cap \overline{D}$ und $\operatorname{supp} f_b \subset\subset U \cap bD$, wobei es sich bei U um eine beliebig kleine Umgebung eines Randpunktes $p \in bD$ handelt.

Sei nämlich $\{U_j\}_{j=1}^N$ eine offene Überdeckung einer Umgebung von $\overline{D}$, und $\{\chi_j\}_{j=1}^N$ eine dazugehörige Zerlegung der Eins mit $\chi_j \in C^\infty_{cpt}(U_j)$ und

$$\sum_{j=1}^N \chi_j(z) = 1$$

für alle Punkte z in einer Umgebung von $\overline{D}$, so dass also auch

$$\sum_{j=1}^N \overline{\partial} \chi_j(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \overline{D}$$

gilt. Konvergieren dann

$$\begin{aligned} f^j_\epsilon &\to \chi_j f \quad \text{in } L^p_{0,q}(D \cap U_j), \\ \overline{\partial} f^j_\epsilon &\to \overline{\partial}\chi_j \wedge f + \chi_j \overline{\partial} f \quad \text{in } L^p_{0,q+1}(D \cap U_j), \\ \iota^*(f^j_\epsilon \wedge \varphi) &\to \iota^*(\chi_j) f_b \wedge \iota^*(\varphi) \quad \text{in } L^1_{2n-1}(bD \cap U_j) \end{aligned}$$

für alle $j = 1, ..., N$, so konvergiert auch

$$\begin{aligned} f_\epsilon := \sum_{j=1}^N f^j_\epsilon &\to \sum_{j=1}^N \chi_j f = f, \\ \overline{\partial} f_\epsilon = \sum_{j=1}^N \overline{\partial} f^j_\epsilon &\to \sum_{j=1}^N \overline{\partial}\chi_j \wedge f + \sum_{j=1}^N \chi_j \overline{\partial} f = 0 + \overline{\partial} f, \\ \iota^*(f_\epsilon \wedge \varphi) = \sum_{j=1}^N \iota^*(f^j_\epsilon \wedge \varphi) &\to \sum_{j=1}^N \iota^*(\chi_j) f_b \wedge \iota^*(\varphi) = f_b \wedge \iota^*(\varphi) \end{aligned}$$

in den passenden Funktionenräumen.

1. Sei $\operatorname{supp} f \subset\subset D$ und $f_b \equiv 0$.

Wir können f und $\overline{\partial} f$ mit 0 nach ganz $\mathbb{C}^n$ fortsetzen.

Wir konstruieren die Folge $f_\epsilon \in C^\infty_{0,q}(\mathbb{C}^n)$ durch Faltung mit einer glatten Dirac-Folge. Sei also $\delta_\epsilon \in C^\infty_{cpt}(B_\epsilon(0))$ eine Folge nichtnegativer ($\delta_\epsilon \geq 0$) glatter Funktionen mit kompaktem Träger in $B_\epsilon(0) \subset\subset \mathbb{C}^n$ und

$$\int_{\mathbb{C}^n} \delta_\epsilon(z) dV_{\mathbb{C}^n}(z) = 1$$

für alle $\epsilon > 0$.

Für eine Differentialform φ definieren wir die Faltung

$$\varphi_\epsilon = \delta_\epsilon * \varphi$$

koeffizientenweise. Für

$$\varphi = \sum_{J,K} \varphi^{JK} dz_J \wedge d\overline{z}_K,$$

sei also

$$\varphi_\epsilon = \sum_{J,K} \varphi_\epsilon^{JK} dz_J \wedge d\overline{z}_K$$

mit

$$\varphi_\epsilon^{JK}(z) = \delta_\epsilon * \varphi^{JK}(z) = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi^{JK}(\zeta) \delta_\epsilon(z-\zeta) dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta).$$

Mit δ_ϵ ist dann auch φ_ϵ glatt.

Damit ist die Folge

$$f_\epsilon := \delta_\epsilon * f \;\; \in C^\infty_{0,q}(\mathbb{C}^n)$$

und konvergiert nach den bekannten Eigenschaften der Faltung :

$$f_\epsilon \to f \quad \text{in } L^p_{0,q}(D).$$

Wegen $\operatorname{supp} f \subset\subset D \subset\subset \mathbb{C}^n$ existiert $\epsilon_0 > 0$ mit $\operatorname{supp} f_\epsilon \subset\subset D$ für $\epsilon \leq \epsilon_0$. Ist aber f^{JK} ein Koeffizient mit $\operatorname{supp} f^{JK} \subset\subset D$, so gilt (formal):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \overline{z}_l} f_\epsilon^{JK}(z) &= \int_{\mathbb{C}^n} f^{JK}(\zeta) \frac{\partial}{\partial \overline{z}_l} \delta_\epsilon(z-\zeta) dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta) \\
&= -\int_{\mathbb{C}^n} f^{JK}(\zeta) \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_l} \delta_\epsilon(z-\zeta) dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_l} f^{JK}(\zeta) \delta_\epsilon(z-\zeta) dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta) = \delta_\epsilon * \left(\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_l} f^{JK} \right)(z).
\end{aligned}$$

Also ist
$$\overline{\partial} f_\epsilon = (\overline{\partial} f)_\epsilon = \delta_\epsilon * (\overline{\partial} f)$$
für $\epsilon \leq \epsilon_0$ und es folgt
$$\overline{\partial} f_\epsilon \to \overline{\partial} f \quad \text{in } L^p_{0,q+1}(D).$$
Weiterhin ist $\iota^*(f_\epsilon) \equiv 0$ für $\epsilon \leq \epsilon_0$, und somit konvergiert natürlich auch noch $\iota^*(f_\epsilon)$ gegen $f_b \equiv 0$ in $L^1_q(bD)$, was die Behauptung impliziert.

2. U sei so klein gewählt, dass nach einer biholomorphen Koordiantentransformation (Translation, Drehung, Streckung) folgende Situation angenommen werden kann:

$$\begin{aligned} U &= \{z = (x_1 + iy_1, ..., x_n + iy_n) : |x_j|, |y_j| \leq 1 \text{ für } j = 1, ..., n\}, \\ \widetilde{U} &= \{(z_1, ..., z_{n-1}, x_n) : |x_j| \leq 1 \text{ für } j = 1, ..., n; |y_j| \leq 1 \text{ für } j = 1, ..., n-1\} \end{aligned}$$

und

$$\exists H \in C^1(\widetilde{U}) : \qquad \begin{aligned} |H| \leq 1/2, \quad H(0) = 0, \\ U \cap \overline{D} = \{z \in U : y_n \geq H(z_1, ..., z_{n-1}, x_n)\}, \\ U \cap bD = \{z \in U : y_n = H(z_1, ..., z_{n-1}, x_n)\}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} f &\subset\subset U \cap \overline{D}, \\ \operatorname{supp} f_b &\subset\subset U \cap bD, \end{aligned}$$

und es gilt

$$\int_{bD} f_b \wedge \iota^*(\varphi) = \int_D \overline{\partial} f \wedge \varphi + (-1)^q \int_D f \wedge \overline{\partial} \varphi \tag{24}$$

für alle $\varphi \in C^\infty_{n,n-q-1}(\overline{D})$.

Wir wollen nun f zunächst durch eine geeignete Folge einmal differenzierbarer Formen mit kompaktem Träger in $\mathbb{C}^n$ approximieren. Hier muss die Dirac-Folge, mit der wir falten, sorgfältig gewählt werden. Dazu biegen wir noch den Rand bD gerade. Das muss gesondert betrachtet werden, da eine solche Operation nicht mehr biholomorph durchgeführt werden kann. Sei also

$$\Psi : U \to \mathbb{C}^n, z \mapsto (z_1, ..., z_{n-1}, x_n, y_n - H(z_1, ..., z_{n-1}, x_n))$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{f} &= (\Psi^{-1})^* f, \\ \widetilde{f_b} &= (\Psi^{-1})^* f_b. \end{aligned}$$

Es ist

$$\operatorname{supp} \widetilde{f} \subset\subset \Psi(U \cap \overline{D}),$$
$$\operatorname{supp} \widetilde{f}_b \subset\subset \Psi(U \cap bD).$$

Da $\Psi : U \to \Psi(U)$ diffeomorph ist, reicht es, $\widetilde{f}$ geeignet zu approximieren.

Da wir später die Identität (24) einsetzen wollen, um eine Verbindung zwischen D und bD herzustellen, benötigen wir geeignete $(n, n-q-1)$-Formen auf U. Diese Formen hängen von Ψ bzw. H ab, wobei wir H mittels

$$H(x_1, y_1, ..., x_n, y_n) = H(x_1, y_1, ..., x_n)$$

auch als Funktion auf U auffassen.

Um die Notation zu vereinfachen, verwenden wir auch die Koordinaten

$$t = (t_1, t_2, ..., t_{2n-1}, t_{2n}) = (x_1, y_1, ..., x_n, y_n).$$

Berechnen wir zunächst die Jacobi-Matrix von Ψ:

$$\text{Jac } \Psi \;=\; \begin{pmatrix} Id_{\mathbb{R}^{2n-1}} & 0 \\ -\nabla H & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für die Tangentialabbildung:

$$\begin{aligned} \Psi_* \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial t_j} - \frac{\partial H}{\partial t_j} \cdot \frac{\partial}{\partial t_{2n}}, \quad \text{für } 1 \leq j \leq 2n-1, \\ \Psi_* \left(\frac{\partial}{\partial t_{2n}} \right) &= \frac{\partial}{\partial t_{2n}}. \end{aligned}$$

Für die Zurückziehung Ψ^* folgt:

$$\begin{aligned} \Psi^*(dt_j) &= dt_j, \qquad\qquad \text{für } 1 \leq j \leq 2n-1, \\ \Psi^*(dt_{2n}) &= -\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\partial H}{\partial t_k} dt_k + dt_{2n}. \end{aligned}$$

Sei $\widetilde{g} : \Psi(U) \to \mathbb{C}$ eine noch festzulegende Funktion und $g = \widetilde{g} \circ \Psi$. Dann ist

$$\begin{aligned} \rho &:= \Psi^*\big(dx_1 \wedge ... \wedge dy_{n-1} \wedge (dx_n + \widetilde{g} dy_n)\big) \\ &= dx_1 \wedge ... \wedge dy_{n-1} \wedge \left(dx_n + g\big(- \frac{\partial H}{\partial x_n} dx_n + dy_n \big) \right) \\ &= dx_1 \wedge ... \wedge dy_{n-1} \wedge \left(\big(1 - g\frac{\partial H}{\partial x_n}\big) dx_n + g dy_n \right). \end{aligned}$$

Sei g so gewählt, dass ρ eine $(n, n-1)$-Form ist, nämlich

$$g = 1/\left(\frac{\partial H}{\partial x_n} - i\right),$$

was wohldefiniert ist, da die Funktion H nur reelle Werte annimmt.
Wegen $H \in C^1(U)$ sind g, $\widetilde{g} = g \circ \Psi^{-1}$ und ρ stetig.

Wir setzen noch

$$\begin{aligned} \rho' &:= \big(1 - g\frac{\partial H}{\partial x_n}\big)dx_n + g dy_n \\ &= \psi^* \left(dx_n + \widetilde{g} dy_n\right) \quad \in C^0_{1,0}(U). \end{aligned}$$

Es sei

$$R := \{(x_1, y_1, ..., x_n, y_n) \in \mathbb{C}^n : y_n = 0\}$$

und ι_R die Einbettungsabbildung

$$\iota_R : R = \{y_n = 0\} \hookrightarrow \mathbb{C}^n.$$

Man beachte:

$$\begin{aligned} (\Psi|_{bD}^{-1})^* \iota^* \rho &= \iota_R^* (\Psi^{-1})^* \rho \\ &= \iota_R^* \left(dx_1 \wedge dy_1 \wedge ... \wedge \left(dx_n + \widetilde{g} dy_n\right)\right) \\ &= \iota_R^* \left(dx_1 \wedge dy_1 \wedge ... \wedge dx_n\right). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$((\Psi^{-1})^* \rho) \wedge dy_n = \left(dx_1 \wedge dy_1 \wedge ... \wedge \left(dx_n + \widetilde{g} dy_n\right)\right) \wedge dy_n = dV_{\mathbb{C}^n}(z). \tag{25}$$

Wenden wir uns nun der Konstruktion der richtigen Dirac-Folge zu. Diese Folge muss auch an ρ angepaßt sein. Gleichzeitig ist aber noch das Problem zu überbrücken, dass ρ lediglich stetig ist, und die Identität (24) somit nicht direkt auf ρ angewendet werden kann.

Daher approximieren wir ρ' durch glatte Formen. Sei $\chi \in C^\infty_{cpt}(U)$ eine glatte Abschneidefunktion mit

$$\chi(z) = 1 \quad \text{für alle } z \in \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} f_b.$$

Dann ist die Faltung (δ_τ wie in Teil **1**)

$$\widetilde{\rho}'_\tau := \delta_\tau * (\chi \rho') \in C^\infty_{1,0}(\mathbb{C}^n)$$

eine Folge glatter Formen, die gleichmäßig, d.h. in der Supremumsnorm, gegen $\chi\rho'$ konvergiert (vgl. etwa [Koe], Approximationssatz 8.1.II). Wir setzen:

$$\widetilde{\rho}_\tau := dx_1 \wedge ... \wedge dy_{n-1} \wedge \widetilde{\rho}'_\tau.$$

Es sei

$$C_\rho := 2\|\chi\rho'\|_\infty > 0.$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge kann

$$\|\widetilde{\rho}'_\tau\|_\infty \leq C_\rho \tag{26}$$

für alle $\tau > 0$ angenommen werden.

Sei weiterhin

$$\widetilde{h}_\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

eine Folge nichtpositiver glatter Funktionen mit $\widetilde{h}_\eta(t) = 0$ für $t \geq -1/5\eta$ und $\widetilde{h}_\eta(t) = -1$ für $t \leq -2/5\eta$. Setze

$$\widetilde{h}_\eta(z) = \widetilde{h}_\eta(y_n) \quad \text{und} \quad \check{\widetilde{h}}_\eta(z) = \widetilde{h}_\eta(-z) = \widetilde{h}_\eta(-y_n).$$

Wir wollen nun die verschiedenen Folgen aufeinander abstimmen. Für eine beliebige Differentialform ω bezeichnen wir im folgenden mit $|\omega|$ die Summe der Beträge der Koeffizienten.

Für festes $\epsilon > 0$ ist dann

$$\frac{1}{\epsilon}\left(1 + \Psi^*(\check{\widetilde{h}}_\eta)\right)|f|$$

eine Folge (in η) von L^1-Funktionen, die punktweise gegen 0 konvergiert und $\epsilon^{-1}|f|$ als integrierbare Majorante besitzt. Nach dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz gilt also

$$I_\epsilon(\eta) := \frac{1}{\epsilon}\int_D \left(1 + \Psi^*(\check{\widetilde{h}}_\eta)\right)|f|dV_{\mathbb{C}^n} \to 0$$

für $\eta \to 0$. Wähle $\eta(\epsilon)$, so dass $I_\epsilon(\eta) \leq \epsilon$ für alle $\eta \leq \eta(\epsilon)$, und setze

$$h_\epsilon(z) := \widetilde{h}_{\eta(\epsilon)}(z) = \widetilde{h}_{\eta(\epsilon)}(y_n)\ , \quad \check{h}_\epsilon(z) = h_\epsilon(-z)\ ,$$

wobei wir noch $\eta(\epsilon) \leq \epsilon$ annehmen können. Damit gilt also:

$$\frac{1}{\epsilon}\int_D \left(1 + \Psi^*(\check{h}_\epsilon)\right)|f|dV_{\mathbb{C}^n} \leq \epsilon \tag{27}$$

für alle $\epsilon > 0$. Wir benötigen diese Eigenschaft am Ende dieses Beweises.

Jetzt wählen wir noch aus $\widetilde{\rho}'_\tau$ die richtige Teilfolge. Wähle $\tau(\epsilon) \leq \epsilon$, so dass

$$\|\chi\rho' - \widetilde{\rho}'_{\tau(\epsilon)}\|_\infty \leq \epsilon^{2n} \quad \text{und} \quad \|d\check{h}_\epsilon\|_\infty \|\chi\rho' - \widetilde{\rho}'_{\tau(\epsilon)}\|_\infty \leq \epsilon^{2n}. \tag{28}$$

Wir setzen $\rho'_\epsilon := \widetilde{\rho}'_{\tau(\epsilon)}$ und $\rho_\epsilon := \widetilde{\rho}_{\tau(\epsilon)}$. (26) liefert:

$$\|\rho'_\epsilon\|_\infty \leq C_\rho \tag{29}$$

für alle $\epsilon > 0$.

Sei noch

$$\delta'_\epsilon : \mathbb{R}^{2n-1} \to \mathbb{R}, (x_1, y_1, ..., x_n) \mapsto *$$

eine Folge nichtnegativer glatter Funktionen mit $\operatorname{supp} \delta'_\epsilon \subset\subset B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^{2n-1}$ und

$$\int_{\mathbb{R}^{2n-1}} \delta'_\epsilon(x_1, y_1, ..., x_n) dx_1 \wedge dy_1 \wedge ... \wedge dx_n = 1.$$

Jetzt ist

$$\begin{array}{rcl} \Delta_\epsilon : \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{R}, \\ z & \mapsto & \delta'_\epsilon(x_1, y_1, ..., x_n) \dfrac{\partial h_\epsilon}{\partial y_n}(y_n) \end{array}$$

die gesuchte Dirac-Folge, denn es ist $\Delta_\epsilon \geq 0$,

$$\operatorname{supp} \Delta_\epsilon \subset\subset B_\epsilon(0) \subset \mathbb{C}^n$$

und

$$\int_{\mathbb{C}^n} \Delta_\epsilon dV_{\mathbb{C}^n} = \int_{\mathbb{R}^{2n-1}} \delta'_\epsilon dV_{\mathbb{R}^{2n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h_\epsilon}{\partial y_n} dy_n = 1.$$

Sei also $\widetilde{f}$ mit 0 nach ganz $\mathbb{C}^n$ fortgesetzt und

$$\widetilde{f}_\epsilon = \Delta_\epsilon * \widetilde{f}.$$

Dann konvergiert

$$\widetilde{f}_\epsilon \to \widetilde{f} \quad \text{in } L^p_{0,q}(\mathbb{C}^n)$$

nach den bekannten Eigenschaften der Faltung.

Für $w \in \{y_n \geq 0\}$ ist $\operatorname{supp}(\widetilde{f}(\cdot)\Delta_\epsilon(w - \cdot)) \subset\subset \{y_n > 0\}$ (man beachte den Träger von $\partial h_\epsilon / \partial y_n$), und mit partieller Integration folgt (wie in Teil **1**):

$$\overline{\partial} \widetilde{f}_\epsilon(w) = \delta_\epsilon * (\overline{\partial} \widetilde{f})(w).$$

Damit gilt

$$\overline{\partial} \widetilde{f}_\epsilon \to \overline{\partial} \widetilde{f} \quad \text{in } L^p_{0,q+1}(\{y_n > 0\}).$$

Es bleibt

$$\iota^*_R(\widetilde{f}_\epsilon \wedge \varphi) \to \widetilde{f}_b \wedge \iota^*_R(\varphi) \quad \text{in } L^1_{2n-1}(\{y_n = 0\})$$

für alle φ mit $\Psi^* \varphi \in C^\infty_{n,n-q-1}(\overline{D})$ zu zeigen.
Sei dazu $\widetilde{f}_b$ mit 0 nach ganz $R = \{y_n = 0\}$ fortgesetzt. Wir betrachten:

$$\begin{array}{rcl} \|\widetilde{f}_b \wedge \iota^*_R(\varphi) - \iota^*_R(\widetilde{f}_\epsilon \wedge \varphi)\|_{L^1(R)} & \leq & \|\widetilde{f}_b \wedge \iota^*_R(\varphi) - \delta'_\epsilon * \big(\widetilde{f}_b \wedge \iota^*_R(\varphi)\big)\|_{L^1(R)} \\ & + & \|\delta'_\epsilon * \big(\widetilde{f}_b \wedge \iota^*_R(\varphi)\big) - \iota^*_R(\widetilde{f}_\epsilon \wedge \varphi)\|_{L^1(R)}. \end{array}$$

Da es sich bei $\delta'_\epsilon * \big(\widetilde{f}_b \wedge \iota^*_R(\varphi)\big)$ um Faltung mit einer Dirac-Folge in $\mathbb{R}^{2n-1}$ handelt, konvergiert

$$\|\widetilde{f}_b \wedge \iota^*_R(\varphi) - \delta'_\epsilon * \big(\widetilde{f}_b \wedge \iota^*_R(\varphi)\big)\|_{L^1(R)} \to 0$$

für $\epsilon \to 0$. Untersuchen wir also noch den zweiten Summanden.

Da wir (nur) die Konvergenz

$$\iota^*\big(f_\epsilon \wedge \varphi\big) \to f_b \wedge \iota^*(\varphi) \quad \text{in } L^1_{2n-1}(bD) \tag{30}$$

für alle $\varphi \in C^\infty_{n,n-q-1}(\overline{D})$ zu zeigen haben, sind nicht alle Koeffizienten der Formen f_b bzw. f_ϵ relevant. Das soll im folgenden spezifiziert werden.

Es ist

$$r(z) := H(z_1, ..., z_{n-1}, x_n) - y_n \quad \text{in } C^1(U)$$

eine definierende Randfunktion für D in U, also

$$\begin{aligned} r(z) = 0 &\quad \text{für} \quad z \in bD, \\ r(z) < 0 &\quad \text{für} \quad z \in D, \\ r(z) > 0 &\quad \text{für} \quad z \in U \setminus \overline{D}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\partial r}{\partial z_n} dz_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial x_n} + i\right) dz_n \neq 0$$

sind

$$\{dz_1, ..., dz_{n-1}, \partial r\}$$

bzw.

$$\{d\overline{z_1}, ..., d\overline{z_{n-1}}, \overline{\partial} r\}$$

Basen für die $(1,0)$-Formen bzw. $(0,1)$-Formen in U.

Es kann also

$$\begin{aligned} f_b &= f_b' + \overline{\partial} r \wedge f_b'', \\ f_\epsilon &= f_\epsilon' + \overline{\partial} r \wedge f_\epsilon'' \end{aligned}$$

angenommen werden, wobei f_b' und die f_ϵ' nicht $\overline{\partial} r$ (und damit auch nicht $d\overline{z_n}$) enthalten. Wegen $\varphi \in C^\infty_{n,n-q-1}(\overline{D})$ muss φ andererseits auf jeden Fall ∂r enhalten:

$$\varphi = \partial r \wedge \varphi'.$$

Wegen $\iota^*(\partial r) = -\iota^*(\overline{\partial} r)$ (was aus $\iota^*(dr) = 0$ folgt) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \iota^*(f_\epsilon \wedge \varphi) &= \iota^*(f_\epsilon' \wedge \varphi) + \iota^*(\overline{\partial} r) \wedge \iota^*(f_\epsilon'') \wedge \iota^*(\partial r) \wedge \iota^*(\varphi') \\ &= \iota^*(f_\epsilon' \wedge \varphi) - \iota^*(\overline{\partial} r) \wedge \iota^*(f_\epsilon'') \wedge \iota^*(\overline{\partial} r) \wedge \iota^*(\varphi') = \iota^*(f_\epsilon' \wedge \varphi) \end{aligned}$$

und analog

$$f_b \wedge \iota^*(\varphi) = f_b' \wedge \iota^*(\varphi).$$

Um (30) zu zeigen, reicht es also, die Konvergenz der Koeffizienten von f_b' bzw. f_ϵ' zu untersuchen. Das ist im übrigen auch der Grund, wieso Randwerte nach Definition 3.4.2 nicht unbedingt eindeutig bestimmt sind.

Es sei also

$$f_b = \sum_{J \subset \{1,...,2n-2\}} f_b^J dt_J.$$

Wegen $(\Psi^{-1})^* dt_j = dt_j$ für $j \in \{1, ..., 2n-1\}$ ist damit

$$\widetilde{f}_b = \sum_{J \subset \{1,...,2n-2\}} f_b^J \circ \Psi^{-1} dt_J = \sum_{J \subset \{1,...,2n-2\}} \widetilde{f}_b^J dt_J.$$

Wir verwenden noch die Koordinaten $t' = (t_1, t_2, ..., t_{2n-1}) = (x_1, y_1, ..., x_n)$ und $s = (s_1, ..., s_{2n-1}, 0)$, $s' = (s_1, ..., s_{2n-1})$.

Es sei $J \subset \{1, ..., 2n-2\}$ fest gewählt und J' das (geordnete) Komplement in $\{1, ..., 2n-2\}$. Um die nachfolgende Notation (bzgl. der Vorzeichen) einfach zu halten, nehmen wir

$$\epsilon_{JJ'}^{\{1,...,2n-2\}} = 1$$

an (vgl. Definition 3.1.1), so dass

$$dt_J \wedge dt_{J'} = dt_1 \wedge ... \wedge dt_{2n-2}$$

gilt. Es reicht

$$\begin{aligned}(\delta'_\epsilon * \widetilde{f}_b)^J - (\iota_R^*(\widetilde{f}_\epsilon))^J &= \delta'_\epsilon * \widetilde{f}_b^J - \iota_R^*(\widetilde{f}_\epsilon^J) \\ &= \delta'_\epsilon * \widetilde{f}_b^J - \iota_R^*(\Delta_\epsilon * \widetilde{f}^J) \to 0\end{aligned}$$

in $L^1(R)$ für $\epsilon \to 0$ zu zeigen.

Unter Verwendung von

$$\iota_R^* (dt_1 \wedge ... \wedge dt_{2n-1}) = (\Psi|_{bD}^{-1})^* \iota^* \rho$$

und

$$\rho = dt_1 \wedge ... \wedge dt_{2n-2} \wedge \rho' \quad \in C_{n,n-1}^0(U)$$

betrachten wir dazu:

$$\begin{aligned}\delta'_\epsilon * \widetilde{f}_b^J(s') &= \int_R \widetilde{f}_b^J(t')\delta'_\epsilon(s'-t')\iota_R^* (dt_1 \wedge ... \wedge dt_{2n-1}) \\ &= \int_{bD} \Psi|_{bD}^* \Big(\widetilde{f}_b^J(t)\delta'_\epsilon(s'-t')(\Psi|_{bD}^{-1})^*\iota^*\rho\Big) \\ &= \int_{bD} f_b^J(t)\delta'_\epsilon(s'-t')\iota^*\rho \\ &= \int_{bD} f_b^J(t) dt_J \wedge \iota^*\big(\delta'_\epsilon(s'-t')dt_{J'} \wedge \rho'\big) \\ &= \int_{bD} f_b \wedge \iota^*\big(\delta'_\epsilon(s'-t')dt_{J'} \wedge \rho'\big),\end{aligned}$$

wobei stets über t' integriert wird.

Hier wäre jetzt der Punkt erreicht, an dem wir die Identität (24) einsetzen wollen, was aber leider noch nicht möglich ist, da ρ' nicht glatt ist. Diesem Problem begegnen wir, indem wir ρ bzw. ρ' durch (die bereits definierten) ρ_ϵ bzw. ρ'_ϵ approximieren.

Dabei kann für δ'_ϵ (als Dirac-Folge in $\mathbb{R}^{2n-1}$)

$$\begin{aligned} \|\delta'_\epsilon\|_\infty &\leq \epsilon^{-2n+1}, \\ \|\overline{\partial}\delta'_\epsilon\|_\infty &\leq \epsilon^{-2n} \end{aligned}$$

angenommen werden. Wegen

$$\operatorname{supp} f_b \subset\subset \{z : \chi(z) = 1\}$$

kann ρ' durch $\chi\rho'$ ersetzt werden, und unter Verwendung von (28) folgt:

$$\begin{aligned} & \left| \delta'_\epsilon * \widetilde{f}_b^J(s') - \int_{bD} f_b \wedge \iota^*\big(\delta'_\epsilon(s'-t')dt_{J'} \wedge \rho'_\epsilon\big) \right| && (31) \\ \leq \;& \|\delta'_\epsilon\|_\infty \|\chi\rho' - \rho'_\epsilon\|_\infty \|f_b\|_{L^1(bD)} && (32) \\ \leq \;& \epsilon^{-2n+1}\epsilon^{2n}\|f_b\|_{L^1(bD)} = \epsilon\|f_b\|_{L^1(bD)} && (33) \end{aligned}$$

für alle $s' \in R$.

Wir fassen δ'_ϵ mittels $\delta'_\epsilon(s-t) = \delta'_\epsilon(s'-t')$ ab sofort auch als Funktion über $\mathbb{C}^n$ auf, und verwenden nun die Identität (24) mit $\varphi = \delta'_\epsilon(s - \cdot)dt_{J'} \wedge \rho'_\epsilon$. Das liefert:

$$\begin{aligned} \int_{bD} f_b \wedge \iota^*\big(\delta'_\epsilon(s'-t')dt_{J'} \wedge \rho'_\epsilon\big) &= \int_D \overline{\partial} f(t) \wedge \big(\delta'_\epsilon(s-t)dt_{J'} \wedge \rho'_\epsilon\big) && (34) \\ &+ (-1)^q \int_D f(t) \wedge \overline{\partial}\big(\delta'_\epsilon(s-t)dt_{J'} \wedge \rho'_\epsilon\big), && (35) \end{aligned}$$

wobei über t integriert wird.

Damit sind die vorbereitenden Überlegungen zu $\delta'_\epsilon * \widetilde{f_b}^J(s')$ abgeschlossen. Da wir

$$\delta'_\epsilon * \widetilde{f_b}^J - \iota_R^*(\Delta_\epsilon * \widetilde{f}^J) \to 0$$

in $L^1(R)$ für $\epsilon \to 0$ zeigen wollen, betrachten wir andererseits noch:

$$\iota_R^*(\Delta_\epsilon * \widetilde{f}^J)(s') = \Delta_\epsilon * \widetilde{f}^J(s') = \int_{\mathbb{C}^n} \widetilde{f}^J(t)\delta'_\epsilon(s-t)\frac{\partial h_\epsilon}{\partial t_{2n}}(0 - t_{2n})dV_{\mathbb{C}^n}(t),$$

wobei man $s = (s', 0)$ beachte.

Unter Verwendung von (25) und der Tatsache, dass es sich bei ρ um eine $(n,n-1)$-Form handelt, folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\Delta_\epsilon * \widetilde{f}^J(s') &= \int_{\mathbb{C}^n} \widetilde{f}^J(t)\delta'_\epsilon(s-t)\frac{\partial h_\epsilon}{\partial t_{2n}}(-t_{2n})((\Psi^{-1})^*\rho)\wedge dt_{2n} \\
&= -\int_{\mathbb{C}^n} \widetilde{f}^J(t)\delta'_\epsilon(s-t)\frac{\partial h_\epsilon}{\partial t_{2n}}(-t_{2n})dt_{2n}\wedge((\Psi^{-1})^*\rho) \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} \widetilde{f}^J(t)\delta'_\epsilon(s-t)\frac{\partial \check{h}_\epsilon}{\partial t_{2n}}(t)dt_{2n}\wedge((\Psi^{-1})^*\rho) \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} \widetilde{f}^J(t)\delta'_\epsilon(s-t)d\check{h}_\epsilon\wedge((\Psi^{-1})^*\rho) \\
&= \int_D \Psi^*\left(\widetilde{f}^J(t)\delta'_\epsilon(s-t)d\check{h}_\epsilon\wedge((\Psi^{-1})^*\rho)\right) \\
&= \int_D f^J(t)\delta'_\epsilon(s-t)\left(\Psi^*\left(d\check{h}_\epsilon\right)\right)\wedge\rho \\
&= \int_D f^J(t)\delta'_\epsilon(s-t)\left(d\Psi^*\check{h}_\epsilon\right)\wedge dt_J\wedge dt_{J'}\wedge\rho' \\
&= \int_D f^J(t)\delta'_\epsilon(s-t)\left(\overline{\partial}\Psi^*\check{h}_\epsilon\right)\wedge dt_J\wedge dt_{J'}\wedge\rho' \\
&= (-1)^q\int_D f^J(t)dt_J\wedge\left(\overline{\partial}\Psi^*\check{h}_\epsilon\right)\wedge\left(\delta'_\epsilon(s-t)dt_{J'}\wedge\rho'\right) \\
&= (-1)^q\int_D f(t)\wedge\left(\overline{\partial}\Psi^*\check{h}_\epsilon\right)\wedge\left(\delta'_\epsilon(s-t)dt_{J'}\wedge\rho'\right)
\end{aligned}$$

Hier wollen wir nun partielle Integration anwenden. Da ρ' nicht differenzierbar ist, muss wieder zunächst durch ρ'_ϵ approximiert werden. Nach (28) gilt:

$$\|\left(\overline{\partial}\Psi^*\check{h}_\epsilon\right)\wedge\left(\chi\rho'-\rho'_\epsilon\right)\|_\infty \le C_\Psi\|d\check{h}_\epsilon\|_\infty\|\chi\rho'-\rho'_\epsilon\|_\infty \le \epsilon^{2n}.$$

Damit erhalten wir:

$$\left|\Delta_\epsilon * \widetilde{f}^J(s') - (-1)^q\int_D f(t)\wedge\left(\overline{\partial}\Psi^*\check{h}_\epsilon\right)\wedge\left(\delta'_\epsilon(s-t)dt_{J'}\wedge\rho'_\epsilon\right)\right| \quad (36)$$

$$\le \|\delta'_\epsilon\|_\infty\|\left(\overline{\partial}\Psi^*\check{h}_\epsilon\right)\wedge\left(\chi\rho'-\rho'_\epsilon\right)\|_\infty\|f\|_{L^1(D)} \quad (37)$$

$$\le C_\Psi\epsilon^{-2n+1}\epsilon^{2n}\|f\|_{L^1(D)} = \epsilon C_\Psi\|f\|_{L^1(D)} \quad (38)$$

für alle $s'\in R$. Partielle Integration liefert:

$$(-1)^q\int_D f(t)\wedge\left(\overline{\partial}\Psi^*\check{h}_\epsilon\right)\wedge\left(\delta'_\epsilon(s-t)dt_{J'}\wedge\rho'_\epsilon\right) \quad (39)$$

$$= -\int_D \overline{\partial}f(t)\wedge\left(\Psi^*\check{h}_\epsilon\right)\wedge\left(\delta'_\epsilon(s-t)dt_{J'}\wedge\rho'_\epsilon\right) \quad (40)$$

$$-(-1)^q\int_D f(t)\wedge\left(\Psi^*\check{h}_\epsilon\right)\wedge\overline{\partial}\left(\delta'_\epsilon(s-t)dt_{J'}\wedge\rho'_\epsilon\right), \quad (41)$$

da $\operatorname{supp}(\Psi^*\check{h}_\epsilon)f \subset\subset D\cap U$.

Zusammengefasst liefern (31)-(41):

$$\begin{aligned}
&\left|\delta'_\epsilon * \widetilde{f}_b^J(s') - \Delta_\epsilon * \widetilde{f}^J(s')\right| \\
\leq\ & \epsilon\|f_b\|_{L^1(bD)} + \epsilon C_\Psi\|f\|_{L^1(D)} \\
+\ & \left|\int_D \overline{\partial} f(t) \wedge \big(\delta'_\epsilon(s-t)dt_{J'} \wedge \rho'_\epsilon\big) + \int_D \overline{\partial} f(t) \wedge \big(\Psi^*\check{h}_\epsilon\big) \wedge \big(\delta'_\epsilon(s-t)dt_{J'} \wedge \rho'_\epsilon\big)\right| \\
+\ & \left|\int_D f(t) \wedge \overline{\partial}\big(\delta'_\epsilon(s-t)dt_{J'} \wedge \rho'_\epsilon\big) + \int_D f(t) \wedge \big(\Psi^*\check{h}_\epsilon\big) \wedge \overline{\partial}\big(\delta'_\epsilon(s-t)dt_{J'} \wedge \rho'_\epsilon\big)\right| \\
\leq\ & \epsilon\|f_b\|_{L^1(bD)} + \epsilon C_\Psi\|f\|_{L^1(D)} \\
+\ & \int_D \big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon(t)\big)|\overline{\partial} f(t)||\delta'_\epsilon(s-t)|\|\rho'_\epsilon\|_\infty dV_{\mathbb{C}^n}(t) \\
+\ & \int_D \big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon(t)\big)|f(t)||\overline{\partial}\delta'_\epsilon(s-t)|\|\rho'_\epsilon\|_\infty dV_{\mathbb{C}^n}(t)
\end{aligned}$$

Es ist

$$\|\delta'_\epsilon * \widetilde{f}_b^J - \Delta_\epsilon * \widetilde{f}^J\|_{L^1(R)} \to 0$$

für $\epsilon \to 0$ zu zeigen. Dabei reicht es, über $R' \subset\subset R$ zu integrieren. Zunächst ist natürlich

$$\int_{R'} \big(\epsilon\|f_b\|_{L^1(bD)} + \epsilon C_\Psi\|f\|_{L^1(D)}\big)dV_{\mathbb{R}^{2n-1}}(s') \to 0$$

für $\epsilon \to 0$. Betrachten wir (unter Verwendung von (29)) also:

$$\begin{aligned}
I_1(\epsilon) &:= \int_{R'}\int_D \big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon(t)\big)|\overline{\partial} f(t)||\delta'_\epsilon(s-t)|\|\rho'_\epsilon\|_\infty dV_{\mathbb{C}^n}(t)dV_{\mathbb{R}^{2n-1}}(s') \\
&= \int_D \left(\int_{B_\epsilon(0)} |\delta'_\epsilon(s-t)|dV_{\mathbb{R}^{2n-1}}(s')\right)\big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon(t)\big)|\overline{\partial} f(t)|\|\rho'_\epsilon\|_\infty dV_{\mathbb{C}^n}(t) \\
&\leq \int_D \left(\int_{B_\epsilon(0)} \epsilon^{-2n+1}dV_{\mathbb{R}^{2n-1}}(s')\right)\big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon(t)\big)|\overline{\partial} f(t)|\|\rho'_\epsilon\|_\infty dV_{\mathbb{C}^n}(t) \\
&\sim \int_D \epsilon^{2n-1}\epsilon^{-2n+1}\big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon(t)\big)|\overline{\partial} f(t)|\|\rho'_\epsilon\|_\infty dV_{\mathbb{C}^n}(t) \\
&\leq C_\rho\int_D \big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon(t)\big)|\overline{\partial} f(t)|dV_{\mathbb{C}^n}(t).
\end{aligned}$$

Jetzt folgt $I_1(\epsilon) \to 0$ für $\epsilon \to 0$ nach dem Satz über dominierte Konvergenz von Lebesgue, denn die Folge von L^1-Funktionen

$$\big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon\big)\left|\overline{\partial} f\right|$$

konvergiert punktweise gegen 0 und besitzt $\left|\overline{\partial} f\right|$ als integrierbare Majorante.

Zuletzt betrachten wir noch:

$$
\begin{aligned}
I_2(\epsilon) &:= \int_{R'}\int_D \big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon(t)\big)|f(t)||\overline{\partial}\delta'_\epsilon(s-t)|\|\rho'_\epsilon\|_\infty dV_{\mathbb{C}^n}(t)dV_{\mathbb{R}^{2n-1}}(s') \\
&= \int_D \left(\int_{B_\epsilon(0)} |\overline{\partial}\delta'_\epsilon(s-t)|dV_{\mathbb{R}^{2n-1}}(s')\right)\big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon(t)\big)|f(t)|\|\rho'_\epsilon\|_\infty dV_{\mathbb{C}^n}(t) \\
&\leq \int_D \left(\int_{B_\epsilon(0)} \epsilon^{-2n} dV_{\mathbb{R}^{2n-1}}(s')\right)\big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon(t)\big)|f(t)|\|\rho'_\epsilon\|_\infty dV_{\mathbb{C}^n}(t) \\
&\sim \int_D \epsilon^{2n-1}\epsilon^{-2n}\big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon(t)\big)|f(t)|\|\rho'_\epsilon\|_\infty dV_{\mathbb{C}^n}(t) \\
&\leq C_\rho\frac{1}{\epsilon}\int_D \big(1+\Psi^*\check{h}_\epsilon(t)\big)|f(t)|dV_{\mathbb{C}^n}(t).
\end{aligned}
$$

Mit (27) liefert das aber:

$$I_2(\epsilon) \lesssim C_\rho\epsilon \to 0$$

für $\epsilon \to 0$.

Damit ist also gezeigt, dass $\widetilde{f}$ bzw. $\widetilde{f}_b$ durch die Folge

$$\widetilde{f}_\epsilon \in C^\infty_{(0,q),cpt}(\Psi(U))$$

wie gewünscht approximiert werden. Somit werden f bzw. f_b durch die Folge

$$f_\epsilon := \Psi^*\widetilde{f}_\epsilon \in C^1_{(0,q),cpt}(U)$$

wie gewünscht approximiert. Da die $f_\epsilon = \Psi^*\widetilde{f}_\epsilon$ wiederum gleichmäßig durch glatte Funktionen approximiert werden können, ist die Behauptung gezeigt. □

Lemma 3.4.5. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 3.4.4 sei* $r \in C^1(\mathbb{C}^n)$ *eine definierende Randfunktion von* D. *Dann verfügt* f *über* L^r*-Randwerte* $f_b \in L^r_q(bD)$ *gemäß Definition 3.4.2 genau dann, wenn*

$$\iota^*\big(f_\epsilon \wedge \partial r\big) \to f_b \wedge \iota^*(\partial r) \quad \text{in } L^1_{q+1}(bD).$$

Ist f *eine Funktion* ($q=0$)*, so ist dies äquivalent zu*

$$\iota^*(f_\epsilon) \to f_b \quad \text{in } L^1(bD).$$

Beweis. Der Beweis der ersten Aussage ist bereits im Beweis von Theorem 3.4.4 geführt worden, da für die Konvergenz der Folge nur diejenigen Anteile von f_b bzw. $\iota^*(f_\epsilon)$ relevant sind, die nicht $\iota^*(\overline{\partial}r) = -\iota^*(\partial r)$ enthalten. Das zeigt auch, dass es im Falle $q=0$ überflüssig ist, mit $\wedge\iota^*(\partial r)$ zu testen. □

Theorem 3.4.4 ermöglicht uns folgende Beobachtung: Ist $D \subset \mathbb{C}^n$, $f \in L^1_{loc}(D)$ und $\overline{\partial} f \in L^1_{loc}(D)$, so gilt mit dem Satz von Fubini: f besitzt Randwerte in $L^1(bG)$ für "fast alle" Gebiete $G \subset\subset D$ mit differenzierbarem Rand. Solche Randwerte hängen nur von der Äquivalenzklasse von f in $L^1_{loc}(D)$ ab und müssen natürlich keineswegs mit $f|_{bD}$ übereinstimmen.

Genauer verwenden wir später:

Lemma 3.4.6. *Sei $B_R(0) \subset\subset \mathbb{C}^n$ die Kugel vom Radius $R > 0$ in $\mathbb{C}^n$.*
Sei weiterhin $f \in L^1(B_R(0))$ mit $\overline{\partial} f \in L^1_{0,1}(B_R(0))$.
Dann besitzt f Randwerte in $L^1(bB_r(0))$ für fast alle $0 < r < R$.

Beweis. Sei f_ϵ die Folge aus Lemma 3.4.3, das heißt, es gelte

$$f_\epsilon \to f \quad \text{in } L^1(B_R(0)).$$

Es sei

$$I_\epsilon(r) := \int_{bB_r(0)} |f_\epsilon - f| dS,$$

falls das Integral existiert, ansonsten sei $I_\epsilon(r) = 0$. Dann gilt nach dem Satz von Fubini:

$$\|f_\epsilon - f\|_{L^1(B_R(0))} = \int_0^R I_\epsilon(r) dr \to 0 \quad \text{für } \epsilon \to 0.$$

Damit konvergiert $I_\epsilon \to 0$ in $L^1((0, R))$, also punktweise fast überall, wenn wir zu einer Teilfolge übergehen.
Somit konvergiert

$$f_\epsilon|_{bB_r(0)} \to f|_{bB_r(0)} \quad \text{in } L^1(bB_r(0))$$

für fast alle $0 < r < R$ und nach Theorem 3.4.4 besitzt f Randwerte in L^1 für solche r. Dabei spielt es keine Rolle, dass wir zu einer Teilfolge übergegangen sind. □

Mit ein wenig Vorsicht bei der Notation überträgt sich Lemma 3.4.6 wörtlich auf Differentialformen.

3.5 Die BMK-Formel für L^p-Formen

Sei nun $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ mit differenzierbarem Rand $bD \in C^1$, $1 \le r, p < \infty$,

$$f \in L^p_{0,q}(D)$$

mit

$$\overline{\partial} f \in L^r_{0,q+1}(D),$$

und f besitze Randwerte

$$f_b \in L^p_q(bD).$$

Dann liefert Lemma 3.4.3 eine Folge $f_\epsilon \in C^\infty_{0,q}(\overline{D})$ mit

$$f_\epsilon \to f \text{ in } L^1_{0,q}(D)$$

und

$$\overline{\partial} f_\epsilon \to \overline{\partial} f \text{ in } L^1_{0,q+1}(D).$$

Weiterhin gilt nach Theorem 3.4.4 auch

$$f_\epsilon|_{bD} \wedge \iota^*(\varphi) = \iota^*(f_\epsilon \wedge \varphi) \to f_b \wedge \iota^*(\varphi) \text{ in } L^1_{2n-1}(bD) \tag{42}$$

für alle $\varphi \in C^\infty_{n,n-q-1}(\overline{D})$, wobei mit $\iota : bD \to \mathbb{C}^n$ die Einbettungsabbildung bezeichnet sei. In den folgenden Integralen werden wir statt $f_\epsilon|_{bD}$ auch einfach f_ϵ notieren.

Nun folgt nach der BMK-Formel, Theorem 3.1.2:

$$f_\epsilon(z) = \mathbf{B}^{bD}_q f_\epsilon(z) - \mathbf{B}^D_q(\overline{\partial} f_\epsilon)(z) - \overline{\partial}_z \mathbf{B}^D_{q-1} f_\epsilon(z)$$

für alle $z \in D$, und wir stellen um zu:

$$\overline{\partial}_z \mathbf{B}^D_{q-1} f_\epsilon(z) = \mathbf{B}^{bD}_q f_\epsilon(z) - \mathbf{B}^D_q(\overline{\partial} f_\epsilon)(z) - f_\epsilon(z). \tag{43}$$

Nun sind aber nach Lemma 3.2.2 und Lemma 3.3.5 die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{bD}_q : L^1_q(bD) &\to L^1_{0,q}(D) \\ \mathbf{B}^D_q : L^1_{0,q+1}(D) &\to L^1_{0,q}(D) \end{aligned}$$

stetig, so dass die rechte Seite in Gleichung (43) in $L^1_{0,q}(D)$ gegen eine Form

$$G = \mathbf{B}^{bD}_q f_b - \mathbf{B}^D_q(\overline{\partial} f) - f \quad \in L^1_{0,q}(D) \tag{44}$$

konvergiert. Da es sich bei dem Bochner-Martinelli-Koppelman-Kern $B_{nq}(\zeta, z)$ um eine $(n, n-q-1)$-Form in ζ handelt, ist durch (42) die passende Voraussetzung gegeben. Wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^D_{q-1} f_\epsilon &\to \mathbf{B}^D_{q-1} f \text{ in } L^1_{0,q-1}(D), \\ \overline{\partial}_z \mathbf{B}^D_{q-1} f_\epsilon &\to G \text{ in } L^1_{0,q}(D) \end{aligned}$$

ist $G = \overline{\partial}_z \mathbf{B}^D_{q-1} f$ die $\overline{\partial}$-Ableitung im Distributionssinne nach Definition 3.4.1.

Weiterhin stellen wir wieder mit Lemma 3.2.2 und Lemma 3.3.5

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_q^{bD} f_b &\in L_{0,q}^p(D), \\ \mathbf{B}_q^D(\overline{\partial} f) &\in L_{0,q}^r(D) \end{aligned}$$

fest. Damit liegt die rechte Seite von (44), also G, in $L_{0,q}^r(D) \cap L_{0,q}^p(D)$.

Wir fassen zusammen:

Theorem 3.5.1. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit C^1-Rand und $0 \leq q \leq n$. Seien weiterhin $1 \leq r, p < \infty$ und $f \in L_{0,q}^p(D)$ mit $\overline{\partial} f \in L_{0,q+1}^r(D)$ und Randwerten $f_b \in L_q^p(bD)$. Dann sind*

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_q^{bD} f_b &\in L_{0,q}^p(D), \\ \mathbf{B}_q^D(\overline{\partial} f) &\in L_{0,q}^r(D), \\ \mathbf{B}_{q-1}^D f &\in L_{0,q-1}^p(D) \cap Dom(\overline{\partial}), \\ \overline{\partial} \mathbf{B}_{q-1}^D f &\in L_{0,q}^r(D) \cap L_{0,q}^p(D), \end{aligned}$$

und es gilt

$$f(z) = \mathbf{B}_q^{bD} f_b(z) - \mathbf{B}_q^D(\overline{\partial} f)(z) - \overline{\partial}_z \mathbf{B}_{q-1}^D f(z) \tag{45}$$

für fast alle $z \in D$.

3.6 Vergleich mit Homotopieformeln

Unter Verwendung allgemeiner Homotopieformeln kann auf die Integration über den Rand bD verzichtet werden. Wir zitieren dazu aus [LiMi]:

Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ streng pseudokonvex mit differenzierbarem Rand $bD \in C^4$. Das heißt, wir setzen folgendes voraus:
Es existiert eine Umgebung U des Randes, $bD \subset U$, und eine streng plurisubharmonische Funktion $r \in C^4(U)$ mit $D \cap U = \{z \in U : r(z) < 0\}$ und

$$dr(z) \neq 0 \text{ für alle } z \in bD.$$

Dann existieren lineare Integraloperatoren

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_q : &\quad L_{0,q}^1(D) \to C_{0,q}^\infty(D), \\ \mathbf{T}_q : &\quad L_{0,q+1}^1(D) \to L_{0,q}^1(D), \\ \mathbf{S}_{q-1} : &\quad L_{0,q}^1(D) \to L_{0,q-1}^1(D) \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften ([LiMi], Proposition 4.24 und Theorem 4.25):

Theorem 3.6.1. *Die Operatoren* $\mathbf{P}_q$*,* $\mathbf{T}_q$ *und* $\mathbf{S}_{q-1}$ *sind stetige lineare Abbildungen zwischen folgenden Räumen:*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 : &\quad L^p(D) \to L^p(D) \text{ für } 1 < p < \infty, \\ \mathbf{P}_q : &\quad L^1_{0,q}(D) \to C^\infty_{0,q}(\overline{D}) \text{ für } q \geq 1, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{T}_q : & L^p_{0,q+1}(D) \to L^r_{0,q}(D) \\ \mathbf{S}_{q-1} : & L^p_{0,q}(D) \to L^r_{0,q-1}(D) \end{array}\right\} \text{ für } 1 \leq p \leq \infty, \frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2n+2}, \tag{46}$$

wobei $C^\infty(\overline{D})$ *mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen ist.*
Ist f *in* C^k*, so* $\mathbf{T}_q f$*,* $\mathbf{S}_{q-1} f$ *ebenfalls.* $\mathbf{P}_0 f$ *und* $\overline{\partial}\mathbf{P}_0 f$ *sind glatt für alle* $f \in L^1(D)$*.*

Nun gilt ([LiMi], Theorem 4.22”):

Theorem 3.6.2. (Homotopieformel)
Ist $f \in L^1_{0,q}(D)$ *und* $\overline{\partial} f \in L^1_{0,q+1}(D)$*, so gilt*

$$f = \mathbf{P}_q f + \mathbf{T}_q \overline{\partial} f + \overline{\partial}\mathbf{S}_{q-1} f.$$

Liegen f *und* $\overline{\partial} f$ *in* L^p *für* $1 \leq p \leq \infty$*, so gilt dies auch für alle Summanden der rechten Seite.*

In diesen Homotopieformeln verschwindet die Integration über den Rand, so dass die Probleme mit dem Randintegral vermieden werden. Dafür verlieren die Abbildungen aber an Regularität:

Der BMK-Operator $\mathbf{B}^D_q$ ist nach Lemma 3.2.2 eine stetige Abbildung

$$\mathbf{B}^D_q : L^p \to L^r \text{ für } \frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2n}, \tag{47}$$

also von höherer Regularität als $\mathbf{T}_q$ und $\mathbf{S}_{q-1}$, die nach (46) lediglich als Abbildungen

$$\mathbf{T}_q, \mathbf{S}_{q-1} : L^p \to L^r \text{ für } \frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2n+2}$$

stetig sind.

In unseren Betrachtungen am Ende von Abschnitt 4.3 wird für $p = 1$

$$\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{2n}$$

als Grenzfall auftreten, was nur in Verbindung mit (47) tatsächlich als Grenzfall erkannt wird.

4 Fortsetzungssätze für die $\overline{\partial}$-Gleichung

Ist eine Funktion f lokal integrierbar und $\overline{\partial}$-geschlossen im Distributionssinne, so folgt aus der BMK-Formel für L^p-Funktionen sofort, dass f unendlich oft differenzierbar ist (Theorem 4.1.1). Wir verwenden diese Regularitätsaussage, um die Riemannschen Hebbarkeitssätze in der folgenden Form zu beweisen:

Theorem 4.2.4 (Riemannsche Hebbarkeitssätze).
Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, $A \subset D$ eine nirgends dichte analytische Teilmenge der Kodimension $k := n - \dim A$ und $f \in L^p_{loc}(D)$ für ein $p \geq 1$ mit

$$\overline{\partial} f = 0 \text{ auf } D \setminus A.$$

im Distributionssinne. Dann gilt

$$\overline{\partial} f = 0 \text{ auf } D,$$

falls $p \geq 2$ oder $k > 1$ ist, und in diesem Fall folgt $f \in \mathcal{O}(D)$.

Interpretiert man diese Aussage als Fortsetzungssatz für die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\overline{\partial} f = 0$, so motiviert das folgende Frage:

Problem 4.2.5. *Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, $A \subset D$ eine nirgends dichte analytische Teilmenge der Kodimension $k := n - \dim A$ in D. Für $p, r \geq 1$ seien weiterhin $f \in L^p_{(0,q),loc}(D)$, $g \in L^r_{(0,q+1),loc}(D)$ und es gelte*

$$\overline{\partial} f = g \text{ auf } D \setminus A$$

im Distributionssinne. Unter welchen Voraussetzungen an p, r und k gilt

$$\overline{\partial} f = g \text{ auf } D \tag{48}$$

im Distributionssinne?

Mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden zeigen wir, dass (48) unter der Voraussetzung

$$p \geq \frac{2k}{2k-1} \quad \text{und} \quad r \geq 1$$

gilt ($\overline{\partial}$-Fortsetzungssatz 4.3.3). Kombiniert man diese Aussage für Kodimension $k = 1$ mit der Regularitätsaussage Theorem 4.1.1, so erhält man den ersten Riemannschen Hebbarkeitssatz (Theorem 4.2.4 für $p \geq 2$). Der zweite Riemannsche Hebbarkeitssatz (Theorem 4.2.4 für $k > 1$) beruht auf dem Maximumprinzip für holomorphe Funktionen und ist durch das rein funktionalanalytische Verfahren im Beweis von Satz 4.3.3 nicht direkt zugänglich.

Zuletzt untersuchen wir noch, wie groß der Beitrag von Satz 4.3.3 zu Problem 4.2.5 ist: Wir begründen die Vermutung, dass sich die Voraussetzung $p \geq \frac{2k}{2k-1}$ in Satz 4.3.3 im Allgemeinen nicht abschwächen lässt.

4.1 Regularität holomorpher L^p-Funktionen

Ist eine Funktion f lokal integrierbar und $\overline{\partial}$-geschlossen im Distributionssinne, so folgt aus der BMK-Formel für L^p-Funktionen sofort, dass f unendlich oft differenzierbar ist:

Theorem 4.1.1. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $f \in L^1_{loc}(U) \cap Dom(\overline{\partial})$ mit $\overline{\partial} f = 0$. Dann ist f unendlich oft differenzierbar, also holomorph im klassischen Sinne.*

Beweis. Sei $p \in U$. Dann existiert $\epsilon > 0$ mit $f \in L^1(B_\epsilon(p))$, $B_\epsilon(p) \subset\subset U$.
Nach Lemma 3.4.6 existiert $\delta < \epsilon$, so dass f Randwerte $f_b \in L^1(bB_\delta(p))$ gemäß Definition 3.4.2 besitzt.
Damit sind die Voraussetzungen der BMK-Formel für L^p-Formen (Theorem 3.5.1) mit $D := B_\delta(p)$ erfüllt, und für fast alle $z \in D$ gilt:

$$f(z) = \mathbf{B}_0^{bD} f_b(z) = \int_{bD} f_b(\zeta) \wedge B_{n0}(\zeta, z), \tag{49}$$

wobei wir auch $B_{n,-1} \equiv 0$ eingesetzt haben.
Nun ist die rechte Seite in (49) aber unendlich oft in z differenzierbar, da die Singularität von B_{n0} im Inneren von D liegt. Damit ist auch $f \in C^\infty(D)$, wenn wir für f den richtigen Repräsentanten wählen. $\square$

Der Schlüssel zu dieser Erkenntnis ist – genau wie im Fall $n = 1$ – die Integralformel (49), die auch Kern vieler weiterer Anwendungen, wie etwa des Fortsetzungssatzes von Hartogs, ist.

Handelt es sich bei f um eine lokal integrierbare $(0, q)$-Form, so ist das Verschwinden der $\overline{\partial}$-Ableitung nicht hinreichend, um Differenzierbarkeit zu gewährleisten. In diesem Fall benötigen wir $\Box f = 0$, wobei mit $\Box$ der komplexe Laplace-Operator

$$\Box = \overline{\partial}^* \overline{\partial} + \overline{\partial} \overline{\partial}^*$$

gemeint ist.

Analog zur BMK-Formel gilt nämlich (vgl. [Ra], Theorem IV.1.7):

Theorem 4.1.2. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit C^1-Rand und $0 \le q \le n$. Dann gilt für jede Differentialform $f \in C^1_{0,q}(\overline{D})$ die Darstellung*

$$f(z) = \int_D \Box f(\zeta) \wedge \overline{\Gamma_q}(\zeta, z) - \int_{bD} f \wedge * \partial \overline{\Gamma_q}(\zeta, z) + \int_{bD} \overline{\partial^* \Gamma_q}(\zeta, z) \wedge f(\zeta).$$

Theorem 4.1.2 kann analog zu Theorem 3.5.1 ebenfalls für L^p-Formen gezeigt werden.

Für $f \in L^1_{0,q}(D)$ mit $\Box f = 0$ und Randwerten $f|_b \in L^1_{0,q}(bD)$ gilt dann

$$f(z) = -\int_{bD} f_b \wedge *\partial\overline{\Gamma_q}(\zeta, z) + \int_{bD} \overline{\partial^* \Gamma_q}(\zeta, z) \wedge f_b(\zeta)$$

für fast alle $z \in D$ und man kann schließen:

Satz 4.1.3. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $f \in L^1_{(0,q),loc}(U) \cap Dom(\Box)$ mit $\Box f = 0$ im Distributionssinne. Dann ist $f \in C^\infty_{0,q}(U)$ unendlich oft differenzierbar.*

4.2 Die Riemannschen Hebbarkeitssätze für L^2-Funktionen

Zunächst benötigen wir den Riemannschen Hebbarkeitssatz in der komplexen Ebene für $\overline{\partial}$-geschlossene L^2-Funktionen. Es sei $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die Einheitsscheibe in $\mathbb{C}$. Für $0 \leq r < R < \infty$ sei $K(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.

Theorem 4.2.1. *Sei $f \in L^2_{loc}(\Delta)$ und es gelte $\overline{\partial} f = 0$ im Distributionssinne auf der punktierten Scheibe $K(0, 1)$. Dann ist f holomorph auf ganz Δ.*

Beweis. Nach dem Regularitätssatz Theorem 4.1.1 ist $f \in \mathcal{O}(K(0, 1))$. Sei

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

die Laurent-Entwicklung. Dann gilt für $0 < r < R < 1$ (vgl. [FiLi], Satz VII.2.5):

$$\|f\|^2_{L^2(K(r,R))} = \pi \left(\sum_{k \neq -1} |a_k|^2 \frac{R^{2k+2} - r^{2k+2}}{k+1} + |a_{-1}|^2 (\log R^2 - \log r^2) \right).$$

Dies ergibt sich mit leichten Rechnungen aus der Tatsache, dass $\{z^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ orthogonale Basis im Hilbertraum $\mathcal{O} \cap L^2(K(r, R))$ ist. Mit $r \to 0$ folgt $a_k = 0$ für $k < 0$, denn es ist $\|f\|_{L^2(K(r,R))} \leq \|f\|_{L^2(K(0,R))} < \infty$. $\Box$

Mit Theorem 4.2.1 gilt nun auch der Riemannsche Fortsetzungssatz in $\mathbb{C}^n$:

Theorem 4.2.2. (1. Riemannscher Fortsetzungssatz)
Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, $A \subset D$ eine nirgends dichte analytische Teilmenge.
Sei weiterhin $f \in L^2_{loc}(D)$ und es gelte $\overline{\partial} f = 0$ im Distributionssinne auf $D \setminus A$.
Dann ist f holomorph auf ganz D.

Beweis. Nach dem Regularitätssatz Theorem 4.1.1 ist $f \in \mathcal{O}(D \setminus A)$. Nun überträgt sich der gewohnte Beweis für lokal beschränkte Funktionen

$$f \in \mathcal{O}(D \setminus A) \cap L^\infty_{loc}(D),$$

wie er sich etwa in [GrRe] findet (Theorem 7.1.1), wörtlich auf den Fall

$$f \in \mathcal{O}(D \setminus A) \cap L^2_{loc}(D).$$

Die Situation in $\mathbb{C}^n$ wird nämlich auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt, und wir verfügen mit Theorem 4.2.1 über die adäquate Aussage. $\Box$

Weiterhin gilt:

Theorem 4.2.3. (2. Riemannscher Fortsetzungssatz)
Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, $A \subset D$ eine analytische Teilmenge der Dimension $\dim A \leq n-2$. Sei weiterhin $f \in L^1_{loc}(D \setminus A)$ und es gelte $\overline{\partial} f = 0$ im Distributionssinne auf $D \setminus A$. Dann besitzt f eine holomorphe Fortsetzung auf D.

Beweis. Wieder ist $f \in \mathcal{O}(D \setminus A)$ nach dem Regularitätssatz Theorem 4.1.1, und der klassische 2. Riemannsche Fortsetzungssatz (Theorem 7.1.2 in [GrRe]) liefert das Ergebnis. □

Wir formulieren die Riemannschen Fortsetzungssätze in leicht modifizierter Form:

Theorem 4.2.4. *Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, $A \subset D$ eine nirgends dichte analytische Teilmenge der Kodimension $k := n - \dim A$ und $f \in L^p_{loc}(D)$ für ein $p \geq 1$ mit*

$$\overline{\partial} f = 0 \text{ auf } D \setminus A.$$

Dann gilt

$$\overline{\partial} f = 0 \text{ auf } D,$$

falls $p \geq 2$ oder $k > 1$ ist.

Interpretiert man diese Aussage als Fortsetzungssatz für die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\overline{\partial} f = 0$, so motiviert das folgende Frage:

Problem 4.2.5. *Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, $A \subset D$ eine nirgends dichte analytische Teilmenge der Kodimension $k := n - \dim A$ in D. Für $p, r \geq 1$ seien weiterhin $f \in L^p_{(0,q),loc}(D)$, $g \in L^r_{(0,q+1),loc}(D)$ und es gelte*

$$\overline{\partial} f = g \text{ auf } D \setminus A$$

im Distributionssinne. Unter welchen Voraussetzungen an p, r und k gilt

$$\overline{\partial} f = g \text{ auf } D \tag{50}$$

im Distributionssinne?

Mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden werden wir nun zeigen, dass (50) für

$$p \geq \frac{2k}{2k-1} \text{ und } r \geq 1$$

gilt ($\overline{\partial}$-Fortsetzungssatz 4.3.3).

4.3 Ein Fortsetzungssatz für die $\overline{\partial}$-Gleichung

Wir zeigen den Fortsetzungssatz zunächst in der kartesischen Situation:

Lemma 4.3.1. *Für $k > 0$ sei*

$$M := \{z = (z', z'') \in \mathbb{C}^l \times \mathbb{C}^k = \mathbb{C}^n : z'' = 0\}$$

und $V \subset\subset \mathbb{C}^n$ offen, relativ kompakt.
Seien weiterhin $f \in L^{\frac{2k}{2k-1}}_{0,q}(V)$ und $g \in L^1_{0,q+1}(V)$ mit

$$\overline{\partial} f = g$$

auf $V \setminus M$ im Distributionssinne.
Dann gilt $\overline{\partial} f = g$ im Distributionssinne auf ganz V.

Beweis. Für $r > 0$ sei

$$U(r) := \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{dist}(z, M) = \|z''\| < r\}.$$

Wir wählen eine glatte Abschneidefunktion $\chi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ mit $|\chi| \leq 1$, $\chi(t) = 1$ für $|t| \leq 1/2$, $\chi(t) = 0$ für $|t| \geq 2/3$ und $|\chi'| \leq 4$.
Sei nun

$$\chi_r(z) := \chi(\frac{\operatorname{dist}(z, M)}{r}).$$

Damit ist $\chi_r \equiv 1$ auf $U(r/2)$ und der Träger von χ_r liegt in $U(3r/4)$.
χ_r ist differenzierbar und es gilt

$$\|\nabla \chi_r\| \leq |\chi'| \cdot \frac{1}{r} \leq \frac{4}{r}.$$

Da V relativ kompakt ist, existiert $R > 0$ mit $V \subset B_R(0)$ und es folgt:

$$\begin{aligned}
\int_V \|\nabla \chi_r\|^p dV_{\mathbb{C}^n} &\leq 4^p \int_{V \cap U(r)} r^{-p} dV_{\mathbb{C}^n} \\
&\leq 4^p (2R)^{2l} r^{-p} \int_{\{x'' \in \mathbb{C}^k : \|x''\| < r\}} dV_{\mathbb{C}^k} \\
&= C(R, l, p) \cdot r^{2k-p}
\end{aligned}$$

Zu zeigen ist

$$\int_V f \wedge \overline{\partial} \varphi = (-1)^{q+1} \int_V g \wedge \varphi$$

für passend-dimensionale Testformen φ mit kompaktem Träger in V.

Wegen $\overline{\partial} f = g$ im Distributionssinne auf $V \setminus M$ gilt nun für eine beliebige Testform φ mit kompaktem Träger in V zunächst:

$$\begin{aligned}
\int_V f \wedge \overline{\partial}\varphi &= \int_V f \wedge \chi_r \overline{\partial}\varphi + \int_V f \wedge (1-\chi_r)\overline{\partial}\varphi \\
&= \int_V f \wedge \chi_r \overline{\partial}\varphi + \int_{V\setminus M} f \wedge (1-\chi_r)\overline{\partial}\varphi \\
&= \int_V f \wedge \chi_r \overline{\partial}\varphi + \int_{V\setminus M} f \wedge \overline{\partial}[(1-\chi_r)\varphi] - \int_{V\setminus M} f \wedge \overline{\partial}(1-\chi_r) \wedge \varphi \\
&= \int_V f \wedge \chi_r \overline{\partial}\varphi + (-1)^{q+1} \int_{V\setminus M} g \wedge (1-\chi_r)\varphi + \int_{V\setminus M} f \wedge \overline{\partial}\chi_r \wedge \varphi.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun zunächst

$$\int_V f \wedge \chi_r \overline{\partial}\varphi \quad \text{und} \quad \int_{V\setminus M} g \wedge \chi_r \varphi.$$

Wegen $|\chi_r| \leq 1$ sind

$$\begin{aligned}
|f \wedge \chi_r \overline{\partial}\varphi| &\leq |f \wedge \overline{\partial}\varphi| \in L^1, \\
|g \wedge \chi_r \varphi| &\leq |g \wedge \varphi| \in L^1.
\end{aligned}$$

Für $r \to 0$ gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
f \wedge \chi_r \overline{\partial}\varphi &\to 0, \\
g \wedge \chi_r \varphi &\to 0
\end{aligned}$$

punktweise und somit nach dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} \int_V f \wedge \chi_r \overline{\partial}\varphi &= 0, \\
\lim_{r\to 0} \int_{V\setminus M} g \wedge (1-\chi_r)\varphi &= \int_{V\setminus M} g \wedge \varphi = \int_V g \wedge \varphi.
\end{aligned}$$

Es bleibt noch

$$\lim_{r\to 0} \int_{V\setminus M} f \wedge \overline{\partial}\chi_r \wedge \varphi = 0$$

zu zeigen.

Wie bereits gesehen ist

$$\|\overline{\partial}\chi_r\|^p_{L^p(V)} \leq C(R,l,p) \cdot r^{2k-p} \ ,$$

was sich für $p \leq 2k$ gutartig verhält.

Es sei

$$p = 2k \quad \text{und} \quad q = \frac{2k}{2k-1}.$$

Wegen

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

gilt mit der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} \|f \wedge \overline{\partial}\chi_r \wedge \varphi\|_{L^1(V)} &= \lim_{r\to 0} \|f \wedge \overline{\partial}\chi_r \wedge \varphi\|_{L^1(U(r))} \\
&\leq \lim_{r\to 0} \|f \wedge \varphi\|_{L^q(U(r))} \|\overline{\partial}\chi_r\|_{L^p(V)} \\
&\leq C(R,l,p)^{1/p} \lim_{r\to 0} \|f \wedge \varphi\|_{L^q(U(r))}.
\end{aligned}$$

Wegen $f \in L^q$ ist weiterhin

$$\lim_{r\to 0} \|f \wedge \varphi\|_{L^q(U(r))} = 0$$

(vgl. dazu etwa [Alt], Lemma A 1.16), und das zeigt die Behauptung. □

Betrachten wir nun $U, V \subset \mathbb{C}^n$ offen,

$$\Psi : U \to V$$

biholomorph. Seien $f \in L^1_{0,q}(V)$, $g \in L^1_{0,q+1}(V)$ mit $\overline{\partial} f = g$ auf V im Distributionssinne und $\varphi \in C^\infty_{(n,n-q-1),c}(U)$ eine Testform mit kompaktem Träger in U. Dann ist

$$\eta := (\Psi^{-1})^* \varphi \in C^\infty_{(n,n-q-1),c}(V)$$

eine Testform mit kompaktem Träger in V und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_U \Psi^* f \wedge \overline{\partial}\varphi &= \int_U \Psi^* f \wedge \overline{\partial}\Psi^*\eta = \int_U \Psi^* f \wedge \Psi^*(\overline{\partial}\eta) \\
&= \int_U \Psi^*(f \wedge \overline{\partial}\eta) = \int_V f \wedge \overline{\partial}\eta \\
&= (-1)^{q+1} \int_V g \wedge \eta = (-1)^{q+1} \int_U \Psi^*(g \wedge \eta) \\
&= (-1)^{q+1} \int_U \Psi^* g \wedge \varphi,
\end{aligned}$$

da Ψ orientierungserhaltend ist. Also gilt auch

$$\overline{\partial}\Psi^* f = \Psi^* g$$

auf U im Distributionssinne. Da diese Betrachtung auch in umgekehrter Richtung geführt werden kann, ist dies äquivalent zu

$$\overline{\partial} f = g$$

auf V im Distributionssinne.

Damit überträgt sich das Konzept der $\overline{\partial}$-Distributionsableitung auf komplexe Mannigfaltigkeiten und aus Lemma 4.3.1 folgt:

Lemma 4.3.2. *Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ offen und $M \subset V$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit der Kodimension $k > 0$.*
Seien weiterhin $f \in L^{\frac{2k}{2k-1}}_{(0,q),loc}(V)$ und $g \in L^1_{(0,q+1),loc}(V)$ mit

$$\overline{\partial} f = g$$

auf $V \setminus M$ im Distributionssinne.
Dann gilt $\overline{\partial} f = g$ im Distributionssinne auf ganz V.

Beweis. Nach Lemma 4.3.1 und der vorangegangenen Betrachtung zum Verhalten unter biholomorphen Abbildungen existiert zu jedem Punkt $p \in V$ eine Umgebung $U(p) \subset\subset V$, so dass gilt:

$$\overline{\partial} f = g$$

auf $U(p)$ im Distributionssinne.

Nun ist noch zu zeigen, dass es sich bei „$\overline{\partial} f = g$ im Distributionssinne auf V“ tatsächlich um eine lokale Aussage handelt.

Sei dazu φ eine passend-dimensionale Testform mit kompaktem Träger $T_\varphi \subset\subset V$. Damit kann T_φ mit endlich vielen offenen Mengen $U_j \subset\subset V$, $j = 1, ..., N_\varphi$, überdeckt werden, in denen $\overline{\partial} f = g$ im Distributionssinne gilt.

Sei nun $\{\chi_j\}_{j=1}^{N_\varphi}$ eine Zerlegung der Eins zu dieser endlichen offenen Überdeckung. Es gelte also $\chi_j \in C^\infty_{cpt}(U_j)$ für alle $j \in \{1, ..., N_\varphi\}$ und

$$\sum_{j=1}^{N_\varphi} \chi_j(z) = 1$$

für alle $z \in T_\varphi$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int_V f \wedge \overline{\partial}\varphi &= \int_V f \wedge \overline{\partial}\left(\varphi \sum_{j=1}^{N_\varphi} \chi_j\right) = \sum_{j=1}^{N_\varphi} \int_V f \wedge \overline{\partial}(\varphi\chi_j) \\
&= \sum_{j=1}^{N_\varphi} \int_{U_j} f \wedge \overline{\partial}(\varphi\chi_j) = (-1)^{q+1} \sum_{j=1}^{N_\varphi} \int_{U_j} g \wedge (\varphi\chi_j) \\
&= (-1)^{q+1} \int_V g \wedge \left(\varphi \sum_{j=1}^{N_\varphi} \chi_j\right) = (-1)^{q+1} \int_V g \wedge \varphi,
\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. □

Dies überträgt sich auf analytische Ausnahmemengen:

Satz 4.3.3. *Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ offen und $A \subset V$ eine abgeschlossene l-dimensionale analytische Teilmenge der Kodimension $k = n - l > 0$.*
Seien weiterhin $f \in L^{\frac{2k}{2k-1}}_{(0,q),loc}(V)$ und $g \in L^1_{(0,q+1),loc}(V)$ mit

$$\overline{\partial} f = g$$

auf $V \setminus A$ im Distributionssinne.
Dann gilt $\overline{\partial} f = g$ im Distributionssinne auf ganz V.

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} A_l &:= \operatorname{Reg}(A), \\ S_l &:= \operatorname{Sing}(A). \end{aligned}$$

Dann ist A_l disjunkte Vereinigung komplexer Mannigfaltigkeiten der Dimension $\leq l$ und S_l eine abgeschlossene analytische Teilmenge von V der Dimension $\leq l-1$. Sei nun

$$\begin{aligned} A_{l-1} &:= \operatorname{Reg}(S_l), \\ S_{l-1} &:= \operatorname{Sing}(S_l). \end{aligned}$$

Induktiv definieren wir so für $j = l, ..., 0$ disjunkte Vereinigungen komplexer Mannigfaltigkeiten A_j der Dimension $\leq j \leq l$ mit

$$\bigcup_{j=0}^{l} A_j = A.$$

Für $j = 0, ..., l$ sei nun M_j die Vereinigung aller komplexer Mannigfaltigkeiten der Dimension j, die in A_k für $k \geq j$ enthalten sind. Damit ist M_j eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension j und es gilt:

$$\bigcup_{j=0}^{l} M_j = A.$$

Nach Lemma 4.3.2 setzt sich

$$\overline{\partial} f = g$$

im Distributionssinne von $V \setminus A$ auf $(V \setminus A) \cup M_l$ fort.
Erneute Anwendung des Lemmas liefert die Gleichung im Distributionssinne auf

$$(V \setminus A) \cup M_l \cup M_{l-1}$$

und induktiv folgt

$$\overline{\partial} f = g$$

auf ganz V im Distributionssinne. □

Zuletzt untersuchen wir noch, ob der Fortsetzungssatz 4.3.3 auch unter schwächeren Voraussetzungen gelten kann. Wir beziehen uns auf die Bezeichnungen aus Problem 4.2.5. Alle Überlegungen in diesem Abschnitt beziehen sich auf Funktionen, also das Problem im niedrigsten Grad $q = 0$.

Zunächst ist klar, dass für Kodimension $k = 1$ und $p < 2$ auch unter besten Voraussetzungen an g, also etwa $g \equiv 0$, die $\overline{\partial}$-Gleichung nicht fortsetzbar sein muss:

Beispiel 4.3.4. *In $\mathbb{C}^n$ sei $A := \{z : z_1 = 0\}$ und*

$$f(z) := \frac{1}{z_1}.$$

Dann ist $f \in L^p_{loc}(\mathbb{C}^n)$ für alle $p < 2$ und es gilt

$$\overline{\partial} f = 0$$

auf $\mathbb{C}^n \setminus A$. Angenommen, es gelte die Fortsetzung $\overline{\partial} f = 0$ auf ganz $\mathbb{C}^n$. Dann wäre f nach dem Regularitätssatz 4.1.1 holomorph auf $\mathbb{C}^n$, was natürlich nicht der Fall ist.

In der Situation $k = 1$ ist also $p \geq 2$ notwendig. Der Fortsetzungssatz 4.3.3 gilt aber für $p \geq \frac{2k}{2k-1} = 2$, ist in diesem Falle also optimal.

Um das Problem weiter zu beleuchten, betrachten wir eine Folgerung aus der Annahme, der Fortsetzungssatz würde gelten:

Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, $f \in L^1_{loc}(D)$, $g \in L^r_{(0,1),loc}(D)$ für ein $1 \leq r \leq 2n$, und es gelte

$$\overline{\partial} f = g$$

auf D im Distributionssinne.

Nach der Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel für integrierbare Formen, Theorem 3.5.1, gilt nun lokal, das heißt auf $U \subset\subset D$ mit passendem Rand, den wir etwa mit Lemma 3.4.6 wählen können:

$$f(z) = \mathbf{B}_0^{bU} f_{bU}(z) - \mathbf{B}_0^U g(z)$$

für fast alle $z \in U$.

Wie im Beweis von Theorem 4.1.1 ist

$$\mathbf{B}_0^{bU} f_{bU} \in C^\infty(U).$$

Weiterhin gilt nach der Regularitätsaussage über den Bochner-Martinelli-Koppelman-Operator (Lemma 3.2.2):

$$\mathbf{B}_0^U g \in L^p(U)$$

für alle p mit

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{r} - \frac{1}{2n}, \quad p \geq 1,$$

wobei wir die Konvention $1/p = 0$ für $p = \infty$ verwenden.

Wir fassen zusammen:

Lemma 4.3.5. *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, $1 \leq r \leq 2n$, $f \in L^1_{loc}(D)$, $g \in L^r_{(0,1),loc}(D)$ und es gelte*

$$\overline{\partial} f = g$$

auf D im Distributionssinne. Dann ist $f \in L^p_{loc}(D)$ für alle $p \geq 1$ mit

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{r} - \frac{1}{2n}.$$

Dabei verwenden wir die Konvention $1/p = 0$ für $p = \infty$.

Man beachte, dass diese Regularitätsaussage nur für Funktionen gilt.

Gehen wir nun einmal von dem günstigen Fall aus, die Ausnahmemenge A bestehe aus isolierten Singularitäten, Kodimension $k = n$. Nehmen wir weiterhin an, es sei $g \in L^1_{(0,1),loc}(D)$ und

$$f \notin L^q_{loc}(D)$$

für ein

$$q < \frac{2n}{2n-1}.$$

Dann kann $\overline{\partial} f = g$ nicht gelten, denn sonst wäre $f \in L^s_{loc}(D)$ nach Lemma 4.3.5 für alle

$$s < \frac{2n}{2n-1},$$

also insbesondere $f \in L^q_{loc}(D)$.

Im Fall Kodimension $k = n$, ist (für Funktionen) also

$$f \in \bigcup_{p < \frac{2n}{2n-1}} L^p_{loc}(D)$$

eine notwendige Voraussetzung für den Fortsetzungssatz 4.3.3. Zusammen mit Beispiel 4.3.4 rechtfertigt dies die Vermutung, dass sich die Voraussetzung $p \geq \frac{2k}{2k-1}$ in Satz 4.3.3 im Allgemeinen nicht abschwächen lässt.

5 Die grundlegende Homotopieformel für die Kugel

In diesem Kapitel entwickeln wir die grundlegende Homotopieformel für die Einheitskugel $\mathbb{D}$ in $\mathbb{C}^n$. Dabei folgen wir der Darstellung von Lieb und Michel in [LiMi].

Ausgangspunkt ist die Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel:

$$f = \mathbf{B}_q^{b\mathbb{D}} f - \mathbf{B}_q^{\mathbb{D}}(\overline{\partial} f) - \overline{\partial}\mathbf{B}_{q-1}^{\mathbb{D}} f.$$

Der Cauchy-Fantappiè-Kalkül gestattet es nun, das Randintegral $\mathbf{B}_q^{b\mathbb{D}}$ durch an $\mathbb{D}$ angepasste Integrale über $\mathbb{D}$ zu ersetzen. Damit ergibt sich die grundlegende Homotopieformel für Differentialformen $f \in L^1_{0,q}(\mathbb{D})$, $0 \le q \le n$, mit Distributionsableitung $\overline{\partial} f \in L^1_{0,q+1}(\mathbb{D})$:

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{P} f + \mathbf{T}_0(\overline{\partial} f) \quad \text{für } q = 0, \\ f &= \mathbf{T}_q(\overline{\partial} f) + \overline{\partial}\mathbf{S}_{q-1} f \quad \text{für } 1 \le q \le n. \end{aligned}$$

In Abschnitt 5.3 untersuchen wir die Interalkerne der Operatoren $\mathbf{T}_q$, $\mathbf{S}_q$. Es bezeichne $\mathcal{K}_q$ den Integralkern eines dieser Operatoren. Dann ist

$$\mathcal{K}_q = \widehat{\mathcal{K}_q} - B_{nq}$$

mit

$$|\widehat{\mathcal{K}_q}| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^2} \right| \quad \text{und} \quad |d_z \widehat{\mathcal{K}_q}| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3} \right|. \tag{51}$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{E}_0$ glatte Differentialformen,

$$\Phi(\zeta, z) = 1 - \langle \zeta, z \rangle = 1 - \sum_{j=1}^{n} \overline{\zeta_j} z_j$$

ist das modifizierte Levi-Polynom für die Kugel, und

$$\begin{aligned} P(\zeta, z) &= \|\zeta - z\|^2 + r(\zeta) r(z) \\ &= \|\zeta - z\|^2 + (1 - \|\zeta\|^2)(1 - \|z\|^2). \end{aligned}$$

B_{nq} ist der Bochner-Martinelli-Koppelman-Kern. Wir bezeichnen $\widehat{\mathcal{K}_q}$ als Hauptteil von $\mathcal{K}_q$, da die Regularität der Operatoren $\mathbf{S}_q$ bzw. $\mathbf{T}_q$ im Wesentlichen durch $\widehat{\mathcal{K}_q}$ bestimmt ist.

Über die Abschätzung (51) erhalten wir in Kapitel 6 Zugang zu Hölder-Abschätzungen für die Integraloperatoren $\mathbf{T}_q$ und $\mathbf{S}_q$.

In diesem Kapitel weichen wir lediglich bei der Ermittlung der Abschätzungen (51) von [LiMi] ab.

5.1 Cauchy-Fantappiè-Formen

Es sei $W \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ eine offene Menge. Punkte in W bezeichnen wir mit

$$(\zeta, z) = (\zeta_1, ..., \zeta_n, z_1, ..., z_n).$$

Definition 5.1.1. *Eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$\widetilde{a} = (a_1, ..., a_n) : W \to \mathbb{C}^n$$

heißt Leray-Abbildung (bzw. erzeugende Abbildung) auf W, falls

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\zeta, z)(\zeta_j - z_j) = 1$$

für alle $(\zeta, z) \in W$ gilt.

Ein wichtiges Beispiel für eine Leray-Abbildung ist

$$\widetilde{b}(\zeta, z) = \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\|\zeta - z\|^2} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta \to \mathbb{C}^n.$$

Dabei ist $\Delta = \{(\zeta, z) : \zeta = z\}$ die Diagonale in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Definition 5.1.2. *Es sei $\widetilde{a} = (a_1, ..., a_n)$ eine Leray-Abbildung auf $W \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Die $(1,0)$-Differentialform*

$$a = \sum_{j=1}^{n} a_j d\zeta_j$$

heißt Leray-Form (bzw. erzeugende Form) bezüglich $\widetilde{a}$.

Etwa ist

$$b(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\zeta_j} - \overline{z_j}}{\|\zeta - z\|^2} d\zeta_j$$

die Leray-Form bezüglich $\widetilde{b}$.

Definition 5.1.3. *Es sei a eine Doppeldifferentialform vom Typ $(1,0)$ in ζ und vom Typ $(0,0)$ in z. Für $0 \leq q \leq n-1$ heißen die Doppeldifferentialformen*

$$\Omega_q(a) = \frac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \binom{n-1}{q} a \wedge \left(\overline{\partial}_\zeta a\right)^{n-q-1} \wedge \left(\overline{\partial}_z a\right)^q$$

Cauchy-Fantappiè-Formen bezüglich a. Sei außerdem $\Omega_{-1} \equiv 0$ und $\Omega_n \equiv 0$.

Damit ist Ω_q eine Doppeldifferentialform vom Typ $(n, n-q-1)$ in ζ und vom Typ $(0,q)$ in z.

Für

$$b(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\zeta_j} - \overline{z_j}}{\|\zeta - z\|^2} d\zeta_j$$

erhalten wir die Bochner-Martinelli-Koppelman-Kerne (vgl. Definition 3.1.1):

$$\Omega_q(b) = B_{nq}.$$

Definition 5.1.4. *Es seien c und d zwei Doppeldifferentialformen vom Typ $(1,0)$ in ζ und $(0,0)$ in z. Für $0 \leq q \leq n-2$ heißen die Doppeldifferentialformen*

$$\begin{aligned} A_q(c,d) \quad &= \quad \frac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{\substack{0 \leq l \leq q \\ 0 \leq h \leq n-2-q}} \binom{l+h}{l} \binom{n-2-l-h}{q-l} c \wedge d \\ &\wedge \left(\overline{\partial}_\zeta c\right)^h \wedge \left(\overline{\partial}_\zeta d\right)^{n-2-q-h} \wedge \left(\overline{\partial}_z c\right)^l \wedge \left(\overline{\partial}_z d\right)^{q-l} \end{aligned}$$

Übergangsformen zwischen $\Omega_q(c)$ und $\Omega_q(d)$.
Sei außerdem $A_{-1} \equiv 0$, $A_{n-1} \equiv 0$ und $A_n \equiv 0$.

Nun gilt Koppelmans Homotopieformel ([LiMi], Theorem II.1.38):

Theorem 5.1.5. *Es sei $W \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ offen, und a, b seien Leray-Formen auf W. Dann gilt:*

$$\Omega_q(b) - \Omega_q(a) = (-1)^{q+1} \overline{\partial}_\zeta A_q(a,b) + \overline{\partial}_z A_{q-1}(a,b) \tag{52}$$

für $0 \leq q \leq n$.

Als Korollar notieren wir noch ([LiMi], Proposition II.1.39):

Korollar 5.1.6. *Es sei a eine Leray-Form. Dann gilt:*

$$\overline{\partial}_z \Omega_{q-1}(a) = (-1)^q \overline{\partial}_\zeta \Omega_q(a)$$

für $0 \leq q \leq n-1$.

5.2 Die grundlegende Homotopieformel für die Kugel

Die Einheitskugel in $\mathbb{C}^n$

$$\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \|\zeta\|^2 < 1\}$$

ist gegeben durch die streng plurisubharmonische Randfunktion

$$r(\zeta) = \|\zeta\|^2 - 1.$$

Das Levi-Polynom zu r ist

$$F(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\zeta_j}(\zeta_j - z_j) = \langle \zeta, \zeta - z \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das hermitesche Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$ bezeichnet. Außerdem benötigen wir das modifizierte Levi-Polynom

$$\Phi(\zeta, z) = F(\zeta, z) - r(\zeta) = 1 - \langle \zeta, z \rangle.$$

Nun gilt:

Lemma 5.2.1.

$$2Re\ \Phi(\zeta, z) = -r(\zeta) - r(z) + \|\zeta - z\|^2.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|\zeta - z\|^2 - r(\zeta) - r(z) &= \|\zeta\|^2 - \langle \zeta, z \rangle - \langle z, \zeta \rangle + \|z\|^2 + 2 - \|\zeta\|^2 - \|z\|^2 \\ &= 1 - \langle \zeta, z \rangle + \overline{1 - \langle \zeta, z \rangle} \end{aligned}$$

□

Damit ist die Differentialform

$$k_0(\zeta, z) = \frac{1}{\Phi(\zeta, z)} \partial r(\zeta) = \frac{1}{\Phi(\zeta, z)} \sum_{j=1}^{n} \overline{\zeta_j} d\zeta_j$$

glatt auf $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{D}$. Man beachte dabei $r(\zeta) < 0$ auf $\mathbb{D}$. Sei weiterhin

$$P(\zeta, z) = \|\zeta - z\|^2 + r(\zeta) r(z)$$

die modifizierte Norm und

$$b_0(\zeta, z) = \frac{1}{P(\zeta, z)} \sum_{j=1}^{n} (\overline{\zeta_j} - \overline{z_j}) d\zeta_j.$$

Damit ist auch b_0 glatt auf $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{D}$.

Zu k_0 bzw. k_0 und b_0 benötigen wir die Cauchy-Fantappiè bzw. Übergangsformen

$$\begin{aligned} K_q(\zeta, z) &= \Omega_q(k_0), \\ A_q(\zeta, z) &= A_q(k_0, b_0), \end{aligned}$$

die durch die Definitionen 5.1.3 und 5.1.4 gegeben sind.

Aus den Definitionen folgt sofort:

Lemma 5.2.2. *i.* $K_q(\zeta, z)$ *und* $A_q(\zeta, z)$ *sind glatt auf* $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{D}$.
ii. $K_0(\zeta, z)$ *ist holomorph in* z, *und* $K_q(\zeta, z) \equiv 0$ *für* $q \geq 1$.

Unser Ziel ist es, Koppelmans Homotopieformel 5.1.5 anzuwenden, um die Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel zu modifizieren. Leider sind die Formen k_0 und b_0 keine Leray-Formen, so dass die Homotopieformel nicht direkt anwendbar ist. Für $r(\zeta) = 0$, also auf dem Rand $b\mathbb{D}$, gilt aber

$$\begin{aligned} k_0(\zeta, z) &= k(\zeta, z) = \frac{1}{F(\zeta, z)} \partial r(\zeta), \\ b_0(\zeta, z) &= b(\zeta, z) = \frac{1}{\|\zeta - z\|^2} \sum_{j=1}^{n} (\overline{\zeta_j} - \overline{z_j}) d\zeta_j. \end{aligned}$$

Damit haben die Formen $\Omega_q(k_0)$ und $\Omega_q(k)$ bzw. $A_q(k_0, b_0)$ und $A_q(k, b)$ die gleiche Zurückziehung auf $b\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. Da es sich bei k und b um Leray-Formen nach Definition 5.1.2 handelt, können wir Koppelmans Homotopieformel 5.1.5 anwenden. Unter der Zurückziehung auf $b\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ folgt dann:

Lemma 5.2.3. *Auf* $b\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, *das heißt für die Zurückziehung der Differentialformen, gilt für* $0 \leq q \leq n$:

$$B_{nq} = \Omega_q(b) = K_q + (-1)^{q+1} \overline{\partial}_\zeta A_q + \overline{\partial}_z A_{q-1}. \tag{53}$$

Sei nun $f \in C^1_{0,q}(\overline{\mathbb{D}})$ eine stetig differenzierbare Differentialform. Die Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel 3.1.2 liefert:

$$f(z) = \int_{b\mathbb{D}} f(\zeta) \wedge B_{nq}(\zeta, z) - \int_{\mathbb{D}} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B_{nq}(\zeta, z) - \overline{\partial}_z \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta, z)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Nach Lemma 5.2.3 können wir B_{nq} im Randintegral durch die rechte Seite in (53) ersetzen. Das liefert für $q = 0$, wenn wir anschließend den Satz von Stokes verwenden:

$$\begin{aligned} \int_{b\mathbb{D}} f(\zeta) B_{n0}(\zeta, z) &= \int_{b\mathbb{D}} f(\zeta) K_0(\zeta, z) - \int_{b\mathbb{D}} f(\zeta) \overline{\partial}_\zeta A_0(\zeta, z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge K_0(\zeta, z) + \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) \overline{\partial}_\zeta K_0(\zeta, z) \\ &\quad - \int_{\mathbb{D}} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta A_0(\zeta, z) \end{aligned}$$

Dabei beachte man, dass die Integranden vom Typ $(n,\cdot)$ in ζ sind, so dass wir bei der Anwendung des Satzes von Stokes auf $d_\zeta = \overline{\partial}_\zeta$ zurückgreifen können. Die Regularität der Integranden ist durch Lemma 5.2.2 sichergestellt.

Das gleiche Verfahren liefert für $q \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{b\mathbb{D}} f(\zeta)\wedge B_{nq}(\zeta,z) &= (-1)^{q+1}\int_{b\mathbb{D}} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta A_q(\zeta,z) + \overline{\partial}_z\int_{b\mathbb{D}} f(\zeta)\wedge A_{q-1}(\zeta,z)\\
&= (-1)^{q+1}\int_{\mathbb{D}} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta A_q(\zeta,z) + \int_{\mathbb{D}} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z A_{q-1}(\zeta,z) +\\
&\quad (-1)^q\overline{\partial}_z\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta A_{q-1}(\zeta,z),
\end{aligned}$$

wobei wir hier noch $K_q \equiv 0$ für $q \geq 1$ nach Lemma 5.2.2 beachten.

Um die Notation zu vereinfachen, führen wir folgende Integralkerne ein:

Definition 5.2.4. *Für $1 \leq q \leq n$ seien*

$$\begin{aligned}
P(\zeta,z) &= \overline{\partial}_\zeta K_0(\zeta,z)\\
T_0(\zeta,z) &= K_0(\zeta,z) - \overline{\partial}_\zeta A_0(\zeta,z) - B_{n0}(\zeta,z)\\
T_q(\zeta,z) &= (-1)^{q+1}\overline{\partial}_\zeta A_q(\zeta,z) + \overline{\partial}_z A_{q-1}(\zeta,z) - B_{nq}(\zeta,z)\\
S_{q-1}(\zeta,z) &= (-1)^q\overline{\partial}_\zeta A_{q-1}(\zeta,z) - B_{n,q-1}(\zeta,z)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_0(\zeta,z) &= K_0(\zeta,z) - \overline{\partial}_\zeta A_0(\zeta,z)\\
\widehat{T}_q(\zeta,z) &= (-1)^{q+1}\overline{\partial}_\zeta A_q(\zeta,z) + \overline{\partial}_z A_{q-1}(\zeta,z)\\
\widehat{S}_{q-1}(\zeta,z) &= (-1)^q\overline{\partial}_\zeta A_{q-1}(\zeta,z)
\end{aligned}$$

Wir nennen $\widehat{T}_q$ bzw. $\widehat{S}_q$ Hauptteile der Integralkerne T_q bzw. S_q.

Wir bezeichnen die entsprechenden Integraloperatoren (Integration über $\mathbb{D}$) mit $\mathbf{P}$, $\mathbf{T}_q$, $\mathbf{S}_q$, $\widehat{\mathbf{T}}_q$ und $\widehat{\mathbf{S}}_q$. Es ist also etwa

$$\mathbf{P}f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\wedge P(\zeta,z).$$

Dazu folgender Hinweis: Es ist üblich, zu einem Kern $\mathcal{K}(\zeta,z)$ den zugehörigen Operator $\mathbf{K}$ durch

$$\mathbf{K}f(z) = (f,\mathcal{K})_\Omega(z) = \int_\Omega f(\zeta)\wedge *_\zeta\overline{\mathcal{K}(\zeta,z)}$$

zu definieren. Streng genommen ist also etwa

$$\widetilde{P}(\zeta,z) = (-1)^{q+1} *_\zeta \overline{P(\zeta,z)}$$

der Kern des Operators $\mathbf{P}$. Um die Notation möglichst einfach zu halten, wollen wir dennoch P, T_q, S_q, $\widehat{T}_q$ und $\widehat{S}_q$ als die Kerne der entsprechenden Operatoren bezeichnen.

Indem wir die Randintegrale in der Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel ersetzt haben, erhalten wir also:

Theorem 5.2.5. (Homotopieformel für die Kugel)
i. Sei $f \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$. Dann gilt:

$$f(z) = \mathbf{P}f(z) + \mathbf{T}_0(\overline{\partial} f)(z)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Die Funktion $\mathbf{P}f$ ist holomorph in $\mathbb{D}$.

ii. Sei $1 \leq q \leq n$ und $f \in C^1_{0,q}(\overline{\mathbb{D}})$. Dann gilt:

$$f(z) = \mathbf{T}_q(\overline{\partial} f)(z) + \overline{\partial}\mathbf{S}_{q-1} f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

Wir zitieren die einfachsten Regularitätseigenschaften ([LiMi], Proposition III.3.16):

Lemma 5.2.6. *Die Operatoren $\mathbf{P}$, $\mathbf{T}_q$ und $\mathbf{S}_{q-1}$ liefern stetige lineare Abbildungen zwischen den folgenden Räumen:*

$$\begin{array}{rl} \mathbf{P} : L^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D}), & \text{für } 1 < p < \infty, \\ \left.\begin{array}{r} \mathbf{T}_q : L^p_{0,q+1}(\mathbb{D}) \to L^r_{0,q}(\mathbb{D}) \\ \mathbf{S}_{q-1} : L^p_{0,q}(\mathbb{D}) \to L^r_{0,q-1}(\mathbb{D}) \end{array}\right\} & \text{für } 1 \leq p \leq \infty,\, \frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2n+2}. \end{array}$$

Ist f in C^k, so sind $\mathbf{P}f$, $\mathbf{T}_q f$ und $\mathbf{S}_q f$ ebenfalls in C^k.

Wie im Beweis der Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel für L^p-Formen können analog in Theorem 5.2.5 die Regularitätsvoraussetzungen an f wesentlich abgeschwächt werden. Durch Approximation mit einer Folge regulärer Funktionen folgt unter Verwendung von Lemma 5.2.6 (vgl. [LiMi], Theorem III.3.14"):

Theorem 5.2.7. (Homotopieformel für die Kugel)
i. Es sei $f \in L^1(\mathbb{D})$ mit $\overline{\partial} f \in L^1_{0,1}(\mathbb{D})$ im Distributionssinne. Dann ist

$$f = \mathbf{P}f + \mathbf{T}_0(\overline{\partial} f) \quad \text{in } L^1(\mathbb{D}).$$

ii. Sei $f \in L^1_{0,q}(\mathbb{D})$ mit $\overline{\partial} f \in L^1_{0,q+1}(\mathbb{D})$ im Distributionssinne. Dann ist

$$f = \mathbf{T}_q \overline{\partial} f + \overline{\partial}\mathbf{S}_{q-1} f \quad \text{in } L^1_{0,q}(\mathbb{D}).$$

Sind f und $\overline{\partial} f$ in L^p so liegen alle Formen aus i. und ii. in L^p.

Es sei auf folgende Besonderheit im Beweis von Theorem 5.2.7 (i.) hingewiesen: In Lemma 5.2.6 ist $\mathbf{P}$ als Abbildung von $L^1(\mathbb{D})$ nach $L^1(\mathbb{D})$ nicht unbedingt stetig. Dies erfordert besondere Aufmerksamkeit, verursacht aber keine Schwierigkeiten.

Aus Theorem 5.2.7 können wir die Existenz eines stetigen linearen Lösungsoperators für die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf der Kugel ablesen:

Theorem 5.2.8. *Sei $1 \leq q \leq n$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert ein stetiger linearer Operator*

$$\mathbf{S}_{q-1} : L^p_{0,q}(\mathbb{D}) \to L^r_{0,q-1}(\mathbb{D})$$

für alle $1 \leq r \leq \infty$ mit

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2n+2}$$

und

$$\overline{\partial}\mathbf{S}_{q-1} f = f$$

im Distributionssinne, falls $\overline{\partial} f = 0$ im Distributionssinne.
Weiterhin ist $\mathbf{S}_{q-1}$ stetig als Abbildung

$$\mathbf{S}_{q-1} : L^\infty_{0,q}(\mathbb{D}) \to C^{1/2}_{0,q-1}(\mathbb{D}),$$

wobei $C^{1/2}_{0,q-1}(\mathbb{D})$ den Raum der Differentialformen mit $1/2$-hölderstetigen Koeffizienten auf $\mathbb{D}$ bezeichnet.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind direkte Konsequenzen aus Lemma 5.2.6 und Theorem 5.2.7. Nur die Aussage über die Hölderstetigkeit ist noch zu zeigen. Hier helfen die L^∞ und Hölder-Abschätzungen, die wir in Kapitel 6 beweisen.

Nach Definition 5.2.4 ist

$$\mathbf{S}_{q-1} = \widehat{\mathbf{S}}_{q-1} - \mathbf{B}^{\mathbb{D}}_{q-1}.$$

Nach Korollar 6.2.7 (mit $|\alpha| = 0$) ist $\mathbf{B}^{\mathbb{D}}_{q-1}$ stetig als Abbildung

$$\mathbf{B}^{\mathbb{D}}_{q-1} : L^\infty_{0,q}(\mathbb{D}) \to C^\eta_{0,q-1}(\mathbb{D})$$

für alle $\eta < 1$, also insbesondere für $\eta = 1/2$.

Nach Lemma 6.4.7 (mit $|\alpha| = 0$) ist der Hauptteil $\widehat{\mathbf{S}}_{q-1}$ stetig als Abbildung

$$\widehat{\mathbf{S}}_{q-1} : L^\infty_{0,q}(\mathbb{D}) \to C^{1/2}_{0,q-1}(\mathbb{D}).$$

□

Wie der Beweis zeigt, ergibt sich die klassische Aussage über die 1/2-Hölderstetigkeit als einfacher Spezialfall unserer Untersuchungen in Kapitel 6.

Genauere Untersuchungen (vgl. [Kra]) zeigen: Der Operator $\mathbf{S}_{q-1}$ ist stetig als Abbildung

$$\mathbf{S}_{q-1} : L^p_{0,q}(\mathbb{D}) \to C^{\frac{1}{2}-\frac{n+1}{p}}_{0,q-1}(\mathbb{D})$$

für alle $p > 2n+2$.

Betrachten wir der Vollständigkeit halber nun noch die Homotopieformel im höchsten Grad $q = n$ etwas genauer: Für $f \in L^1_{0,n}(\mathbb{D})$ ist

$$f = \overline{\partial}\mathbf{S}_{n-1}f. \tag{54}$$

Dabei ist der Integralkern

$$S_{n-1}(\zeta, z) = -B_{n,n-1}(\zeta, z),$$

so dass wir in (54) die Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel wiederfinden:

$$f = -\overline{\partial}\mathbf{B}^{\mathbb{D}}_{n-1}f.$$

In diesem Fall erhalten wir einen Lösungsoperator für die $\overline{\partial}$-Gleichung auf beliebigen Gebieten und mit stärkeren Regularitätseigenschaften:

Theorem 5.2.9. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ offen und beschränkt. Dann definiert der Operator $\mathbf{B}^D_{n-1}$ eine stetige lineare Abbildung*

$$\mathbf{B}^D_{n-1} : L^p_{0,n}(D) \to L^r_{0,n-1}(D)$$

für alle $1 \leq r \leq \infty$ mit

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2n}.$$

Es gilt

$$-\overline{\partial}\mathbf{B}^D_{n-1}f = f$$

im Distributionssinne. Weiterhin ist $\mathbf{B}^D_{n-1}$ stetig als Abbildung

$$\mathbf{B}^D_{n-1} : L^\infty_{0,n}(D) \to C^\eta_{0,n-1}(D),$$

für alle $\eta < 1$, wobei $C^\eta_{0,n-1}(D)$ den Raum der $(0, n-1)$-Formen mit η-hölderstetigen Koeffizienten auf D bezeichnet.

Beweis. Die Aussage ergibt aus der BMK-Formel für L^p-Formen (Theorem 3.5.1) unter Beachtung von $B_{nn} \equiv 0$ und $\overline{\partial}f = 0$ für eine $(0, n)$-Form f. Dabei kann auf den glatten Rand $bD \in C^1$ verzichtet werden: Sei etwa $V \subset\subset \mathbb{C}^n$ mit glattem Rand $bV \in C^1$ und

$$D \subset\subset V \subset\subset \mathbb{C}^n.$$

Für $f \in L^p_{0,n}(D)$ sei $\overline{f} \in L^p_{0,n}(V)$ die Fortsetzung mit 0. Dann ist nach Theorem 3.5.1 (angewandt auf V):

$$-\overline{\partial}\mathbf{B}^D_{n-1}f = -\overline{\partial}\mathbf{B}^V_{n-1}\overline{f} = \overline{f} = f$$

im Distributionssinne auf D. Die L^p-Regularität des Operators $\mathbf{B}^D_{n-1}$ folgt aus Lemma 3.2.2 und die Hölderstetigkeit aus Korollar 6.2.7. $\square$

5.3 Die Hauptteile $\widehat{T}_q$ und $\widehat{S}_q$ der Integralkerne T_q und S_q

Wir führen nun isotrope Integralkerne nach Lieb und Michel (vgl. [LiMi], Definition I.5.10) ein. Wir benötigen diesen Begriff nur in sehr spezieller Form, halten uns aber dennoch an die allgemeine Definition, um in der Notation konsistent mit [LiMi] zu bleiben.

Sei ρ eine nichtnegative Funktion auf $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, für die folgendes gilt:
ρ ist glatt auf $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$, $\Delta = \{(\zeta, z) : \zeta = z\}$, ρ^2 ist glatt auf ganz $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, es ist

$$\rho(\zeta, z) = \rho(z, \zeta),$$

und für jede kompakte Teilmenge $K \subset\subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ existieren Konstanten c_K und C_K mit

$$c_K \|\zeta - z\| \leq \rho(\zeta, z) \leq C_K \|\zeta - z\|$$

für alle $(\zeta, z) \in K$.

Eine Doppeldifferentialform $\mathcal{K}(\zeta, z)$ auf einer offenen Menge $W \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ wird bezeichnet mit $\mathcal{E}_l(\zeta, z)$:

$$\mathcal{K}(\zeta, z) = \mathcal{E}_l(\zeta, z), \quad l \in \mathbb{Z},$$

falls folgendes gilt:

1. Ist $l \geq 0$, so ist $\mathcal{K}$ glatt auf W und es gilt

$$|\mathcal{K}(\zeta, z)| \leq \text{const} \cdot \rho^l(\zeta, z)$$

lokal in Nähe der Diagonalen Δ.

2. Ist $l < 0$, so ist $\mathcal{K}$ glatt außerhalb der Diagonalen Δ und besitzt eine Darstellung

$$\mathcal{K}(\zeta, z) = \frac{\mathcal{E}_m(\zeta, z)}{\rho^{2t}}$$

für ein m mit $m \geq 0$ und $m - 2t = l$ lokal in Nähe der Diagonalen Δ.

Definition 5.3.1. *Eine Differentialform $\mathcal{E}_l(\zeta, z)$ heißt isotroper Kern der Ordnung l und vom Typ $j = l + 2n$.*

Wir erwähnen noch die einfachsten Eigenschaften:

Ein Kern der Ordnung l ist auch von der Ordnung $l - 1$, so dass es konsequent ist, von Kernen der Ordnung $\geq l$ und vom Typ $\geq l + 2n$ zu sprechen.

Für einen Kern der Ordnung l gilt

$$|\mathcal{E}_l(\zeta, z)| \lesssim \rho^l(\zeta, z) \lesssim \|\zeta - z\|^l \tag{55}$$

lokal in Nähe der Diagonalen Δ.

Differentialoperatoren der Ordnung 1 in $\zeta, \overline{\zeta}, z, \overline{z}$ vermindern die Ordnung eines Integralkernes um 1:

$$D\mathcal{E}_l(\zeta, z) = \mathcal{E}_{l-1}(\zeta, z).$$

Der Bochner-Martinelli-Koppelman-Kern ist nach Definition 3.1.1 (gleichmäßig) isotrop vom Typ 1 und der Ordnung $1 - 2n$:

$$B_{nq}(\zeta, z) = \mathcal{E}_{1-2n}(\zeta, z).$$

Nun wollen wir den Hauptteil der Integralkerne T_q und S_q bestimmen. Dazu erinnern wir an folgende Definitionen:

$$\begin{aligned} r(\zeta) &= \|\zeta\|^2 - 1 && (56) \\ \Phi(\zeta, z) &= 1 - \langle \zeta, z \rangle && (57) \\ P(\zeta, z) &= \|\zeta - z\|^2 + r(\zeta)r(z) && (58) \end{aligned}$$

und vereinbaren die Notation:

$$r^*(\zeta) = r(z).$$

Damit gilt:

Lemma 5.3.2. *Auf $\overline{\mathbb{D}} \times \overline{\mathbb{D}}$ gelten die folgenden Abschätzungen:*

1. $|\mathcal{E}_k(\zeta, z)| \lesssim P^{k/2}(\zeta, z)$ *für* $k \geq 1$.
2. $|r(\zeta)| \lesssim P^{1/2}(\zeta, z)$ *und* $|r^*(\zeta)| = |r(z)| \lesssim P^{1/2}(\zeta, z)$.
3. $|r(\zeta)| \lesssim |\Phi(\zeta, z)|$ *und* $|r^*(\zeta)| = |r(z)| \lesssim |\Phi(\zeta, z)|$.
4. $P(\zeta, z) \lesssim |\Phi(\zeta, z)|$.
5. $|\Phi(\zeta, z)| \lesssim P^{1/2}(\zeta, z)$.

Beweis. Wir verwenden implizit die Kompaktheit von $\overline{\mathbb{D}} \times \overline{\mathbb{D}}$.
1. Aus (55) und (58) folgt:

$$|\mathcal{E}_k(\zeta, z)| \lesssim \|\zeta - z\|^k \leq \left(\|\zeta - z\|^2 + r(\zeta)r(z)\right)^{k/2} = P^{k/2}(\zeta, z).$$

2. Wir wollen zeigen, dass die Funktion

$$f(\zeta, z) := \frac{|r(\zeta)|}{P^{1/2}(\zeta, z)}$$

auf $\overline{\mathbb{D}} \times \overline{\mathbb{D}}$ stetig ist.

Wegen $P(\zeta, z) \neq 0$, falls $\zeta \neq z$, reicht es, die Situation $z \to \zeta$ zu untersuchen:

$$\lim_{z \to \zeta} f(\zeta, z) \le \lim_{z \to \zeta} \frac{|r(\zeta)|}{(r(\zeta) r(z))^{1/2}} = 1.$$

Die zweite Aussage folgt analog.

3. Mit Lemma 5.2.1 gilt:

$$|r(\zeta)| + |r(z)| \le \|\zeta - z\|^2 - r(\zeta) - r(z) = 2\mathrm{Re}\ \Phi(\zeta, z) \le 2|\Phi(\zeta, z)|.$$

4. Wieder nutzen wir Lemma 5.2.1:

$$\begin{aligned} P(\zeta, z) &\le \|\zeta - z\|^2 - r(\zeta) \le \|\zeta - z\|^2 - r(\zeta) - r(z) \\ &= 2\mathrm{Re}\ \Phi(\zeta, z) \le 2|\Phi(\zeta, z)|. \end{aligned}$$

5. Unter Verwendung der Aussagen 1 und 2 gilt:

$$\begin{aligned} |\Phi(\zeta, z)| &= |1 - \langle \zeta, z \rangle| = |\langle \zeta, \zeta \rangle - r(\zeta) - \langle \zeta, z \rangle| \\ &= |\langle \zeta, \zeta - z \rangle - r(\zeta)| \le \mathcal{E}_1(\zeta, z) + |r(\zeta)| \\ &\lesssim P^{1/2}(\zeta, z) + P^{1/2}(\zeta, z). \end{aligned}$$

□

Jetzt sind wir in der Lage, die Hauptteile $\widehat{T}_q$ bzw. $\widehat{S}_q$ der Integralkerne T_q bzw. S_q in günstiger Form für die Hölder-Abschätzungen im nächsten Kapitel abzuschätzen:

Lemma 5.3.3. *Sei $\mathcal{K}$ einer der Integralkerne $\widehat{S}_q$, $\widehat{T}_q$, für $0 \le q \le n-1$. Dann gilt*

$$|\mathcal{K}| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^2} \right| \tag{59}$$

und

$$|d_z \mathcal{K}| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3} \right|. \tag{60}$$

In der Notation nach Lieb und Michel ([LiMi], Definition III.5.11) folgt aus (59), dass es sich bei den Integralkernen $\widehat{T}_q$ und $\widehat{S}_q$ um zulässige Kerne vom Typ ≥ 1 handelt (vgl. [LiMi], Proposition III.5.13).

Beweis. Wegen (vgl. Definition 5.2.4)

$$\begin{aligned} \widehat{T}_0(\zeta, z) &= K_0(\zeta, z) - \overline{\partial}_\zeta A_0(\zeta, z), \\ \widehat{T}_q(\zeta, z) &= (-1)^{q+1} \overline{\partial}_\zeta A_q(\zeta, z) + \overline{\partial}_z A_{q-1}(\zeta, z), \quad \text{für } 1 \le q \le n, \\ \widehat{S}_q(\zeta, z) &= (-1)^{q+1} \overline{\partial}_\zeta A_q(\zeta, z), \quad \text{für } 0 \le q \le n-1, \end{aligned}$$

müssen wir K_0, $\overline{\partial}_\zeta A_q$ und $\overline{\partial}_z A_q$ untersuchen. Man beachte $A_{n-1} \equiv A_n \equiv 0$.

Zunächst berechnen wir

$$k_0 \wedge (\overline{\partial}_\zeta k_0)^m = \frac{\partial_\zeta r}{\Phi} \wedge \left(-\frac{\overline{\partial}_\zeta \Phi \wedge \partial_\zeta r}{\Phi^2} + \frac{\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta r}{\Phi}\right)^m \tag{61}$$

$$= \frac{\partial_\zeta r}{\Phi} \wedge \left(\frac{\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta r}{\Phi}\right)^m = \frac{\mathcal{E}_0}{\Phi^{1+m}}, \tag{62}$$

wegen $\partial_\zeta r \wedge \partial_\zeta r = 0$, da $\partial_\zeta r$ eine 1-Form ist.
Analog ist

$$b_0 \wedge (\overline{\partial}_\zeta b_0)^m \wedge (\overline{\partial}_z b_0)^p = \frac{\partial_\zeta \overline{F}}{P} \wedge \left(-\frac{\overline{\partial}_\zeta P \wedge \partial_\zeta \overline{F}}{P^2} + \frac{\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \overline{F}}{P}\right)^m \wedge \tag{63}$$

$$\wedge \left(-\frac{\overline{\partial}_z P \wedge \partial_\zeta \overline{F}}{P^2} + \frac{\overline{\partial}_z \partial_\zeta \overline{F}}{P}\right)^p \tag{64}$$

$$= \frac{\partial_\zeta \overline{F}}{P} \wedge \left(\frac{\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \overline{F}}{P}\right)^m \wedge \left(\frac{\overline{\partial}_z \partial_\zeta \overline{F}}{P}\right)^p \tag{65}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_1}{P^{1+m+p}}, \tag{66}$$

wegen

$$\partial_\zeta \overline{F} = \sum_{j=1}^n \left(\overline{\zeta_j} - \overline{z_j}\right) d\zeta_j = \mathcal{E}_1.$$

Nach Definition 5.1.3 und (62) folgt nun:

$$K_0 = \Omega_0(k_0) = \mathrm{const} \cdot k_0 \wedge (\overline{\partial}_\zeta k_0)^{n-1} = \frac{\mathcal{E}_0}{\Phi^n}. \tag{67}$$

Lemma 5.3.2 (4.) liefert weiter

$$|K_0| \lesssim \left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-2}\Phi^2}\right| \lesssim \left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^2}\right|. \tag{68}$$

Man beachte $|P| \lesssim 1$ bzw. $|\Phi| \lesssim 1$ und, dass $\mathcal{E}_l$ in solchen Rechnungen von Term zu Term verschiedene Differentialformen bezeichnet.

Nach Definition 5.1.4 und wegen $\overline{\partial}_z k_0 = 0$ ist

$$\begin{aligned} A_q &= A_q(k_0, b_0) = \sum_{\substack{0 \le l \le q \\ 0 \le h \le n-2-q}} \mathrm{const}(l,h) \cdot k_0 \wedge b_0 \wedge \\ &\qquad \wedge \left(\overline{\partial}_\zeta k_0\right)^h \wedge \left(\overline{\partial}_\zeta b_0\right)^{n-2-q-h} \wedge \left(\overline{\partial}_z k_0\right)^l \wedge \left(\overline{\partial}_z b_0\right)^{q-l} \\ &= \sum_{0 \le h \le n-2-q} \mathrm{const}(l,h) \cdot k_0 \wedge b_0 \wedge \left(\overline{\partial}_\zeta k_0\right)^h \wedge \left(\overline{\partial}_\zeta b_0\right)^{n-2-q-h} \wedge \left(\overline{\partial}_z b_0\right)^q. \end{aligned}$$

Mit (62) und (66) ergibt sich eine Darstellung:

$$A_q = \sum_{0 \leq h \leq n-2-q} \frac{\mathcal{E}_1}{\Phi^{1+h} P^{1+n-2-h}} \tag{69}$$

$$= \sum_{t=1}^{n-1-q} \frac{\mathcal{E}_1}{P^{n-t}\Phi^t}. \tag{70}$$

Wir benötigen noch:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_\zeta P &= \overline{\partial}_\zeta \left(\|\zeta - z\|^2 + r(\zeta) r(z) \right) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 r^* \\
\overline{\partial}_z P &= \overline{\partial}_z \left(\|\zeta - z\|^2 + r(\zeta) r(z) \right) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 r \\
\overline{\partial}_\zeta \Phi &= \overline{\partial}_\zeta \left(1 - \langle \zeta, z \rangle\right) = \mathcal{E}_0 \\
\overline{\partial}_z \Phi &= \overline{\partial}_z \left(1 - \langle \zeta, z \rangle\right) = 0.
\end{aligned}$$

Damit berechnen wir aus (70):

$$\overline{\partial}_\zeta A_q = \sum_{t=1}^{n-1-q} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t}\Phi^t} + \frac{\mathcal{E}_2}{P^{n-t+1}\Phi^t} + \frac{\mathcal{E}_1 r^*}{P^{n-t+1}\Phi^t} + \frac{\mathcal{E}_1}{P^{n-t}\Phi^{t+1}} \right). \tag{71}$$

Mit Lemma 5.3.2 (1., 2. und 5.) folgt

$$\begin{aligned}
|\overline{\partial}_\zeta A_q| &\lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q} \left(\left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t}\Phi^t} \right| + \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1/2}\Phi^{t+1}} \right| \right) \\
&\lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1/2}\Phi^{t+1}} \right|,
\end{aligned}$$

und mit Lemma 5.3.2 (4.) ergibt sich endlich:

$$|\overline{\partial}_\zeta A_q| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^2} \right|. \tag{72}$$

Analog berechnen wir aus (70):

$$\overline{\partial}_z A_q = \sum_{t=1}^{n-1-q} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t}\Phi^t} + \frac{\mathcal{E}_2}{P^{n-t+1}\Phi^t} + \frac{\mathcal{E}_1 r}{P^{n-t+1}\Phi^t} \right). \tag{73}$$

Mit Lemma 5.3.2 (1., 2. und 5.) folgt:

$$|\overline{\partial}_z A_q| \lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t}\Phi^t} \right| \lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1/2}\Phi^{t+1}} \right|.$$

Mit Lemma 5.3.2 (4.) ergibt sich also auch hier:

$$|\overline{\partial}_z A_q| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^2} \right| . \tag{74}$$

Fassen wir (68), (72) und (74) zusammen, so ist die erste Aussage (59) des Lemmas gezeigt.

Ausgehend von (67), (71) und (73) ermitteln wir nun noch Abschätzungen für $d_z K_0$, $d_z \overline{\partial}_\zeta A_q$ und $d_z \overline{\partial}_z A_q$. Dazu verwenden wir:

$$\begin{aligned}
d_z P &= d_z \left(\|\zeta - z\|^2 + r(\zeta) r(z) \right) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 r \ , \\
d_z \Phi &= d_z \left(1 - \langle \zeta, z \rangle\right) = \mathcal{E}_0 .
\end{aligned}$$

Aus (67) folgt:

$$d_z K_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\Phi^n} + \frac{\mathcal{E}_0}{\Phi^{n+1}} .$$

Mit Lemma 5.3.2 (4.) ergibt sich:

$$|d_z K_0| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3}\Phi^3} \right| + \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-2}\Phi^3} \right| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3} \right| . \tag{75}$$

Wir werden Lemma 5.3.2 ab sofort ohne explizite Erwähnung einsetzen. Für $d_z \overline{\partial}_\zeta A_q$ und $d_z \overline{\partial}_z A_q$ benötigen wir die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t}\Phi^t} \right| &\lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1}\Phi^{t+2}} \right| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-2}\Phi^3} \right| , \\
\sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t}\Phi^{t+1}} \right| &\lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1/2}\Phi^{t+2}} \right| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3} \right| , \\
\sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_1}{P^{n-t+1}\Phi^t} \right| &\lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1/2}\Phi^{t+2}} \right| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3} \right| , \\
\sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_1}{P^{n-t}\Phi^{t+2}} \right| &\lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1/2}\Phi^{t+2}} \right| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3} \right| , \\
\sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_2}{P^{n-t+1}\Phi^{t+1}} \right| &\lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1/2}\Phi^{t+2}} \right| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3} \right| , \\
\sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_3}{P^{n-t+2}\Phi^t} \right| &\lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q} \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1/2}\Phi^{t+2}} \right| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3} \right| .
\end{aligned}$$

Weiter ist auch

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n-1-q}\left|\frac{\mathcal{E}_0 r}{P^{n-t+1}\Phi^t}\right| &\lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q}\left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1/2}\Phi^{t+2}}\right| \lesssim \left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3}\right|,\\
\sum_{t=1}^{n-1-q}\left|\frac{\mathcal{E}_1 r}{P^{n-t+1}\Phi^{t+1}}\right| &\lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q}\left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1/2}\Phi^{t+2}}\right| \lesssim \left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3}\right|,\\
\sum_{t=1}^{n-1-q}\left|\frac{\mathcal{E}_2 r}{P^{n-t+2}\Phi^t}\right| &\lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q}\left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1/2}\Phi^{t+2}}\right| \lesssim \left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3}\right|,\\
\sum_{t=1}^{n-1-q}\left|\frac{\mathcal{E}_1 r r^*}{P^{n-t+2}\Phi^t}\right| &\lesssim \sum_{t=1}^{n-1-q}\left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t-1/2}\Phi^{t+2}}\right| \lesssim \left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3}\right|.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass für r und r^* die gleichen Abschätzungen gelten.
Damit folgt aus (71):

$$\begin{aligned}
|d_z\overline{\partial}_\zeta A_q| &= \left|d_z\sum_{t=1}^{n-1-q}\left(\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t}\Phi^t}+\frac{\mathcal{E}_2}{P^{n-t+1}\Phi^t}+\frac{\mathcal{E}_1 r^*}{P^{n-t+1}\Phi^t}+\frac{\mathcal{E}_1}{P^{n-t}\Phi^{t+1}}\right)\right|\\
&\leq \sum_{t=1}^{n-1-q}\left(\left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t}\Phi^t}\right|+\left|\frac{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_0 r}{P^{n-t+1}\Phi^t}\right|+\left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t}\Phi^{t+1}}\right|\right.\\
&\qquad +\left|\frac{\mathcal{E}_1}{P^{n-t+1}\Phi^t}\right|+\left|\frac{\mathcal{E}_3+\mathcal{E}_2 r}{P^{n-t+2}\Phi^t}\right|+\left|\frac{\mathcal{E}_2}{P^{n-t+1}\Phi^{t+1}}\right|\\
&\qquad +\left|\frac{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_0 r^*}{P^{n-t+1}\Phi^t}\right|+\left|\frac{\mathcal{E}_2 r^*+\mathcal{E}_1 r^* r}{P^{n-t+2}\Phi^t}\right|+\left|\frac{\mathcal{E}_1 r^*}{P^{n-t+1}\Phi^{t+1}}\right|\\
&\qquad \left.+\left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t}\Phi^{t+1}}\right|+\left|\frac{\mathcal{E}_2+\mathcal{E}_1 r}{P^{n-t+1}\Phi^{t+1}}\right|+\left|\frac{\mathcal{E}_1}{P^{n-t}\Phi^{t+2}}\right|\right)\\
&\lesssim \left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3}\right|.
\end{aligned}$$

Analog folgt aus (73):

$$\begin{aligned}
|d_z\overline{\partial}_z A_q| &= \left|d_z\sum_{t=1}^{n-1-q}\left(\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-t}\Phi^t}+\frac{\mathcal{E}_2}{P^{n-t+1}\Phi^t}+\frac{\mathcal{E}_1 r}{P^{n-t+1}\Phi^t}\right)\right|\\
&\lesssim \left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3}\right|.
\end{aligned}$$

Somit ist zusammen mit (75) auch (60) gezeigt. $\square$

6 Hölder-Regularität

Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wie bekannt ist, liefert der BMK-Operator

$$\mathbf{B}_q^D f(z) = \int_D f(\zeta) \wedge K_q(\zeta, z)$$

wegen

$$K_q(\zeta, z) \lesssim \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n-1}}$$

für $2n < p < \infty$ eine stetige Abbildung

$$\mathbf{B}_q^D : L^p_{0,q+1}(D) \to C_{0,q}^{1-\frac{2n}{p}}(D).$$

Für $p = \infty$ ist die Abbildung stetig von $L^\infty_{0,q+1}(D)$ nach $C^\alpha_{0,q}(D)$ für alle $\alpha \in (0,1)$. Diese Regularität ergibt sich wie im Beweis von Korollar 6.2.7 unmittelbar aus folgender Aussage (vgl. [He1], Hilfssatz 15):

Lemma 6.0.1. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, ..., n\}$ und $D \subset\subset \mathbb{C}^n$. Der Integraloperator S sei definiert durch*

$$Sf(u) := \int_D f(z) \frac{\overline{z_j} - \overline{u_j}}{\|z - u\|^{2n}} dV(z).$$

Ist $2n < p < \infty$, so ist S eine stetige Abbildung von $L^p(D)$ nach $C^\alpha(D)$ für jedes $\alpha \in (0, 1 - \frac{2n}{p}]$. Für $p = \infty$ ist S stetig von $L^\infty(D)$ nach $C^\alpha(D)$ für alle $\alpha \in (0,1)$.

Wir werden diese Aussage nur in Dimension $n = 1$ für die Untersuchung von Funktionen mit kompaktem Träger in Abschnitt 6.5 verwenden. In höheren Dimensionen ist die Voraussetzung $p > 2n$ zu restriktiv.
Wir benötigen spezielle Abschätzungen für eine Klasse von Funktionen, die zwar nur in $L^{1+}(D)$ liegen, deren Singularität aber eine vorgegebene Struktur aufweist. Dazu definieren wir die folgenden gewichteten L^p-Räume:

Definition 6.0.2. *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ mit $0 \le \alpha_j < 2$, $j = 1, ..., n$. Für eine messbare Funktion f auf D sei:*

$$\|f\|_{L^{\infty,\alpha}} = \inf\{c > 0 : |f(\zeta)| \prod_{j=1}^n |\zeta_j|^{\alpha_j} \le c \text{ für fast alle } \zeta \in D\}$$

und

$$L^{\infty,\alpha}(D) = \{f : \|f\|_{L^{\infty,\alpha}} < \infty\}.$$

Weiterhin bezeichnen wir mit $L^{\infty,\alpha}_{0,q}(D)$ den Raum der $(0,q)$-Formen auf D mit Koeffizienten in $L^{\infty,\alpha}$, versehen mit der Norm

$$\|f\|_{L^{\infty,\alpha}} = \sum_{|J|=q} \|f_J\|_{L^{\infty,\alpha}}$$

für $f = \sum_{|J|=q} f_J d\overline{\zeta}_J$. $(L^{\infty,\alpha}_{0,q}(D), \|\cdot\|_{L^{\infty,\alpha}_{0,q}(D)})$ ist ein Banachraum.

Wir zeigen folgende Regularitätsaussage: Ist $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n < 1$, so liefert die BMK-Transformation einen stetigen linearen Operator

$$\mathbf{B}_q^D : L^{\infty,\alpha}_{0,q+1}(D) \to C^{\eta}_{0,q}(D)$$

für $\eta = 1 - |\alpha|$, falls $|\alpha| > 0$, und für alle $\eta < 1$, falls $|\alpha| = 0$ (Korollar 6.2.7).

Wir wollen Korollar 6.2.7 mit Lemma 6.0.1 vergleichen. Sei dazu $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ relativ kompakt, $0 \le \alpha_1 < 1$, $\alpha = (\alpha_1, 0, ..., 0)$ und

$$f_\alpha(z) = z_1^{-\alpha_1} d\overline{z_1}.$$

Dann ist $f_\alpha \in L^{(2/\alpha_1)^-}_{0,1}(D)$ und aus Lemma 6.0.1 folgt:

$$\mathbf{B}_0^D f_\alpha \in C^{(1-n\alpha_1)^-}(D),$$

falls $\alpha_1 < 1/n$. Andererseits ist $f_\alpha \in L^{\infty,\alpha}_{0,1}(D)$ und Korollar 6.2.7 liefert:

$$\mathbf{B}_0^D f_\alpha \in C^{1-\alpha_1}(D).$$

Korollar 6.2.7 ist eine einfache Folgerung aus den folgenden (singulären) Hölder-Abschätzungen: Für beliebiges $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ mit $0 \le \alpha_j < 2$ gilt:

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{B}_q^D f(z) - \mathbf{B}_q^D f(z')\right| \;&\le\; C(\alpha,\delta)\|f\|_{L^{\infty,\alpha}} \left(\frac{1}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}} + \frac{1}{|z_n'|^{\alpha_n-\delta_n}} \right) \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j} \\ &\quad \cdot \left\{ \begin{array}{ll} |z_n - z_n'|^{\eta} & ,\eta < 1 \\ |z_n - z_n'|(1 + |\log||z_n - z_n'|) & ,\eta = 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

für alle $z = (z_1, ..., z_n), z' = (z_1, ..., z_{n-1}, z_n') \in \mathbb{C}^n$ (mit $|z_j| \ne 0$, falls $\delta_j < \alpha_j$) und alle $f \in L^{\infty,\alpha}_{0,q+1}(D)$. Dabei kann $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n)$ mit $0 \le \delta_j \le \alpha_j$ und $0 < \eta = 1 - (\delta_1 + ... + \delta_n) \le 1$ frei gewählt werden (Lemma 6.2.5). Mit der Wahl $\delta_j = \alpha_j$, was für $|\alpha| < 1$ möglich ist, folgt Korollar 6.2.7.

Diese Abschätzungen erweisen sich als sehr nützlich: Durch Multiplikation von $\mathbf{B}_q^D f$ mit geeigneten holomorphen Funktionen, die auf $\{z : \prod_{j=1}^n z_j = 0\}$ von passender Ordnung verschwinden, ergeben sich hölderstetige Formen.

Außerdem lassen sich aus Lemma 6.2.5 Aussagen über die lokale Hölderstetigkeit der Koeffizienten von $\mathbf{B}_q^D f$ ablesen: Seien etwa $\epsilon > 0$, $m \in \{1, ..., n-1\}$, $P \in D$ ein Punkt mit $|P_j| \ge 2\epsilon$ für alle $j \in \{1, ..., m\}$ und

$$0 < \alpha_P = \alpha_{m+1} + ... + \alpha_n < 1.$$

Für $z \in B_\epsilon(P)$ ist dann $|z_j| \ge \epsilon$, also

$$|z_j|^{-\alpha_j} \lesssim 1 \quad \text{für } j \in \{1, ..., m\}.$$

Die Anwendung von Lemma 6.2.5 mit $\delta = (0, ..., 0, \alpha_m, ..., \alpha_n)$ und $\eta_P = 1 - \alpha_P$ liefert nun:

$$|\mathbf{B}_q^D f(z) - \mathbf{B}_q^D f(z')| \lesssim |z_n - z_n'|^{\eta_P} \prod_{j=1}^{m} |z_j|^{-\alpha_j} \lesssim |z_n - z_n'|^{\eta_P} \tag{76}$$

für alle $z = (z_1, ..., z_n), z' = (z_1, ..., z_{n-1}, z_n') \in B_\epsilon(P)$ und alle $f \in L^{\infty,\alpha}_{0,q+1}(D)$. Aus Symmetriegründen gilt (76) auch in den Variablen $z_1, ..., z_{n-1}$ und $\mathbf{B}_q^D$ liefert einen stetigen linearen Operator

$$\mathbf{B}_q^D : L^{\infty,\alpha}_{0,q+1}(D) \to C^{\eta_p}_{0,q}(B_\epsilon(P)).$$

Wir werden auf diese Überlegungen später wieder eingehen.

Ähnliche Überlegungen gelten für die Operatoren $\widehat{\mathbf{T}}_q$ und $\widehat{\mathbf{S}}_q$, die in der grundlegenden Homotopieformel für die Kugel $\mathbb{D}$ auftreten: Wie bekannt ist (vgl. [Kra]), sind die Operatoren $\widehat{\mathbf{T}}_q$ bzw. $\widehat{\mathbf{S}}_q$ stetig als Abbildungen

$$\widehat{\mathbf{T}}_q, \widehat{\mathbf{S}}_q : L^p_{0,q+1}(\mathbb{D}) \to C^{\frac{1}{2} - \frac{n+1}{p}}_{0,q}(\mathbb{D})$$

für alle $p > 2n + 2$.

Wir zeigen (Lemma 6.4.7): Ist $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n < 1$, so sind $\widehat{\mathbf{T}}_q$ und $\widehat{\mathbf{S}}_q$ stetig als Abbildungen

$$\widehat{\mathbf{T}}_q, \widehat{\mathbf{S}}_q : L^{\infty,\alpha}_{0,q+1}(\mathbb{D}) \to C^{\eta/2}_{0,q}(\mathbb{D})$$

für

$$\eta = 1 - \max_{1 \le k \le n} \sum_{j \ne k} \alpha_j.$$

Im Falle $|\alpha| = 0$ ist $\eta = 1$, und wir erhalten die klassische 1/2-Hölder-Abschätzung für streng pseudokonvexe Gebiete.

Auch Lemma 6.4.7 ist einfache Konsequenz singulärer Hölder-Abschätzungen: Für beliebiges $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ mit $0 \le \alpha_j < 2$ liefert Lemma 6.4.6:

$$\begin{aligned} \left|\widehat{\mathbf{S}}_q f(z) - \widehat{\mathbf{S}}_q f(z')\right| \quad &\le \quad C(\alpha, \delta) \|f\|_{L^{\infty,\alpha}} \left(\frac{1}{|z_n|^{\alpha_n - \delta_n}} + \frac{1}{|z_n'|^{\alpha_n - \delta_n}} \right) \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \\ & \qquad \cdot |z_n - z_n'|^{\eta/2} \end{aligned}$$

für alle $z = (z_1, ..., z_n), z' = (z_1, ..., z_{n-1}, z_n') \in \mathbb{D}$ und alle $f \in L^{\infty,\alpha}_{0,q+1}(\mathbb{D})$, wobei $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n)$ mit $0 \le \delta_j \le \alpha_j$ und

$$0 < \eta = 1 - \max_{1 \le k \le n} \sum_{j \ne k} \delta_j \le 1$$

frei gewählt werden kann. Auch hier lassen sich wieder entsprechende lokale Aussagen ablesen, während Lemma 6.4.7 als globales Resultat zu verstehen ist.

Wir wollen nun etwas abstrakter beschreiben, was in diesem Kapitel bewiesen wird, um den Blick für Anwendungen und Verallgemeinerungen zu öffnen. Die Räume $L^{\infty,\alpha}(D)$ und $L^{\infty,\alpha}(\mathbb{D})$ erscheinen auf den ersten Blick recht speziell. Tatsächlich verwenden wir aber lediglich folgende Eigenschaften:

- Die komplexen Mannigfaltigkeiten $Y_j = \{z \in \mathbb{C}^n : h_j(z) = z_j = 0\}$ schneiden sich komplex transversal.
- Die Kugel $\mathbb{D}$ ist streng pseudokonvex.
- Die komplexen Mannigfaltigkeiten Y_j schneiden den Rand $b\mathbb{D}$ des streng pseudokonvexen Gebietes $\mathbb{D}$ komplex transversal.

Sei nun $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ mit $0 \leq \alpha_j < 2$, und f im folgenden stets eine $(0, q+1)$-Form mit Koeffizienten in

$$L^{\infty,\alpha}(D) = \{g : \exists C_g > 0 : |g(z)| \prod_{j=1}^{n} |h_j(z)|^{\alpha_j} \leq C_g \text{ für fast alle } z \in D\}.$$

Für einen Punkt $z \in \overline{D}$ definieren wir die Indexmenge

$$I_z = \{j : z \in Y_j\} \subset \{1, ..., n\}$$

und den dazugehörigen Hölder-Koeffizienten

$$\eta_z = 1 - \sum_{j \in I_z} \alpha_j.$$

Aus Lemma 6.2.5 haben wir folgende lokale Beobachtung abgelesen: Ist $\eta_z > 0$, so sind die Koeffizienten von $\mathbf{B}_q^D f$ in einer (genügend kleinen) Umgebung $U(z)$ hölderstetig vom Grad η_z, falls $\eta_z < 1$, und η-hölderstetig für alle $\eta < 1$, falls $\eta_z = 1$.

Die globale Folgerung ist: Ist $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n < 1$, so sind die Koeffizienten von $\mathbf{B}_q^D f$ hölderstetig vom Grad $\eta_0 = 1 - |\alpha|$, falls $|\alpha| > 0$, und η-hölderstetig für alle $\eta < 1$, falls $|\alpha| = 0$. Dabei zeigt die lokale Aussage, dass der schlechte Wert

$$\eta_0 \leq \eta_z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n$$

im Punkt $z = 0$ angenommen wird. Ist $0 \notin D$, so sind bessere globale Aussagen möglich.

Führen wir die gleichen Überlegungen nun für $\widehat{\mathbf{S}}_q$ durch. Sei also $D = \mathbb{D}$ die Kugel. Wegen $\widehat{\mathbf{S}}_q f \in C^1(\mathbb{D})$ ist nur das Verhalten in der Nähe des Randes interessant. Sei also $z \in b\mathbb{D}$. Aus Lemma 6.4.6 lässt sich folgende lokale Beobachtung ablesen: Ist $\eta_z > 0$, so sind die Koeffizienten von $\widehat{\mathbf{S}}_q f$ in $\mathbb{D} \cap U(z)$ hölderstetig vom Grad $\eta_z/2$. Dabei bezeichnet $U(z)$ eine (genügend kleine) Umgebung von z. Ist $I_z = \emptyset$ und daher $\eta_z = 1$, so handelt es sich bei z um einen gewöhnlichen Randpunkt eines streng pseudokonvexen Gebietes.

Betrachten wir auch hier die globale Folgerung. Dazu muss der kleinste und damit schlechteste lokale Hölder-Koeffizient ermittelt werden. Dies ist

$$\eta = \min_{z \in b\mathbb{D}} \eta_z = 1 - \max_{1 \le k \le n} \sum_{j \neq k} \alpha_j.$$

Ist $\eta > 0$, so ist $\widehat{\mathbf{S}}_q f$ also hölderstetig vom Grad $\eta/2$, und das ist genau die bereits formulierte globale Aussage.

Diese Überlegungen legen folgende Verallgemeinerung nahe: Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein streng pseudokonvexes Gebiet mit glattem Rand $Y_0 = bD$, und für $j = 1, ..., m$ seien Y_j komplexe $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten gegeben durch

$$Y_j = \{z \in \mathbb{C}^n : h_j(z) = 0\}$$

mit holomorphen Funktionen h_j, die genau von der Ordnung 1 verschwinden. Weiterhin sei vorausgesetzt, dass sich die Y_j für alle $j = 0, ..., m$ (man beachte $Y_0 = bD$) komplex transversal schneiden.

Sei nun $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ mit $0 \le \alpha_j < 2$ und f eine $(0, q+1)$-Form mit Koeffizienten in

$$L^{\infty,\alpha}(D) = \{g : \exists C_g > 0 : |g(z)| \prod_{j=1}^{m} |h_j(z)|^{\alpha_j} \le C_g \text{ für fast alle } z \in D\}.$$

Für einen Punkt $z \in \overline{D}$ definieren wir wieder die Indexmenge

$$I_z = \{j \in \{1, ..., m\} : z \in Y_j\} \subset \{1, ..., m\}$$

und den dazugehörigen Hölder-Koeffizienten

$$\eta_z = 1 - \sum_{j \in I_z} \alpha_j.$$

Wegen der Voraussetzung der komplexen Transversalität ist $\#I_z \le n$ für $z \in D$, und $\#I_z \le n-1$ für $z \in bD$.

Nun existiert ein Lösungsoperator $\mathbf{S}_q^D$ für die $\overline{\partial}$-Gleichung auf D, und $\mathbf{S}_q^D$ ist stetig als Abbildung

$$\mathbf{S}_q^D : L^\infty_{0,q+1}(D) \to C^{1/2}_{0,q}(D).$$

Wir beziehen uns hier auf den in [Ra] angegebenen Lösungsoperator für streng pseudokonvexe Gebiete (vgl [Ra], V.2.7 und VII.5), der mit Hilfe einer Ramirez-Henkin-Stützfunktion konstruiert wird. Durch leichte Modifikation unserer Methoden lässt sich dann folgendes zeigen:

Ist $z \in D$ und $\eta_z > 0$, so sind die Koeffizienten von $\mathbf{S}_q^D f$ in einer (genügend kleinen) Umgebung $U(z)$ hölderstetig vom Grad η_z, falls $\eta_z < 1$, und η-hölderstetig für alle $\eta < 1$, falls $\eta_z = 1$. Ist $z \in bD$ und $\eta_z > 0$, so sind die Koeffizienten von $\mathbf{S}_q^D f$ in $D \cap U(z)$ hölderstetig vom Grad $\eta_z/2$. Es seien

$$\eta_I = \min_{z \in D} \eta_z \quad \text{und} \quad \eta_R = \min_{z \in bD} \eta_z.$$

Ist $\eta_I > 0$ und $\eta_R > 0$, so liefert $\mathbf{S}_q^D$ eine stetige lineare Abbildung

$$\mathbf{S}_q^D : L^{\infty,\alpha}_{0,q+1}(D) \to C^{\eta_I}_{0,q}(D) \cap C^{\eta_R/2}_{0,q}(D),$$

und auch die singulären Abschätzungen für beliebige α mit $0 \le \alpha_j < 2$ ergeben sich analog.

Hier noch einige Bemerkungen zur Struktur dieses Kapitels: Im ersten Abschnitt zeigen wir zunächst einige Abschätzungen für Integrale in $\mathbb{C}$. Dann gehen wir auf die Hölder-Regularität der inhomogenen Cauchy-Integralformel ein, indem wir die Regularität des Operators $\mathbf{B}_0^D$ für beliebige beschränkte Gebiete $D \subset\subset \mathbb{C}$ untersuchen. Dazu verwenden wir die übliche Methode: Für zwei feste Punkte $z, z' \in D$ zerlegt man das Integrationsgebiet D in zwei Bereiche $D = D_1 \cup D_2$. Dabei ist

$$D_1 = B_{2|z-z'|}\left(\frac{z+z'}{2}\right)$$

und $D_2 = D \backslash D_1$. Nun wird das Integral über D_1 vom Radius $2|z-z'|$ in geeigneter Potenz dominiert, und für die Berechnung des Integrals über D_2 kann nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\left| \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z'} \right| \le |z-z'| \max_{w \in [z,z']} \frac{1}{|t-w|^2}$$

verwendet werden.

Im zweiten Abschnitt verwenden wir die gleiche Methode, um die Hölder-Regularität der Bochner-Martinelli-Koppelman-Transformation für Gebiete $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ zu untersuchen. Dazu greifen wir auf die Aussagen in Dimension 1 zurück und erhalten die bereits beschriebenen singulären Hölder-Abschätzungen.

Um die Regularität der grundlegenden Homotopieformel für die Kugel zu untersuchen, benötigen wir lokale (in Abhängigkeit von z) Koordinaten, in denen

$$\xi_z(\zeta) = -r(\zeta) + i\mathrm{Im}\ \Phi(z, \zeta)$$

als komplexe Koordinate auftritt. Wir verwenden die bekannten lokalen Koordinaten für streng pseudokonvexe Gebiete, die wir aber sehr genau entwickeln müssen, um unseren zusätzlichen Ansprüchen bzgl. der übrigen $(n-1)$ komplexen Koordinatenrichtungen gerecht zu werden.

Mit Hilfe dieser Koordinaten untersuchen wir dann in Abschnitt 6.4 die Regularität der grundlegenden Homotopieformel für die Kugel $\mathbb{D} \subset\subset \mathbb{C}^n$. Dabei gehen wir folgendermaßen vor: Wegen $\widehat{\mathbf{T}}_q f, \widehat{\mathbf{S}}_q f \in C^1(\mathbb{D})$ können die Differentiale $|d_z \widehat{\mathbf{T}}_q f(z)|$ und $|d_z \widehat{\mathbf{S}}_q f(z)|$ in Abhängigkeit vom Randabstand $\delta_{\mathbb{D}}(z) = 1 - \|z\|$ abgeschätzt werden. Nach Art eines Hardy-Littlewood-Lemmas erhalten wir dann die singulären Hölder-Abschätzungen.

Zuletzt verwenden wir noch die Aussagen aus der komplexen Ebene, um die Hölder-Regularität von Funktionen mit kompaktem Träger zu untersuchen. Hiermit können anisotrope Abschätzungen für die Lösung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für $(0, 1)$-Formen im Inneren bewiesen werden. Dieser Abschnitt 6.5 kann als Exkurs verstanden werden und ist nicht relevant für den Rest dieser Arbeit.

6.1 Hölder-Regularität der Cauchy-Integralformel

Wir betrachten zunächst im eindimensionalen Fall Integrale über Kreisscheiben $\Delta_R(p) \subset \mathbb{C}$ vom Radius R um $p \in \mathbb{C}$ und notieren vereinfacht $\Delta_R := \Delta_R(0)$.

Lemma 6.1.1. *Für $R > 0$, $0 \leq \alpha, \beta < 2$ sei*

$$I_R(z) := \int_{\Delta_R} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t|^\alpha |t-z|^\beta}.$$

Dann existiert eine Konstante $C(\alpha, \beta)$, die nur von α und β abhängt, so dass folgendes gilt:

$$I_R(z) \leq C(\alpha,\beta) \begin{cases} R^{2-\alpha-\beta} & , \qquad \alpha+\beta < 2, \\ 1 + |\log R - \log|z|| & , \text{ für } \alpha+\beta = 2, \\ |z|^{2-\alpha-\beta} & , \qquad \alpha+\beta > 2, \end{cases}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$, falls $\alpha + \beta \geq 2$.

Beweis. **a)** Sei zunächst $|z| < 2R$. Man unterteile das Integrationsgebiet in vier Regionen:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{t \in \Delta_R : |t| \leq |z|/3\}, \\ A_2 &:= \{t \in \Delta_R : |t-z| \leq |z|/3\}, \\ A_3 &:= \{t \in \Delta_R : |t| \leq 2|z|\} \setminus (A_1 \cup A_2), \\ A_4 &:= \{t \in \Delta_R : 2|z| < |t| < R\}. \end{aligned}$$

Das Integral über A_j sei mit I_j bezeichnet, also: $I_R = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$. Für $z = 0$ reduziert sich das Problem auf $I_R = I_4$. Auf A_1 ist

$$|z| \leq |t| + |t-z| \leq |z|/3 + |t-z|,$$

also

$$\frac{2}{3}|z| \leq |t-z|$$

und daher

$$I_1(z) \lesssim \frac{1}{|z|^\beta} \int_0^{|z|/3} r^{1-\alpha} dr \lesssim |z|^{2-\alpha-\beta}.$$

Auf A_2 ist

$$|z| \leq |t| + |t-z| \leq |t| + |z|/3,$$

also

$$\frac{2}{3}|z| \leq |t|$$

und daher

$$I_2(z) \lesssim \frac{1}{|z|^\alpha} \int_0^{|z|/3} r^{1-\beta} dr \lesssim |z|^{2-\alpha-\beta}.$$

Auf A_3 sind $|z|/3 \leq |t|$ und $|z|/3 \leq |t-z|$, also:

$$I_3(z) \lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha+\beta}} \int_0^{2|z|} r dr \lesssim |z|^{2-\alpha-\beta}.$$

Zusammengefasst ist

$$I_1(z) + I_2(z) + I_3(z) \lesssim |z|^{2-\alpha-\beta}. \tag{77}$$

Wegen $|z| < 2R$ folgt für $\alpha + \beta \leq 2$ aus (77) auch:

$$I_1(z) + I_2(z) + I_3(z) \lesssim R^{2-\alpha-\beta} \ , \quad \text{falls } \alpha + \beta \leq 2. \tag{78}$$

Auf A_4 ist schließlich noch

$$|t| \leq |z| + |t-z| \leq |t|/2 + |t-z|,$$

also

$$\frac{1}{2}|t| \leq |t-z|,$$

und daher:

$$I_4(z) \lesssim \int_{2|z|}^{R} r^{1-\alpha-\beta} dr \lesssim \begin{cases} R^{2-\alpha-\beta} & , \alpha+\beta < 2, \\ |\log R - \log |z|| & , \alpha+\beta = 2, \\ |z|^{2-\alpha-\beta} & , \alpha+\beta > 2. \end{cases} \tag{79}$$

Fassen wir (77), (78) und (79) zusammen, so ist die Behauptung für $|z| < 2R$ gezeigt.

b) Betrachten wir nun den Fall $|z| \geq 2R$. Hier ist im Integrationsgebiet $\{|t| \leq R\}$:

$$2R \leq |z| \leq |t| + |t-z| \leq R + |t-z|,$$

also $|t-z| \geq R$, und aus

$$I_R(z) \leq \frac{1}{R^\beta} \int_0^R r^{1-\alpha} dr \lesssim R^{2-\alpha-\beta}$$

folgt die Behauptung für $\alpha + \beta \leq 2$.

Für $\alpha + \beta > 2$ betrachten wir

$$|z| \leq |t| + |t-z| \leq R + |t-z| \leq |z|/2 + |t-z|,$$

also $\frac{1}{2}|z| \leq |t-z|$, und es folgt:

$$\begin{aligned} I_R(z) &\lesssim \frac{1}{|z|^\beta} \int_0^R r^{1-\alpha} dr \\ &\lesssim \frac{R^{2-\alpha}}{|z|^\beta} \leq \frac{|z|^{2-\alpha}}{|z|^\beta}. \end{aligned}$$

$\square$

Eine weitere Analyse liefert: Wenn wir in Lemma 6.1.1 nur über

$$\Delta_R \setminus \{|t-z| \leq d\}$$

integrieren, können wir auch den Fall $\beta \geq 2$ behandeln:

Lemma 6.1.2. *Für $R > 0$, $d > 0$, $0 \leq \alpha < 2$ und $\beta \geq 2$ sei*

$$A_{R,d} = \Delta_R \setminus \Delta_d(z) = \Delta_R \setminus \{t \in \Delta_R : |t-z| \leq d\}$$

und

$$I_{R,d}(z) := \int_{A_{R,d}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t|^\alpha |t-z|^\beta}.$$

Dann existiert eine Konstante $C(\alpha, \beta)$, die nur von α und β abhängt, so dass

$$I_{R,d}(z) \leq C(\alpha,\beta) \begin{cases} 1 + |\log R - \log d| & , \text{ für } \alpha+\beta = 2, \\ d^{2-\alpha-\beta} & , \text{ für } \alpha + \beta > 2, \end{cases} \tag{80}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Sei weiterhin $0 \leq \gamma \leq \alpha$. Dann existiert eine Konstante $C(\alpha, \beta, \gamma)$, die nur von α, β und γ abhängt, so dass folgendes gilt:

$$I_{R,d}(z) \leq C(\alpha,\beta,\gamma) \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \begin{cases} 1 + |\log R - \log d| & , \ \beta+\gamma = 2, \\ d^{2-\beta-\gamma} & , \ \beta + \gamma > 2, \end{cases} \tag{81}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$, falls $\gamma < \alpha$.

Beweis. Wir zeigen zuerst (80):

a) Wir behandeln zunächst den Fall $|z| \geq d/2$ und $\alpha \neq 0$. Sei

$$\epsilon = \beta - 2 + \frac{\alpha}{2}.$$

Damit ist

$$\epsilon > 0,$$

und wegen $|t-z| \geq d$ im Integrationsgebiet erhalten wir:

$$I_{R,d}(z) \leq d^{-\epsilon} \int_{A_{R,d}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t|^\alpha |t-z|^{\beta-\epsilon}}. \tag{82}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \beta - \epsilon = 2 - \alpha/2 &< 2, \\ \alpha + \beta - \epsilon = 2 + \alpha/2 &> 2 \end{aligned}$$

können wir Lemma 6.1.1 auf das Integral in (82) anwenden. Es folgt:

$$\begin{aligned} I_{R,d}(z) &\leq C(\alpha, \beta-\epsilon) d^{-\epsilon} |z|^{2-\alpha-\beta+\epsilon} = C(\alpha,\beta-\epsilon) d^{-\epsilon} |z|^{-\alpha/2} \\ &\leq C(\alpha,\beta) d^{-\epsilon} d^{-\alpha/2} = C(\alpha,\beta) d^{2-\alpha-\beta}, \end{aligned}$$

wobei wir $|z| \geq d/2$ beachtet haben.

b) Sei nun $|z| < d/2$ oder $\alpha = 0$. Damit ist

$$|t-z| \leq |t| + |z| < |t| + \frac{d}{2} \leq |t| + \frac{|t-z|}{2},$$

also

$$\frac{1}{2}|t-z| \leq |t|.$$

Wir verlangen außerdem noch $d < R$, so dass wegen $|z| < d/2 < R/2$ jetzt:

$$A_{R,d} \subset \Delta_{2R}(z) \setminus \Delta_d(z)$$

gilt. Es folgt:

$$\begin{aligned} I_{R,d}(z) &\lesssim \int_{A_{R,d}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t-z|^{\alpha+\beta}} \leq \int_{d \leq |t-z| \leq 2R} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t-z|^{\alpha+\beta}} \\ &\lesssim \int_d^{2R} r^{1-\alpha-\beta} dr \lesssim \begin{cases} 1 + |\log R - \log d| & \text{für } \alpha+\beta = 2, \\ d^{2-\alpha-\beta} & \text{für } \alpha+\beta > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

c) Abschließend bleibt der Fall $d \geq R$ zu untersuchen. Wegen $|t-z| \geq d$ im Integrationsgebiet und $R \leq d$ ist hier:

$$I_{R,d}(z) \leq \frac{1}{d^\beta} \int_{\Delta_R} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t|^\alpha} \lesssim \frac{1}{d^\beta} \int_0^R r^{1-\alpha} dr \lesssim \frac{R^{2-\alpha}}{d^\beta} \leq \frac{d^{2-\alpha}}{d^\beta}.$$

Man wähle $C(\alpha,\beta)$ als das Maximum der auftretenden Konstanten. Damit ist (80) gezeigt, und kann verwendet werden, um (81) herzuleiten: Im Fall $\alpha+\beta = 2$ ist wegen $\beta \geq 2$ und $0 \leq \gamma \leq \alpha$ notwendig $\alpha = \gamma = 0$, und für (81) ist nichts Neues zu zeigen. Sei im folgenden also $\alpha + \beta > 2$.

d) Sei zunächst $d \geq |z|/3$. Dann folgt (81) direkt aus (80): Für $\alpha+\beta > 2$ ist

$$\begin{aligned} d^{2-\alpha-\beta} &= d^{2-\beta-\gamma} d^{\gamma-\alpha} \\ &\lesssim d^{2-\beta-\gamma} |z|^{\gamma-\alpha}, \end{aligned}$$

wobei man $\gamma - \alpha \leq 0$ beachte.

e) Sei nun $d < |z|/3$. Wir unterteilen das Integrationsgebiet in zwei Regionen:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{R,d} \cap \{t : |t-z| \leq |z|/3\} = \{t \in \Delta_R : d < |t-z| \leq |z|/3\}, \\ A_2 &= A_{R,d} \cap \{t : |t-z| > |z|/3\} = \{t \in \Delta_R : |z|/3 < |t-z|\}. \end{aligned}$$

Sei

$$I_{R,d}(z) = I_1(z) + I_2(z) = \int_{A_1} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t|^\alpha |t-z|^\beta} + \int_{A_2} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t|^\alpha |t-z|^\beta}.$$

In A_1 ist

$$|z| \leq |t-z| + |t| \leq |z|/3 + |t|,$$

also $\frac{2}{3}|z| \leq |t|$, und es gilt:

$$I_1(z) \;\; \lesssim \;\; \frac{1}{|z|^\alpha} \int_{A_1} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t-z|^\beta}. \tag{83}$$

Ist $\gamma > 0$, so folgt unter Beachtung von $d < |t-z|$ weiter:

$$\begin{aligned} I_1(z) &\lesssim \frac{1}{|z|^\alpha} \int_{A_1} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t-z|^{\beta-2+\gamma}|t-z|^{2-\gamma}} \\ &< \frac{1}{|z|^\alpha} d^{2-\beta-\gamma} \int_{A_1} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t-z|^{2-\gamma}} \\ &\sim \frac{1}{|z|^\alpha} d^{2-\beta-\gamma} \int_d^{|z|/3} r^{\gamma-1} dr \sim \frac{1}{|z|^\alpha} d^{2-\beta-\gamma} |z|^\gamma. \end{aligned}$$

Ist $\gamma = 0$ und ($|z| < 3R$ oder $\beta > 2$), so ergibt sich aus (83):

$$\begin{aligned} I_1(z) &\lesssim \frac{1}{|z|^\alpha} \int_{A_1} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t-z|^\beta} \sim \frac{1}{|z|^\alpha} \int_d^{|z|/3} r^{1-\beta} dr \\ &\lesssim \frac{1}{|z|^\alpha} \begin{cases} \log \frac{|z|}{3} - \log d & , \; \beta = 2, \\ d^{2-\beta} & , \; \beta > 2, \end{cases} \\ &\leq \frac{1}{|z|^\alpha} \begin{cases} \log R - \log d & , \; \beta = 2, \\ d^{2-\beta} & , \; \beta > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ist $\gamma = 0$ und $|z| \geq 3R$ und $\beta = 2$, so ist $|t-z| > R$, und aus (83) folgt:

$$\begin{aligned} I_1(z) &\lesssim \frac{1}{|z|^\alpha} \frac{1}{R^2} \int_{\Delta_R} dV_{\mathbb{C}}(t) \\ &\lesssim \frac{1}{|z|^\alpha} < \frac{1}{|z|^\alpha} \left(1 + |\log R - \log d|\right). \end{aligned}$$

Für I_2 verwenden wir (80) mit $d = |z|/3$. Das liefert wegen $\alpha + \beta > 2$:

$$I_2(z) \leq C(\alpha, \beta) |z|^{2-\alpha-\beta}.$$

Damit folgt:

$$I_2(z) \lesssim |z|^{2-\alpha-\beta} = |z|^{\gamma-\alpha} |z|^{2-\beta-\gamma} \lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} d^{2-\beta-\gamma},$$

wobei wir $d < |z|/3$ beachten.

$\square$

Nun können wir mit der üblichen Methode, die auf einer Abschätzung durch den Mittelwertsatz der Differentialrechnung beruht, den zentralen Schritt im Beweis der Hölder-Regularität der Cauchy-Integralformel in $\mathbb{C}$ ausführen:

Lemma 6.1.3. *Es seien $R > 0$, $0 \leq \alpha < 1$ und $D(z, z')$ eines der Integrale*

$$\int_{\Delta_R} \frac{1}{|t|^\alpha} \left| \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z'} \right| dV_{\mathbb{C}}(t),$$
$$\int_{\Delta_R} \frac{1}{|t|^\alpha} \left| \frac{1}{|t-z|} - \frac{1}{|t-z'|} \right| dV_{\mathbb{C}}(t).$$

Dann existiert eine Konstante $C_\alpha > 0$, so dass folgendes gilt:

$$D(z, z') \leq C_\alpha \begin{cases} |z-z'|\,(1 + |\log R - \log|z-z'||) & \text{für} \quad \alpha = 0, \\ |z-z'|^{1-\alpha} & \text{für} \quad 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

für alle $z, z' \in \mathbb{C}$.

Beweis. Wir schätzen das erste Integral ab, die zweite Abschätzung verläuft analog. Wir bezeichnen den Integranden mit $F(z, z')$ und setzen

$$d := |z - z'|$$

und

$$m := \frac{z + z'}{2}.$$

Wir zerlegen das Integral in zwei Teile:

$$\begin{aligned} D(z, z') &= \int_{\Delta_R} F(z, z') \\ &= \int_{\Delta_R \cap \Delta_{2d}(m)} F(z, z') + \int_{\Delta_R \setminus \Delta_{2d}(m)} F(z, z') =: I_1(z, z') + I_2(z, z') \end{aligned}$$

Wegen $\Delta_{2d}(m) \subset \Delta_{3d}(z)$ und $\Delta_{2d}(m) \subset \Delta_{3d}(z')$ gilt mit Lemma 6.1.1:

$$\begin{aligned} I_1(z, z') &\leq \int_{\Delta_{3d}(z)} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t|^\alpha |t-z|} + \int_{\Delta_{3d}(z')} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t|^\alpha |t-z'|} \\ &= \int_{\Delta_{3d}(0)} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t+z|^\alpha |t|} + \int_{\Delta_{3d}(0)} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{|t+z'|^\alpha |t|} \lesssim (3d)^{1-\alpha} \lesssim d^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Für I_2 verwenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Bezeichnen wir mit $[z, z']$ die Verbindungsstrecke der Punkte z und z', so gilt für alle $t \notin \Delta_{2d}(m)$ nämlich:

$$\left| \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z'} \right| \leq |z-z'| \max_{w \in [z,z']} |t-w|^{-2}.$$

Beachten wir noch

$$|t-m| \le |t-w| + |w-m| \le |t-w| + d \le 2|t-w|,$$

so erhalten wir:

$$\left| \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z'} \right| \le |z-z'| \frac{4}{|t-m|^2}.$$

Damit folgt:

$$I_2(z,z') \lesssim |z-z'| \int_{\Delta_R \setminus \Delta_{2d}(m)} \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t|^\alpha |t-m|^2},$$

und Lemma 6.1.2 (80) liefert weiter:

$$I_2(z,z') \quad \lesssim \quad d \cdot \begin{cases} 1 + |\log R - \log d| & \text{für} \quad \alpha = 0, \\ d^{-\alpha} & \text{für} \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

□

Es ergibt sich:

Korollar 6.1.4. *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}$, $0 \le \alpha < 1$ und $\mathbf{T}$ der Operator definiert durch:*

$$\mathbf{T}u(z) := \int_D u(t) \frac{dt \wedge d\bar{t}}{t-z}.$$

Ist $\alpha > 0$, so existiert eine Konstante $C_\alpha > 0$ mit:

$$|\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| \le C_\alpha |z-z'|^{1-\alpha} \|u\|_{L^{\infty,\alpha}}$$

für alle $u \in L^{\infty,\alpha}(D)$ und alle $z, z' \in D$.

Ist $\alpha = 0$, so existiert für jedes $0 \le \beta < 1$ eine Konstante C_β mit:

$$|\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| \le C_\beta |z-z'|^\beta \|u\|_{L^{\infty,\alpha}}$$

für alle $u \in L^{\infty,\alpha}(D) = L^{\infty,0}(D) = L^\infty(D)$ und alle $z, z' \in D$.

Beweis. Für $u \in L^{\infty,\gamma}(D)$ ist:

$$|\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| \quad \le \quad \|u\|_{L^{\infty,\gamma}} \int_D \frac{1}{|t|^\gamma} \left| \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z'} \right| dV_{\mathbb{C}}(t),$$

und damit folgt die Behauptung aus Lemma 6.1.3. □

Betrachten wir nun die Cauchy-Integralformel für ein Gebiet $D \subset\subset \mathbb{C}$. Der relevante Bochner-Martinelli-Kern ist

$$B_{10}(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Für eine integrierbare $(0,1)$-Form $f \in L^1_{0,1}(D)$ liest sich die Bochner-Martinelli-Koppelman-Formel für L^p-Formen, Theorem 3.5.1, nun:

$$f(z) = -\overline{\partial}_z \mathbf{B}_0^D f(z) = -\overline{\partial}_z \left(\frac{1}{2\pi i} \int_D f(\zeta) \wedge \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right).$$

Damit ergibt sich:

Theorem 6.1.5. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt. Dann definiert der Operator*

$$\mathbf{B}_0^D : f \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_D f(\zeta) \wedge \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

eine stetige lineare Abbildung

$$\mathbf{B}_0^D : L^p_{0,1}(D) \to L^r(D)$$

für alle $1 \leq r \leq \infty$ mit

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}.$$

Es gilt

$$-\overline{\partial} \mathbf{B}_0^D f = f$$

im Distributionssinne.

Für $0 \leq \alpha < 1$ ist $\mathbf{B}_0^D$ stetig als Abbildung

$$\mathbf{B}_0^D : L^{\infty,\alpha}_{0,1}(D) \to C^\eta(D),$$

für $\eta = 1 - \alpha$, falls $\alpha > 0$, und für alle $\eta < 1$, falls $\alpha = 0$.
Dabei bezeichnet $C^\eta(D)$ den Raum der η-hölderstetigen Funktionen auf D.

Beweis. Die Aussage über die Hölder-Regularität folgt aus Lemma 6.1.1 mit $\beta = 1$ und aus Korollar 6.1.4. Der Rest des Beweises ergibt sich aus der BMK-Formel für L^p-Formen im höchsten Grad (Theorem 5.2.9) im Fall Dimension $n = 1$. $\square$

6.2 Hölder-Regularität des BMK-Operators $\mathbf{B}_q^D$

Nun untersuchen wir Integrale über Gebiete in $\mathbb{C}^n$. Seien dazu zunächst einmal $R_j > 0$, $0 \leq \alpha_j < 2$ und $0 < \delta \leq 2n$ für $j = 1, ..., n$ fest gewählt und

$$I(z) = \int_{\mathbb{C}^n} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}}.$$

Für $j = 1, .., n$ wählen wir nun Koeffizienten $0 < \delta_j \leq 2$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j = \delta.$$

Es sei

$$Z_j^{log} = \begin{cases} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} & , \text{ falls } \delta_j < \alpha_j, \\ 1 + |\log R_j - \log |z_j|| & , \text{ falls } \delta_j = \alpha_j, \\ R_j^{\delta_j - \alpha_j} & , \text{ falls } \delta_j > \alpha_j. \end{cases}$$

Mit dem Satz von Fubini und Lemma 6.1.1 können wir nun $I(z)$ in Abhängigkeit von $(\delta_1, ..., \delta_n)$ abschätzen:

$$\begin{aligned} I(z) &= \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|\zeta_j|^{\alpha_j}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(\zeta_j)}{\|\zeta - z\|^{2-\delta_j}} \\ &\leq \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|\zeta_j|^{\alpha_j}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(\zeta_j)}{|\zeta_j - z_j|^{2-\delta_j}} \\ &\leq \prod_{j=1}^{n} C(\alpha_j, \delta_j) Z_j^{log}, \end{aligned}$$

für alle $z = (z_1, ..., z_n)$ mit $z_j \neq 0$, falls $\delta_j - \alpha_j \leq 0$.

Wir werden diese Abschätzung für $I(z)$ nun derart verfeinern, dass auch $\delta_j = 0$ zugelassen werden kann und höchstens ein Logarithmus auftritt. Dazu ist eine weit aufwendigere Analyse des Integrals $I(z)$ notwendig.

Sei dazu noch:

$$Z_j = \begin{cases} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} & , \text{ falls } \delta_j \leq \alpha_j, \\ R_j^{\delta_j - \alpha_j} & , \text{ falls } \delta_j > \alpha_j. \end{cases}$$

Lemma 6.2.1. *Für $j = 1, ..., n$ seien $R_j > 0$, $0 \leq \alpha_j < 2$, $0 < \delta \leq 2n$ und*

$$I(z) = \int_{|\zeta_j|<R_j} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}}.$$

Wähle für $j = 1, ..., n-1$ weiterhin $0 \leq \delta_j \leq 2$ und $0 < \delta_n \leq 2$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j = \delta.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den α_j und δ_j abhängt, so dass folgendes gilt:

$$I(z) \leq C \cdot Z_n^{log} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} Z_j$$

für alle $z \in \mathbb{C}^n$ mit $z_n \neq 0$, falls $\delta_n - \alpha_n \leq 0$,
und $z_j \neq 0$, falls $\delta_j - \alpha_j < 0$ für $j = 1, ..., n-1$.

Die Sonderrolle der Variablen z_n ist willkürlich gewählt. Aus Symmetriegründen gilt: Für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ mit $\delta_k > 0$ existiert $C_k > 0$ mit

$$I(z) \leq C_k \cdot Z_k^{log} \cdot \prod_{\substack{j \in \{1,...,n\} \\ j \neq k}} Z_j.$$

Beweis. Die Variablen $\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}$ können ohne Einschränkung vertauscht werden. Dies tun wir folgendermaßen:

Sei

$$l_0 := \#\{j : j \leq n-1 \text{ und } \alpha_j = \delta_j\}.$$

Wir nehmen an, es gelte $\alpha_j = \delta_j$ für $j = 1, ..., l_0$, wobei $l_0 = 0$ möglich ist.

Sei nun

$$k_0 := \#\{j : l_0 + 1 \leq j \leq n-1 \text{ und } \delta_j = 0\}.$$

Wir nehmen an, es gelte $\delta_j = 0$ für $j = l_0 + 1, ..., l_0 + k_0$, wobei $k_0 = 0$ möglich ist, und setzen

$$m := l_0 + k_0.$$

Wir unterteilen das Integrationsgebiet $G = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta_j| < R_j\}$ in 2^m Regionen: Für $L \subset \{1, ..., l_0\}$ und $K \subset \{l_0 + 1, ..., m\}$ seien

$$\begin{aligned} A_L := \{\zeta \in G : \quad & |\zeta_j - z_j| \leq |\zeta_j| \text{ , für alle } j \in L, \\ & |\zeta_j - z_j| > |\zeta_j| \text{ , für alle } j \in \{1, ..., l_0\} \setminus L\}, \end{aligned}$$

$$A_K := \{\zeta \in G : \quad \begin{array}{ll} |\zeta_j - z_j| \leq |z_j|/3 & , \text{für alle } j \in K, \\ |\zeta_j - z_j| > |z_j|/3 & , \text{für alle } j \in \{l_0+1, ..., m\} \setminus K\}, \end{array}$$

und

$$A_{LK} = A_L \cap A_K.$$

Damit ist

$$G = \bigcup_{\substack{L \subset \{1,...,l_0\} \\ K \subset \{l_0+1,...,m\}}} A_{LK}.$$

Hier tritt $L = K = \emptyset$ immer auf. Im Fall $m = 0$ erhalten wir:

$$G = A_{\emptyset\emptyset}.$$

Wir bezeichnen das Integral über A_{LK} mit I_{LK}. Um I_{LK} zu berechnen, können wir nach Umordnung der Variablen $\zeta_1, ..., \zeta_m$ jetzt

$$L = \{1, ..., l\} \text{ für } l \leq l_0$$

und

$$K = \{l_0+1, ..., k\} \text{ für } l_0 \leq k \leq m$$

annehmen, wobei wir die Konventionen $l = 0$ für $L = \emptyset$, und $k = l_0$ für $K = \emptyset$ verwenden.

Für $l_0 + 1 \leq j \leq k$ ist im Integrationsgebiet A_{LK}:

$$|z_j| \leq |\zeta_j| + |z_j - \zeta_j| \leq |\zeta_j| + |z_j|/3,$$

also

$$\frac{2}{3}|z_j| \leq |\zeta_j| \ , \quad \text{für } l_0 + 1 \leq j \leq k, \tag{84}$$

und außerdem

$$\delta_j = 0 \ , \quad \text{für } l_0 + 1 \leq j \leq m. \tag{85}$$

Es sei

$$\vartheta := \sum_{j=1}^{l_0} \alpha_j = \sum_{j=1}^{l_0} \delta_j < 2l_0 \leq 2k.$$

Im folgenden benötigen wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}} &= \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2k+1-\vartheta}} \cdot \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n-2k-1-\delta+\vartheta}} \\ &\lesssim \frac{1}{|\zeta_1 - z_1|^{2k+1-\vartheta} + ... + |\zeta_k - z_k|^{2k+1-\vartheta} + |\zeta_n - z_n|^{2k+1-\vartheta}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{|\zeta_n - z_n|^{1-\delta_n}} \prod_{j=k+1}^{n-1} \frac{1}{|\zeta_j - z_j|^{2-\delta_j}}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich unter Verwendung von (84) und (85):

$$\begin{aligned}
I_{LK}(z) &= \int_{A_{LK}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}} \\
&\lesssim \left(\prod_{j=l_0+1}^{k} \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j}}\right) \int_{A_{LK}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_{l_0}|^{\alpha_{l_0}}} \cdot \frac{1}{|\zeta_{k+1}|^{\alpha_{k+1}}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}} \\
&\lesssim \left(\prod_{j=l_0+1}^{k} \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j}}\right) \\
&\cdot \left(\int_{A_{lk}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_{l_0}|^{\alpha_{l_0}}} \cdot \frac{1}{|\zeta_n|^{\alpha_n}|\zeta_n - z_n|^{1-\delta_n}} \right.\\
&\qquad \left. \frac{dV_{\mathbb{C}^{k+1}}(\zeta_1, ..., \zeta_k, \zeta_n)}{|\zeta_1 - z_1|^{2k+1-\vartheta} + ... + |\zeta_k - z_k|^{2k+1-\vartheta} + |\zeta_n - z_n|^{2k+1-\vartheta}}\right) \\
&\quad \cdot \left(\prod_{j=k+1}^{m} \int_{\substack{|z_j|/3<|\zeta_j - z_j| \\ |\zeta_j|\le R_j}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(\zeta_j)}{|\zeta_j|^{\alpha_j}|\zeta_j - z_j|^2}\right) \left(\prod_{j=m+1}^{n-1} \int_{|\zeta_j|\le R_j} \frac{dV_{\mathbb{C}}(\zeta_j)}{|\zeta_j|^{\alpha_j}|\zeta_j - z_j|^{2-\delta_j}}\right) \\
&= \left(\prod_{j=l_0+1}^{k} \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j}}\right) F_{lk,1}(z) F_{k,2}(z) F_3(z),
\end{aligned}$$

wobei wir für $F_{lk,1}(z)$ über

$$\begin{aligned}
A_{lk} = \{(\zeta_1, ..., \zeta_k, \zeta_n) : \quad & |\zeta_j - z_j| \le |\zeta_j| \ \text{, für } 1 \le j \le l, \\
& |\zeta_j - z_j| > |\zeta_j| \ \text{, für } l+1 \le j \le l_0, \\
& |\zeta_j| \le R_j \ \text{, für } j \in \{1, ..., k, n\}\}
\end{aligned}$$

integrieren.

Wir berechnen die Faktoren $F_{lk,1}(z)$, $F_{k,2}(z)$ und $F_3(z)$ separat.

Lemma 6.1.2 (80) liefert wegen $\alpha_j \neq \delta_j = 0$ (wenn wir jeweils $d = |z_j|/3$, $\alpha = \alpha_j > 0$ und $\beta = 2$ für $j = k+1, ..., m$ wählen):

$$F_{k,2}(z) = \prod_{j=k+1}^{m} \int_{\substack{|z_j|/3<|\zeta_j - z_j| \\ |\zeta_j|\le R_j}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(\zeta_j)}{|\zeta_j|^{\alpha_j}|\zeta_j - z_j|^2} \lesssim \prod_{j=k+1}^{m} \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j}}.$$

Aus Lemma 6.1.1 folgt wegen $\alpha_j \neq \delta_j > 0$ für $j \ge m+1$ mit der Wahl $\alpha = \alpha_j$ und $\beta = 2 - \delta_j$:

$$F_3(z) = \prod_{j=m+1}^{n-1} \int_{|\zeta_j|\le R_j} \frac{dV_{\mathbb{C}}(\zeta_j)}{|\zeta_j|^{\alpha_j}|\zeta_j - z_j|^{2-\delta_j}} \lesssim \prod_{j=m+1}^{n-1} Z_j$$

Für $F_{lk,1}(z)$ verwenden wir die Substitutionen

$$\begin{aligned}
(\zeta_j - z_j) &= t_j(\zeta_n - z_n) \quad , \quad \text{für } 1 \leq j \leq l, \\
\zeta_j &= t_j(\zeta_n - z_n) \quad , \quad \text{für } l+1 \leq j \leq l_0, \\
(\zeta_j - z_j) &= t_j(\zeta_n - z_n) \quad , \quad \text{für } l_0+1 \leq j \leq k.
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$d\zeta_j \wedge d\overline{\zeta_j} = |\zeta_n - z_n|^2 dt_j \wedge d\overline{t_j},$$

für $1 \leq j \leq k$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
F_{lk,1}(z) &= \int_{A_{lk}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_{l_0}|^{\alpha_{l_0}}} \cdot \frac{1}{|\zeta_n|^{\alpha_n} |\zeta_n - z_n|^{1-\delta_n}} \\
&\quad \cdot \frac{dV_{\mathbb{C}^{k+1}}(\zeta_1, ..., \zeta_k, \zeta_n)}{|\zeta_1 - z_1|^{2k+1-\vartheta} + ... + |\zeta_k - z_k|^{2k+1-\vartheta} + |\zeta_n - z_n|^{2k+1-\vartheta}} \\
&\leq \int_{A_{lk}} \frac{1}{|\zeta_1 - z_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_l - z_l|^{\alpha_l}} \cdot \frac{1}{|\zeta_{l+1}|^{\alpha_{l+1}} \cdots |\zeta_{l_0}|^{\alpha_{l_0}}} \\
&\quad \cdot \frac{1}{|\zeta_n|^{\alpha_n} |\zeta_n - z_n|^{1-\delta_n}} \\
&\quad \cdot \frac{dV_{\mathbb{C}^{k+1}}(\zeta_1, ..., \zeta_k, \zeta_n)}{\sum_{j \in \{1,...,l\} \cup \{l_0+1,...,k\}} |\zeta_j - z_j|^{2k+1-\vartheta} + \sum_{j=l+1}^{l_0} |\zeta_j|^{2k+1-\vartheta} + |\zeta_n - z_n|^{2k+1-\vartheta}} \\
&\leq \int_{\mathbb{C}^k} \frac{1}{|t_1|^{\alpha_1} \cdots |t_{l_0}|^{\alpha_{l_0}}} \cdot \frac{dV_{\mathbb{C}^k}(t_1, ..., t_k)}{|t_1|^{2k+1-\vartheta} + ... + |t_k|^{2k+1-\vartheta} + 1} \\
&\quad \cdot \int_{|\zeta_n| \leq R_n} \frac{|\zeta_n - z_n|^{2k} dV_{\mathbb{C}}(\zeta_n)}{|\zeta_n - z_n|^{\vartheta} |\zeta_n - z_n|^{2k+1-\vartheta} |\zeta_n|^{\alpha_n} |\zeta_n - z_n|^{1-\delta_n}} \\
&= C(\alpha_1, ..., \alpha_{l_0}, k) \int_{|\zeta_n| \leq R_n} \frac{dV_{\mathbb{C}}(\zeta_n)}{|\zeta_n - z_n|^{2-\delta_n} |\zeta_n|^{\alpha_n}} \\
&\lesssim Z_n^{log}
\end{aligned}$$

nach Lemma 6.1.1 mit $\alpha = \alpha_n$ und $\beta = 2 - \delta_n$ unter Beachtung von $\delta_n > 0$.

Die Berechnung von

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}^k} \frac{1}{|t_1|^{\alpha_1} \cdots |t_{l_0}|^{\alpha_{l_0}}} \cdot \frac{dV_{\mathbb{C}^k}(t_1, ..., t_k)}{|t_1|^{2k+1-\vartheta} + ... + |t_k|^{2k+1-\vartheta} + 1} \\
= &\int_{\mathbb{C}^k} \frac{1}{|t_1|^{\alpha_1} \cdots |t_{l_0}|^{\alpha_{l_0}}} \cdot \frac{dV_{\mathbb{C}^k}(t)}{\|t\|^{2k+1-\vartheta} + 1} < \infty,
\end{aligned}$$

mit $t = (t_1, ..., t_k)$, erfolgt in Lemma 6.2.2.

Zusammengefasst erhalten wir:

$$\begin{aligned}
I_{LK}(z) &\lesssim \left(\prod_{j=l_0+1}^{k} \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j}}\right) F_{lk,1}(z) F_{k,2}(z) F_3(z) \\
&\lesssim \left(\prod_{j=l_0+1}^{k} \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j}}\right) \cdot Z_n^{log} \cdot \left(\prod_{j=k+1}^{m} \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j}}\right) \cdot \left(\prod_{j=m+1}^{n-1} Z_j\right) \\
&\sim Z_n^{log} \left(\prod_{j=l_0+1}^{m} \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j}}\right) \left(\prod_{j=m+1}^{n-1} Z_j\right)
\end{aligned}$$

Das ist wegen

$$\begin{aligned}
\delta_j = \alpha_j &\quad , \text{ für } \quad j \le l_0, \\
\delta_j = 0 &\quad , \text{ für } \quad l_0 + 1 \le j \le m, \\
\delta_j > 0 &\quad , \text{ für } \quad m + 1 \le j,
\end{aligned}$$

die Aussage, die für I_{LK} zu zeigen war. Die Aussage für $I(z)$ folgt durch Summation über die Indexmengen L und K. Die Konstante $C > 0$ ergibt sich als Summe der auftretenden Konstanten. □

Nachzureichen ist:

Lemma 6.2.2. *Für $j = 1, ..., k$ seien $0 \le \alpha_j < 2$ und $\vartheta = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$. Dann ist*

$$I = \int_{\mathbb{C}^k} \frac{1}{|t_1|^{\alpha_1} \cdots |t_k|^{\alpha_k}} \cdot \frac{dV_{\mathbb{C}^k}(t)}{(\|t\|^{2k+1-\vartheta} + 1)} < \infty.$$

Beweis. Wegen

$$\left(\|t\|^{2k+1-\vartheta} + 1\right) \ge \prod_{j=1}^{k} \left(|t_j|^{2k+1-\vartheta} + 1\right)^{\frac{2-\alpha_j+1/k}{2k+1-\vartheta}}$$

ist

$$\begin{aligned}
I &\le \prod_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{C}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t_j)}{|t_j|^{\alpha_j} \left(|t_j|^{2k+1-\vartheta} + 1\right)^{\frac{2-\alpha_j+1/k}{2k+1-\vartheta}}} \\
&\le \prod_{j=1}^{k} \left(\int_{|t_j| \le 1} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t_j)}{|t_j|^{\alpha_j}} + \int_{|t_j|>1} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t_j)}{|t_j|^{\alpha_j} |t_j|^{2-\alpha_j+1/k}} \right) \\
&\sim \prod_{j=1}^{k} \left(\int_0^1 r^{1-\alpha_j} dr + \int_1^\infty r^{-1/k-1} dr \right) < \infty.
\end{aligned}$$

□

Wenn wir in Lemma 6.2.1 nur über

$$A = \{\zeta : |\zeta_j| \leq R_j\} \setminus \{\zeta : |\zeta_n - z_n| < d\}$$

integrieren, können im Nenner des Integranden höhere Potenzen von $\|\zeta - z\|$ zugelassen werden:

Lemma 6.2.3. *Für $j = 1, ..., n$ seien $R_j > 0$, $0 \leq \alpha_j < 2$, $0 \leq \delta \leq 1$, $d > 0$ und*

$$I(z) = \int_{\substack{|\zeta_j|<R_j \\ d \leq |\zeta_n - z_n|}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}}.$$

Wähle für $j = 0, ..., n$ weiterhin $0 \leq \delta_j \leq 1$ mit $\delta_n \leq \alpha_n$ und

$$\delta = \delta_0 + \sum_{j=1}^{n} \delta_j.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den α_j und δ_j abhängt, so dass folgendes gilt:

$$I(z) \leq C \cdot \left\{ \begin{array}{cl} d^{\delta_0 - 1} & , \ \delta_0 < 1 \\ 1 + |\log R_n - \log d| & , \ \delta_0 = 1 \end{array} \right\} \cdot \prod_{j=1}^{n} Z_j$$

für alle $z \in \mathbb{C}^n$ mit $z_j \neq 0$, falls $\delta_j - \alpha_j < 0$.

Man beachte, dass auch hier die Rolle der Variablen aus Symmetriegründen vertauscht werden darf.

Beweis. Wir übernehmen den Beweis von Lemma 6.2.1, der nur leicht modifiziert werden muss. In der Abschätzung der Gebietsintegrale I_{LK} bleiben die Faktoren $F_{k,2}$ und F_3 unverändert, während sich der Exponent von $|\zeta_n - z_n|$ im Nenner des Integranden in $F_{lk,1}$ um $1 - \delta_0$ erhöht und das Integrationsgebiet eingeschränkt wird. Genauer: Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}} &= \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2k+1-\vartheta}} \cdot \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n-2k-\delta+\vartheta}} \\ &\lesssim \frac{1}{|\zeta_1 - z_1|^{2k+1-\vartheta} + ... + |\zeta_k - z_k|^{2k+1-\vartheta} + |\zeta_n - z_n|^{2k+1-\vartheta}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{|\zeta_n - z_n|^{1-\delta_n-\delta_0}} \cdot \frac{1}{|\zeta_n - z_n|} \cdot \prod_{j=k+1}^{n-1} \frac{1}{|\zeta_j - z_j|^{2-\delta_j}}. \end{aligned}$$

ergibt sich mit (84) und (85) hier:

$$I_{LK}(z) \lesssim \left(\prod_{j=l_0+1}^{k} \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j}} \right) \widetilde{F_{lk,1}}(z) F_{k,2}(z) F_3(z),$$

wobei sich nur $\widetilde{F_{lk,1}}$ gegenüber $F_{lk,1}$ im Beweis von Lemma 6.2.1 verändert hat:

$$\begin{aligned}\widetilde{F_{lk,1}}(z) &= \int_{\widetilde{A_{lk}}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_{l_0}|^{\alpha_{l_0}}} \cdot \frac{1}{|\zeta_n|^{\alpha_n}|\zeta_n - z_n|^{2-\delta_n-\delta_0}} \\ &\quad \cdot \frac{dV_{\mathbb{C}^{k+1}}(\zeta_1, ..., \zeta_k, \zeta_n)}{|\zeta_1 - z_1|^{2k+1-\vartheta} + ... + |\zeta_k - z_k|^{2k+1-\vartheta} + |\zeta_n - z_n|^{2k+1-\vartheta}},\end{aligned}$$

Integration über

$$\begin{aligned}\widetilde{A_{lk}} = \{(\zeta_1, ..., \zeta_k, \zeta_n) : \quad & |\zeta_j - z_j| \leq |\zeta_j| \quad, \text{für } 1 \leq j \leq l, \\ & |\zeta_j - z_j| > |\zeta_j| \quad, \text{für } l+1 \leq j \leq l_0, \\ & |\zeta_j| \leq R_j \quad, \text{für } j \in \{1, ..., k, n\}, \\ & |\zeta_n - z_n| \geq d\}.\end{aligned}$$

Mit den gleichen Substitutionen wie für $F_{lk,1}$ im Beweis von Lemma 6.2.1 folgt:

$$\begin{aligned}\widetilde{F_{lk,1}}(z) &\leq \int_{\widetilde{A_{lk}}} \frac{1}{|\zeta_1 - z_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_l - z_l|^{\alpha_l}} \cdot \frac{1}{|\zeta_{l+1}|^{\alpha_{l+1}}\cdots|\zeta_{l_0}|^{\alpha_{l_0}}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{|\zeta_n|^{\alpha_n}|\zeta_n - z_n|^{2-\delta_n-\delta_0}} \\ &\quad \cdot \frac{dV_{\mathbb{C}^{k+1}}(\zeta_1, ..., \zeta_k, \zeta_n)}{\sum_{j\in\{1,...,l\}\cup\{l_0+1,...,k\}} |\zeta_j - z_j|^{2k+1-\vartheta} + \sum_{j=l+1}^{l_0} |\zeta_j|^{2k+1-\vartheta} + |\zeta_n - z_n|^{2k+1-\vartheta}} \\ &\leq \int_{\mathbb{C}^k} \frac{1}{|t_1|^{\alpha_1}\cdots|t_{l_0}|^{\alpha_{l_0}}} \cdot \frac{dV_{\mathbb{C}^k}(t_1, ..., t_k)}{|t_1|^{2k+1-\vartheta} + ... + |t_k|^{2k+1-\vartheta} + 1} \\ &\quad \cdot \int_{\substack{|\zeta_n|\leq R_n \\ |\zeta_n - z_n|\geq d}} \frac{|\zeta_n - z_n|^{2k} dV_{\mathbb{C}}(\zeta_n)}{|\zeta_n - z_n|^{\vartheta}|\zeta_n - z_n|^{2k+1-\vartheta}|\zeta_n|^{\alpha_n}|\zeta_n - z_n|^{2-\delta_n-\delta_0}} \\ &= C(\alpha_1, ..., \alpha_{l_0}, k) \int_{\substack{|\zeta_n|\leq R_n \\ |\zeta_n - z_n|\geq d}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(\zeta_n)}{|\zeta_n - z_n|^{3-\delta_n-\delta_0}|\zeta_n|^{\alpha_n}} \\ &\lesssim \frac{1}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}} \begin{cases} d^{\delta_0-1} & , \ \delta_0 < 1, \\ 1 + |\log R_n - \log d| & , \ \delta_0 = 1,\end{cases}\end{aligned}$$

nach Lemma 6.1.2 (81) mit $\alpha = \alpha_n$, $\beta = 3 - \delta_n - \delta_0$ und $\gamma = \delta_n \leq \alpha$.

Zusammengefasst erhalten wir hier:

$$\begin{aligned}I_{LK}(z) &\lesssim \left(\prod_{j=l_0+1}^{k} \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j}}\right) \widetilde{F_{lk,1}}(z) F_{k,2}(z) F_{k,3}(z) \\ &\lesssim \frac{1}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}} \left\{ \begin{array}{c} d^{\delta_0-1} \\ 1 + |\log R_n - \log d| \end{array} \right\} \cdot \left(\prod_{j=l_0+1}^{m} \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j}}\right) \cdot \left(\prod_{j=m+1}^{n-1} Z_j\right),\end{aligned}$$

und die Aussage folgt wie im Beweis vom Lemma 6.2.1 durch Summation über die Indexmengen L und K. □

Jetzt können wir die Hölderstetigkeit solcher Integrale untersuchen. Wir verwenden wie im Beweis von Lemma 6.1.3 wieder den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, um die Singularität abzuschätzen:

Lemma 6.2.4. *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $0 < \delta \leq 1$, $0 \leq \alpha_j < 2$ für $j = 1, ..., n$ und*

$$\mathbf{T}(z) = \int_D \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}}.$$

Wähle für $j = 1, ..., n$ weiterhin $0 \leq \delta_j \leq \alpha_j$, und $0 < \delta_0 \leq 1$ mit

$$\delta = \delta_0 + \sum_{j=1}^{n} \delta_j.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den α_j, den δ_j und D abhängt, so dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}(z) - \mathbf{T}(z')| \; \leq \; C & \left\{ \begin{array}{cl} |z_n - z_n'|^{\delta_0} & , \; \delta_0 < 1 \\ |z_n - z_n'|(1 + |\log||z_n - z_n'|) & , \; \delta_0 = 1 \end{array} \right\} \\ & \cdot \left(\frac{1}{|z_n|^{\alpha_n - \delta_n}} + \frac{1}{|z_n'|^{\alpha_n - \delta_n}} \right) \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \end{aligned}$$

für alle $z, z' \in \mathbb{C}^n$ mit $z = (z_1, ..., z_n) \neq z' = (z_1, ..., z_{n-1}, z_n')$,

$$\begin{aligned} z_j \neq 0 \quad & , \text{ falls } \alpha_j > \delta_j, \quad \text{für } j = 1, ..., n-1, \\ \min\{|z_n|, |z_n'|\} \neq 0 \quad & , \text{ falls } \alpha_n > \delta_n. \end{aligned}$$

Beweis. Wir wählen $R > 0$ so dass $D \subset B_R(0)$, und setzen

$$F(\zeta, z) = \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}}.$$

Seien nun $z = (z_1, ..., z_n)$ und $z' = (z_1, ..., z_{n-1}, z_n')$ zwei Punkte, die den Voraussetzungen entsprechen, mit Abstand

$$d := \|z - z'\| = |z_n - z_n'|.$$

Aus Symmetriegründen kann $|z_n'| \leq |z_n|$ angenommen werden.

In diesem Beweis werden wir mehrmals die Lemmata 6.2.1 und 6.2.3 verwenden. In diesem Zusammenhang sei auf $\delta_j \leq \alpha_j$ hingewiesen, was die Folgerungen aus den Lemmata relativ einfach hält.

Sei weiterhin

$$Z := \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta_n - z_n| \leq 2d\}.$$

Wir unterteilen das Integrationsgebiet in zwei Bereiche, und betrachten die beiden Integrale

$$\begin{aligned} I_1(z,z') &:= \int_{D\cap Z} (F(\zeta,z) - F(\zeta,z'))\, dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta), \\ I_2(z,z') &:= \int_{D\setminus Z} (F(\zeta,z) - F(\zeta,z'))\, dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta). \end{aligned}$$

separat. Wegen

$$|\mathbf{T}(z) - \mathbf{T}(z')| = |I_1(z,z') + I_2(z,z')| \leq |I_1(z,z')| + |I_2(z,z')|.$$

liefert das dann die Behauptung.

Wir betrachten zunächst I_1. Hier können wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |I_1(z,z')| &\leq \int_{D\cap Z} |F(\zeta,z)| dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta) + \int_{D\cap Z} |F(\zeta,z')| dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta) \\ &=: I_1(z) + I_1(z') \end{aligned}$$

verwenden. Es sei auf

$$\begin{array}{lcl} |\zeta_n - z_n| \leq & 2d & < 3d \\ |\zeta_n - z_n'| \leq & |\zeta_n - z_n| + |z_n - z_n'| & \leq 3d \end{array} \tag{86}$$

in Z hingewiesen.

Nun sind einige Fallunterscheidungen notwendig:

a) Es sei $|z_n - z_n'| \leq |z_n|/10$. Mit (86) folgt

$$\begin{aligned} |z_n| &\leq |z_n - \zeta_n| + |\zeta_n| \\ &\leq 3d + |\zeta_n| = 3|z_n - z_n'| + |\zeta_n| \leq \frac{3}{10}|z_n| + |\zeta_n| \end{aligned}$$

und daher:

$$|z_n|/2 \leq |\zeta_n|.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_{D\cap Z} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}} \\ &\lesssim \frac{1}{|z_n|^{\alpha_n}} \int_{\substack{|\zeta_j|\leq R \\ |z_n-\zeta_n|\leq 3d}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_{n-1}|^{\alpha_{n-1}}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}} \\ &= \frac{1}{|z_n|^{\alpha_n}} \int_{\substack{|\zeta_j|\leq R \\ |\zeta_n|\leq 3d}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_{n-1}|^{\alpha_{n-1}}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - \widetilde{z}\|^{2n-\delta}} = \frac{1}{|z_n|^{\alpha_n}} \widetilde{I}_1(\widetilde{z}), \end{aligned}$$

mit $\widetilde{z} = (z_1, ..., z_{n-1}, 0)$.

Für $\widetilde{I}_1(\widetilde{z})$ verwenden wir Lemma 6.2.1 mit $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, 0)$ und $\widetilde{\delta} = (\delta_1, ..., \delta_{n-1}, \delta_n + \delta_0)$. Das liefert

$$\widetilde{I}_1(\widetilde{z}) \lesssim (3d)^{\delta_n+\delta_0} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j},$$

und somit (mit $|z_n'| \leq |z_n|$):

$$\begin{aligned} I_1(z) &\lesssim \frac{1}{|z_n|^{\alpha_n}} |z_n - z_n'|^{\delta_n+\delta_0} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j} && (87) \\ &\leq \frac{(|z_n| + |z_n'|)^{\delta_n}}{|z_n|^{\alpha_n}} |z_n - z_n'|^{\delta_0} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j} && (88) \\ &\lesssim \frac{1}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}} |z_n - z_n'|^{\delta_0} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j}\ , \quad \text{für } |z_n - z_n'| \leq \frac{|z_n|}{10}, && (89) \end{aligned}$$

und das wollten wir für $I_1(z)$ zeigen.

Da auch $|z_n' - \zeta_n| \leq 3d$ in Z gilt, ergibt sich

$$I_1(z') \lesssim \frac{1}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}} |z_n - z_n'|^{\delta_0} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j}\ , \quad \text{für } |z_n - z_n'| \leq \frac{|z_n|}{10}, \tag{90}$$

völlig analog.

b) Jetzt betrachten wir die Situation $|z_n - z_n'| > |z_n|/10$. Wegen (86) ist hier

$$|\zeta_n| \leq |\zeta_n - z_n| + |z_n| < 3d + 10|z_n - z_n'| = 13d \tag{91}$$

für $\zeta \in Z$. Damit folgt:

$$Z = \{\zeta : |\zeta_n - z_n| \leq 2d\} \subset \{\zeta : |\zeta_n| \leq 13d\}, \tag{92}$$

und wir erhalten unter Verwendung von Lemma 6.2.1 mit $\widetilde{\delta} = (\delta_1, ..., \delta_n + \delta_0)$:

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_{D\cap Z} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}} \\ &\leq \int_{\substack{|\zeta_j|\leq R \\ |\zeta_n|\leq 13d}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}} \\ &\lesssim \left\{ \begin{array}{ll} |z_n|^{\delta_n+\delta_0-\alpha_n} & , \ \delta_n + \delta_0 < \alpha_n \\ 1 + |\log(13d) - \log|z_n|| & , \ \delta_n + \delta_0 = \alpha_n \\ (13d)^{\delta_n+\delta_0-\alpha_n} & , \ \delta_n + \delta_0 > \alpha_n \end{array} \right\} \cdot \left(\prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j} \right). \end{aligned}$$

Für $\delta_n + \delta_0 < \alpha_n$ folgt weiter:

$$|z_n|^{\delta_n+\delta_0-\alpha_n} = \frac{|z_n|^{\delta_0}}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}} < \frac{(10|z_n - z_n'|)^{\delta_0}}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}}. \tag{93}$$

Für $\delta_n + \delta_0 = \alpha_n$ ist wegen $|z_n| < 10d$ und $|z_n'| \leq |z_n|$:

$$\begin{aligned} 1 + |\log(13d) - \log|z_n|| &= 1 + \log(13d) - \log|z_n| \\ &\leq 1 + \log\left(13(|z_n| + |z_n'|)\right) - \log|z_n| \\ &\leq 1 + \log 26 + \log|z_n| - \log|z_n| \\ &\lesssim \frac{|z_n|^{\delta_0}}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}} \leq \frac{(10|z_n - z_n'|)^{\delta_0}}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}}. \end{aligned}$$

Für $\delta_n + \delta_0 > \alpha_n$ gilt:

$$\begin{aligned} (13|z_n - z_n'|)^{\delta_n+\delta_0-\alpha_n} &= (13|z_n - z_n'|)^{\delta_n+\delta_0-\alpha_n} \frac{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}} && (94) \\ &\leq (13|z_n - z_n'|)^{\delta_n+\delta_0-\alpha_n} \frac{(10|z_n - z_n'|)^{\alpha_n-\delta_n}}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}} && (95) \\ &\lesssim \frac{|z_n - z_n'|^{\delta_0}}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}}. && (96) \end{aligned}$$

Also erhalten wir auch hier:

$$I_1(z) \lesssim \frac{1}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}} |z_n - z_n'|^{\delta_0} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j}, \qquad \text{für } |z_n - z_n'| > \frac{|z_n|}{10}. \tag{97}$$

Für $I_1(z')$ gilt analog unter Verwendung von Lemma 6.2.1 mit $\widetilde{\delta} = (\delta_1, ..., \delta_n + \delta_0)$:

$$\begin{aligned} I_1(z') &= \int_{D\cap Z} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z'\|^{2n-\delta}} \\ &\leq \int_{\substack{|\zeta_j|\leq R \\ |\zeta_n|\leq 13d}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z'\|^{2n-\delta}} \\ &\lesssim \left\{ \begin{array}{ll} |z_n'|^{\delta_n+\delta_0-\alpha_n} & ,\ \delta_n + \delta_0 < \alpha_n \\ 1 + |\log(13d) - \log|z_n'|| & ,\ \delta_n + \delta_0 = \alpha_n \\ (13d)^{\delta_n+\delta_0-\alpha_n} & ,\ \delta_n + \delta_0 > \alpha_n \end{array} \right\} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j} \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{|z_n'|}{10} \leq \frac{|z_n|}{10} < |z_n - z_n'|,$$

also auch $|z_n'| < 10|z_n - z_n'|$, gilt weiter:

$$|z_n'|^{\delta_n+\delta_0-\alpha_n} \leq \frac{(10|z_n - z_n'|)^{\delta_0}}{|z_n'|^{\alpha_n-\delta_n}} \qquad \text{für } \delta_n + \delta_0 < \alpha_n$$

analog zu (93).

Ebenso folgt

$$(13|z_n - z_n'|)^{\delta_n+\delta_0-\alpha_n} \lesssim \frac{|z_n - z_n'|^{\delta_0}}{|z_n'|^{\alpha_n-\delta_n}} \qquad \text{für } \delta_n + \delta_0 < \alpha_n$$

analog zu (94) - (96).

Im Fall $\delta_n + \delta_0 = \alpha_n$ müssen wir etwas anders vorgehen. Hier erhalten wir mit (91), das heißt $|\zeta_n| \leq 13d$, und $\epsilon := \delta_0/2$ unter Verwendung von Lemma 6.2.1 mit $\widetilde{\delta} = (\delta_1, ..., \delta_n + \delta_0)$ und $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n + \epsilon)$:

$$\begin{aligned}
I_1(z') &= \int_{D\cap Z} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z'\|^{2n-\delta}} \\
&\leq \int_{\substack{|\zeta_j|\leq R \\ |\zeta_n|\leq 13d}} \frac{|\zeta_n|^{\epsilon}|\zeta_n|^{-\epsilon}}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z'\|^{2n-\delta}} \\
&\lesssim d^{\epsilon} \int_{\substack{|\zeta_j|\leq R \\ |\zeta_n|\leq 13d}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n+\epsilon}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z'\|^{2n-\delta}} \\
&\lesssim d^{\epsilon}|z_n'|^{\delta_n+\delta_0-\alpha_n-\epsilon} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j} = d^{\epsilon} \frac{|z_n'|^{\delta_0-\epsilon}}{|z_n'|^{\alpha_n-\delta_n}} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j} \\
&\leq d^{\epsilon} \frac{(10d)^{\delta_0-\epsilon}}{|z_n'|^{\alpha_n-\delta_n}} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j} \lesssim \frac{|z_n - z_n'|^{\delta_0}}{|z_n'|^{\alpha_n-\delta_n}} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$I_1(z') \lesssim \frac{1}{|z_n'|^{\alpha_n-\delta_n}} |z_n - z_n'|^{\delta_0} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j}\ , \qquad \text{für } |z_n - z_n'| > \frac{|z_n|}{10}. \tag{98}$$

Fassen wir (89), (90), (97) und (98) zusammen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
|I_1(z, z')| &\leq I_1(z) + I_1(z') \\
&\lesssim \left(\frac{1}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}} + \frac{1}{|z_n'|^{\alpha_n-\delta_n}}\right) |z_n - z_n'|^{\delta_0} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j},
\end{aligned}$$

und das war für $I_1(z, z')$ zu zeigen.

c) Nun betrachten wir noch

$$I_2(z, z') = \int_{D \setminus Z} (F(\zeta, z) - F(\zeta, z'))\, dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta),$$

mit

$$Z = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta_n - z_n| \leq 2d\}.$$

Im Integrationsbereich $D \setminus Z$ ist also

$$2d < |\zeta_n - z_n|. \tag{99}$$

Für I_2 verwenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Bezeichnen wir mit $[z, z']$ die Verbindungsstrecke der Punkte z und z', so gilt für alle $\zeta \notin Z$ nämlich:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}} - \frac{1}{\|\zeta - z'\|^{2n-\delta}} \right| &\lesssim \|z - z'\| \max_{w \in [z,z']} \frac{1}{\|\zeta - w\|^{2n+1-\delta}} \\
&= |z_n - z'_n| \max_{w \in [z,z']} \frac{1}{\|\zeta - w\|^{2n+1-\delta}}.
\end{aligned}$$

Wegen (99) gilt

$$\begin{aligned}
\|\zeta - z\| &\leq \|\zeta - w\| + \|w - z\| = \|\zeta - w\| + |w_n - z_n| \\
&\leq \|\zeta - w\| + d < \|\zeta - w\| + \frac{1}{2}|\zeta_n - z_n| \\
&\leq \|\zeta - w\| + \frac{1}{2}\|\zeta - z\|,
\end{aligned}$$

also

$$\|\zeta - z\| \leq 2\|\zeta - w\|$$

für alle $\zeta \notin Z$ und alle $w \in [z, z']$. Damit gilt

$$\left| \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}} - \frac{1}{\|\zeta - z'\|^{2n-\delta}} \right| \lesssim |z_n - z'_n| \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}}$$

für alle $\zeta \notin Z$ und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
|I_2(z, z')| &\leq \int_{D \setminus Z} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \left| \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}} - \frac{1}{\|\zeta - z'\|^{2n-\delta}} \right| dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta) \\
&\lesssim |z_n - z'_n| \int_{D \setminus Z} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}} = |z_n - z'_n| \widetilde{I}_2(z)
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Lemma 6.2.3 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_2(z) &= \int_{D\setminus Z} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}} \\
&\leq \int_{\substack{|\zeta_j|\leq R \\ |\zeta_n - z_n|>2d}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}} \\
&\lesssim \left\{ \begin{array}{cl} (2d)^{\delta_0-1} & ,\delta_0<1 \\ 1+|\log R - \log(2d)| & ,\delta_0 = 1 \end{array} \right\} \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\delta_n-\alpha_n} \\
&\lesssim \left\{ \begin{array}{cl} d^{\delta_0-1} & ,\delta_0<1 \\ 1+|\log|\ d & ,\delta_0 = 1 \end{array} \right\} \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\delta_n-\alpha_n}.
\end{aligned}$$

Zusammengenommen folgt:

$$\begin{aligned}
|I_2(z,z')| &\lesssim |z_n - z_n'|\ \widetilde{I}_2(z) \\
&\lesssim |z_n - z_n'| \left\{ \begin{array}{cl} d^{\delta_0-1} & ,\delta_0<1 \\ 1+|\log|\ d & ,\delta_0 = 1 \end{array} \right\} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_n-\alpha_n} \\
&= \left\{ \begin{array}{cl} d^{\delta_0} & ,\delta_0<1 \\ d\ (1+|\log|\ d) & ,\delta_0 = 1 \end{array} \right\} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_n-\alpha_n},
\end{aligned}$$

und das war für I_2 zu zeigen. □

Analog erhalten wir eine Aussage über die Hölder-Regularität der BMK-Transformation (für $\delta = 1$ im folgenden):

Lemma 6.2.5. *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $0 < \delta \leq 1$, und für $j = 1, ..., n$ seien $0 \leq \alpha_j < 2$. Weiterhin sei $k \in \{1, ..., n\}$ und*

$$\mathbf{T}u(z) = \int_D u(\zeta) \frac{\zeta_k - z_k}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}} dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta).$$

Wähle für $j = 1, ..., n$ weiterhin $0 \leq \delta_j \leq \alpha_j$ und $0 < \delta_0 \leq 1$ mit

$$\delta = \delta_0 + \sum_{j=1}^{n} \delta_j.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den α_j, den δ_j und D abhängt, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| \leq C\ \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} &\left\{ \begin{array}{cl} |z_n - z_n'|^{\delta_0} & ,\delta_0<1 \\ |z_n - z_n'|(1+|\log||z_n - z_n'|) & ,\delta_0 = 1 \end{array} \right\} \\
&\cdot \left(\frac{1}{|z_n|^{\alpha_n-\delta_n}} + \frac{1}{|z_n'|^{\alpha_n-\delta_n}} \right) \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j-\alpha_j}
\end{aligned}$$

für alle $u \in L^{\infty,\alpha}(D)$
und alle $z = (z_1, ..., z_n) \neq z' = (z_1, ..., z_{n-1}, z_n')$ wie in Lemma 6.2.4.

Beweis. Der Beweis ergibt sich durch leichte Anpassung des Beweises von Lemma 6.2.4: Wieder sei

$$Z := \{\zeta : |\zeta_n - z_n| \leq 2|z_n - z_n'|\}$$

und man verwende die Aufteilung:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| &\leq \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \int_D \left| \frac{\zeta_k - z_k}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}} - \frac{\zeta_k - z_k'}{\|\zeta - z'\|^{2n+1-\delta}} \right| \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \\
&\leq \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \left(I_1(z) + I_1(z') + I_2(z,z') \right),
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
I_1(z) &= \int_{D \cap Z} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{|\zeta_k - z_k|}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}} dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta) \\
&\leq \int_{D \cap Z} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}},
\end{aligned}$$

und

$$I_2(z,z') = \int_{D \setminus Z} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \left| \frac{\zeta_k - z_k}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}} - \frac{\zeta_k - z_k'}{\|\zeta - z'\|^{2n+1-\delta}} \right| dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta).$$

Analog zum Beweis von Lemma 6.2.4 gilt hier mit dem Mittelwertsatz:

$$\left| \frac{\zeta_k - z_k}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}} - \frac{\zeta_k - z_k'}{\|\zeta - z'\|^{2n+1-\delta}} \right| \lesssim |z_n - z_n'| \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}}$$

für alle $\zeta \notin Z$ und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I_2(z,z') &\lesssim |z_n - z_n'| \int_{D \setminus Z} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n+1-\delta}} \\
&= |z_n - z_n'| \, \widetilde{I}_2(z)
\end{aligned}$$

Für $I_1(z)$, $I_1(z')$ und $\widetilde{I}_2(z)$ können nun die Abschätzungen aus dem Beweis von Lemma 6.2.4 unverändert übernommen werden. □

Für $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n < 1$ ergibt sich:

Lemma 6.2.6. *Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und es seien $0 \leq \alpha_j < 1$ mit*

$$0 \leq |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j < 1 \ , \qquad 0 < \delta_0 = 1 - |\alpha| \leq 1.$$

Weiterhin sei $k \in \{1, ..., n\}$ und

$$\mathbf{T}u(z) := \int_D u(\zeta) \frac{\zeta_k - z_k}{\|\zeta - z\|^{2n}} dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta).$$

Dann liefert $\mathbf{T}$ einen stetigen linearen Operator

$$\mathbf{T} : L^{\infty,\alpha}(D) \to C^{\eta}(D)$$

für $\eta = \delta_0$, falls $\delta_0 < 1$, und für alle $\eta < 1$, falls $\delta_0 = 1$.
Dabei bezeichnet $C^{\eta}(D)$ den Raum der η-hölderstetigen Funktionen auf D.

Beweis. Es sei $R > 0$ mit $D \subset B_R(0)$ und

$$\delta = \delta_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1.$$

Also liefert die Anwendung von Lemma 6.2.1 mit
$(\delta_1, ..., \delta_n) = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n + \delta_0)$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}u(z)| &\leq \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \int_D \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-\delta}} \\ &\leq \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} C' \ R^{\alpha_n + \delta_0 - \alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\alpha_j - \alpha_j} = C' R^{\delta_0} \|u\|_{L^{\infty,\alpha}}, \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C' > 0$. Damit existiert $\mathbf{T}u(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^n$, und $|\mathbf{T}u|$ ist beschränkt wie gewünscht.

Weiterhin existiert nach Lemma 6.2.5 mit $(\delta_0, ..., \delta_n) = (\delta_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ eine Konstante $C_n > 0$, so dass

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| &\leq C_n \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \left\{ \begin{array}{cl} |z_n - z_n'|^{\delta_0} & , \delta_0 < 1 \\ |z_n - z_n'|(1 + |\log||z_n - z_n'|) & , \delta_0 = 1 \end{array} \right\} \\ &\quad \cdot \left(|z_n|^{\alpha_n - \alpha_n} + |z_n'|^{\alpha_n - \alpha_n} \right) \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\alpha_j - \alpha_j} \\ &= C_n \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \left\{ \begin{array}{cl} |z_n - z_n'|^{\delta_0} & , \delta_0 < 1 \\ |z_n - z_n'|(1 + |\log||z_n - z_n'|) & , \delta_0 = 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

für alle $z = (z_1, ..., z_n)$, $z' = (z_1, ..., z_{n-1}, z_n') \in \mathbb{C}^n$ gilt ($z_n \neq z_n'$ im Fall $\delta_0 = 1$).

Analog existieren Konstanten $C_j > 0$ mit

$$|\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| \leq C_j \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \left\{ \begin{array}{cc} |z_j - z_j'|^{\delta_0} & , \delta_0 < 1 \\ |z_j - z_j'|(1 + |\log||z_j - z_j'|) & , \delta_0 = 1 \end{array} \right\}$$

für alle $z = (z_1, ..., z_n)$ und $z' = (z_1, ..., z_{j-1}, z_j', z_{j+1}, ..., z_n)$.

Damit folgt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| &\leq \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{T}u(z_1, ..., z_j, z_{j+1}', ..., z_n') - \mathbf{T}u(z_1, ..., z_{j-1}, z_j', ..., z_n')| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} C_j \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \left\{ \begin{array}{cc} |z_j - z_j'|^{\delta_0} & , \delta_0 < 1 \\ |z_j - z_j'|(1 + |\log||z_j - z_j'|) & , \delta_0 = 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

für alle $z, z' \in \mathbb{C}^n$.

Für $\delta_0 < 1$ gilt wegen $|z_j - z_j'| \leq \|z - z'\|$ also:

$$|\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| \leq \|z - z'\|^{\delta_0} \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \sum_{j=1}^{n} C_j$$

für alle $z, z' \in \mathbb{C}^n$. Damit ist die δ_0-Hölderstetigkeit für $\delta_0 < 1$ gezeigt.

Außerdem existiert für jedes $\eta < 1$ eine Konstante C_η, so dass

$$x\ (1 + |\log|\ x) \leq C_\eta\ x^\eta$$

für alle $0 \leq x \leq 1$ gilt, denn $(x\ (1 + |\log|\ x))/x^\eta$ ist stetig auf $[0, 1]$ und nimmt daher das Maximum C_η an.

Für $\delta_0 = 1$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| &\leq \sum_{j=1}^{n} C_\eta C_j |z_j - z_j'|^\eta \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \\ &\leq C_\eta \|z - z'\|^\eta \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \sum_{j=1}^{n} C_j, \end{aligned}$$

falls $\|z - z'\| \leq 1$. Für $\|z - z'\| > 1$ ist

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| &\leq |\mathbf{T}u(z)| + |\mathbf{T}u(z')| \\ &\leq 2C'R^{\delta_0} \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \leq 2C'R^{\delta_0} \|z - z'\|^\eta \|u\|_{L^{\infty,\alpha}}, \end{aligned}$$

also die η-Hölderstetigkeit für $\delta_0 = 1$ gezeigt. □

Als Folgerung ergibt sich für die Bochner-Martinelli-Koppelman-Transformation:

Korollar 6.2.7. *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $0 \le q \le n-1$, und $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ mit $\alpha_j \ge 0$ und $|\alpha| < 1$. Dann liefert die BMK-Transformation $\mathbf{B}_q^D$ einen stetigen linearen Operator*

$$\mathbf{B}_q^D : L_{0,q+1}^{\infty,\alpha}(D) \to C_{0,q}^{\eta}(D)$$

für $\eta = 1 - |\alpha|$, falls $|\alpha| > 0$, und für alle $\eta < 1$, falls $|\alpha| = 0$.
Dabei bezeichnet $C_{0,q}^{\eta}(D)$ den Raum der $(0,q)$-Formen mit η-hölderstetigen Koeffizienten auf D.

Beweis. Es sei

$$f \in L_{0,q+1}^{\infty,\alpha}(D) \quad \text{und} \quad g = \mathbf{B}_q^D f.$$

Nach Definition 3.1.1 sind die Koeffizienten $g_J = (\mathbf{B}_q^D f)_J$ gegeben durch

$$g_J = c_J \sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ |L|=q+1}} \epsilon_{kJ}^L \int_D f_L(\zeta) \frac{\overline{\zeta_k} - \overline{z_k}}{\|\zeta - z\|^{2n}} dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta),$$

mit einer Konstanten c_J, die nur von n, q und J abhängt.

Nach Lemma 6.2.6 existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von α, η und D abhängt, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
\|g\|_{C^\eta} &= \sum_J \|g_J\|_{C^\eta} \\
&\le \sum_J |c_J| \sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ |L|=q+1}} \epsilon_{kJ}^L C \|f_L\|_{L^{\infty,\alpha}} \\
&\le C' \|f\|_{L^{\infty,\alpha}},
\end{aligned}$$

mit einer passend gewählten Konstanten $C'(n, q, \alpha, \eta, D) > 0$, was die Behauptung beweist. $\square$

6.3 Lokale Integrationskoordinaten für die Kugel

Unser Ziel ist es, die Regularität der Integraloperatoren $\mathbf{T}_q$ und $\mathbf{S}_q$ zu untersuchen. Die Hauptteile $\widehat{T}_q$ und $\widehat{S}_q$ der zugehörigen Integralkerne (vgl. Definition 5.2.4) können nach Lemma 5.3.3 abgeschätzt werden durch Ausdrücke der Art

$$\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^2}.$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{E}_0$ eine auf ganz $\mathbb{C}^n$ glatte Differentialform, und es gilt:

$$\begin{aligned} P(\zeta,z) &= \|\zeta-z\|^2 + r(\zeta)r(z) = \|\zeta-z\|^2 + (1-\|\zeta\|^2)(1-\|z\|^2), \\ \Phi(\zeta,z) &= 1-\langle\zeta,z\rangle = 1-\sum_{j=1}^{n}\overline{\zeta_j}z_j. \end{aligned}$$

In diesem Abschnitt werden wir lokale Integrationskoordinaten für die Kugel ermitteln, die es ermöglichen, Φ in günstiger Form darzustellen.

Für $z \in \overline{\mathbb{D}}$ sei

$$\delta_{\mathbb{D}}(z) = \mathrm{dist}(z, b\mathbb{D}) = -r(z) = 1-\|z\|^2.$$

Für festes $z \in \mathbb{D}$ werden wir lokale differenzierbare Koordinaten

$$\xi_z(\zeta) = \xi(z,\zeta) = (\xi_1, ..., \xi_n)$$

einführen mit:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\ \xi_1(z,\zeta) &= -r(\zeta) \\ \mathrm{Im}\ \xi_1(z,\zeta) &= \mathrm{Im}\ \Phi(\zeta,z) \end{aligned}$$

Nach Lemma 5.2.1 liefert dies dann die nützliche lokale Darstellung

$$\begin{aligned} 2\Phi(\zeta,z) &= 2\mathrm{Re}\ \Phi(\zeta,z) + 2i\mathrm{Im}\ \Phi(\zeta,z) \\ &= -r(\zeta) - r(z) + \|\zeta-z\|^2 + 2i\mathrm{Im}\ \Phi(\zeta,z) \\ &= \mathrm{Re}\ \xi_1(z,\zeta) + \delta_{\mathbb{D}}(z) + \|\zeta-z\|^2 + 2i\mathrm{Im}\ \xi_1(z,\zeta), \end{aligned}$$

für ζ in einer kleinen Umgebung von z, und es wird sich

$$\begin{aligned} |\Phi(\zeta,z)| &\gtrsim |\mathrm{Re}\ \Phi(\zeta,z)| + |\mathrm{Im}\ \Phi(\zeta,z)| \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}\ \xi_1(z,\zeta) + \delta_{\mathbb{D}}(z) + \|\zeta-z\|^2\right) + |\mathrm{Im}\ \xi_1(z,\zeta)| \\ &\gtrsim \mathrm{Re}\ \xi_1(z,\zeta) + \delta_{\mathbb{D}}(z) + \|\xi(z,\zeta)-\xi(z,z)\|^2 + |\mathrm{Im}\ \xi_1(z,\zeta)|. \end{aligned}$$

ergeben. Mit Hilfe dieser Abschätzung werden wir dann im nächsten Abschnitt die Hölder-Regularität der Integraloperatoren $\mathbf{T}_q$ und $\mathbf{S}_q$ für $0 \leq q \leq n-2$ untersuchen.

Wir knüpfen an die Überlegungen aus Abschnitt 2.1 an. Der $\mathbb{C}^n$ sei versehen mit den komplexen Koordinaten

$$\zeta_j = x_j + iy_j$$

und den reellen Koordinaten $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$. Wir erinnern an die Definition

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Sei nun $p \in \mathbb{C}^n$. Dann ist der reelle Tangentialraum $T_p\mathbb{C}^n$ versehen mit dem Standard-Skalarprodukt, das wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n,p}$ bezeichnet haben. Um die Notation zu vereinfachen, werden wir für Tangential- und Kotangentialvektoren im folgenden die Abhängigkeit vom Punkt p unterdrücken. $T_p\mathbb{C}^n$ besitzt die Struktur eines n-dimensionalen komplexen Vektorraumes gegeben durch die Srukturabbildung

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \quad \text{und} \quad J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{100}$$

Als komplexe Basis wählen wir $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Nun identifizieren wir $T_p\mathbb{C}^n$ als komplexen Vektorraum mit dem komplexen Vektorraum $T_p^{1,0}\mathbb{C}^n$ der $(1,0)$-Vektoren im Punkt p an $\mathbb{C}^n$ durch den $\mathbb{C}$-Vektorraumisomorphismus Ψ_p gegeben durch

$$\Psi_p : \frac{\partial}{\partial x_j} \mapsto \frac{\partial}{\partial \zeta_j}.$$

Man beachte

$$\Psi_p\left(a_j\frac{\partial}{\partial x_j} + b_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \Psi_p\left(a_j\frac{\partial}{\partial x_j} + b_jJ_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = (a_j + ib_j)\frac{\partial}{\partial \zeta_j}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - J_p\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Für eine holomorphe Funktion f gilt (unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen):

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Daher wird Ψ_p auch als natürliche Identifikation bezeichnet. Man beachte aber, dass $T_p\mathbb{C}^n$ und $T_p^{1,0}\mathbb{C}^n$ als Teilmengen des komplexifizierten Tangentialraumes $\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$ nicht übereinstimmen. $T_p\mathbb{C}^n$ ist kein komplexer Unterraum von

$$\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_p\mathbb{C}^n.$$

Vgl. dazu auch [Ra], III.2.2. *The Complex Structure on* T_pM.

Sei nun $D \subset \mathbb{C}^n$ offen mit glattem Rand $bD \in C^1$ gegeben durch eine definierende Randfunktion $r \in C^1$ mit $dr_p \neq 0$ für $p \in bD$. Mit

$$dr_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial x_j}(p) dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial y_j}(p) dy_j$$

und dem Normalenvektor

$$V_r(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial y_j}(p) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

ist dann

$$\begin{aligned} T_p bD &= \{t \in T_p\mathbb{C}^n : \ dr_p(t) = 0\} \\ &= \{t \in T_p\mathbb{C}^n : \ \langle V_r(p), t\rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 0\} \end{aligned}$$

der reelle Tangentialraum im Punkt p an bD. Wegen $dr_p \neq 0$, $V_r(p) \neq 0$ für $p \in bD$ ist $T_p bD$ reell $(2n-1)$-dimensional. Für einen Vektor

$$t = \sum_{j=1}^{n} t_{2j-1} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} t_{2j} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

ist mit der komplexen Struktur (100):

$$J_p t = -\sum_{j=1}^{n} t_{2j} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} t_{2j-1} \frac{\partial}{\partial y_j},$$

$$\text{und} \qquad \begin{aligned} J_p(T_p bD) &= \{J_p t \in T_p\mathbb{C}^n : \ dr_p(t) = 0\} \\ &= \{t \in T_p\mathbb{C}^n : \ dr_p(-J_p t) = 0\} \\ &= \{t \in T_p\mathbb{C}^n : \ \langle V_r(p), -J_p t\rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 0\} \\ &= \{t \in T_p\mathbb{C}^n : \ \langle J_p V_r(p), t\rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 0\}, \end{aligned}$$

mit

$$J_p V_r(p) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial y_j}(p) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Wir bemerken $J_p V_r(p) \neq 0$ für $p \in bD$ und

$$\langle V_r(p), J_p V_r(p)\rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 0. \tag{101}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} T_p^{\mathbb{C}} bD &= T_p bD \cap J_p(T_p bD) \\ &= \{t \in T_p\mathbb{C}^n : dr(t) = dr(J_p t) = 0\} \\ &= \{t \in T_p\mathbb{C}^n : \langle V_r(p), t\rangle_{\mathbb{C}^n,p} = \langle J_p V_r(p), t\rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 0\} \end{aligned}$$

ein komplexer Untervektorraum von $T_p\mathbb{C}^n$ als komplexer Vektorraum. Wegen (101) ist $T_p^{\mathbb{C}} bD$ reell $(2n-2)$-dimensional und komplex $(n-1)$-dimensional. $T_p^{\mathbb{C}} bD$ heißt komplexer Tangentialraum im Punkt p an bD (vgl. dazu [Ra], II.2.4).

Unter Berücksichtigung der Identifikation $T_p\mathbb{C}^n \cong T_p^{1,0}\mathbb{C}^n$ ist

$$\begin{aligned} t &= \sum_{j=1}^n t_{2j-1}\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n t_{2j}\frac{\partial}{\partial y_j} \\ &= \sum_{j=1}^n (t_{2j-1} + it_{2j})\frac{\partial}{\partial \zeta_j}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\partial r_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial \zeta_j} d\zeta_j.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} 2\partial r_p(t) &= 2\sum_{j=1}^n (t_{2j-1} + it_{2j})\frac{\partial r}{\partial \zeta_j} \\ &= 2\sum_{j=1}^n (t_{2j-1} + it_{2j})\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial x_j} - i\frac{\partial r}{\partial y_j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(t_{2j-1}\frac{\partial r}{\partial x_j} + t_{2j}\frac{\partial r}{\partial y_j}\right) + i\sum_{j=1}^n \left(-t_{2j-1}\frac{\partial r}{\partial y_j} + t_{2j}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right) \\ &= dr_p(t) + idr_p(-J_p t) \\ &= \langle V_r(p), t\rangle_{\mathbb{C}^n,p} + i\langle J_p V_r(p), t\rangle_{\mathbb{C}^n,p}. \end{aligned}$$

Also ist $\partial r_p(t) = 0$ genau dann, wenn $\langle V_r(p), t\rangle_{\mathbb{C}^n,p} = \langle J_p V_r(p), t\rangle_{\mathbb{C}^n,p} = 0$, und als Unterraum von $T_p^{1,0}\mathbb{C}^n \cong T_p\mathbb{C}^n$ ist der komplexe Tangentialraum gegeben durch

$$T_p^{\mathbb{C}} bD = \{t \in T_p^{1,0}\mathbb{C}^n : \partial r_p(t) = 0\}.$$

Man beachte, dass es sich bei $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^n,p}$ um ein rein reelles Skalarprodukt auf $T_p\mathbb{C}^n$ handelt, das in diesem Zusammenhang nicht mit der hermiteschen Fortsetzung auf $\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$ verwechselt werden sollte.

Betrachten wir nun die konkrete Situation $D = \mathbb{D}$ und

$$r(\zeta) = 1 - \|\zeta\|^2 = 1 - \sum_{j=1}^n x_j^2 - \sum_{j=1}^n y_j^2.$$

Hier ist für $p = (p_1, ..., p_n)$:

$$\begin{aligned} d_\zeta r_p &= -\sum_{j=1}^n 2\text{Re }(p_j)\ dx_j - \sum_{j=1}^n 2\text{Im }(p_j)\ dy_j, \\ V_r(p) &= -\sum_{j=1}^n 2\text{Re }(p_j)\ \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum 2\text{Im }(p_j)\ \frac{\partial}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\text{Im } \Phi(\zeta, z) &= \frac{1}{2i}\Big(1 - \langle \zeta, z\rangle - \overline{1 - \langle \zeta, z\rangle}\Big) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{j=1}^{n} \zeta_j \overline{z_j} - \sum_{j=1}^{n} \overline{\zeta_j} z_j\right),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
d_\zeta \text{Im } \Phi(p, z) &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{z_j} d\zeta_j - \sum_{j=1}^{n} z_j d\overline{\zeta_j}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{j=1}^{n} (\text{Re } z_j - i\text{Im } z_j)(dx_j + i dy_j)\right. \\
&\qquad \left. - \sum_{j=1}^{n} (\text{Re } z_j + i\text{Im } z_j)(dx_j - i dy_j)\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \text{Im } z_j dx_j + \sum_{j=1}^{n} \text{Re } z_j dy_j.
\end{aligned}$$

Für $z = p$ folgt:

$$V_{\text{Im } \Phi}(p, p) = -\frac{1}{2} J_p V_r(p).$$

Sei nun $p \in b\mathbb{D}$ fest gewählt. Damit liegen die Gradienten der Funktionen $r(\zeta)$ und $\text{Im } \Phi(\zeta, p)$ wegen $\langle V_r(p), J_p V_r(p)\rangle_{\mathbb{C}^n, p} = 0$ orthogonal in $T_p\mathbb{C}^n$ und spannen das Komplement von $T_p^{\mathbb{C}} b\mathbb{D}$ in $T_p\mathbb{C}^n$ auf.

Identifizieren wir

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p + b_j \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p \right)$$

mit

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j x_j + b_j y_j) + p,$$

so können $T_p\mathbb{C}^n$ und $T_p^{\mathbb{C}} b\mathbb{D}$ als affine komplexe Unterräume des $\mathbb{C}^n$ angesehen werden, deren komplexe Struktur durch die komplexe Struktur des $\mathbb{C}^n$ induziert ist.

Damit liefert eine Basis $(\xi_2, ..., \xi_n) = (\xi_2(p), ..., \xi_n(p))$ von $T_p^{\mathbb{C}} b\mathbb{D}$ komplexe Koordinaten $\xi_j(p, \zeta)$ in $\mathbb{C}^n$, und als erste Koordinate kann

$$\xi_1(p, \zeta) = -r(\zeta) + i\text{Im } \Phi(\zeta, p)$$

hinzugenommen werden, so dass $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ ein lokales Koordinatensystem in einer Umgebung von $p \in b\mathbb{D}$ liefert.

Nun wollen wir die Koordinate ξ_1 aber in Abhängigkeit von z ermitteln. Da $\Phi(\zeta, z)$ stetig differenzierbar ist, existiert $s'_p > 0$, so dass

$$\{V_r(p), V_{\text{Im } \Phi}(p,z), \text{Re } \xi_2(p), \text{Im } \xi_2(p), ..., \text{Re } \xi_n(p), \text{Im } \xi_n(p)\}$$

noch eine Basis von $T_p\mathbb{C}^n$ für alle $z \in \overline{B_{s'_p}(p)}$ ist.

Wegen Im $\Phi(p,p) = 0$ existiert weiterhin $s''_p > 0$, so dass

$$|\text{Im } \Phi(p,z)| \leq \frac{1}{2}$$

für alle $z \in \overline{B_{s''_p}(p)}$ gilt.

Damit liefern dann

$$\begin{array}{lll} \xi_1(z,\zeta) & = -r(\zeta) + i\text{Im } \Phi(\zeta, z) & , \\ \xi_j(p,\zeta) & & , \ j = 2, ..., n, \end{array}$$

ein Koordinatensystem in $B_{s'''_p(z)}(p)$ für $s'''_p(z) > 0$ in Abhängigkeit von z. Da $\Phi(\zeta, z)$ stetig differenzierbar ist, hängt $s'''_p(z)$ stetig von z ab und nimmt auf $\overline{B_{s'_p}(p)} \cap \overline{B_{s''_p}(p)}$ ein Minimum $s'''_p > 0$ an.

Wegen

$$|\xi_1(z,p)| = |\text{Im } \Phi(p,z)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |\xi_j(p,p)| = 0$$

existiert weiterhin $s''''_p(z) > 0$ in Abhängigkeit von z, so dass

$$\|\xi_z(\zeta)\|^2 = |\xi_1(z,\zeta)|^2 + \sum_{j=2}^{n} |\xi_j(p,\zeta)|^2 \leq 1$$

für alle $\zeta \in B_{s''''_p(z)}(p)$ gilt. Da alle auftretenden Funktionen stetig sind, hängt auch $s''''_p(z)$ stetig von z ab und nimmt auf $\overline{B_{s'_p}(p)} \cap \overline{B_{s''_p}(p)}$ ein Minimum $s''''_p > 0$ an.

Für festes $p \in b\mathbb{D}$ sei

$$\begin{array}{rcl} \xi_z(\zeta) & = & (\xi_1(z,\zeta), \xi_2(p,\zeta), ..., \xi_n(p,\zeta)), \\ s(p) & = & \min\{s'_p, s''_p, s'''_p, s''''_p, 2\}/2 \leq 1, \end{array}$$

und

$$M'(p) = \max\{|\det J_\zeta \xi_z(\zeta)| : z, \zeta \in \overline{B_{s(p)}(p)}\},$$

wobei $J_\zeta \xi_z(\zeta)$ die Jacobi-Matrix von ξ_z bezüglich der Ableitungen in ζ bezeichne. Damit existiert $M'(p) > 0$, da $\xi_z(\zeta)$ stetig differenzierbar von z und ζ abhängt, und für festes $z \in B_{2s(p)}(p)$ ein Koordinatensystem in $B_{2s(p)}(p)$ liefert.
$J_\zeta \xi_z(\zeta)$ sollte nicht mit der komplexen Strukturabbildung J_p verwechselt werden, die im folgenden aber ohnehin nicht mehr auftreten wird.

Die Operator-Norm der Jacobi-Matrix sei gegeben durch

$$\|J_\zeta \xi_z(\zeta)\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^n : \|v\|=1} \|J_\zeta \xi_z(\zeta) v\|,$$

woraus direkt

$$\|J_\zeta \xi_z(\zeta) v\| \le \|J_\zeta \xi_z(\zeta)\| \|v\|$$

für alle $v \in \mathbb{C}^n$ folgt. Sei

$$M''(p) = \max\{\|J_\zeta \xi_z(\zeta)\|, \|J_\zeta \xi_z(\zeta)\|^{-1} : z, \zeta \in \overline{B_{s(p)}(p)}\}.$$

Analog zu $M'(p)$ existiert auch $M''(p) \ge 1$ und wir setzen:

$$M(p) = \max\{M'(p), M''(p)\}.$$

Wir fassen das bisher erreichte zusammen:

Lemma 6.3.1. *Sei $p \in b\mathbb{D}$. Dann existieren Konstanten $1 \ge s(p) > 0$ und $M(p) \ge 1$, so dass folgendes gilt: Für $z \in B_{s(p)}(p)$ liefern*

$$\begin{array}{ll} \xi_1(z,\zeta) & = -r(\zeta) + i Im\ \Phi(\zeta, z) \quad , \\ \xi_2, ..., \xi_n & \in T_p^{\mathbb{C}} b\mathbb{D} \end{array}$$

ein komplexes Koordinatensystem

$$\xi_z(\zeta) = (\xi_1(z,\zeta), \xi_2(p,\zeta), ..., \xi_n(p,\zeta))$$

in $B_{s(p)}(p)$, und es gilt:

$$\|\xi_z(\zeta)\| \le 1 \quad \textit{für alle } z, \zeta \in B_{s(p)}(p),$$

und:

$$\begin{array}{rcl} |\det J_\zeta \xi_z(\zeta)| & \le & M(p), \\ M(p)^{-1} \le \|J_\zeta \xi_z(\zeta)\| & \le & M(p) \quad \textit{für alle } z, \zeta \in B_{s(p)}(p). \end{array}$$

Da $b\mathbb{D}$ kompakt ist, können endlich viele solcher Bälle gewählt werden, die $b\mathbb{D}$ überdecken. Wir tun dies folgendermaßen: Für $I \subset \{1, ..., n\}$ sei

$$K_I = \{p \in b\mathbb{D} : \zeta_j(p) = 0 \text{ für alle } j \in I\}.$$

Nun wird K_I überdeckt von $a_I < \infty$ Bällen

$$B_{I,q} = B_{s(p(I,q))/2}(p(I,q)) \ , \ q = 1, ..., a_I,$$

mit halbiertem Radius $s(p(I,q))/2$ und Mittelpunkt $p(I,q) \in K_I$.

Als endliche Überdeckung von $b\mathbb{D}$ wählen wir

$$\mathcal{U} = \{B_{I,q} : I \subset \{1, ..., n\}, 1 \leq q \leq a_I\}.$$

Wegen

$$K_I \subset U_I = \bigcup_{1 \leq q \leq a_I} B_{I,q}$$

existiert $1 \geq R_I > 0$ mit: $z \in U_I$, falls $\mathrm{dist}(z, K_I) < R_I$. Es sei

$$\epsilon_I = R_I/(2n+1) \leq \frac{1}{2n+1}.$$

Nun sei $z \in \overline{\mathbb{D}}$ ein Punkt mit $|z_j| < \epsilon_I$ für alle $j \in I$ und $\mathrm{dist}(z, b\mathbb{D}) < \epsilon_I$. Weiterhin sei

$$\widehat{z} = \pi_I(z) \ \text{ mit } (\pi_I(z))_j = \begin{cases} 0 & , j \in I, \\ z_j & , j \notin I. \end{cases}$$

Damit ist

$$\|z - \widehat{z}\| \leq (\sqrt{\#I})\epsilon_I < n\epsilon_I.$$

Wegen

$$1 - \epsilon_I < \|z\| \leq \|z - \widehat{z}\| + \|\widehat{z}\| \leq n\epsilon_I + \|\widehat{z}\|$$

ist

$$1 - (n+1)\epsilon_I < \|\widehat{z}\|,$$

also:

$$\mathrm{dist}(\widehat{z}, K_I) < (n+1)\epsilon_I.$$

Es folgt:

$$\mathrm{dist}(z, K_I) \leq \|z - \widehat{z}\| + \mathrm{dist}(\widehat{z}, K_I) < n\epsilon_I + (n+1)\epsilon_I = R_I.$$

Damit ist $z \in U_I$ und es existiert $B_{I,q(z)}$ mit $z \in B_{I,q(z)}$. Für den Mittelpunkt $p(z) = p(I, q(z)) \in b\mathbb{D}$ der Kugel $B_{I,q(z)}$ gilt:

$$\zeta_j(p(z)) = 0 \quad \text{für } j \in I.$$

Wegen

$$\partial r_{p(z)} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\zeta_j(p(z))} d\zeta_j$$

und

$$T_p^{\mathbb{C}} bD = \{t \in T_p^{1,0}\mathbb{C}^n : \partial r_p(t) = 0\}$$

ist damit

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \in T_{p(z)}^{\mathbb{C}} b\mathbb{D} \ , \quad \text{für } j \in I.$$

Also kann ζ_j für $j \in I$ als eine der komplexen Koordinaten $(\xi_2, ..., \xi_n)$ in

$$B_{s(p(I,q(z)))}(p(I, q(z)))$$

ausgewählt werden.

Um unsere Überlegungen in einheitlicher Form darstellen zu können, wählen wir als universelle Konstanten (für alle Bälle $B_{I,q} \in \mathcal{U}$):

$$\begin{aligned}
s &= \min\{\frac{s(p(I,q))}{2} : I \subset \{1,...,n\},\ 1 \leq q \leq a_I\}, \\
\epsilon &= \min\{\epsilon_I = \frac{R_I}{2n+1} : I \subset \{1,...,n\}\} \leq \frac{1}{2n+1}, \\
a &= \min\{s, \epsilon\} \leq \frac{1}{2n+1}, \\
M &= \max\{M(p(I,q)) : I \subset \{1,...,n\},\ 1 \leq q \leq a_I\}.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

Lemma 6.3.2. *Es existieren Konstanten $0 < a \leq (2n+1)^{-1}$ und $M \geq 1$, so dass folgendes gilt: Sei $z \in \overline{\mathbb{D}}$ und $I_z \subset \{1,...,n\}$, $k_z = \#I_z$, mit*

$$\mathrm{dist}(z, b\mathbb{D}) < a \quad \textit{und} \quad \begin{cases} |z_j| < a & ,\ j \in I_z, \\ |z_j| \geq a & ,\ j \notin I_z. \end{cases}$$

Dann ist $k_z \leq n-1$, und es existieren $p_z \in b\mathbb{D}$ mit $z \in B_a(p_z)$ und $\zeta_j(p_z) = 0$ für $j \in I_z$, sowie komplexe Koordinaten

$$\xi(\zeta) = \xi_z(\zeta) = (\xi_1(z,\zeta), \xi_2(p_z,\zeta), ..., \xi_n(p_z,\zeta))$$

in $B_{2a}(p_z)$ mit:

$$\begin{aligned}
\xi_1(z,\zeta) &= -r(\zeta) + iIm\,\Phi(\zeta, z), \\
\{\xi_2, ..., \xi_n\} &= \{\zeta_j : j \in I_z\} \cup \{\xi_{k_z+2}, ..., \xi_n\} \subset T^{\mathbb{C}}_{p_z} b\mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\|\xi_z(\zeta)\| &\leq 1\ , \quad |\det J_\zeta \xi_z(\zeta)| \leq M\ , \\
M^{-1} \leq \|J_\zeta \xi_z(\zeta)\| &\leq M \quad \textit{für alle } \zeta \in B_{2a}(p_z).
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$M^{-1}\|\zeta - z\| \leq \|\xi(\zeta) - \xi(z)\| \leq M\|\zeta - z\|$$

für alle $\zeta \in B_{2a}(p_z)$.

Beweis. Wäre $k_z = n$, also $I_z = \{1,...,n\}$, so wäre $\|z\| \leq \sqrt{n}a$, aber wegen $a \leq 1/(2n+1)$ steht dies im Widerspruch zu $\mathrm{dist}(z, b\mathbb{D}) = 1 - \|z\|^2 < a$.
Damit ist nur noch die letzte Aussage zu zeigen: Sei γ die Verbindungsstrecke $\gamma(t) = t\zeta + (1-t)z$ mit $\dot\gamma(t) = \zeta - z$. Dann verbindet der Weg $\xi \circ \gamma$ die Punkte $\xi(\zeta)$ und $\xi(z)$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\|\xi(\zeta) - \xi(z)\| &\leq L(\xi \circ \gamma) = \int_0^1 \|\frac{\partial}{\partial t}\xi \circ \gamma(t)\| dt \\
&\leq \int_0^1 \|J_{\gamma(t)}\xi_z(\gamma(t))\|\|\dot\gamma(t)\| dt \leq M\|\zeta - z\|.
\end{aligned}$$

Die andere Richtung folgt analog unter Verwendung von $\|J_\xi \xi_z^{-1}(\xi(\zeta))\| \leq M$. □

6.4 Hölder-Regularität der Operatoren $\widehat{\mathbf{T}}_q$ und $\widehat{\mathbf{S}}_q$

Es sei $\widehat{\mathcal{K}}_q$ einer der Integralkerne $\widehat{T}_q$ bzw. $\widehat{S}_q$ für $0 \leq q \leq n-2$ (vgl. Definition 5.2.4) und $\widehat{\mathbf{K}}_q$ der Operator gegeben durch

$$\widehat{\mathbf{K}}_q f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) \wedge \widehat{\mathcal{K}}_q(\zeta, z)$$

für eine $(0, q+1)$-Form f auf $\mathbb{D}$.
$\widehat{\mathcal{K}}_q$ ist vom Typ $(0,q)$ in z, und vom Typ $(n, n-q-1)$ in ζ.

Nach Lemma 5.3.3 gilt für $\widehat{\mathcal{K}}_q$ die Abschätzung

$$|\widehat{\mathcal{K}}_q| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^2} \right|,$$

und für $d_z\widehat{\mathcal{K}}_q$ die Abschätzung

$$|d_z\widehat{\mathcal{K}}_q| \lesssim \left| \frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3} \right|.$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{E}_0$ eine auf $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ glatte Differentialform.

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} P(\zeta, z) &= \|\zeta - z\|^2 + r(\zeta)r(z) = \|\zeta - z\|^2 + (1 - \|\zeta\|^2)(1 - \|z\|^2), \\ \Phi(\zeta, z) &= 1 - \langle \zeta, z \rangle = 1 - \sum_{j=1}^{n} \overline{\zeta_j} z_j, \end{aligned}$$

und nach Lemma 5.2.1 gilt

$$2\mathrm{Re}\ \Phi(\zeta, z) = -r(\zeta) - r(z) + \|\zeta - z\|^2,$$

und damit auch

$$4|\Phi(\zeta, z)| \geq -r(\zeta) + \delta_{\mathbb{D}}(z) + \|\zeta - z\|^2 + |\mathrm{Im}\ \Phi(\zeta, z)| \tag{102}$$

für alle $(\zeta, z) \in \overline{\mathbb{D}} \times \overline{\mathbb{D}}$.

Dabei sei an

$$\delta_{\mathbb{D}}(z) = \mathrm{dist}(z, b\mathbb{D}) = -r(z) = 1 - \|z\|^2$$

für $z \in \overline{\mathbb{D}}$ erinnert.

Sei $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ mit $0 \leq \alpha_j < 2$ und $f \in L^{\infty,\alpha}(\mathbb{D})$. Dann können wir eine obere Schranke für $|\widehat{\mathbf{K}}_q f(z)|$ angeben. Mit Hilfe der lokalen Integrationskoordinaten für die Kugel ergibt sich nämlich:

Lemma 6.4.1. *Für $j = 1, ..., n$ seien $0 \leq \alpha_j < 2$ und*

$$I(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{\mathcal{E}_0(\zeta, z)}{P^{n-\frac{3}{2}}(\zeta, z)|\Phi|^2(\zeta, z)} dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta).$$

Wähle für $j = 1, ..., n$ weiterhin $0 \leq \delta_j \leq \alpha_j$ mit

$$\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j \neq k} \delta_j < 1.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den α_j und δ_j abhängt, so dass folgendes gilt:

$$|I(z)| \leq C \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ mit $z_j \neq 0$, falls $\delta_j - \alpha_j < 0$.

Beweis. Für diesen Beweis verwenden wir die lokalen Integrationskoordinaten für die Kugel aus Lemma 6.3.2. Seien also $a > 0$ und $M > 0$ die Konstanten aus Lemma 6.3.2. Wir unterscheiden die beiden Fälle $\text{dist}(z, b\mathbb{D}) \geq a$ und $\text{dist}(zb, \mathbb{D}) < a$:

a) Sei $\delta_{\mathbb{D}}(z) = \text{dist}(z, b\mathbb{D}) \geq a$. Wegen (102) ist damit

$$4|\Phi(\zeta, z)| \geq \delta_{\mathbb{D}}(z) \geq a,$$

und es folgt:

$$|I(z)| \lesssim \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-3} a^2}$$

Nun ist

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j \leq \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j + \sum_{j=2}^{n} \delta_j < 2,$$

und mit Lemma 6.2.1 folgt:

$$|I(z)| \leq C_1 \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}.$$

Tatsächlich liefert Lemma 6.2.1 eine bessere Aussage, auf die wir aber verzichten: Man verwende Lemma 6.2.1 etwa mit $\delta = 3$, $\delta'_j = \delta_j$ für $j = 1, ..., n-2$, $\delta'_n = 2 > \delta_n$ und $\delta'_{n-1} = \delta_{n-1} + 1 - \sum_{j=1}^{n-2} \delta_j > \delta_{n-1}$, also:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta'_j = \sum_{j=1}^{n-2} \delta_j + 1 - \sum_{j=1}^{n-2} \delta_j + 2 = 3 = \delta.$$

b) Sei $\delta_{\mathbb{D}}(z) = \text{dist}(z, b\mathbb{D}) < a$. Hier unterteilen wir das Integrationsgebiet $\mathbb{D}$ in die beiden Gebiete

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\zeta \in \mathbb{D} : \|\zeta - z\| \geq a/2\} = \mathbb{D} \setminus B_{a/2}(z), \\ A_2 &= \{\zeta \in \mathbb{D} : \|\zeta - z\| < a/2\} = \mathbb{D} \cap B_{a/2}(z). \end{aligned}$$

Das Integral über A_j sei mit I_j bezeichnet. I_1 ist leicht abzuschätzen:

$$\begin{aligned} |I_1(z)| &\lesssim \int_{A_1} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{P^{n-\frac{3}{2}}(\zeta, z)|\Phi|^2(\zeta, z)} \\ &\lesssim \int_{A_1} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-3}\|\zeta - z\|^4} \\ &\leq \frac{2^{2n+1}}{a^{2n+1}} \int_{A_1} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta) \leq C_2 \leq C_2 \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 6.2.1 mit $\delta = 2n$, $\delta_j = \alpha_j < 2$ für $j = 1, ..., n-1$, und $\delta_n = 2n - \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j > \alpha_n$ angewendet haben.

Für I_2 verwenden wir die lokalen Koordinaten aus Lemma 6.3.2: Es sei

$$K_z = \{j \in \{1, ..., n\} : |z_j| < a\}, \quad k_z = \#K_z \leq n - 1,$$

und $p_z \in b\mathbb{D}$ gewählt durch Lemma 6.3.2, also mit $z \in B_a(p_z)$,
und $\zeta_j(p_z) = 0$ für $j \in K_z$, und es existieren komplexe Koordinaten

$$\xi(\zeta) = \xi_z(\zeta) = (\xi_1(z, \zeta), \xi_2(p_z, \zeta), ..., \xi_n(p_z, \zeta))$$

in $B_{2a}(p_z)$ mit:

$$\begin{aligned} \xi_1(z, \zeta) &= -r(\zeta) + i\text{Im } \Phi(\zeta, z), \\ \{\xi_2, ..., \xi_n\} &= \{\zeta_j : j \in K_z\} \cup \{\xi_{k_z+2}, ..., \xi_n\} \subset T^{\mathbb{C}}_{p_z} b\mathbb{D}. \end{aligned}$$

Wegen $k_z = \#K_z \leq n - 1$ kann $1 \notin K_z$ und

$$\xi_j = \zeta_j \quad \text{für } j \in K_z$$

angenommen werden. Für solche j ist $\xi_j(z) = \zeta_j(z) = z_j$.

Wegen

$$B_{a/2}(z) \subset B_{2a}(p_z)$$

können diese Koordinaten für die Integration über $A_2 = \mathbb{D} \cap B_{a/2}(z)$ verwendet werden.

Für $j \notin K_z$ und $\zeta \in B_{a/2}(z)$ ist

$$a \leq |z_j| \leq |z_j - \zeta_j| + |\zeta_j| \leq a/2 + |\zeta_j|,$$

also:

$$|\zeta_j| \geq a/2.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
|I_2(z)| &\leq \int_{A_2} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{|\mathcal{E}_0(\zeta,z)|}{P^{n-\frac{3}{2}}(\zeta,z)|\Phi|^2(\zeta,z)} dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta) \\
&\lesssim \int_{A_2} \left(\prod_{j\in K_z} \frac{1}{|\zeta_j|^{\alpha_j}}\right) \frac{1}{\|\zeta-z\|^{2n-3}|\Phi|^2(\zeta,z)} dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Lemma 6.3.2 und (102) folgt mit

$$\begin{aligned}
A_2' &= \{\xi\in\mathbb{C}^n : 0 < \mathrm{Re}\ \xi_1 \leq 1, |\mathrm{Im}\ \xi_1| \leq 1, |\xi_j| \leq 1 \text{ für } j=2,...,n\}, \\
A_2'' &= \{(\mathrm{Im}\ \xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}^{n-1} : |\mathrm{Im}\ \xi_1| \leq 1, |\xi_j| \leq 1 \text{ für } j=2,...,n\}, \\
A_2''' &= \{(\xi_2,...,\xi_n)\in\mathbb{C}^{n-1} : |\xi_j| \leq 1\}
\end{aligned}$$

weiter:

$$\begin{aligned}
&\leq 16 \int_{A_2'} \left(\prod_{j\in K_z} \frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}}\right) \frac{|\det J_\xi \xi_z^{-1}(\xi)|}{\|\zeta-z\|^{2n-3}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\xi)}{(\mathrm{Re}\ \xi_1 + |\mathrm{Im}\ \xi_1| + \delta_{\mathbb{D}}(z) + \|\zeta-z\|^2)^2} \\
&\lesssim \int_{A_2'} \left(\prod_{j\in K_z} \frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}}\right) \frac{1}{\|\xi-\xi(z)\|^{2n-3}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\xi)}{(\mathrm{Re}\ \xi_1 + |\mathrm{Im}\ \xi_1| + \delta_{\mathbb{D}}(z) + \|\xi-\xi(z)\|^2)^2} \\
&\leq \int_{A_2'} \left(\prod_{j\in K_z} \frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}}\right) \frac{1}{\|\xi'-\xi'(z)\|^{2n-3}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\xi)}{(\mathrm{Re}\ \xi_1 + |\mathrm{Im}\ \xi_1| + \delta_{\mathbb{D}}(z) + \|\xi'-\xi'(z)\|^2)^2}
\end{aligned}$$

mit $\xi' = (\xi_2,...,\xi_n)$.

Der Satz von Fubini und Integration in Re ξ_1 über $[0,1]$ liefern:

$$\leq \int_{A_2''} \left(\prod_{j\in K_z} \frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}}\right) \frac{1}{\|\xi'-\xi'(z)\|^{2n-3}} \frac{dV_{\mathbb{R}\times\mathbb{C}^{n-1}}(\mathrm{Im}\ \xi_1,\xi_2,...,\xi_n)}{(|\mathrm{Im}\ \xi_1| + \delta_{\mathbb{D}}(z) + \|\xi'-\xi'(z)\|^2)},$$

denn für $c > 0$ ist:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+c)^2} = -\frac{1}{x+c}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{1+c} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{c}.$$

Weiter liefern Fubini und Integration in Im ξ_1 über $[-1,1]$:

$$\lesssim \int_{A_2'''} \left(\prod_{j\in K_z} \frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}}\right) \frac{1 + |\log|\big(\delta_{\mathbb{D}}(z) + \|\xi'-\xi'(z)\|^2\big)}{\|\xi'-\xi'(z)\|^{2n-3}} dV_{\mathbb{C}^{n-1}}(\xi'),$$

denn für $c > 0$ ist:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{|x|+c} = \log(x+c)|_0^1 \leq |\log|(1+c) + |\log|c.$$

Damit ergibt sich: Für alle $0 \le \eta < 1$ existiert eine Konstante $C_\eta > 0$ mit:

$$|I_2(z)| \le C_\eta \int_{|\xi_j| \le 1} \left(\prod_{j \in K_z} \frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}} \right) \frac{dV_{\mathbb{C}^{n-1}}(\xi')}{\|\xi' - \xi'(z)\|^{2n-2-\eta}}.$$

Wir wählen konkret ein η_0 mit

$$\max_{1 \le k \le n} \sum_{j \ne k} \delta_j < \eta_0 < 1.$$

Nun verwenden wir Lemma 6.2.1 (in $\mathbb{C}^{n-1}$) mit

$$\begin{aligned}
\delta &= \eta_0, \\
\delta'_1 &= 0, \\
\delta'_j &= \delta_j, \quad \text{für } j = 2, ..., n-1, \\
\delta'_n &= \eta_0 - \sum_{j=2}^{n-1} \delta_j > \delta_n, \\
\alpha'_j &= \begin{cases} \alpha_j & , \ j \in K_z \\ 0 & , \ j \notin K_z \end{cases}
\end{aligned}$$

Man beachte die Sonderrolle von δ'_1, da wir $1 \notin K_z$ angenommen haben.
Unter Beachtung von $\xi_j(z) = \zeta_j(z) = z_j$ für $j \in K_z$ liefert Lemma 6.2.1:

$$\begin{aligned}
|I_2(z)| &\le C_{\eta_0} \int_{|\xi_j| \le 1} \left(\prod_{j \in K_z} \frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}} \right) \frac{dV_{\mathbb{C}^{n-1}}(\xi')}{\|\xi' - \xi'(z)\|^{2(n-1)-\eta_0}} \\
&\le C' \, C_{\eta_0} \left(\prod_{\substack{j \in K_z \\ j \ne n}} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \right) \left(\prod_{\substack{j \notin K_z \\ j \notin \{1,n\}}} 1^{\delta_j} \right) \begin{cases} |\xi_n(z)|^{\delta'_n - \alpha'_n} & , \ \delta'_n - \alpha'_n < 0 \\ 1 + |\log||\xi_n(z)| & , \ \delta'_n - \alpha'_n = 0 \\ 1^{\delta'_n - \alpha'_n} & , \ \delta'_n - \alpha'_n > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Für $n \in K_z$ ist $\alpha'_n = \alpha_n$, $\delta'_n > \delta_n$ und daher:

$$\left\{ \begin{array}{ll} |\xi_n(z)|^{\delta'_n - \alpha'_n} & , \ \delta'_n - \alpha'_n < 0 \\ 1 + |\log||\xi_n(z)| & , \ \delta'_n - \alpha'_n = 0 \\ 1^{\delta'_n - \alpha'_n} & , \ \delta'_n - \alpha'_n > 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} |z_n|^{\delta'_n - \alpha_n} \\ 1 + |\log||z_n| \\ 1^{\delta'_n - \alpha_n} \end{array} \right\} \lesssim |z_n|^{\delta_n - \alpha_n}.$$

Für $n \notin K_z$ ist $\alpha'_n = 0$, $\delta'_n > 0$ und $1^{\delta'_n - \alpha'_n} \le |z_n|^{\delta_n - \alpha_n}$.

Damit existiert eine Konstante $C_3 > 0$ mit:

$$|I_2(z)| \le C_3 \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}.$$

□

Als nächstes wollen wir auch eine obere Schranke für $|d_z \widehat{\mathbf{K}}_q f(z)|$ in Abhängigkeit von z und $\delta_{\mathbb{D}}(z)$ angeben. Zur Vorbereitung zeigen wir zunächst:

Lemma 6.4.2. *Es seien $0 \leq \alpha < 2$, $0 < \beta < 2$, $e > 0$ und*

$$I(z,d) = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|t|^\alpha} \frac{1}{|t-z|^\beta} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{(|t-z|^2 + d)^e}.$$

Wähle weiterhin $0 \leq \gamma \leq \alpha$ mit $\gamma + \beta < 2$ und $\gamma + \beta + 2e > 2$.
Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von α, β, γ und e abhängt, so dass folgendes gilt:

$$I(z,d) \leq C \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \sqrt{d}^{2-(\beta+\gamma+2e)}$$

für alle $d > 0$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$, falls $\alpha - \gamma > 0$.

Beweis. Wir unterteilen das Integrationsgebiet $\mathbb{C}$ in die vier Gebiete:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{t : |t| < |z|/3\} = \Delta_{|z|/3}(0), \\
A_2 &= \{t : |t-z| < |z|/3\} = \Delta_{|z|/3}(z), \\
A_3 &= \{t : |t| < 2|z|, |t| \geq |z|/3, |t-z| \geq |z|/3\} = \Delta_{2|z|}(0) \setminus (A_1 \cup A_2), \\
A_4 &= \{t : |t| \geq 2|z|\} = \mathbb{C} \setminus \Delta_{2|z|}(0).
\end{aligned}$$

Das Integral über A_j sei mit $I_j(z,d)$ bezeichnet ($j = 1, ..., 4$).

a) Für $t \in A_1$ ist $|t-z| \geq \frac{2}{3}|z|$ und $|t-z| \geq 2|t|$.

Damit ist, falls $\beta \geq \alpha - \gamma$:

$$\begin{aligned}
I_1(z,d) &\lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \int_{A_1} \frac{1}{|t|^\alpha} \frac{1}{|t-z|^{\beta-\alpha+\gamma}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{(|t-z|^2+d)^e} \\
&\leq \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \int_{A_1} \frac{1}{|t|^\alpha} \frac{1}{|t|^{\beta-\alpha+\gamma}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{(|t|^2+d)^e} \\
&\sim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \int_0^{|z|/3} \frac{r^{1-\beta-\gamma}}{(r^2+d)^e} dr \\
&\leq \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{d}^{1-\beta-\gamma} s^{1-\beta-\gamma} \sqrt{d}}{d^e (s^2+1)^e} ds \\
&= \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \sqrt{d}^{2-(\beta+\gamma+2e)} \int_0^\infty \frac{s^{1-(\beta+\gamma)}}{(s^2+1)^e} ds \lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \sqrt{d}^{2-(\beta+\gamma+2e)},
\end{aligned}$$

mit der Substitution $r = \sqrt{d} \cdot s$ und

$$\int_0^\infty \frac{s^{1-(\beta+\gamma)}}{(s^2+1)^e} ds \leq \int_0^1 s^{1-(\beta+\gamma)} ds + \int_1^\infty s^{1-(\beta+\gamma+2e)} ds < \infty,$$

wobei man $\beta + \gamma < 2$ und $\beta + \gamma + 2e > 2$ beachte.

Im Falle $\beta < \alpha - \gamma$ ergibt sich mit

$$\epsilon = \alpha - (\gamma + \beta) < 2 - (2 - 2e) = 2e$$

analog:

$$\begin{aligned}
I_1(z,d) &\lesssim \frac{1}{|z|^\beta} \int_{A_1} \frac{1}{|t|^\alpha} \left(\frac{1}{|t-z|^2 + d} \right)^{e-\epsilon/2} \left(\frac{1}{|t-z|^2 + d} \right)^{\epsilon/2} dV_{\mathbb{C}}(t) \\
&\lesssim \frac{1}{|z|^\beta} \int_{A_1} \frac{1}{|t|^\alpha} \left(\frac{1}{|t|^2 + d} \right)^{e-\epsilon/2} \left(\frac{1}{|z|^2} \right)^{\epsilon/2} dV_{\mathbb{C}}(t) \\
&\sim \frac{1}{|z|^{\beta+\epsilon}} \int_0^{|z|/3} r^{1-\alpha} \left(\frac{1}{r^2 + d} \right)^{e-\epsilon/2} dr \\
&\leq \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{d}^{1-\alpha} s^{1-\alpha} \sqrt{d}}{d^{e-\epsilon/2} (s^2+1)^{e-\epsilon/2}} ds \\
&= \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \sqrt{d}^{1-\alpha+1-2e+\epsilon} \int_0^\infty \frac{s^{1-\alpha}}{(s^2+1)^{e-\epsilon/2}} ds \lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \sqrt{d}^{2-(\beta+\gamma+2e)},
\end{aligned}$$

mit der Substitution $r = \sqrt{d} \cdot s$ und

$$\int_0^\infty \frac{s^{1-\alpha}}{(s^2+1)^{e-\epsilon/2}} ds \leq \int_0^1 s^{1-\alpha} ds + \int_1^\infty s^{1-(\beta+\gamma+2e)} ds < \infty,$$

wobei man $\alpha < 2$ und $\beta + \gamma + 2e > 2$ beachte.

b) Für $t \in A_2$ ist $|t| \geq \frac{2}{3}|z|$ und $|t| \geq |t - z|$.

Damit folgt (wie in Teil a) im Fall $\beta \geq \alpha - \gamma$):

$$\begin{aligned}
I_2(z,d) &\lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \int_{A_2} \frac{1}{|t|^\gamma} \frac{1}{|t-z|^\beta} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{(|t-z|^2+d)^e} \\
&\leq \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \int_{A_2} \frac{1}{|t-z|^{\gamma+\beta}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{(|t-z|^2+d)^e} \\
&\sim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \int_0^{|z|/3} \frac{r^{1-(\gamma+\beta)}}{(r^2+d)^e} dr \lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \sqrt{d}^{2-(\beta+\gamma+2e)}.
\end{aligned}$$

c) Für $t \in A_3$ ist $|t| \geq |z|/3$ und $|t - z| \geq |z|/3 \geq |t|/6$ und es folgt:

$$\begin{aligned}
I_3(z,d) &\lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \int_{A_3} \frac{1}{|t|^\gamma} \frac{1}{|t|^\beta} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{(|t|^2+d)^e} \\
&\lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \int_0^{2|z|} \frac{r^{1-(\gamma+\beta)}}{(r^2+d)^e} dr \lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \sqrt{d}^{2-(\beta+\gamma+2e)}.
\end{aligned}$$

d) Für $t \in A_4$ ist $|t| \geq |z|/3$ und $|t-z| \geq |t|/2$ und es folgt analog:

$$\begin{aligned} I_4(z,d) &\lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \int_{A_4} \frac{1}{|t|^\gamma} \frac{1}{|t|^\beta} \frac{dV_{\mathbb{C}}(t)}{(|t|^2+d)^e} \\ &\lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \int_{2|z|}^{\infty} \frac{r^{1-(\gamma+\beta)}}{(r^2+d)^e} dr \lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \sqrt{d}^{2-(\beta+\gamma+2e)}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$I(z,d) = I_1(z,d) + ... + I_4(z,d) \lesssim \frac{1}{|z|^{\alpha-\gamma}} \sqrt{d}^{2-(\beta+\gamma+2e)}.$$

□

Damit folgt auch:

Lemma 6.4.3. *Für $j = 1, ..., n$ seien $0 \leq \alpha_j < 2$ und*

$$I(z,d) = \int_{\mathbb{C}^n} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n-1}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{(\|\zeta - z\|^2 + d)}.$$

Wähle für $j = 1, ..., n$ weiterhin $0 \leq \delta_j \leq \alpha_j$ und $\delta_0 > 0$ mit

$$\delta_0 + \sum_{j=1}^{n} \delta_j = 1.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den α_j und δ_j abhängt, so dass folgendes gilt:

$$I(z,d) \leq C\ d^{\delta_0/2-1} \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}$$

für alle $d > 0$ und alle $z \in \mathbb{C}^n$ mit $z_j \neq 0$, falls $\delta_j < \alpha_j$.

Beweis. Wegen

$$2n - 1 = \sum_{j=1}^{n} (2 - \delta_j - \delta_0/n)$$

ist

$$\frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n-1}} \leq \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{|\zeta_j - z_j|^{2-\delta_j-\delta_0/n}}$$

und es folgt:

$$I(z,d) \leq \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|\zeta_j|^{\alpha_j}} \frac{1}{|\zeta_j - z_j|^{2-\delta_j-\delta_0/n}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(\zeta_j)}{(|\zeta_j - z_j|^2 + d)^{1/n}} = \prod_{j=1}^{n} I_j(z,d).$$

Um I_j abzuschätzen, wollen wir Lemma 6.4.2 mit

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_j, \\ \gamma &= \delta_j, \\ \beta &= 2 - \delta_j - \delta_0/n, \\ e &= 1/n \end{aligned}$$

verwenden. Wegen

$$\begin{aligned} 0 \le \delta_j = \gamma &\le \alpha_j = \alpha < 2, \\ \gamma + \beta &= 2 - \delta_0/n < 2, \\ \gamma + \beta + 2e &= 2 - \delta_0/n + 2/n > 2 + 1/n > 2 \end{aligned}$$

sind die Voraussetzungen erfüllt, und es folgt:

$$\begin{aligned} I_j(z,d) &= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|\zeta_j|^{\alpha_j}} \frac{1}{|\zeta_j - z_j|^{2-\delta_j-\delta_0/n}} \frac{dV_{\mathbb{C}}(\zeta_j)}{(|\zeta_j - z_j|^2 + d)^{1/n}} \\ &\le C(\alpha_j, \delta_j, \delta_0, n) \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j - \delta_j}} \sqrt{d}^{2-(\beta+\gamma+2e)} \\ &= C(\alpha_j, \delta_j, \delta_0, n) \frac{1}{|z_j|^{\alpha_j - \delta_j}} \sqrt{d}^{\delta_0/n - 2/n}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} I(z,d) &= \prod_{j=1}^n I_j(z,d) \\ &\le C(\alpha, \delta) \prod_{j=1}^n \sqrt{d}^{\delta_0/n - 2/n} \prod_{j=1}^n |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \\ &= C(\alpha, \delta)\ d^{\delta_0/2 - 1} \prod_{j=1}^n |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Als Spezialfall notieren wir für $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n < 1$, $\delta_j = \alpha_j$ und $\delta_0 = 1 - |\alpha|$:

Korollar 6.4.4. *Es sei $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ mit $0 \le \alpha_j < 1$ und $|\alpha| < 1$. Dann existiert eine Konstante $C(\alpha) > 0$, so dass folgendes gilt:*

$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{1}{\|\zeta - z\|^{2n-1}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{(\|\zeta - z\|^2 + d)} \le C(\alpha)\ d^{-1/2 - |\alpha|/2}$$

für alle $d > 0$.

Nun kann eine obere Schranke für $|d_z\widehat{\mathbf{K}}_q f(z)|$ ermittelt werden:

Lemma 6.4.5. *Für $j = 1, ..., n$ seien $0 \le \alpha_j < 2$ und*

$$I(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{\mathcal{E}_0(\zeta, z)}{P^{n-\frac{3}{2}}(\zeta, z)|\Phi|^3(\zeta, z)} dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta).$$

Wähle für $j = 1, ..., n$ weiterhin $0 \le \delta_j \le \alpha_j$ mit

$$\mu = \max_{1 \le k \le n} \sum_{j \ne k} \delta_j < 1.$$

Es sei $\delta_0 = 1 - \mu > 0$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den α_j und δ_j abhängt, so dass folgendes gilt:

$$|I(z)| \le C \ \delta_{\mathbb{D}}(z)^{\delta_0/2-1} \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ mit $z_j \ne 0$, falls $\delta_j - \alpha_j < 0$.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 6.4.1: In Teil **a**) und für das Integral I_1 in Teil **b**) verändern sich lediglich die auftretenden Konstanten. Die wesentliche Abweichung tritt bei der Abschätzung von I_2 in Teil **b**) auf.

Seien also $a > 0$ und $M > 0$ die Konstanten aus Lemma 6.3.2. Wir unterscheiden die beiden Fälle $\text{dist}(z, b\mathbb{D}) \ge a$ und $\text{dist}(zb\mathbb{D}) < a$:

a) Sei $\delta_{\mathbb{D}}(z) = \text{dist}(z, b\mathbb{D}) \ge a$. Wegen (102) ist damit

$$4|\Phi(\zeta, z)| \ge \delta_{\mathbb{D}}(z) \ge a,$$

und es folgt:

$$|I(z)| \lesssim \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-3} a^3}$$

Nun ist

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j \le \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j + \sum_{j=2}^{n} \delta_j < 2,$$

und mit Lemma 6.2.1 folgt:

$$|I(z)| \le C_1 \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \le C_1 \ \delta_{\mathbb{D}}(z)^{\delta_0/2-1} \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}.$$

Tatsächlich liefert Lemma 6.2.1 eine bessere Aussage, auf die wir aber verzichten: Man verwende Lemma 6.2.1 etwa mit $\delta = 3$, $\delta'_j = \delta_j$ für $j = 1, ..., n-2$, $\delta'_n = 2 > \delta_n$ und $\delta'_{n-1} = \delta_{n-1} + 1 - \sum_{j=1}^{n-2} \delta_j > \delta_{n-1}$, also:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta'_j = \sum_{j=1}^{n-2} \delta_j + 1 - \sum_{j=1}^{n-2} \delta_j + 2 = 3 = \delta.$$

b) Sei $\delta_{\mathbb{D}}(z) = \text{dist}(z, b\mathbb{D}) < a$. Hier unterteilen wir das Integrationsgebiet $\mathbb{D}$ in die beiden Gebiete

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\zeta \in \mathbb{D} : \|\zeta - z\| \geq a/2\} = \mathbb{D} \setminus B_{a/2}(z), \\ A_2 &= \{\zeta \in \mathbb{D} : \|\zeta - z\| < a/2\} = \mathbb{D} \cap B_{a/2}(z). \end{aligned}$$

Das Integral über A_j sei mit I_j bezeichnet. I_1 ist leicht abzuschätzen:

$$\begin{aligned} |I_1(z)| &\lesssim \int_{A_1} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{P^{n-\frac{3}{2}}(\zeta, z)|\Phi|^3(\zeta, z)} \\ &\lesssim \int_{A_1} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-3}\|\zeta - z\|^6} \\ &\leq \frac{2^{2n+3}}{a^{2n+3}} \int_{A_1} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1} \cdots |\zeta_n|^{\alpha_n}} dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta) \leq C_2 \leq C_2 \delta_{\mathbb{D}}(z)^{\delta_0/2-1} \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt Lemma 6.2.1 mit $\delta = 2n$, $\delta_j = \alpha_j < 2$ für $j = 1, ..., n-1$, und $\delta_n = 2n - \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j > \alpha_n$ angewendet haben.

Für I_2 verwenden wir die lokalen Koordinaten aus Lemma 6.3.2: Es sei

$$K_z = \{j \in \{1, ..., n\} : |z_j| < a\}, \quad k_z = \#K_z \leq n - 1,$$

und $p_z \in b\mathbb{D}$ gewählt durch Lemma 6.3.2, also mit $z \in B_a(p_z)$,
und $\zeta_j(p_z) = 0$ für $j \in K_z$, und es existieren komplexe Koordinaten

$$\xi(\zeta) = \xi_z(\zeta) = (\xi_1(z, \zeta), \xi_2(p_z, \zeta), ..., \xi_n(p_z, \zeta))$$

in $B_{2a}(p_z)$ mit:

$$\begin{aligned} \xi_1(z, \zeta) &= -r(\zeta) + i\text{Im}\, \Phi(\zeta, z), \\ \{\xi_2, ..., \xi_n\} &= \{\zeta_j : j \in K_z\} \cup \{\xi_{k_z+2}, ..., \xi_n\} \subset T^{\mathbb{C}}_{p_z} b\mathbb{D}. \end{aligned}$$

Wegen $k_z = \#K_z \leq n - 1$ kann $1 \notin K_z$ und

$$\xi_j = \zeta_j \quad \text{für } j \in K_z$$

angenommen werden. Für solche j ist $\xi_j(z) = \zeta_j(z) = z_j$.

Wegen

$$B_{a/2}(z) \subset B_{2a}(p_z)$$

können diese Koordinaten für die Integration über $A_2 = \mathbb{D} \cap B_{a/2}(z)$ verwendet werden.

Für $j \notin K_z$ und $\zeta \in B_{a/2}(z)$ ist

$$a \leq |z_j| \leq |z_j - \zeta_j| + |\zeta_j| \leq a/2 + |\zeta_j|,$$

also:

$$|\zeta_j| \geq a/2.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
|I_2(z)| &\leq \int_{A_2} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{|\mathcal{E}_0(\zeta,z)|}{P^{n-\frac{3}{2}}(\zeta,z)|\Phi|^3(\zeta,z)} dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta) \\
&\lesssim \int_{A_2} \left(\prod_{j\in K_z} \frac{1}{|\zeta_j|^{\alpha_j}}\right) \frac{1}{\|\zeta-z\|^{2n-3}|\Phi|^3(\zeta,z)} dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Lemma 6.3.2 und (102) folgt mit

$$\begin{aligned}
A_2' &= \{\xi\in\mathbb{C}^n : 0<\text{Re }\xi_1\leq 1, |\text{Im }\xi_1|\leq 1, |\xi_j|\leq 1 \text{ für } j=2,...,n\}, \\
A_2'' &= \{(\text{Im }\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}^{n-1} : |\text{Im }\xi_1|\leq 1, |\xi_j|\leq 1 \text{ für } j=2,...,n\}, \\
A_2''' &= \{(\xi_2,...,\xi_n)\in\mathbb{C}^{n-1} : |\xi_j|\leq 1\}
\end{aligned}$$

weiter:

$$\begin{aligned}
&\leq\ 64\int_{A_2'} \left(\prod_{j\in K_z}\frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}}\right) \frac{|\det J_\xi \xi_z^{-1}(\xi)|}{\|\zeta-z\|^{2n-3}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\xi)}{(\text{Re }\xi_1+|\text{Im }\xi_1|+\delta_{\mathbb{D}}(z)+\|\zeta-z\|^2)^3} \\
&\lesssim\ \int_{A_2'} \left(\prod_{j\in K_z}\frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}}\right) \frac{1}{\|\xi-\xi(z)\|^{2n-3}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\xi)}{(\text{Re }\xi_1+|\text{Im }\xi_1|+\delta_{\mathbb{D}}(z)+\|\xi-\xi(z)\|^2)^3} \\
&\leq\ \int_{A_2'} \left(\prod_{j\in K_z}\frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}}\right) \frac{1}{\|\xi'-\xi'(z)\|^{2n-3}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\xi)}{(\text{Re }\xi_1+|\text{Im }\xi_1|+\delta_{\mathbb{D}}(z)+\|\xi'-\xi'(z)\|^2)^3}
\end{aligned}$$

mit $\xi'=(\xi_2,...,\xi_n)$.

Der Satz von Fubini und Integration in Re ξ_1 über $[0,1]$ liefern:

$$\leq \int_{A_2''} \left(\prod_{j\in K_z}\frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}}\right) \frac{1}{\|\xi'-\xi'(z)\|^{2n-3}} \frac{dV_{\mathbb{R}\times\mathbb{C}^{n-1}}(\text{Im }\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)}{(|\text{Im }\xi_1|+\delta_{\mathbb{D}}(z)+\|\xi'-\xi'(z)\|^2)^2},$$

denn für $c>0$ ist:

$$2\int_0^1 \frac{dx}{(x+c)^3} = -\frac{1}{(x+c)^2}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{c^2}\leq\frac{1}{c^2}.$$

Weiter liefern Fubini und Integration in Im ξ_1 über $[-1,1]$:

$$\leq 2\int_{A_2'''} \left(\prod_{j\in K_z}\frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}}\right) \frac{1}{\|\xi'-\xi'(z)\|^{2n-3}} \frac{dV_{\mathbb{C}^{n-1}}(\xi')}{(\delta_{\mathbb{D}}(z)+\|\xi'-\xi'(z)\|^2)},$$

denn für $c>0$ ist:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{(|x|+c)^2} = -\frac{1}{x+c}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{1+c}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{c}.$$

Wegen $A_2''' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ haben wir bisher gezeigt:

$$|I_2(z)| \lesssim \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \left(\prod_{j\in K_z} \frac{1}{|\xi_j|^{\alpha_j}} \right) \frac{1}{\|\xi' - \xi'(z)\|^{2n-3}} \frac{dV_{\mathbb{C}^{n-1}}(\xi')}{(\delta_{\mathbb{D}}(z) + \|\xi' - \xi'(z)\|^2)}.$$

Nun verwenden wir Lemma 6.4.3 (in $\mathbb{C}^{n-1}$) mit:

$$\begin{aligned}
d &= \delta_{\mathbb{D}}(z), \\
\delta_j' &= \begin{cases} \delta_j & , j \in K_z, \\ 0 & , j \notin K_z, \end{cases} \\
\delta_0' &= 1 - \sum_{j=1}^{n} \delta_j' = 1 - \sum_{j\in K_z} \delta_j \geq 1 - \mu = \delta_0 > 0, \\
\alpha_j' &= \begin{cases} \alpha_j & , j \in K_z, \\ 0 & , j \notin K_z. \end{cases}
\end{aligned}$$

Man beachte die Sonderrolle von $\delta_1' = 0$, da wir $1 \notin K_z$ angenommen haben.

Unter Beachtung von $\xi_j(z) = \zeta_j(z) = z_j$ für $j \in K_z$ liefert Lemma 6.4.3:

$$|I_2(z)| \;\; \leq \;\; C_3 \; \delta_{\mathbb{D}}(z)^{\delta_0'/2-1} \prod_{j\in K_z} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}. \tag{103}$$

Wegen $\delta_0' \geq \delta_0 > 0$ und $\delta_{\mathbb{D}}(z) \leq 1$ ist

$$\delta_{\mathbb{D}}(z)^{\delta_0'/2-1} \leq \delta_{\mathbb{D}}(z)^{\delta_0/2-1}.$$

Wegen $0 \leq \delta_j \leq \alpha_j$ und $|z_j| \leq 1$ ist auch

$$1 \leq |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}$$

für $j \notin K_z$. Aus (103) folgt damit:

$$|I_2(z)| \leq C_3 \; \delta_{\mathbb{D}}(z)^{\delta_0/2-1} \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}.$$

$\square$

Mit Hilfe der oberen Schranke für $|d_z\widehat{\mathbf{K}}_q f|$ können wir nun eine Aussage über die Hölderstetigkeit von $\widehat{\mathbf{K}}_q f$ nach Art eines Hardy-Littlewood-Lemmas ableiten:

Lemma 6.4.6. *Es sei $\mathcal{K}(\zeta, z)$ eine Funktion auf $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ (differenzierbar in z) mit*

$$|\mathcal{K}(\zeta,z)| \lesssim \left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^2}\right| \quad \text{und} \quad |d_z\mathcal{K}(\zeta,z)| \lesssim \left|\frac{\mathcal{E}_0}{P^{n-3/2}\Phi^3}\right|.$$

Für $j = 1, ..., n$ seien $0 \leq \alpha_j < 2$ und

$$\mathbf{T}u(z) = \int_{\mathbb{D}} u(\zeta)\mathcal{K}(\zeta,z)dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta).$$

Wähle für $j = 1, ..., n$ weiterhin $0 \leq \delta_j \leq \alpha_j$ mit

$$\mu = \max_{1\leq k\leq n} \sum_{j\neq k} \delta_j < 1.$$

Es sei $\delta_0 = 1 - \mu > 0$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den α_j und δ_j abhängt, so dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| \;\; &\leq \;\; C\; \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} |z_n - z_n'|^{\delta_0/2} \\ &\qquad \cdot \left(|z_n|^{\delta_n-\alpha_n} + |z_n'|^{\delta_n-\alpha_n}\right)\prod_{j=1}^{n-1}|z_j|^{\delta_j-\alpha_j} \end{aligned}$$

für alle $u \in L^{\infty,\alpha}(\mathbb{D})$
und alle $z = (z_1, ..., z_n) \neq z' = (z_1, ..., z_{n-1}, z_n') \in \mathbb{D}$ mit

$$\begin{aligned} z_j \neq 0 \quad &, \text{ falls } \alpha_j > \delta_j, \quad \text{für } j = 1, ..., n-1, \\ \min\{|z_n|, |z_n'|\} \neq 0 \quad &, \text{ falls } \alpha_n > \delta_n. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Lemma 6.4.1 existiert eine Konstante $C_0 > 0$ mit:

$$|\mathbf{T}u(w)| \;\; \lesssim \;\; \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{P^{n-\frac{3}{2}}(\zeta,w)|\Phi|^2(\zeta,w)} \tag{104}$$

$$\leq \;\; C_0\; \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \prod_{j=1}^{n} |w_j|^{\delta_j-\alpha_j} \tag{105}$$

für alle $w \in \mathbb{D}$ mit $w_j \neq 0$, falls $\delta_j < \alpha_j$. Außerdem ist:

$$|d_w\mathbf{T}u(w)| \;\; \leq \;\; \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|\zeta_1|^{\alpha_1}\cdots|\zeta_n|^{\alpha_n}} \frac{dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta)}{P^{n-\frac{3}{2}}(\zeta,w)|\Phi|^3(\zeta,w)},$$

und Lemma 6.4.5 liefert eine Konstante $C_1 > 0$ mit:

$$|d_w\mathbf{T}u(w)| \leq C_1\; \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \delta_{\mathbb{D}}(w)^{\delta_0/2-1} \prod_{j=1}^{n} |w_j|^{\delta_j-\alpha_j}, \tag{106}$$

für alle $w \in \mathbb{D}$ mit $w_j \neq 0$, falls $\delta_j < \alpha_j$.

Die Abschätzungen (105) und (106) bilden die Grundlage für diesen Beweis.

Wir verwenden wieder die lokalen Integrationskoordinaten für die Kugel aus Lemma 6.3.2. Seien also $a > 0$ und $M > 0$ die Konstanten aus Lemma 6.3.2, sowie

$$a' = \frac{a}{2M} \quad \text{und} \quad a'' = \frac{a}{8M^2}.$$

Seien nun z und z' gemäß den Voraussetzungen gewählt. Aus Symmetriegründen kann $|z'_n| \leq |z_n|$ angenommen werden. Damit ist $\|z'\| \leq \|z\|$ und es gilt:

$$\delta_{\mathbb{D}}(z') = 1 - \|z'\| \quad \geq \quad 1 - \|z\| = \delta_{\mathbb{D}}(z).$$

Es sind einige Fälle zu unterscheiden:

a) Es sei $\|z - z'\| = |z_n - z'_n| \geq a''$. Unter Verwendung (105) ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| &\leq |\mathbf{T}u(z)| + |\mathbf{T}u(z')| \\
&\leq C_0 \, \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \left(|z_n|^{\delta_n - \alpha_n} + |z'_n|^{\delta_n - \alpha_n}\right) \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \\
&= \frac{C_0}{a''} \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} a'' \left(|z_n|^{\delta_n - \alpha_n} + |z'_n|^{\delta_n - \alpha_n}\right) \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \\
&\leq \frac{C_0}{a''} \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} |z_n - z'_n| \left(|z_n|^{\delta_n - \alpha_n} + |z'_n|^{\delta_n - \alpha_n}\right) \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \\
&\leq C'_0 \, \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} |z_n - z'_n|^{\delta_0/2} \left(|z_n|^{\delta_n - \alpha_n} + |z'_n|^{\delta_n - \alpha_n}\right) \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}.
\end{aligned}$$

b) Es sei $\|z - z'\| = |z_n - z'_n| < a''$ und $\delta_{\mathbb{D}}(z) = \operatorname{dist}(z, b\mathbb{D}) \geq a$.
Damit ist

$$\delta_{\mathbb{D}}(w) = 1 - \|w\|^2 \geq 1 - \|z\|^2 = \delta_{\mathbb{D}}(z) \geq a$$

für alle $w = (z_1, ..., z_{n-1}, w_n)$ mit $|w_n| \leq |z_n|$, und für solche w folgt aus (106):

$$|d_w \mathbf{T}u(w)| \leq C_1 \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} a^{\delta_0/2 - 1} |w_n|^{\delta_n - \alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}. \tag{107}$$

Nun sei $\gamma : [0,1] \to K(z_n, z'_n)$ ein Integrationsweg (stückweise stetig differenzierbar) der Länge $\leq 2|z_n - z'_n|$ im Kreisring

$$K(|z_n|, |z'_n|) = \{w_n \in \mathbb{C} : |z'_n| \leq |w_n| \leq |z_n|\},$$

der die Punkte z_n und z'_n verbinde.

Dies leistet etwa der Bogen

$$\gamma(t) = (t|z_n| + (1-t)|z'_n|) \exp\left(i \left(t \arg z_n + (1-t) \arg z'_n\right)\right),$$

wenn wir $\arg z_n$ und $\arg z'_n$ mit $|\arg z_n - \arg z'_n| \leq \pi$ wählen.

Sei

$$\Gamma(t) = (z_1, ..., z_{n-1}, w_n(t)) = (z_1, ..., z_{n-1}, \gamma(t)).$$

Damit ist auch die Länge $L(\Gamma) = L(\gamma) \le 2|z_n - z_n'|$, für die Punkte $\Gamma(t) \in \mathbb{D}$ gilt $|w_n(t)| \le |z_n|$ und damit auch (107), und außerdem ist $|w_n(t)| \ge |z_n'|$.

Unter Verwendung des Mittelwertsatzes folgt:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}u(\Gamma(t)) dt \right| \\
&\le L(\Gamma) \max_{t \in [0,1]} |d_w \mathbf{T}u(\Gamma(t))| \\
&\le 2|z_n - z_n'| \max_{t \in [0,1]} \left(C_1 \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} a^{\delta_0/2-1} |w_n(t)|^{\delta_n - \alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \right) \\
&\le 2|z_n - z_n'| \; C_1 \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} a^{\delta_0/2-1} |z_n'|^{\delta_n - \alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \\
&\le C_1' \; \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} |z_n - z_n'|^{\delta_0/2} |z_n'|^{\delta_n - \alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}.
\end{aligned}$$

c) Es sei $\|z - z'\| = |z_n - z_n'| < a''$ und $\delta_{\mathbb{D}}(z) < a$. Hier verwenden wir die lokalen Koordinaten aus Lemma 6.3.2:

Es sei also

$$K_z = \{j \in \{1, ..., n\} : |z_j| < a\}, \quad k_z = \#K_z \le n - 1,$$

und $p_z \in b\mathbb{D}$ gewählt durch Lemma 6.3.2, also mit $z \in B_a(p_z)$,
und $\zeta_j(p_z) = 0$ für $j \in K_z$, und es existieren komplexe Koordinaten

$$\xi(\zeta) = \xi_z(\zeta) = (\xi_1(z, \zeta), \xi_2(p_z, \zeta), ..., \xi_n(p_z, \zeta))$$

in $B_{2a}(p_z)$ mit:

$$\begin{aligned}
\xi_1(z, \zeta) &= -r(\zeta) + i \mathrm{Im}\, \Phi(\zeta, z), \\
\{\xi_2, ..., \xi_n\} &= \{\zeta_j : j \in K_z\} \cup \{\xi_{k_z+2}, ..., \xi_n\} \subset T^{\mathbb{C}}_{p_z} b\mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Dazu sei auf folgendes hingewiesen: Wir haben mit $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$ die kartesischen Koordinaten in $\mathbb{C}^n$ bezeichnet, das heißt, für Punkte $z, z', w \in \mathbb{C}^n$ gilt: $z_j = \zeta_j(z)$, $z_j' = \zeta_j(z')$ und $w_j = \zeta_j(w)$.

Wegen $k_z = \#K_z \le n - 1$ kann $1 \notin K_z$ und

$$\xi_j = \zeta_j \quad \text{für } j \in K_z$$

angenommen werden. Für solche j ist $\xi_j(z) = \zeta_j(z) = z_j$ bzw. $\xi_j(z') = \zeta_j(z') = z_j'$.

Wegen
$$B_{a/2}(z) \subset B_{2a}(p_z)$$
können die neuen Koordinaten $\xi_z(\zeta)$ in $B_{a/2}(z)$ verwendet werden.

Nach Lemma 6.3.2 ist
$$\|w - z\| \leq M\|\xi(w) - \xi(z)\| \leq Ma' = a/2$$
für $\|\xi(w) - \xi(z)\| \leq a'$. Damit folgt:
$$\xi^{-1}(B_{a'}(\xi(z))) \subset B_{a/2}(z)$$
und:
$$B_{a'}(\xi(z)) \subset \xi(B_{a/2}(z)).$$
Seien nun
$$\begin{aligned} y &\in B_{a'}(\xi(z)) \cap \{\mathrm{Re}\ \xi_1 > 0\}, \\ w &= \xi^{-1}(y) \in B_{a/2}(z) \cap \mathbb{D}, \\ F_u(y) &= \mathbf{T}u(\xi^{-1}(y)) = \mathbf{T}u(w). \end{aligned}$$
Für $j \notin K_z$ und $w \in B_{a/2}(z)$ ist
$$a \leq |z_j| \leq |z_j - w_j| + |w_j| \leq a/2 + |w_j|,$$
also:
$$|w_j| \geq a/2.$$
Damit folgt aus (106):
$$\begin{aligned} |d_w \mathbf{T}u(w)| &\leq C_1\|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \delta_{\mathbb{D}}(w)^{\delta_0/2-1} \prod_{j\in K_z} |w_j|^{\delta_j-\alpha_j} \prod_{j\notin K_z} \left(\frac{a}{2}\right)^{\delta_j-\alpha_j} \\ &\leq C_2\|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \delta_{\mathbb{D}}(w)^{\delta_0/2-1} \prod_{j\in K_z} |w_j|^{\delta_j-\alpha_j} \\ &= C_2\|u\|_{L^{\infty,\alpha}} (\mathrm{Re}\ \xi_1(w))^{\delta_0/2-1} \prod_{j\in K_z} |w_j|^{\delta_j-\alpha_j} \\ &= C_2\|u\|_{L^{\infty,\alpha}} (\mathrm{Re}\ y_1)^{\delta_0/2-1} \prod_{j\in K_z} |y_j|^{\delta_j-\alpha_j}, \end{aligned}$$
und es ergibt sich:
$$\begin{aligned} |d_y F_u(y)| &= |d_y \mathbf{T}u(\xi^{-1}(y))| \leq |J_y \xi_z^{-1}(y)||d_w \mathbf{T}u(w)| && (108) \\ &\leq M\ C_2\|u\|_{L^{\infty,\alpha}} (\mathrm{Re}\ y_1)^{\delta_0/2-1} \prod_{j\in K_z} |y_j|^{\delta_j-\alpha_j} && (109) \end{aligned}$$
für alle $y \in B_{a'}(\xi(z)) \cap \{\mathrm{Re}\ y_1 > 0\}$ mit $y_j \neq 0$, falls $\delta_j < \alpha_j$.

Es seien nun

$$x = \xi(z) \quad , \quad x' = \xi(z') \ ,$$

und

$$d = |z_n - z_n'| = \|z - z'\| < a'' = \frac{a}{8M^2}.$$

Nach Lemma 6.3.2 ist

$$\|x - x'\| \leq M\|z - z'\| \leq \frac{a}{8M} = \frac{a'}{4},$$

und es gilt $x_j = z_j$ bzw. $x_j' = z_j'$ für $j \in K_z$, und Re $x_1 > 0$ bzw. Re $x_1' > 0$.

Für x und x' schreiben wir $x = (\text{Re } x_1, \hat{x})$ und $x' = (\text{Re } x_1', \hat{x}')$.

Wir wollen x und x' geschickt verbinden. Dafür verwenden wir zum einen die beiden Strecken:

$$\begin{aligned} S_1 &= [x, (\text{Re } x_1 + d, \hat{x})] = [(\text{Re } x_1, \hat{x}), (\text{Re } x_1 + d, \hat{x})], \\ S_2 &= [x', (\text{Re } x_1' + d, \hat{x}')] = [(\text{Re } x_1', \hat{x}'), (\text{Re } x_1' + d, \hat{x}')]. \end{aligned}$$

Wegen Länge $L(S_1) = L(S_2) = d \leq Md \leq a'/4$ und $\|x - \hat{x}\| \leq a'/4$, liegen beide Wege in

$$B_{a'}(x) \cap \{\text{Re } \xi_1 > 0\} = B_{a'}(\xi(z)) \cap \{\text{Re } \xi_1 > 0\},$$

wo (109) gilt. Damit folgt:

$$\begin{aligned} |F_u(x) - F_u(\text{Re } x_1 + d, \hat{x})| &\leq \int_0^d \left| \frac{\partial F_u}{\partial t}(\text{Re } x_1 + t, \hat{x}) \right| dt \\ &\leq M \ C_2 \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \prod_{j \in K_z} |x_j|^{\delta_j - \alpha_j} \int_0^d (\text{Re } x_1 + t)^{\delta_0/2 - 1} \, dt \\ &\leq M \ C_2 \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \prod_{j \in K_z} |x_j|^{\delta_j - \alpha_j} \int_0^d t^{\delta_0/2 - 1} dt \\ &= \frac{2MC_2}{\delta_0} \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} \prod_{j \in K_z} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} d^{\delta_0/2} \\ &= C_2' \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} |z_n - z_n'|^{\delta_0/2} \prod_{j \in K_z} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}. \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$|F_u(x') - F_u(\text{Re } x_1' + d, \hat{x}')| \leq C_2' \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} |z_n - z_n'|^{\delta_0/2} \prod_{j \in K_z} |z_j'|^{\delta_j - \alpha_j},$$

wobei man $z_j' = z_j$ für $j \leq n - 1$ bedenke.

Nun benötigen wir noch einen Weg, der (Re $x_1+d, \hat{x}$) und (Re $x_1'+d, \hat{x}'$) verbindet.

Hier ist eine Fallunterscheidung notwendig. Ist $n \notin K_z$, so verwenden wir einfach die Verbindungsstrecke

$$S_3 = [(\text{Re } x_1 + d, \hat{x}), (\text{Re } x_1' + d, \hat{x}')],$$

der Länge $L(S_3) = \|x - \hat{x}\| \leq Md \leq a'/4$. Damit liegt auch S_3 in $B_{a'}(x) \cap \{\text{Re } \xi_1 > 0\}$, wo (109) gilt, und mit dem Mittelwertsatz folgt:

$$\begin{aligned}
& |F(\text{Re } x_1 + d, \hat{x}) - F(\text{Re } x_1' + d, \hat{x}')| \\
\leq \;& L(S_3) \cdot \max_{y \in S_3} \left(M \; C_2 \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} (\text{Re } y_1)^{\delta_0/2-1} \prod_{j \in K_z} |y_j|^{\delta_j - \alpha_j} \right) \\
\leq \;& M^2 \; C_2 \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} d \cdot d^{\delta_0/2-1} \prod_{j \in K_z} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \\
= \;& C_2''' \; \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} |z_n - z_n'|^{\delta_0/2} \prod_{j \in K_z} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j},
\end{aligned}$$

wobei man für $y \in S_3$ beachte, dass Re $y_1 > d$ und $y_j = z_j$ für $j \in K_z$ gilt.

Im Fall $n \in K_z$ verwenden wir wieder den Bogen $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) = (t|z_n| + (1-t)|z_n'|) \exp\left(i\left(t \arg z_n + (1-t) \arg z_n'\right)\right) \; ,$$

aus Teil **b)**. Dabei gilt $L(\gamma) < 2d$ und $|\gamma(t)| \geq |z_n'|$. Statt S_3 betrachten wir hier nun den Weg $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^n$,

$$\Gamma(t) = (t\text{Re } x_1 + (1-t)\text{Re } x_1' + d, t\widetilde{x} + (1-t)\widetilde{x}', \gamma(t)),$$

wobei wir hierfür $x = (\text{Re } x_1, \widetilde{x}, z_n)$ und $x' = (\text{Re } x_1', \widetilde{x}', z_n')$ notieren.
Dabei gilt:

$$L(\Gamma) \leq \|(\text{Re } x_1, \widetilde{x}) - (\text{Re } x_1', \widetilde{x}')\| + L(\gamma) \leq Md + 2d < 3Ma'' < a'/2,$$

so dass auch Γ in $B_{a'}(x) \cap \{\text{Re } \xi_1 > 0\}$ liegt, wo (109) gilt, so dass der Mittelwertsatz hier liefert:

$$\begin{aligned}
& |F(\text{Re } x_1 + d, \hat{x}) - F(\text{Re } x_1' + d, \hat{x}')| \\
\leq \;& L(\Gamma) \cdot \max_{y \in \Gamma} \left(M \; C_2 \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} (\text{Re } y_1)^{\delta_0/2-1} \prod_{j \in K_z} |y_j|^{\delta_j - \alpha_j} \right) \\
\leq \;& 3M^2 \; C_2 \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} d \cdot d^{\delta_0/2-1} |z_n'|^{\delta_n - \alpha_n} \prod_{\substack{j \in K_z \\ j \neq n}} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \\
= \;& C_2'''' \; \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} |z_n - z_n'|^{\delta_0/2} |z_n'|^{\delta_n - \alpha_n} \prod_{\substack{j \in K_z \\ j \neq n}} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j},
\end{aligned}$$

wobei man Re $y_1 > d$ und $|y_n| \geq |z_n'|$ beachte.

Wir fassen die Überlegungen in Abschnitt **c)** zusammen:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{T}u(z) - \mathbf{T}u(z')| &= |F(x) - F(x')| \\
&\leq |F(x) - F(\mathrm{Re}\ x_1 + d, \hat{x})| + |F(x') - F(\mathrm{Re}\ x_1' + d, \hat{x}')| \\
&\qquad + |F(\mathrm{Re}\ x_1 + d, \hat{x}) - F(\mathrm{Re}\ x_1' + d, \hat{x}')| \\
&\leq (C_2' + \max\{C_2'', C_2'''\}) \, \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} |z_n - z_n'|^{\delta_0/2} \\
&\qquad \cdot \left(|z_n|^{\delta_n - \alpha_n} + |z_n'|^{\delta_n - \alpha_n}\right) \prod_{\substack{j \in K_z \\ j \neq n}} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j} \\
&\leq C_3 \|u\|_{L^{\infty,\alpha}} |z_n - z_n'|^{\delta_0/2} \\
&\qquad \cdot \left(|z_n|^{\delta_n - \alpha_n} + |z_n'|^{\delta_n - \alpha_n}\right) \prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\delta_j - \alpha_j}.
\end{aligned}$$

□

Als Konsequenz ergibt sich:

Lemma 6.4.7. *Für $j = 1, ..., n$ seien $0 \leq \alpha_j < 2$ mit*

$$0 \leq \mu = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j \neq k} \alpha_j < 1 \ , \quad \delta_0 = 1 - \mu > 0,$$

und $\mathbf{T}$ ein Integraloperator gegeben durch:

$$\mathbf{T}u(z) = \int_{\mathbb{D}} u(\zeta) \mathcal{K}(\zeta, z) dV_{\mathbb{C}^n}(\zeta),$$

wobei $\mathcal{K}(\zeta, z)$ die Voraussetzungen aus Lemma 6.4.6 erfülle.
Dann liefert $\mathbf{T}$ einen stetigen linearen Operator

$$\mathbf{T} : L^{\infty,\alpha}(\mathbb{D}) \to C^{\delta_0/2}(\mathbb{D}).$$

Insbesondere liefern die Operatoren $\widehat{\mathbf{T}}_q$ bzw. $\widehat{\mathbf{S}}_q$ für $0 \leq q \leq n-2$ stetige lineare Operatoren

$$\widehat{\mathbf{T}}_q,\ \widehat{\mathbf{S}}_q : L^{\infty,\alpha}_{0,q+1} \to C^{\delta_0/2}_{0,q}(\mathbb{D}).$$

Dabei bezeichnet $C^{\delta_0/2}_{0,q}(\mathbb{D})$ den Raum der $(0,q)$-Formen mit $\delta_0/2$-hölderstetigen Koeffizienten auf $\mathbb{D}$.

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis der vergleichbaren Aussage für den Bochner-Martinelli-Koppelman-Operator, Lemma 6.2.6:
Anstelle von Lemma 6.2.1 verwende man hier Lemma 6.4.1, was die Stetigkeit

$$\mathbf{T} : L^{\infty,\alpha}(\mathbb{D}) \to L^{\infty}(\mathbb{D})$$

liefert. Für die Hölderstetigkeit verwende man Lemma 6.4.6 statt Lemma 6.2.5. Die Operatoren $\widehat{\mathbf{T}}_q$ bzw. $\widehat{\mathbf{S}}_q$ (vgl. Definition 5.2.4) sind nach Lemma 5.3.3 koeffizientenweise in passender Form darstellbar. □

6.5 Funktionen mit kompaktem Träger

Als Exkurs ermitteln wir nun noch isotrope Hölder-Abschätzungen für Funktionen mit kompaktem Träger und $\overline{\partial}$-Ableitung in L^{2+}. Zunächst stellen wir solche Funktionen durch die inhomogene Cauchy-Integralformel in einer komplexen Variablen dar.
Ist $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, so notieren wir $\widehat{z}_k := (z_1, ..., z_{k-1}, z_{k+1}, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Satz 6.5.1. *Es sei $p > 2$, $u \in L^1(\mathbb{C}^n)$ eine Funktion mit (im Distributionssinne) kompaktem Träger $T \subset\subset B_R(0)$, $R > 0$, $f_k \in L^p(\mathbb{C}^n)$ für ein $k \in \{1, ..., n\}$, und es gelte*

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z_k}} = f_k$$

im Distributionssinne. Dann gilt

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_R(0)} f_k(z_1, ..., z_{k-1}, t, z_{k+1}, ..., z_n) \frac{dt \wedge d\overline{t}}{t - z_k}$$

für fast alle $z \in \mathbb{C}^n$.

Beweis. Wie im Beweis von Theorem 3.4.4 existiert eine Folge $\varphi_\epsilon \in C^\infty_{cpt}(\mathbb{C}^n)$ glatter Funktionen mit kompaktem Träger und

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon &\rightarrow u \text{ in } L^1(\mathbb{C}^n), \\ \frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial \overline{z_k}} &\rightarrow f_k \text{ in } L^p(\mathbb{C}^n) \end{aligned}$$

für $\epsilon \rightarrow 0$. Es gilt also

$$\varphi_\epsilon(z) \rightarrow u(z) \text{ für fast alle } z \in \mathbb{C}^n. \tag{110}$$

Außerdem ist

$$\varphi_\epsilon(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_R(0)} \frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial \overline{z_k}}(..., t, ...) \frac{dt \wedge d\overline{t}}{t - z_k},$$

wenn wir ϵ klein genug wählen (wegen $T \subset\subset B_R(0)$), und nach der Hölder-Ungleichung für p und $q = \frac{p}{p-1} < 2$ gilt

$$\begin{aligned} & \left| \varphi_\epsilon(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_R(0)} f_k(..., t, ...) \frac{dt \wedge d\overline{t}}{t - z_k} \right| \\ = & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_R(0)} \left(\frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial \overline{z_k}}(..., t, ...) - f_k(..., t, ...) \right) \frac{dt \wedge d\overline{t}}{t - z_k} \right| \\ \leq & \left\| \frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial \overline{z_k}}(..., \cdot, ...) - f_k(..., \cdot, ...) \right\|_{L^p(\mathbb{C})} \left\| \frac{1}{\cdot - z_k} \right\|_{L^q(\mathbb{C})} \\ \lesssim & \left\| \frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial \overline{z_k}}(..., \cdot, ...) - f_k(..., \cdot, ...) \right\|_{L^p(\mathbb{C})} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für fast alle $\widehat{z}_k \in \mathbb{C}^{n-1}$. Zusammen mit (110) zeigt das die Behauptung. $\square$

Nun nutzen wir diese Darstellung, um die Hölder-Regularität solcher Funktionen zu untersuchen:

Satz 6.5.2. *Sei $u \in L^1(\mathbb{C}^n)$ eine Funktion mit (im Distributionssinne) kompaktem Träger, $q_k > 2$ und $C_k > 0$ für $k = 1, ..., n$, und es gebe Funktionen $f_k \in L^1(\mathbb{C}^n)$ für $k = 1, ..., n$ mit*

$$\int_{\mathbb{C}} |f_k(..., t, ...)|^{q_k} dt \wedge d\bar{t} \leq C_k$$

für alle $\widehat{z}_k = (z_1, ..., z_{k-1}, z_{k+1}, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ und

$$\overline{\partial} u = \sum_{k=1}^{n} f_k d\overline{z_k}$$

im Distributionssinne. Dann besitzt u einen gleichmäßig stetigen Repräsentanten u' und es existieren Konstanten C'_k mit

$$|u'(z) - u'(w)| \leq \sum_{k=1}^{n} C'_k |z_k - w_k|^{1-\frac{2}{q_k}} \tag{111}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}^n$. Dabei hängen die Konstanten C'_k nur von C_k, nicht von f_k ab.

Beweis. Es sei

$$u_k(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} f_k(..., t, ...) \frac{dt \wedge d\bar{t}}{t - z_k}.$$

Nach Lemma 6.0.1 existieren Konstanten C'_k (die nur von der $L^{q_k}(\mathbb{C})$-Norm von f_k, also von C_k abhängen), so dass

$$|u_k(z) - u_k(w)| \leq C'_k |z_k - w_k|^{1-\frac{2}{q_k}} \tag{112}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}^n$ mit

$$z_j = w_j \text{ für } j \neq k.$$

Wir setzen

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C}^n : u(z) = u_1(z) = ... = u_n(z)\}.$$

Nach Satz 6.5.1 ist das Komplement $N := \mathbb{C}^n \setminus \Omega$ eine Nullmenge. Für $z, w \in \mathbb{C}^n$ setzen wir

$$p_k(z, w) := (w_1, ..., w_k, z_{k+1}, ..., z_n),$$

also insbesondere $p_0(z, w) = z$, $p_n(z, w) = w$ und

$$p_{k-1}(z, w) - p_k(z, w) = (0, ..., 0, z_k - w_k, 0, ..., 0). \tag{113}$$

Weiterhin sei

$$\Gamma := \{(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : p_k(z, w) \in \Omega \text{ für alle } k = 0, ..., n\} \subset \Omega \times \Omega.$$

Damit ist

$$\Gamma = \bigcap_{k=0}^{n} p_k^{-1}(\Omega),$$

und das Komplement

$$K := \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Gamma = \bigcup_{k=0}^{n} p_k^{-1}(N)$$

ist eine Nullmenge in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, denn nach einer Koordinatentransformation ist

$$p_k = (Id_{\mathbb{C}^n}, 0_{\mathbb{C}^n}) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,$$

und somit $p_k^{-1}(N)$ Nullmenge in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Für $(z, w) \in \Gamma$ gilt aber

$$\begin{aligned} |u(z) - u(w)| &\leq \sum_{k=1}^{n} |u(p_{k-1}(z, w)) - u(p_k(z, w))| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |u_k(p_{k-1}(z, w)) - u_k(p_k(z, w))| \end{aligned}$$

und nach (112) und (113) folgt weiter

$$\leq \sum_{k=1}^{n} C'_k |z_k - w_k|^{1-\frac{2}{q_k}}.$$

Wir wollen nun den gleichmäßig stetigen Repräsentanten u' konstruieren. Dafür verzichten wir zunächst auf die genaue Aussage über die Hölderstetigkeit. Sei also

$$\alpha := \min_{k=1,\dots,n} \{1 - \frac{2}{q_k}\}.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$|u(z) - u(w)| \leq C|z - w|^{\alpha} \tag{114}$$

für alle $(z, w) \in \Gamma$. Betrachten wir zunächst solche Punkte z, so dass (114) für fast alle $w \in \mathbb{C}^n$ gilt. Dies sind wieder fast alle Punkte $z \in \mathbb{C}^n$. Genauer:

$$\Omega' := \{z \in \Omega : \{z\} \times \mathbb{C}^n \cap K \text{ ist Nullmenge in } \{z\} \times \mathbb{C}^n\}.$$

Damit ist

$$M := \Omega \setminus \Omega' = \{z \in \Omega : \{z\} \times \mathbb{C}^n \cap K \text{ ist keine Nullmenge in } \{z\} \times \mathbb{C}^n\}$$

eine Nullmenge in $\mathbb{C}^n$, denn sonst wäre K keine Nullmenge in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Man beachte, dass $\mathbb{C}^n \setminus \Omega = N$ Nullmenge, also irrelevant ist.

Seien nun $z, w \in \Omega'$ und $r := |z - w|$. Dann existiert $x \in B_r(z) \cap B_r(w)$ mit $(z, x) \in \Gamma$ und $(w, x) \in \Gamma$ und nach (114) folgt:

$$\begin{aligned} |u(z) - u(w)| &\leq |u(z) - u(x)| + |u(w) - u(x)| \\ &\leq C|z - x|^\alpha + C|w - x|^\alpha \leq 2C|z - w|^\alpha. \end{aligned}$$

Damit ist u gleichmäßig α-hölderstetig auf Ω'. Nun ist aber $\Omega' = \mathbb{C}^n \setminus (N \cup M)$ dicht in $\mathbb{C}^n$. Damit besitzt u einen α-hölderstetigen Repräsentanten u' auf ganz $\mathbb{C}^n$. Da weiterhin Γ in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dicht liegt, gilt (111) für alle $z, w \in \mathbb{C}^n$. □

Für speziellere partielle Ableitungen f_k lässt sich die Aussage verfeinern. Es sei an die Definition

$$p_k(z, w) := (w_1, ..., w_k, z_{k+1}, ..., z_n)$$

für $z, w \in \mathbb{C}^n$, $1 \leq k \leq n$ erinnert. Damit ist

$$\widehat{p_k(z, w)}_k = (w_1, ..., w_{k-1}, z_{k+1}, ..., z_n).$$

Satz 6.5.3. *In der Situation von Satz 6.5.2 gebe es Konstanten* $0 < \alpha_k < 1$ *und Funktionen* $C_k(\widehat{z}_k) \leq C_k$ *mit*

$$f_k(z) \leq \frac{1}{|z_k|^{\alpha_k}} C_k(\widehat{z}_k) \leq \frac{C_k}{|z_k|^{\alpha_k}}$$

für alle $z \in \mathbb{C}^n$. *Dann besitzt* u *einen gleichmäßig stetigen Repräsentanten* u' *und es existieren Konstanten* C_{α_k} *mit*

$$|u'(z) - u'(w)| \leq \sum_{k=1}^n C_{\alpha_k} C_k \left(\widehat{p_k(z, w)}_k\right) |z_k - w_k|^{1-\alpha_k}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}^n$. *Dabei hängen die Konstanten* C_{α_k} *nur von* α_k*, nicht von* C_k *oder* f_k *ab.*

Beweis. Wir modifizieren den Beweis von Satz 6.5.2, indem wir für die Abschätzung (112) Korollar 6.1.4 statt Lemma 6.0.1 verwenden. Ungleichung (112) lautet dann:

$$|u_k(z) - u_k(w)| \leq C_{\alpha_k} C_k(\widehat{z}_k) |z_k - w_k|^{1-\alpha_k} \tag{115}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}^n$ mit

$$z_j = w_j \quad \text{für} \quad j \neq k.$$

Dabei hat sich $C_k(\widehat{z}_k)$ einfach aus dem inhomogenen Cauchy-Integral in z_k herausgezogen. Wir benötigen

$$C_k(\widehat{z}_k) \leq C_k \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n,$$

um die gleichmäßige Hölderstetigkeit in (114) zu erhalten.
Mit (115) ergibt sich im weiteren Verlauf des Beweises dann

$$|u_k(p_{k-1}(z, w)) - u_k(p_k(z, w))| \leq C_{\alpha_k} C_k \left(\widehat{p_k(z, w)}_k\right) |z_k - w_k|^{1-\alpha_k},$$

und das liefert die Aussage. □

7 Die $\overline{\partial}$-Gleichung auf $X = \{z^m = w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}\}$

In diesem Kapitel setzen wir die in dieser Arbeit bisher entwickelten Methoden ein, um die $\overline{\partial}$-Gleichung mit Abschätzungen auf der komplexen Mannigfaltigkeit der regulären Punkte gewisser streng pseudokonvexer Gebiete in analytischen Mengen zu lösen.

Genauer: Es seien $n, q, m, k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 2$, $1 \leq q \leq n$, $m \geq 2$ und $k_j \geq 1$ fest gewählt. Weiterhin sei

$$X = \{(z, w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : z^m = w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}\} \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

Es ist

$$\operatorname{Sing} X = \left(\bigcup_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} \{(z, w) : z = w_j = w_k = 0\} \right) \cup \left(\bigcup_{j : k_j \geq 2} \{(z, w) : z = w_j = 0\} \right)$$

die Menge der singulären Punkte in X und $\operatorname{Reg} X = X \setminus \operatorname{Sing} X$ die n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit der regulären Punkte. Weiterhin ist

$$\Pi : X \to \mathbb{C}^n \ , \quad (z, w_1, ..., w_n) \mapsto (w_1, ..., w_n)$$

eine m-blättrige analytische Überlagerung: Es ist

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} \{(w_1, ..., w_n) : w_j = 0\} \subset \mathbb{C}^n$$

die Menge der kritischen Werte und $B = \Pi^{-1}(K) \subset X$ die Verzweigungsmenge von Π. Die eingeschränkte Abbildung

$$\Pi|_{X \setminus B} : X \setminus B \to \mathbb{C}^n \setminus K$$

ist lokal biholomorph.

Sei außerdem noch

$$D = \Pi^{-1}(\mathbb{D}) = \{(z, w_1, ..., w_n) \in X : |w_1|^2 + ... + |w_n|^2 < 1\}.$$

Damit ist D eine streng pseudokonvexe Teilmenge von X, und wir werden die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen mit Abschätzungen auf

$$Y = \operatorname{Reg} D = \operatorname{Reg} X \cap \Pi^{-1}(\mathbb{D})$$

lösen. Wir benötigen noch

$$Z = (X \setminus B) \cap \Pi^{-1}(\mathbb{D})$$

Wegen $\operatorname{Sing} X \subset B$ ist $Z = Y \setminus B$. Nach Kapitel 2 sind die Funktionenräume $L^\infty_{0,q}(Y)$ und $C^\alpha_{(0,q-1),X}(Y)$ für alle $0 \leq \alpha < 1$ wohldefiniert.

Sei $\omega \in L^\infty_{0,q}(Y)$ mit $\overline{\partial}\omega = 0$ im Distributionssinne. In Abschnitt 7.1 nutzen wir die analytische Überlagerung Π, um das $\overline{\partial}$-Problem von Y auf $\mathbb{D}$ zu projizieren. Dazu zerlegen wir die Form ω in symmetrische Kombinationen

$$\omega = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\omega_k \quad, \omega_k \in L^\infty_{0,q}(Y),$$

so dass die Formen

$$\widetilde{\omega_k} = z^k \omega_k$$

auf der Faser $\Pi^{-1}(\{w\})$ über einem Punkt $w \in \mathbb{D}\setminus K$ konstant sind. Nach Lemma 7.1.5 existieren dann $\overline{\partial}$-geschlossene Formen

$$\widetilde{\eta_k} \in L^{2+}_{0,q}(\mathbb{D})$$

mit

$$\Pi^*\widetilde{\eta_k} = \widetilde{\omega_k} \quad \text{auf} \;\; Z = Y \setminus B$$

und

$$\omega = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Pi^*\widetilde{\eta_k}}{z^k} \quad \text{auf} \;\; Z.$$

Weiterhin ermitteln wir, wie die Koeffizienten der Formen $\widetilde{\eta_k}$ in Abhängigkeit von $\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}$ beschränkt sind.

Hier kann schon eine Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung auf Z abgelesen werden. Bezeichnet $\mathbf{S}_{q-1}$ den Lösungsoperator auf der Kugel $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$ aus der Homotopieformel auf der Kugel, so ergibt sich:

$$\overline{\partial}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Pi^*\mathbf{S}_{q-1}\widetilde{\eta_k}}{z^k} = \omega.$$

Diese Darstellung liefert aber noch keine Lösung auf Y, da sich die Terme

$$\frac{\Pi^*\mathbf{S}_{q-1}\widetilde{\eta_k}}{z^k}$$

für $z \to 0$ nicht hinreichend regulär verhalten. Man könnte diesem Problem begegnen, indem man von $\mathbf{S}_{q-1}\widetilde{\eta_k}$ Taylorpolynome subtrahiert, so dass die neuen Lösungen auf K von ausreichend hoher Ordnung verschwinden. Dieses Verfahren wurde in [FoGa] und in [Rp] verwendet, um die $\overline{\partial}$-Gleichung auf komplexen Kurven mit 1^--Hölder-Abschätzungen zu lösen, erscheint hier aber recht unhandlich und schwer durchführbar. Wir wählen einen anderen Weg.

Die grundlegende Idee ist folgende: Angenommen, es gelte $\widetilde{\eta_k}/w_1 \in L^1_{0,q}(\mathbb{D})$ mit

$$\overline{\partial}\frac{\widetilde{\eta_k}}{w_1} = 0$$

im Distributionssinne. Dann ist

$$\overline{\partial}\left(w_1\mathbf{S}_{q-1}\left(\frac{\widetilde{\eta_k}}{w_1}\right)\right) = \widetilde{\eta_k}$$

und $w_1\mathbf{S}_{q-1}(\widetilde{\eta_k}/w_1)$ weist für $w_1 \to 0$ zusätzliche Regularitätseigenschaften auf.

Wir werden $\widetilde{\eta_k}$ also durch ein geeignetes Monom dividieren. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ definieren wir dazu

$$[x]^* = \min\{l \in \mathbb{Z} : x \leq l\}$$

und

$$\{x\}^* = [x]^* - x.$$

Für $k \in \{0, ..., m-1\}$ sei

$$N_k(w) = \prod_{t=1}^{n} w_t^{[k\frac{k_t}{m}]^*}$$

und

$$\eta_k = \frac{\widetilde{\eta_k}}{N_k(w)}.$$

Wegen $|z|^m = |w_1|^{k_1}\cdots|w_n|^{k_n}$ auf X gilt

$$\left|\frac{N_k(w)}{z^k}\right| = \prod_{t=1}^{n}|w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*}$$

für alle $(z, w) \in X$, und nach Korollar 7.2.3 ist

$$\overline{\partial}\eta_k = 0$$

auf $\mathbb{D}$ im Distributionssinne. Mit

$$f_k := \frac{N_k(w)}{z^k}\Pi^*\mathbf{S}_{q-1}\eta_k \quad \text{und} \quad f = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f_k$$

gilt nun auf Z:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}f = \overline{\partial}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f_k\right) &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{N_k(w)}{z^k}\Pi^*\overline{\partial}\mathbf{S}_{q-1}\eta_k\right) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{N_k(w)}{z^k}\Pi^*\left(\frac{\widetilde{\eta_k}}{N_k(w)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{N_k(w)}{z^k}\frac{\Pi^*\widetilde{\eta_k}}{N_k(w)}\right) = \omega,
\end{aligned}$$

da Π lokal biholomorph ist.

Unter Verwendung der Abschätzungen aus Kapitel 6 zeigen wir dann, dass f eine stetige Fortsetzung auf ganz Y besitzt, und dass $\|f\|_{L^\infty_{0,q-1}(Y)}$ gleichmäßig in Abhängigkeit von $\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}$ beschränkt ist. Nach dem Fortsetzungssatz Lemma 4.3.3 gilt dann auch $\overline{\partial} f = \omega$ auf ganz Y. Damit haben wir einen stetigen linearen Operator

$$\mathbf{L}_{q-1} : L^\infty_{0,q}(Y) \to L^\infty_{0,q-1}(Y)$$

konstruiert mit

$$\overline{\partial}\mathbf{L}_{q-1}\omega = \omega$$

im Distributionssinne für alle $\omega \in L^\infty_{0,q}(Y)$ mit $\overline{\partial}\omega = 0$ im Distributionssinne. Dieses Resultat ist in Theorem 7.2.8 zusammengefasst.

In Abschnitt 7.3 ermitteln wir dann Hölder-Abschätzungen für den Operator $\mathbf{L}_0$. Nach der Definition der Funktionenräume aus Kapitel 2 bedeutet dies, dass die Koeffizientenfunktionen der kanonischen Darstellung

$$\pi^*\mathbf{L}_{q-1}\omega = \mathbf{L}_{q-1} \oplus 0$$

zu untersuchen sind (vgl. dazu Lemma 7.2.6). Das verursacht für $q \geq 1$ zusätzliche Schwierigkeiten, auf die wir in dieser Arbeit nicht näher eingehen wollen. Es sei hier nur darauf hingewiesen, dass in der kanonischen Darstellung

$$\pi^*\omega = \omega \oplus 0$$

die Koeffizienten vor $d\overline{w_t}$ für $w_t \to 0$ verschwinden. Eine Tatsache, die wir für die Betrachtung des Operators $\mathbf{L}_0$ nicht berücksichtigen müssen, die für $q \geq 1$ aber vermutlich wesentlich ist.

Für die Hölder-Abschätzungen nehmen wir zusätzlich $k_j \leq m$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$ an. Diese Voraussetzung erspart eine ganze Reihe zusätzlicher Fallunterscheidungen, in denen k_j/m durch 1 ersetzt werden müsste, ist aber ansonsten nicht notwendig. Es seien

$$\begin{aligned}
\vartheta &= \min_{1\leq t\leq n}\{\frac{k_t}{2m}\}, \\
\vartheta_k &= \min_{1\leq t\leq n}\{1, \{k\frac{k_t}{m}\}^* : \{k\frac{k_t}{m}\}^* > 0\}, \\
\vartheta^* &= \min_{0\leq k\leq m-1}\{\vartheta, \vartheta_k\}.
\end{aligned}$$

Wie wir in Theorem 7.3.4 zeigen, liefert der Operator $\mathbf{L}_0$ aus Theorem 7.2.8 eine stetige lineare Abbildung

$$\mathbf{L}_0 : L^\infty_{0,1}(Y) \to C^{\vartheta^*}_X(\overline{Y}).$$

Man beachte $\vartheta_k \geq 1/m$ und $\vartheta^* = \vartheta$, falls $k_j = 1$ oder $k_j = 2$ für ein $j \in \{1, ..., n\}$.

Hier noch einige Bemerkungen zur Entstehung dieser Abschätzungen: Es ist die Hölder-Regularität der Funktionen

$$f_k(z,w) = \frac{N_k(w)}{z^k}\Pi^*\mathbf{S}_0\eta_k(z,w) = \frac{N_k(w)}{z^k}\mathbf{S}_0\eta_k(w)$$

zu ermitteln. Die Abschätzung zerlegt sich nach der Art

$$|g(P)h(P) - g(Q)h(Q)| \leq |g(P)||h(P) - h(Q)| + |h(Q)||g(P) - g(Q)|,$$

wenn wir $g = N_k/z^k$ und $h = \Pi^*\mathbf{S}_0\eta_k$ setzen. Für $\mathbf{S}_0\eta_k$ verwenden wir die singulären Hölder-Abschätzungen aus Kapitel 6, die dann durch die Multiplikation mit dem Faktor

$$\left|\frac{N_k(w)}{z^k}\right| = \prod_{t=1}^{n} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*}$$

gute Ergebnisse liefern. Hier tritt die Konstante ϑ auf, die nicht unmittelbar verbessert werden kann. Dann ist aber noch die Hölder-Regularität des Faktors N_k/z^k zu untersuchen. Dabei tritt die Konstante ϑ_k auf (vgl. Lemma 7.3.2). Hier besteht noch Verbesserungspotential. Insbesondere könnte die Koordinate $z = w_0$ in die Abschätzung einbezogen werden. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass wir hier bei der L^∞-Abschätzung des Faktors $|\mathbf{S}_0\eta_k|$ einiges Potential verschenken. Es ist also zu vermuten, dass die Konstanten ϑ_k nicht relevant sind und $\vartheta^* = \vartheta$ erreicht werden kann. Erfreulicherweise ist das Auftreten der Konstellation $\vartheta^* = \vartheta$ auch schon in Theorem 7.3.4 nicht ungewöhnlich.

Unser Verfahren ist noch in einem weiteren Punkt nicht optimal: Die analytische Überlagerung $\Pi : X \to \mathbb{C}^n$ erzeugt mit ihrer Verzweigungsmenge $B = \Pi^{-1}(K)$ gewissermaßen eine künstliche Singularität, die den Rand des Gebietes schneidet. Hierauf geht der Faktor $1/2$ in der Konstanten ϑ zurück.

Betrachten wir dies im Fall einer isolierten Singularität $\operatorname{Sing} X = \{0\}$, also in der Situation $k_j = 1$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$, etwas genauer: Es sei $\chi \in C^\infty(\mathbb{C}^{n+1})$ eine Abschneidefunktion mit $\chi|_{B_{3/4}(0)} \equiv 1$ und kompaktem Träger in $B_1(0)$. Unter Verwendung der lokalen Beobachtungen aus Kapitel 6 erhalten wir einen stetigen linearen Operator

$$\chi\mathbf{L}_0 : L^\infty_{0,1}(Y) \to C^\Theta_X(\overline{Y})$$

mit

$$\Theta = \min_{1\leq t\leq n}\{\frac{k_t}{m}\} \leq \frac{1}{2},$$

da $\chi\mathbf{L}_0\omega$ in einer Umgebung des Randes verschwindet. Der Operator $\chi\mathbf{L}_0$ löst die $\overline{\partial}$-Gleichung aber nur auf $Y \cap B_{3/4}(0)$. Jetzt könnte aber Grauerts Beulenmethode eingesetzt werden, um die Lösung auf Y auszudehnen, wobei wir auf die Lösungstheorie (mit 1/2-Hölder-Abschätzungen) für streng pseudokonvexe Gebiete in komplexen Mannigfaltigkeiten zurückgreifen.

7.1 Die analytische Überlagerung $\Pi : X \to \mathbb{C}^n$

Es seien $n, q, m, k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 2$, $1 \leq q \leq n$, $m \geq 2$ und $k_j \geq 1$ fest gewählt. Weiterhin sei

$$X = \{(z, w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : z^m = w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}\} \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

Wir notieren im folgenden auch w für $(w_1, ..., w_n)$ und (z, w) für $(z, w_1, ..., w_n)$. Es ist

$$\operatorname{Sing} X = \left(\bigcup_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} \{(z,w) : z = w_j = w_k = 0\} \right) \cup \left(\bigcup_{j : k_j \geq 2} \{(z,w) : z = w_j = 0\} \right)$$

die Menge der singulären Punkte in X und $\operatorname{Reg} X = X \setminus \operatorname{Sing} X$ die n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit der regulären Punkte. Dies folgt sofort aus dem Jacobi-Kriterium (vgl. [GrRe], 6.1.1), da $X = F^{-1}(0)$ für

$$F(z, w_1, ..., w_n) = z^m - w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}$$

mit

$$\operatorname{Jac} F = \left(m z^{m-1}, k_1 w_1^{k_1 - 1} \cdots w_n^{k_n}, ..., k_n w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n - 1} \right).$$

Weiterhin ist

$$\Pi : X \to \mathbb{C}^n \ , \quad (z, w_1, ..., w_n) \mapsto (w_1, ..., w_n)$$

eine verzweigte m-blättrige analytische Überlagerung: Es ist

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} \{(w_1, ..., w_n) : w_j = 0\} \subset \mathbb{C}^n$$

die Menge der kritischen Werte und $B = \Pi^{-1}(K) \subset X$ die Verzweigungsmenge von Π. Die eingeschränkte Abbildung

$$\Pi|_{X \setminus B} : X \setminus B \to \mathbb{C}^n \setminus K$$

ist lokal biholomorph.

Sei außerdem noch

$$D = \Pi^{-1}(\mathbb{D}) = \{(z, w_1, ..., w_n) \in X : |w_1|^2 + ... + |w_n|^2 < 1\}.$$

Damit ist D eine streng pseudokonvexe Teilmenge von X, und wir werden die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen mit Abschätzungen auf

$$Y = \operatorname{Reg} D = \operatorname{Reg} X \cap \Pi^{-1}(\mathbb{D})$$

lösen. Wir benötigen noch

$$Z = (X \setminus B) \cap \Pi^{-1}(\mathbb{D})$$

Wegen $\operatorname{Sing} X \subset B$ ist $Z = Y \setminus B$. Nach Kapitel 2 sind die Funktionenräume $L^\infty_{0,q}(Y)$ und $C^\alpha_{(0,q-1),X}(Y)$ für alle $0 \leq \alpha < 1$ wohldefiniert.

Sei nun $\omega \in L^\infty_{0,q}(Y)$ mit $\overline{\partial}\omega = 0$ im Distributionssinne. Nach den Ausführungen in Kapitel 2 besitzt ω eine eindeutige triviale Fortsetzung in das Kotangentialbündel des $\mathbb{C}^n$:

$$\omega \oplus 0 = \pi^*\omega = \sum_{0\leq j_1<...<j_q\leq n} \omega_{j_1...j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}}$$

mit $\omega_{j_1...j_q} \in L^\infty(Y)$, und es ist

$$\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} = \sqrt{2^q \sum_{0\leq j_1<...<j_q\leq n} \|\omega_{j_1...j_q}\|^2_{L^\infty(Y)}}.$$

Dabei setzen wir $w_0 = z$, um die Notation zu vereinfachen. Bezeichnen wir mit $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ die Einbettungsabbildung, so gilt

$$\omega = \iota^*\pi^*\omega = \iota^*(\omega \oplus 0).$$

Unser Fernziel ist die Bestimmung von $f \in C^0_{0,q-1}(\overline{Y})$ mit

$$\overline{\partial} f = \omega$$

im Distributionssinne auf Y. Zunächst wollen wir das Problem unter Verwendung von Π nach $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$ „projizieren“, um die Homotopieformel für die Kugel anwenden zu können. Dazu konstruieren wir nun eine hilfreiche Darstellung für ω.

Im folgenden sei mit

$$\xi = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$$

die m-te Einheitswurzel bezeichnet. Für $j \in \mathbb{Z}$ existieren Decktransformationen Φ_j von X bezüglich Π gegeben durch

$$\Phi_j : X \to X \ , \quad (z, w_1, ..., w_n) \mapsto (\xi^j z, w_1, ..., w_n).$$

Damit ist die Einschränkung von Φ_j auf $\operatorname{Reg} X$ eine biholomorphe Abbildung, und die Gruppe

$$G_\Phi = \{\Phi_0, ..., \Phi_{m-1}\}$$

operiert für festes $w = (w_1, ..., w_n)$ transitiv auf $\Pi^{-1}(\{w\})$.

Für $k \in \{0, ..., m-1\}$ sei nun

$$\omega_k = \sum_{j=0}^{m-1} (\xi^k)^j \Phi_j^*\omega.$$

Man beachte dass

$$\Phi_j : (z, w_1, ..., w_n) \mapsto (\xi^j z, w_1, ..., w_n)$$

auch als biholomorphe Abbildung $\Phi_j : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ verstanden werden kann. Damit induziert Φ_j Tangential- und Kotangentialabbildungen

$$\begin{aligned} (\Phi_j)_* : &\quad \mathbb{C}T\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}T\mathbb{C}^{n+1} , \\ \Phi_j^* : &\quad \Lambda\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^{n+1} \to \Lambda\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^{n+1} . \end{aligned}$$

Im folgenden seien Φ_j, $(\Phi_j)_*$ und Φ_j^* falls nötig auf den richtigen Unterraum ihres Definitionsbereichs eingeschränkt. Es handelt sich dabei um die Unterräume

$$\begin{aligned} Y &\subset \mathbb{C}^{n+1}, \\ \mathbb{C}T\mathbb{C}^{n+1}\big|_Y &\subset \mathbb{C}T\mathbb{C}^{n+1}, \\ \mathbb{C}TY &\subset \mathbb{C}T\mathbb{C}^{n+1}, \\ \Lambda\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^{n+1}\big|_Y &\subset \Lambda\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^{n+1}, \\ \Lambda\mathbb{C}T^*Y &\subset \Lambda\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^{n+1}. \end{aligned}$$

Wegen $\Phi_j \circ \iota = \iota \circ \Phi_j$ gilt:

$$\begin{aligned} \iota_* \circ (\Phi_j)_* &= (\Phi_j)_* \circ \iota_*, \\ \iota^* \circ \Phi_j^* &= \Phi_j^* \circ \iota^*, \\ \pi^* \circ \Phi_j^* &= \Phi_j^* \circ \pi^*. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned} \Phi_j^*\omega &= \Phi_j^*\iota^*(\omega \oplus 0) = \iota^*\Phi_j^*(\omega \oplus 0) \\ &= \iota^*\Phi_j^*\pi^*\omega = \iota^*\pi^*\Phi_j^*\omega = \iota^*(\Phi_j^*\omega \oplus 0). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \pi^*\Phi_j^*\omega = \Phi_j^*(\omega \oplus 0) &= \Phi_j^* \left(\sum_{1 \le j_2 < ... < j_q \le n} \omega_{0 j_2 \dots j_q} d\overline{z} \wedge d\overline{w_{j_2}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}} \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{1 \le j_1 < ... < j_q \le n} \omega_{j_1 \dots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}} \right) \\ &= \sum_{1 \le j_2 < ... < j_q \le n} (\omega_{0 j_2 \dots j_q} \circ \Phi_j) \xi^j d\overline{z} \wedge d\overline{w_{j_2}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}} \\ &\qquad + \sum_{1 \le j_1 < ... < j_q \le n} (\omega_{j_1 \dots j_q} \circ \Phi_j) d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}} \end{aligned}$$

ist $\Phi_j^*\omega \in L^\infty_{0,q}(Y)$ und es gilt $\|\Phi_j^*\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} = \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}$. Damit ist dann aber auch $\omega_k \in L^\infty_{0,q}(Y)$ und es gilt:

$$\|\omega_k\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \le m\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}.$$

Wegen der Biholomorphie von $\Phi_j : Y \to Y$ ist $\overline{\partial}\omega_k = 0$ im Distributionssinne.

Wegen $\xi^m = 1$ gilt weiterhin:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1} \omega_k &= \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} (\xi^j)^k \Phi_j^* \omega = m\Phi_0^*\omega + \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} (\xi^j)^k \Phi_j^* \omega \\ &= m\omega + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1-(\xi^j)^m}{1-\xi^j} \Phi_j^*\omega = m\omega.\end{aligned}$$

Wir setzen noch

$$\widetilde{\omega_k} = z^k \omega_k = \sum_{j=0}^{m-1} (\xi^j z)^k \Phi_j^* \omega.$$

Damit ist auch $\widetilde{\omega_k} \in L^\infty_{0,q}(Y)$, $\overline{\partial}\widetilde{\omega_k} = 0$ im Distributionssinne, und es gilt:

$$\|\widetilde{\omega_k}\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \leq \|\omega_k\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \leq m\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}.$$

Das ist klar, da sich die Koeffizienten von $\widetilde{\omega_k}$ aus den Koeffizienten von ω_k durch Multiplikation mit z^k ergeben. Für $(z,w) \in Y$ ist aber $|z| < 1$.

Wegen $m\omega = \omega_0 + ... + \omega_{m-1}$ ist nun

$$\omega = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\widetilde{\omega_k}}{z^k}$$

auf $Z = Y \setminus B = \{(z,w) \in Y : z \neq 0\}$.

Sei $N \in \{0,...,m-1\}$. Wegen $\xi^m = 1$ und $\Phi_m = \Phi_0 = Id_X$ gilt:

$$\{(\xi^k)^j \Phi_j^* : j = 0,...,m-1\} = \{(\xi^k)^{j+N} \Phi_{j+N}^* : j = 0,...,m-1\}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\Phi_N^*\widetilde{\omega_k} &= \sum_{j=0}^{m-1} \Phi_N^*((\xi^j z)^k) \cdot \Phi_N^*\Phi_j^*\omega = \sum_{j=0}^{m-1} (\xi^{j+N} z)^k \Phi_{j+N}^*\omega \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} (\xi^j z)^k \Phi_j^* \omega = \widetilde{\omega_k}.\end{aligned}$$

Also sind die Formen $\widetilde{\omega_k}$ invariant unter den Decktransformationen Φ_j. Da die Gruppe G_Φ auf den Fasern $\Pi^{-1}(\{w\})$ transitiv operiert, bedeutet dies, dass die Formen $\widetilde{\omega_k}$ über $w \in \mathbb{D} \setminus K$ nicht von z abhängen. Somit kann $\widetilde{\omega_k}$ auf $Z = Y \setminus B$ als Zurückziehung

$$\widetilde{\omega_k} = \Pi^* \widetilde{\eta_k}$$

einer $(0,q)$-Form $\widetilde{\eta_k}$ auf $\mathbb{D} \setminus K$ dargestellt werden. Wir erklären dies im folgenden genauer.

Für $\widetilde{\eta_k}$ wählen wir die eindeutige Darstellung

$$\widetilde{\eta_k} = \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_q \leq n} \widetilde{\eta}^k_{j_1 ... j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}}.$$

Die Koeffizienten $\widetilde{\eta}^k_{j_1 ... j_q}$ sind zu bestimmen.

Es sei $p \in \mathbb{D} \setminus K$ und $q_0 \in \Pi^{-1}(\{p\})$. Dann existieren Umgebungen $U(p) \subset \mathbb{D} \setminus K$ und $U(q_0) \subset Z$, so dass

$$\Pi|_{U(q_0)} : U(q_0) \to U(p)$$

biholomorph ist. Damit liefert Π die folgenden $\mathbb{C}$-Vektorraumisomorphismen:

$$\begin{array}{rl} \Pi_*(q_0) : & \mathbb{C}T_{q_0}X \to \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n \ , \\ (\Pi_*(q_0))^{-1} : & \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}T_{q_0}X \ , \\ \Pi^*(q_0) : & \Lambda\mathbb{C}T^*_p\mathbb{C}^n \to \Lambda\mathbb{C}T^*_{q_0}X. \end{array}$$

Damit ist $\widetilde{\eta_k}(p) = (\Pi^*(q_0))^{-1}\widetilde{\omega_k}(q_0)$ die gesuchte Form, wir wollen die Koeffizienten $\widetilde{\eta}^k_{j_1 ... j_q}$ aber konkret angeben.

Es sei

$$v_j = (\Pi_*(q_0))^{-1} \left. \frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} \right|_p .$$

Da $\Pi|_{U(q_0)}$ biholomorph ist, ist $\{v_j\}_{j=1}^n$ eine Basis von $T^{0,1}_{q_0}X$.

Nun setzen wir:

$$\widetilde{\eta}^k_{j_1 ... j_q}(p) := \widetilde{\omega_k}(q_0)(v_{j_1}, ..., v_{j_q}).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \Pi^*(q_0)\widetilde{\eta_k}(p)(v_{j_1}, ..., v_{j_q}) &= \widetilde{\eta_k}(p)(\Pi_*(q_0)v_{j_1}, ..., \Pi_*(q_0)v_{j_q}) \\ &= \widetilde{\eta_k}(p) \left(\left. \frac{\partial}{\partial \overline{w_{j_1}}} \right|_p , ..., \left. \frac{\partial}{\partial \overline{w_{j_q}}} \right|_p \right) \\ &= \widetilde{\eta}^k_{j_1 ... j_q}(p) = \widetilde{\omega_k}(q_0)(v_{j_1}, ..., v_{j_q}). \end{aligned}$$

Das heißt, es ist wie gewünscht

$$\Pi^*(q_0)\widetilde{\eta_k}(p) = \widetilde{\omega_k}(q_0).$$

Nun ist aber noch zu zeigen, dass

$$\Pi^*(q_1)\widetilde{\eta_k}(p) = \widetilde{\omega_k}(q_1)$$

für alle Punkte $q_1 \in \Pi^{-1}(\{p\})$ gilt.

Sei dazu $q_1 \in \Pi^{-1}(\{p\})$ und $\Phi_M \in G_\Phi$ eine Decktransformation mit $\Phi_M(q_1) = q_0$. Wegen $\Pi = \Pi \circ \Phi_M$ ist auf Y:

$$\Pi^* = \Phi_M^* \circ \Pi^*,$$

und mit dem Isomorphismus

$$\Phi_M^*(q_1) : \Lambda \mathbb{C} T_{q_0}^* X \to \Lambda \mathbb{C} T_{q_1}^* X$$

gilt:

$$\Pi^*(q_1) = \Phi_M^*(q_1) \circ \Pi^*(q_0).$$

Unter Verwendung der Invarianz $\Phi_M^* \widetilde{\omega_k} = \widetilde{\omega_k}$ folgt:

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega_k}(q_1) &= \Phi_M^*(q_1) \widetilde{\omega_k}(q_0) = \Phi_M^*(q_1) \left(\Pi^*(q_0) \widetilde{\eta_k}(p) \right) \\ &= \Phi_M^*(q_1) \circ \Pi^*(q_0) \widetilde{\eta_k}(p) = \Pi^*(q_1) \widetilde{\eta_k}(p), \end{aligned}$$

und genau das war zu zeigen.

Da Π lokal biholomorph ist, gilt $\overline{\partial} \widetilde{\eta_k} = 0$ im Distributionssinne auf $\mathbb{D} \setminus K$.
Wir fassen zusammen:

Lemma 7.1.1. *Für $k = 0, ..., m-1$ existieren $\overline{\partial}$-geschlossene $(0,q)$-Formen $\widetilde{\eta_k}$ auf $\mathbb{D} \setminus K$ mit $\Pi^* \widetilde{\eta_k} \in L_{0,q}^\infty(Z)$ und*

$$\|\Pi^* \widetilde{\eta_k}\|_{L_{0,q}^\infty(Z)} \leq m \|\omega\|_{L_{0,q}^\infty(Y)}.$$

Weiterhin gilt

$$\omega = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Pi^* \widetilde{\eta_k}}{z^k}$$

auf $Z = Y \setminus B = \{(z,w) \in Y : z \neq 0\}$.

Nun wollen wir die Regularität der Formen $\widetilde{\eta_k}$ auf $\mathbb{D} \setminus K$ bestimmen. Anschließend können die $\widetilde{\eta_k}$ mit 0 nach ganz $\mathbb{D}$ fortgesetzt werden, so dass für die fortgesetzten Formen dann $\overline{\partial} \widetilde{\eta_k} = 0$ auf $\mathbb{D}$ im Distributionssinne gilt.

Dazu ermitteln wir zunächst für

$$\widetilde{\omega_k} = \iota^*(\widetilde{\omega_k} \oplus 0) = \iota^*(z^k \omega_k \oplus 0)$$

auf Z eine Darstellung, in der $d\overline{z}$ nicht mehr auftritt.

Lemma 7.1.2. *Auf* $Z = \{(z, w_1, ..., w_n) \in Y : w_j \neq 0$ *für alle* $j\}$ *ist*

$$\iota^*(d\overline{z}) = \iota^* \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} k_j \frac{\overline{z}}{\overline{w_j}} d\overline{w_j} \right) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} k_j \frac{\overline{z}}{\overline{w_j}} \iota^*(d\overline{w_j}).$$

Beweis. Es sei $p = (p_0, ..., p_n) \in Z$. Für $v \in T_p^{0,1} Z$ verwenden wir die Darstellung

$$\iota_*(p)v = \sum_{j=0}^{n} v_j \left. \frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} \right|_p ,$$

wobei hier an $w_0 = z$ erinnert sei. Mit

$$\overline{F}(z, w) = \overline{z}^m - \prod_{j=1}^{n} \overline{w_j}^{k_j}$$

ist $X = \overline{F}^{-1}(0)$ und für $v \in T_p^{0,1} Z$ folgt:

$$\begin{aligned}
0 = d\overline{F}|_p(\iota_*(p)v) &= \left(m\overline{p_0}^{m-1} d\overline{z} - \sum_{j=1}^{n} k_j \overline{p_j}^{k_j - 1} \prod_{\substack{t \in \{1,...,n\} \\ t \neq j}} \overline{p_t}^{k_t} d\overline{w_j} \right) (\iota_*(p)v) \\
&= \left(m\overline{p_0}^{m-1} d\overline{z} - \sum_{j=1}^{n} k_j \frac{\overline{p_0}^m}{\overline{p_j}} d\overline{w_j} \right) \left(\sum_{j=0}^{n} v_j \left. \frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} \right|_p \right) \\
&= v_0 m \overline{p_0}^{m-1} - \sum_{j=1}^{n} v_j k_j \frac{\overline{p_0}^m}{\overline{p_j}}.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$v_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} v_j k_j \frac{\overline{p_0}}{\overline{p_j}}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\iota^*(d\overline{z}|_p)(v) &= d\overline{z}|_p(\iota_*(p)v) = v_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} v_j k_j \frac{\overline{p_0}}{\overline{p_j}} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} k_j \frac{\overline{p_0}}{\overline{p_j}} d\overline{w_j}|_p(\iota_*(p)v) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} k_j \frac{\overline{p_0}}{\overline{p_j}} \iota^*(d\overline{w_j}|_p)(v) \\
&= \iota^* \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} k_j \frac{\overline{p_0}}{\overline{p_j}} d\overline{w_j}|_p \right) (v).
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung, wenn wir die Abhängigkeit vom Punkt p in den Variablen $(z, w_1, ..., w_n)$ ausdrücken. $\square$

Wir erinnern an $\omega_k \in L^\infty_{0,q}(Y)$ mit

$$\|\omega_k\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \leq m\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}.$$

Dies bedeutet nichts anderes als

$$\omega_k = \iota^*(\omega_k \oplus 0) = \iota^*\left(\sum_{0\leq j_1<\ldots<j_q\leq n} \omega^k_{j_1\ldots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{w_{j_q}}\right)$$

mit $\omega^k_{j_1\ldots j_q} \in L^\infty(Y)$ und

$$\|\omega_k\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} = \sqrt{2^q \sum_{0\leq j_1<\ldots<j_q\leq n} \|\omega^k_{j_1\ldots j_q}\|^2_{L^\infty(Y)}} \;\leq\; m\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}.$$

Dabei können wir

$$|\omega^k_{j_1\ldots j_q}(z,w)| \leq \frac{m}{\sqrt{2^q}}\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}$$

für alle Punkte $(z,w) \in Y$ annehmen, indem wir die Koeffizienten auf einer Nullmenge abändern. Damit ist

$$\widetilde{\omega_k} = \iota^*(z^k\omega_k \oplus 0) = \iota^*\left(\sum_{0\leq j_1<\ldots<j_q\leq n} z^k\omega^k_{j_1\ldots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{w_{j_q}}\right). \qquad (116)$$

Nun nutzen wir Lemma 7.1.2, um $d\overline{w_0} = d\overline{z}$ in der Darstellung (116) zu eliminieren. Das liefert auf Z:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega_k} &= \iota^*\Bigg(\sum_{1\leq j_2<\ldots<j_q\leq n} z^k\omega^k_{0j_2\ldots j_q} d\overline{z} \wedge d\overline{w_{j_2}} \wedge \ldots \wedge d\overline{w_{j_q}} \\
&\qquad + \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_q\leq n} z^k\omega^k_{j_1\ldots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{w_{j_q}}\Bigg) \\
&= \iota^*\Bigg(\sum_{1\leq j_2<\ldots<j_q\leq n} z^k\omega^k_{0j_2\ldots j_q}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^n k_j\frac{\overline{z}}{\overline{w_j}} d\overline{w_j}\right) \wedge d\overline{w_{j_2}} \wedge \ldots \wedge d\overline{w_{j_q}} \\
&\qquad + \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_q\leq n} z^k\omega^k_{j_1\ldots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{w_{j_q}}\Bigg) \\
&= \iota^*\left(\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_q\leq n} \widetilde{\omega}^k_{j_1\ldots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{w_{j_q}}\right),
\end{aligned}$$

mit neuen Koeffizienten $\widetilde{\omega}^k_{j_1\ldots j_q}$. Es sei explizit darauf hingewiesen, dass es sich hierbei nicht mehr um die Koeffizienten aus der kanonischen Darstellung $\pi^*\widetilde{\omega_k}$ handelt.

Die Eliminierung von $d\overline{z}$ zeigt: $\widetilde{\omega_k}$ besitzt eine Zerlegung

$$\widetilde{\omega_k} = \widetilde{\omega}_{k,0} + ... + \widetilde{\omega}_{k,n}$$

mit

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_{k,0} &= \iota^* \left(\sum_{1 \le j_1 < ... < j_q \le n} z^k \omega^k_{j_1 \dots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}} \right) \\ &= \iota^* \left(\sum_{1 \le j_1 < ... < j_q \le n} \widetilde{\omega}^{k,0}_{j_1 \dots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_{k,j} &= \iota^* \left(\frac{k_j}{m} \frac{z^k \overline{z}}{\overline{w_j}} \sum_{1 \le j_2 < ... < j_q \le n} \omega^k_{0 j_2 \dots j_q} d\overline{w_j} \wedge d\overline{w_{j_2}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}} \right) \\ &= \iota^* \left(\sum_{1 \le j_1 < ... < j_q \le n} \widetilde{\omega}^{k,j}_{j_1 \dots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}} \right). \end{aligned}$$

Unter Beachtung von

$$|\omega^k_{j_1 \dots j_q}(z,w)| \le \frac{m}{\sqrt{2^q}} \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}$$

für alle Punkte $(z,w) \in Y$ folgt:

Lemma 7.1.3. *$\widetilde{\omega_k}$ besitzt eine Zerlegung*

$$\widetilde{\omega_k} = \widetilde{\omega}_{k,0} + ... + \widetilde{\omega}_{k,n} \ ,$$

so dass für die Koeffizienten der Darstellung

$$\widetilde{\omega}_{k,j} = \iota^* \left(\sum_{1 \le j_1 < ... < j_q \le n} \widetilde{\omega}^{k,j}_{j_1 \dots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}} \right)$$

gilt:

$$\begin{aligned} |\widetilde{\omega}^{k,0}_{j_1 \dots j_q}(z,w)| &\le \frac{m}{\sqrt{2^q}} |z|^k \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \ , \\ |\widetilde{\omega}^{k,j}_{j_1 \dots j_q}(z,w)| &\le \frac{k_j}{\sqrt{2^q}} \frac{|z|^{k+1}}{|w_j|} \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \quad \textit{für } j \in \{1,...,n\}, \end{aligned}$$

für alle Punkte $(z,w) \in Y$. Außerdem ist

$$\widetilde{\omega}^{k,j}_{j_1,\dots,j_q} = 0,$$

falls $j \notin \{j_1, ... j_q\}$.

Diese Abschätzung soll nun auf die Koeffizienten von

$$\widetilde{\eta}_k = \sum_{1\leq j_1<...<j_q\leq n} \widetilde{\eta}^k_{j_1...j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}}$$

übertragen werden. Dazu werden wir

$$\widetilde{\eta}^k_{j_1...j_q}(w) = \widetilde{\omega}^k_{j_1...j_q}(z,w) \tag{117}$$

für alle $w \in \mathbb{D} \setminus K$ und $(z,w) \in \Pi^{-1}(\{w\})$ zeigen. Aus Lemma 7.1.3 folgt dann:

$$|\widetilde{\eta}^k_{j_1...j_q}(w)| \leq \frac{m}{\sqrt{2^q}} |w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}|^{k/m} \left(1 + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^n k_j \frac{|w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}|^{1/m}}{|w_j|}\right) \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}$$

für alle $w \in \mathbb{D} \setminus K$. Wegen $k_j \geq 1$ folgt insbesondere $\widetilde{\eta}^k_{j_1...j_q} \in L^{2+}(\mathbb{D} \setminus K)$.

Um (117) zu zeigen, benötigen wir:

Lemma 7.1.4. *Es sei $p \in \mathbb{D} \setminus K$ und $q_0 \in \Pi^{-1}(\{p\})$. Dann ist:*

$$(\Pi^*(q_0))^{-1} \circ \iota^*(q_0)(d\overline{w_j}|_{q_0}) = d\overline{w_j}|_p.$$

Beweis. Es existieren Umgebungen $U(p) \subset \mathbb{D} \setminus K$ und $U(q_0) \subset Y$, so dass

$$\Pi|_{U(q_0)} : U(q_0) \to U(p)$$

biholomorph ist. Damit existiert

$$\iota \circ \Pi^{-1} : U(p) \to U(q_0) \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$

gegeben durch

$$\iota \circ \Pi^{-1} : (w_1, ..., w_n) \mapsto (\sqrt[m]{w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}}, w_1, ..., w_n)$$

mit einen passenden Zweig der Wurzel. Für die induzierte Kotangentialabbildung

$$(\iota \circ \Pi^{-1})^* : \Lambda\mathbb{C}T^*\mathbb{C}^{n+1}|_{U(q_0)} \to \Lambda\mathbb{C}T^*U(p)$$

gilt:

$$(\iota \circ \Pi^{-1})^*(q_0) = (\Pi^*(q_0))^{-1} \circ \iota^*(q_0).$$

Dabei sei an

$$\begin{aligned} \iota^*(q_0) : &\quad \Lambda\mathbb{C}T^*_{q_0}\mathbb{C}^{n+1} \to \Lambda\mathbb{C}T^*_{q_0}Y \\ (\Pi^*(q_0))^{-1} : &\quad \Lambda\mathbb{C}T^*_{q_0}Y \to \Lambda\mathbb{C}T^*_p\mathbb{C}^n \end{aligned}$$

erinnert.

Betrachte nun allgemein differenzierbare Abbildungen

$$\begin{array}{rl} \Psi = (\Psi_0, ..., \Psi_n) : & U \subset \mathbb{C}^n \to V \subset \mathbb{C}^{n+1} \ , \\ f : & V \to \mathbb{C} \ . \end{array}$$

Dabei bezeichnen wir die euklidischen Koordinaten in $U \subset \mathbb{C}^n$ mit $(w_1, ..., w_n)$ und in $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ mit $(w_0, ..., w_n)$. Dann ist nach der Kettenregel

$$\frac{\partial (f \circ \Psi)}{\partial \overline{w_j}} = \sum_{t=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial w_t} \cdot \frac{\partial \Psi_t}{\partial \overline{w_j}} + \sum_{t=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{w_t}} \cdot \frac{\partial \overline{\Psi_t}}{\partial \overline{w_j}}.$$

Für eine holomorphe Abbildung Ψ bleibt

$$\frac{\partial (f \circ \Psi)}{\partial \overline{w_j}} = \sum_{t=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{w_t}} \cdot \frac{\partial \overline{\Psi_t}}{\partial \overline{w_j}}.$$

Wir setzen nun $\Psi(w) = \iota \circ \Pi^{-1}(w) = (\Psi_0(w), w_1, w_2, ..., w_n)$ und erhalten damit:

$$\begin{aligned} (\iota \circ \Pi^{-1})_* \left(\frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} \right) (f) &= \frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} (f \circ \iota \circ \Pi^{-1}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} f + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot \frac{\partial \overline{\Psi_0}}{\partial \overline{w_j}} \ . \end{aligned}$$

Sei also

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \left. \frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} \right|_p \in T_p^{0,1} \mathbb{C}^n.$$

Dann ist

$$(\iota \circ \Pi^{-1})_*(p) v = v_0 \left. \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right|_{q_0} + \sum_{j=1}^{n} v_j \left. \frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} \right|_{q_0} \in T_{q_0}^{0,1} \mathbb{C}^{n+1},$$

wobei wir v_0 nicht näher bestimmen. Damit folgt nun aber auch:

$$\begin{aligned} (\iota \circ \Pi^{-1})^*(q_0)(d\overline{w_j}|_{q_0})(v) &= d\overline{w_j}|_{q_0} \left((\iota \circ \Pi^{-1})_*(p) v \right) \\ &= d\overline{w_j}|_{q_0} \left(v_0 \left. \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right|_{q_0} + \sum_{j=1}^{n} v_j \left. \frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} \right|_{q_0} \right) \\ &= v_j = d\overline{w_j}|_p v. \end{aligned}$$

Also ist

$$(\iota \circ \Pi^{-1})^*(q_0)(d\overline{w_j}|_{q_0}) = d\overline{w_j}|_p,$$

und genau das war zu zeigen. $\square$

Mit Lemma 7.1.4 ergibt sich für $p \in \mathbb{D} \setminus K$ und $q_0 \in \Pi^{-1}(\{p\})$ nun:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\eta_k}(p) &= (\Pi^*(q_0))^{-1}\widetilde{\omega_k}(q_0) \\
&= (\Pi^*(q_0))^{-1} \circ \iota^*(q_0) \left(\sum_{1 \le j_1 < \dots < j_q \le n} \widetilde{\omega}^k_{j_1 \dots j_q}(q_0) d\overline{w_{j_1}} \wedge \dots \wedge d\overline{w_{j_q}} \Big|_{q_0} \right) \\
&= \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_q \le n} \widetilde{\omega}^k_{j_1 \dots j_q}(q_0) d\overline{w_{j_1}} \wedge \dots \wedge d\overline{w_{j_q}} \Big|_p .
\end{aligned}$$

Das bedeutet aber nichts anderes als

$$\widetilde{\eta}^k_{j_1 \dots j_q}(w) = \widetilde{\omega}^k_{j_1 \dots j_q}(z, w)$$

für alle $w \in \mathbb{D} \setminus K$ und $(z, w) \in \Pi^{-1}(\{w\})$. Hier erkennen wir auch die Invarianz von $\widetilde{\omega_k}$ unter Decktransformationen wieder, denn es folgt

$$\widetilde{\omega}^k_{j_1 \dots j_q}(q_0) = \widetilde{\omega}^k_{j_1 \dots j_q}(q_1)$$

für zwei Punkte q_0, q_1 aus der gleichen Faser $\Pi^{-1}(\{p\})$.

Nach Lemma 7.1.3 ist nun $\widetilde{\eta}^k_{j_1 \dots j_q} \in L^{2+}(\mathbb{D} \setminus K)$. Wir setzten die Koeffizienten $\widetilde{\eta}^k_{j_1 \dots j_q}$ trivial mit 0 nach K fort. Damit ist

$$\widetilde{\eta_k} \in L^{2+}_{0,q}(\mathbb{D}),$$

und es gilt $\overline{\partial}\widetilde{\eta_k} = 0$ auf $\mathbb{D} \setminus K$ im Distributionssinne. Nach dem Fortsetzungssatz 4.3.3 für die $\overline{\partial}$-Gleichung folgt $\overline{\partial}\widetilde{\eta_k} = 0$ auf ganz $\mathbb{D}$.

Parallel zur Zerlegung

$$\widetilde{\omega_k} = \widetilde{\omega}_{k,0} + \dots + \widetilde{\omega}_{k,n}$$

besitzt auch $\widetilde{\eta_k}$ die Zerlegung

$$\widetilde{\eta_k} = \widetilde{\eta}_{k,0} + \dots + \widetilde{\eta}_{k,n}$$

mit

$$\widetilde{\eta}_{k,j} = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_q \le n} \widetilde{\eta}^{k,j}_{j_1 \dots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge \dots \wedge d\overline{w_{j_q}}.$$

Dabei ist

$$\widetilde{\eta}^{k,j}_{j_1 \dots j_q}(w) = \widetilde{\omega}^{k,j}_{j_1 \dots j_q}(z, w)$$

für einen beliebigen Punkt $(z, w) \in \Pi^{-1}(\{w\})$, und die Abschätzungen aus Lemma 7.1.3 übertragen sich auf die Koeffizienten $\widetilde{\eta}^{k,j}_{j_1 \dots j_q}$, wobei $|z| = |w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}|^{1/m}$ eingesetzt werden muss.

Wir fassen die Erkenntnisse dieses Abschnitts zusammen:

Lemma 7.1.5. *Es sei* $\omega \in L^\infty_{0,q}(Y)$. *Für* $k = 0, ..., m-1$ *existieren* $(0,q)$*-Formen* $\widetilde{\eta_k} \in L^{2+}_{0,q}(\mathbb{D})$,

$$\widetilde{\eta_k} = \sum_{1 \le j_1 < ... < j_q \le n} \widetilde{\eta}^k_{j_1 ... j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}},$$

mit $\overline{\partial}\widetilde{\eta_k} = 0$ *im Distributionssinne und*

$$\omega = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Pi^* \widetilde{\eta_k}}{z^k}$$

auf $Z = Y \setminus B = \{(z,w) \in Y : z \neq 0\}$.

Weiterhin besitzt $\widetilde{\eta_k}$ *eine Zerlegung*

$$\widetilde{\eta_k} = \widetilde{\eta}_{k,0} + ... + \widetilde{\eta}_{k,n} \ ,$$

so dass für die Koeffizienten der Darstellung

$$\widetilde{\eta}_{k,j} = \sum_{1 \le j_1 < ... < j_q \le n} \widetilde{\eta}^{k,j}_{j_1 ... j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}}$$

gilt:

$$\begin{aligned} |\widetilde{\eta}^{k,0}_{j_1 ... j_q}(w)| &\le \frac{m}{\sqrt{2^q}} |w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}|^{\frac{k}{m}} \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \ , \\ |\widetilde{\eta}^{k,j}_{j_1 ... j_q}(w)| &\le \frac{k_j}{\sqrt{2^q}} \frac{|w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}|^{\frac{k+1}{m}}}{|w_j|} \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \quad \text{für } j \in \{1, ..., n\}, \end{aligned}$$

für alle Punkte $w \in \mathbb{D}$ *mit* $w_j \neq 0$, *falls nötig. Um die Notation zu vereinfachen setzen wir* $k_0 = m$ *und* $|w_0| = |z| = |w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}|^{1/m}$. *Damit können die Abschätzungen zusammengefasst werden zu:*

$$|\widetilde{\eta}^{k,j}_{j_1 ... j_q}(w)| \le \frac{k_j}{\sqrt{2^q}} \frac{|w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}|^{\frac{k+1}{m}}}{|w_j|} \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}$$

für alle $j \in \{0, ..., n\}$.

Für $j \ge 1$ *ist außerdem*

$$\widetilde{\eta}^{k,j}_{j_1, ..., j_q} = 0,$$

falls $j \notin \{j_1, ... j_q\}$.

7.2 Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung auf $Y = \Pi^{-1}(\mathbb{D}) \cap \operatorname{Reg} X$

Wir verwenden folgende Notation: Für eine reelle Zahl x sei

$$\begin{aligned} [x] &= \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}, \\ \{x\} &= x - [x], \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [x]^* &= \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}, \\ \{x\}^* &= [x]^* - x. \end{aligned}$$

Damit ist $0 \leq \{x\}, \{x\}^* < 1$ und

$$x = [x] + \{x\} = [x]^* - \{x\}^*.$$

Man beachte auch $x = [x] = [x]^*$ für $x \in \mathbb{Z}$.

Für $k \in \{0, ..., m-1\}$ sei

$$N_k'(w) \ := \ \prod_{j=1}^n w_j^{[k\frac{k_j}{m}]}.$$

Man beachte:

$$\frac{|w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}|^{k/m}}{|N_k'(w)|} = \prod_{j=1}^n |w_j|^{\{k\frac{k_j}{m}\}} \in C^0(\mathbb{C}^n).$$

Nun lösen wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zunächst für

$$\eta_k' := \frac{\widetilde{\eta}_k}{N_k'} = \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_q \leq n} {}'\eta_{j_1 \ldots j_q}^k d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}}.$$

Wegen $\overline{\partial}\widetilde{\eta}_k = 0$ auf $\mathbb{D}$ gilt unmittelbar $\overline{\partial}\eta_k' = 0$ auf $\mathbb{D} \setminus K$, da N_k' holomorph ist. Die Nullstellenmenge von N_k' ist in K enthalten. Dort müssen wir genauere Beobachtungen anstellen. Die Koeffizienten ${}'\eta_{j_1 \ldots j_q}^k$ sind bestimmt durch die Koeffizienten der $\widetilde{\eta}_k$:

$${}'\eta_{j_1 \ldots j_q}^k = \frac{\widetilde{\eta}_{j_1 \ldots j_q}^k}{N_k'}.$$

Nach Lemma 7.1.5 ist

$$|{}'\eta_{j_1 \ldots j_q}^k(w)| \leq \frac{m}{\sqrt{2^q}} \frac{|w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}|^{\frac{k}{m}}}{N_k'(w)} \left(1 + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n k_j \frac{|w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}|^{\frac{1}{m}}}{|w_j|}\right) \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}$$

für alle $w \in \mathbb{D} \backslash K = \{w \in \mathbb{D} : w_j \neq 0 \text{ für alle } j\}$, und es folgt ${}'\eta_{j_1 \ldots j_q}^k \in L^{2+}(\mathbb{D} \backslash K)$, da $k_j \geq 1$. Wir setzen η_k' trivial mit 0 nach K fort und erhalten $\eta_k' \in L^{2+}_{0,q}(\mathbb{D})$. Nach dem Fortsetzungssatz 4.3.3 für die $\overline{\partial}$-Gleichung folgt $\overline{\partial}\eta_k' = 0$ auf $\mathbb{D}$.

Nun können wir die $\overline{\partial}$-Gleichung für η'_k lösen. Dazu verwenden wir die Homotopieformel für die Kugel $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$. Nach Theorem 5.2.8 ist

$$\varphi'_k := \mathbf{S}_{q-1}\eta'_k \ \in L^{2\frac{n+1}{n}+}_{0,q-1}(\mathbb{D})$$

und es gilt

$$\overline{\partial}\varphi'_k = \eta'_k$$

im Distributionssinne. Tatsächlich ist φ'_k aber von deutlich höherer Regularität:

Lemma 7.2.1. *Es sei $k \in \{0, ..., m-1\}$ und $\beta_k = \min_j\{\{k\frac{k_j}{m}\} + \frac{k_j}{m}, 1\}$. Damit ist $\beta_k > 0$ und es existiert eine Konstante $C_k > 0$, so dass folgendes gilt: Für*

$$\varphi'_k = \mathbf{S}_{q-1}\eta'_k = \mathbf{S}_{q-1}\left(\frac{\widetilde{\eta}_k}{N'_k}\right)$$

ist

$$\varphi'_k \in C^{\beta_k/2}_{0,q-1}(\mathbb{D})$$

und es gilt

$$\|\varphi'_k\|_{C^{\beta_k/2}_{0,q-1}(\mathbb{D})} \leq C_k\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}.$$

Die Konstante $C_k > 0$ hängt nicht von ω ab.

Beweis. Nach der generellen Voraussetzung $k_j \geq 1$ ist $\beta_k > 0$. Wir verwenden die Zerlegung

$$\widetilde{\eta}_k = \widetilde{\eta}_{k,0} + ...\widetilde{\eta}_{k,n}$$

aus Lemma 7.1.5. Diese überträgt sich auf η'_k durch

$$\eta'_{k,j} = \frac{\widetilde{\eta}_{k,j}}{N'_k}.$$

Die Koeffizienten von

$$\eta'_{k,j} = \sum_{1\leq j_1<...<j_q\leq n} {}'\eta^{k,j}_{j_1...j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}}$$

sind gegeben durch

$${}'\eta^{k,j}_{j_1...j_q} = \frac{\widetilde{\eta}^{k,j}_{j_1...j_q}}{N'_k}.$$

Nach Lemma 7.1.5 gilt

$$|{}'\eta^{k,j}_{j_1..j_q}(w)| \leq \frac{k_j}{\sqrt{2^q}} \frac{\prod_{t=1}^n |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}+\frac{k_t}{m}}}{|w_j|}\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \leq \frac{k_j}{\sqrt{2^q}}\frac{|w_j|^{\{k\frac{k_j}{m}\}+\frac{k_j}{m}}}{|w_j|}\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \quad (118)$$

für alle $j \in \{0, 1, ..., n\}$ und alle $w \in \mathbb{D}$ mit $w_j \neq 0$. Dabei sei an die Vereinbarung $k_0 = m$ und $|w_0| = |w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}|^{1/m}$ erinnert.

Es sei $\beta_{k,0} = 0$ und

$$\beta_{k,j} = \max\{1 - \frac{k_j}{m} - \{k\frac{k_j}{m}\}, 0\} \quad \text{für } j = 1, ..., n.$$

Damit ist $0 \leq \beta_{k,j} < 1$. Sei weiterhin $\overline{\beta_{k,0}} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ und $\overline{\beta_{k,j}} = (0, ..., 0, \beta_{k,j}, 0, ..., 0)$ mit dem einzigen Eintrag in der j-ten Komponente. Wegen (118) ist

$$\eta'_{k,j} \in L^{\infty,\overline{\beta_{k,j}}}_{0,q}(\mathbb{D}) \ ,$$

und es gilt

$$\|\eta'_{k,j}\|_{L^{\infty,\overline{\beta_{k,j}}}_{0,q}(\mathbb{D})} \leq \frac{k_j}{\sqrt{2^q}} \|\omega\|_{L^{\infty}_{0,q}(Y)}.$$

Für die Definition der gewichteten L^p-Räume beachte Definition 6.0.2. Wir erinnern auch an die Zerlegung des Lösungsoperators $\mathbf{S}_{q-1}$ in Hauptteil $\widehat{\mathbf{S}}_{q-1}$ und BMK-Operator $\mathbf{B}_{q-1}$ (vgl. Definition 5.2.4):

$$\mathbf{S}_{q-1} = \widehat{\mathbf{S}}_{q-1} - \mathbf{B}_{q-1}.$$

Nach Korollar 6.2.7 liefert $\mathbf{B}_{q-1}$ eine stetige lineare Abbildung

$$\mathbf{B}_{q-1} : L^{\infty,\overline{\beta_{k,j}}}_{0,q}(\mathbb{D}) \to C^{\gamma_{k,j}}_{0,q-1}(\mathbb{D}),$$

für $\gamma_{k,j} = 1 - \beta_{k,j} = \frac{k_j}{m} + \{k\frac{k_j}{m}\}$, falls $\beta_{k,j} > 0$, und für alle $\gamma_{k,j} < 1$, falls $\beta_{k,j} = 0$.

Nach Lemma 6.4.7 liefert $\widehat{\mathbf{S}}_{q-1}$ eine stetige lineare Abbildung

$$\widehat{\mathbf{S}}_{q-1} : L^{\infty,\overline{\beta_{k,j}}}_{0,q}(\mathbb{D}) \to C^{\delta_{k,j}}_{0,q-1}(\mathbb{D})$$

für $\delta_{k,j} = \frac{1}{2}(1 - \beta_{k,j})$.

Folglich ist $\mathbf{S}_{q-1}\eta'_{k,j} \in C^{\delta_{k,j}}_{0,q-1}(\mathbb{D})$ und es existiert eine Konstante $C_{k,j} > 0$ mit:

$$\|\mathbf{S}_{q-1}\eta'_{k,j}\|_{C^{\delta_{k,j}}_{0,q-1}(\mathbb{D})} \leq C_{k,j}\|\eta'_{k,j}\|_{L^{\infty,\overline{\beta_{k,j}}}_{0,q}(\mathbb{D})} \leq C_{k,j}\frac{k_j}{\sqrt{2^q}}\|\omega\|_{L^{\infty}_{0,q}(Y)}.$$

Nun ist

$$\varphi'_k = \mathbf{S}_{q-1}\eta'_k = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{S}_{q-1}\eta'_{k,j} \ \in C^{\delta}_{0,q-1}(\mathbb{D})$$

für $\delta = \min_j\{\delta_{k,j}\} = \frac{1}{2}\min_j\{1 - \beta_{k,j}\} = \beta_k/2$, und mit

$$C_k = \sum_{j=0}^{n} C_{k,j}\frac{k_j}{\sqrt{2^q}}$$

folgt:

$$\|\varphi'_k\|_{C^{\beta_k/2}_{0,q-1}(\mathbb{D})} \leq C_k\|\omega\|_{L^{\infty}_{0,q}(Y)}.$$

□

Wir bemerken, dass die φ'_k schon eine Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung $\overline{\partial} f = \omega$ induzieren:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{N'_k(w)\Pi^*\varphi'_k}{z^k}\right) &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{N'_k(w)}{z^k}\Pi^*\overline{\partial}\varphi'_k\right)\\
&= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{N'_k(w)}{z^k}\Pi^*\left(\frac{\widetilde{\eta}_k}{N'_k(w)}\right)\right)\\
&= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{N'_k(w)}{z^k}\frac{\Pi^*\widetilde{\eta}_k}{N'_k(w)}\right) = \omega
\end{aligned}$$

auf $Z = Y \setminus B = \{(z,w) \in Y : z \neq 0\}$. Man beachte $\overline{\partial} \circ \Pi^* = \Pi^* \circ \overline{\partial}$, da Π lokal biholomorph ist. Diese Darstellung liefert aber noch keine Lösung auf Y, da sich die Terme

$$\frac{N'_k(w)\Pi^*\varphi'_k}{z^k}$$

für $z \to 0$ nicht hinreichend regulär verhalten. Wir werden die $N'_k(w)\Pi^*\varphi'_k$ durch Formen ersetzen, für die wir den Quotienten besser kontrollieren können. Dazu modifizieren wir die η'_k.

Es sei

$$N_k(w) = \prod_{j=1}^{n} w_j^{[k\frac{k_j}{m}]^*}$$

und

$$\eta_k = \frac{\widetilde{\eta}_k}{N_k(w)} = \frac{\eta'_k}{\prod_{j:k\frac{k_j}{m}\notin\mathbb{Z}} w_j} = \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_q\leq n} \eta^k_{j_1\ldots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{w_{j_q}}.$$

Wegen

$$\eta^k_{j_1\ldots j_q} = \frac{\widetilde{\eta}^k_{j_1\ldots j_q}}{N_k}$$

und Lemma 7.1.5 gilt für die Koeffizienten:

$$|\eta^k_{j_1\ldots j_q}(w)| \leq \frac{m}{\sqrt{2^q}}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{|w_j|^{\{k\frac{k_j}{m}\}^*}}\left(1+\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}k_j\frac{|w_1^{k_1}\cdots w_n^{k_n}|^{1/m}}{|w_j|}\right)\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}.$$

Wegen $k_j \geq 1$ und $\{k\frac{k_j}{m}\}^* < 1$ ist $\eta^k_{j_1\ldots j_q} \in L^{1+}(\mathbb{D}\setminus K)$. Wieder setzen wir die η_k mit 0 trivial nach K fort, und erhalten $\eta_k \in L^{1+}_{0,q}(\mathbb{D})$. Weiterhin ist $\overline{\partial}\eta_k = 0$ auf $\mathbb{D}\setminus K$, da N_k holomorph ist, aber $\overline{\partial}\eta_k = 0$ auf $\mathbb{D}$ ist nicht unmittelbar klar.

In dieser Frage hilft die folgende Verallgemeinerung des 1.Riemannschen Hebbarkeitssatzes:

Lemma 7.2.2. *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$, $\epsilon > 0$ und*

$$g = \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_q \leq n} g_{j_1 ... j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge d\overline{w_{j_2}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}}$$

eine $(0, q)$-Form mit $\frac{g}{w_1} \in L^1_{0,q}(D)$, $\overline{\partial} g = 0$ im Distributionssinne, und für alle Koeffizientenfunktionen $g_{j_1 ... j_q}$ mit $j_1 > 1$ existiere eine positive Funktion $R_{j_1 ... j_q}(w_2, ..., w_n) \in L^1(\mathbb{C}^{n-1})$, so dass

$$|g_{j_1 ... j_q}(w_1, ..., w_n)| \leq |w_1|^\epsilon R_{j_1 ... j_q}(w_2, ..., w_n)$$

für alle $w \in D$ gilt. Im Fall $q = 0$ sei $g \in L^1(D)$ und es existiere $R \in L^1(\mathbb{C}^{n-1})$ mit

$$|g(w_1, ..., w_n)| \leq |w_1|^\epsilon R(w_2, ..., w_n)$$

für alle $w \in D$. Dann ist

$$\overline{\partial} \left(\frac{g}{w_1} \right) = 0$$

im Distributionssinne.

Beweis. Wir zeigen: Es gilt

$$\int_D \frac{g}{w_1} \wedge \overline{\partial} \varphi = 0$$

für alle passend-dimensionalen Testformen φ mit kompaktem Träger in D.

Sei dazu $\delta > 0$, $0 \leq \chi_\delta(w_1) \leq 1$ eine C^∞-Abschneidefunktion mit $\chi_\delta \equiv 1$ auf $\Delta_\delta(0) \subset \mathbb{C}$, kompaktem Träger in $\Delta_{2\delta}(0)$ und $|\nabla \chi_\delta| \leq 4/\delta$.

Da $1/w_1$ auf $D \cap \{|w_1| \geq \delta\}$ eine holomorphe Funktion ist, erhalten wir unter Verwendung von $\overline{\partial} g = 0$ im Distributionssinne:

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{g}{w_1} \wedge \overline{\partial} \varphi &= \int_D \frac{g}{w_1} \wedge \overline{\partial} \big(\chi_\delta \varphi + (1 - \chi_\delta) \varphi \big) \\
&= \int_D \frac{g}{w_1} \wedge \overline{\partial} (\chi_\delta \varphi) + \int_{D \cap \{|w_1| \geq \delta\}} g \wedge \overline{\partial} \left(\frac{(1 - \chi_\delta) \varphi}{w_1} \right) \\
&= \int_D \frac{g}{w_1} \wedge \overline{\partial} (\chi_\delta \varphi) \\
&= \int_{D \cap \{|w_1| \leq 2\delta\}} \frac{g}{w_1} \wedge \chi_\delta \wedge \overline{\partial} \varphi + \int_{D \cap \{|w_1| \leq 2\delta\}} \frac{g}{w_1} \wedge \overline{\partial} \chi_\delta \wedge \varphi \\
&=: A_\delta(\varphi) + B_\delta(\varphi).
\end{aligned}$$

Wegen $\chi_\delta \leq 1$ und $g/w_1 \in L^1$ gilt (vgl. etwa [Alt], Lemma A 1.16):

$$|A_\delta(\varphi)| \leq \|\overline{\partial} \varphi\|_\infty \int_{D \cap \{|w_1| \leq 2\delta\}} \left| \frac{g}{w_1} \right| dV_{\mathbb{C}^n} \to 0$$

für $\delta \to 0$, und es bleibt nur noch $B_\delta(\varphi)$ zu untersuchen.

Dazu zerlegen wir g in $g = G_1 + G_2$ mit

$$G_1 = \sum_{2 \leq j_2 < ... < j_q \leq n} g_{1j_2...j_q} d\overline{w_1} \wedge d\overline{w_{j_2}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}}$$

und

$$G_2 = \sum_{2 \leq j_1 < ... < j_q \leq n} g_{j_1...j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge d\overline{w_{j_2}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}}.$$

Da χ_δ nur von w_1 abhängt, gilt

$$\overline{\partial}\chi_\delta = \frac{\partial \chi_\delta}{\partial \overline{w_1}} d\overline{w_1},$$

und unter Verwendung von $d\overline{w_1} \wedge d\overline{w_1} = 0$ ist:

$$B_\delta(\varphi) \;\; = \;\; \int_{D \cap \{|w_1| \leq 2\delta\}} \frac{G_2}{w_1} \wedge \overline{\partial}\chi_\delta \wedge \varphi.$$

Nach Voraussetzung können wir

$$|G_2(w)| \leq |w_1|^\epsilon R(w_2, ..., w_n)$$

mit $R \in L^1(\mathbb{C}^{n-1})$ annehmen, und mit $|\nabla \chi_\delta| \leq 4/\delta$ und dem Satz von Fubini ergibt sich:

$$\begin{aligned} |B_\delta(\varphi)| &\leq \frac{4}{\delta} \|\varphi\|_\infty \int_{D \cap \{|w_1| \leq 2\delta\}} |w_1|^{\epsilon - 1} R(w_2, ..., w_n) dV_{\mathbb{C}^n}(w) \\ &\leq \frac{4}{\delta} \|\varphi\|_\infty \|R\|_{L^1(\mathbb{C}^{n-1})} \int_{\{|w_1| \leq 2\delta\}} |w_1|^{\epsilon - 1} dV_{\mathbb{C}}(w_1) \\ &\lesssim \frac{4}{\delta} \|\varphi\|_\infty \|R\|_{L^1(\mathbb{C}^{n-1})} (2\delta)^{1+\epsilon} \lesssim \delta^\epsilon \to 0 \end{aligned}$$

für $\delta \to 0$, und genau das war noch zu zeigen. □

Es folgt:

Korollar 7.2.3. *Es gilt* $\overline{\partial}\eta_k = 0$ *im Distributionssinne auf* $\mathbb{D}$.

Beweis. Die Aussage ergibt sich induktiv unter Verwendung von Lemma 7.2.2. Wir setzen

$$\eta_k^0 = \eta_k'$$

und für $s = 1, ..., n$ induktiv

$$\eta_k^s = \begin{cases} \eta_k^{s-1} & , \text{ falls } k\frac{k_s}{m} \in \mathbb{Z}, \\ \eta_k^{s-1}/w_s & , \text{ falls } k\frac{k_s}{m} \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Damit ist $\eta_k^n = \eta_k$ und es gilt $\overline{\partial}\eta_k^0 = 0$.

Wegen

$$\eta'_k = \frac{\widetilde{\eta}_k}{N'_k}$$

überträgt sich die Zerlegung

$$\widetilde{\eta}_k = \widetilde{\eta}_{k,0} + ... + \widetilde{\eta}_{k,n}$$

aus Lemma 7.1.5 auf alle Formen η^s_k:

$$\eta^s_k = \eta^s_{k,0} + ... + \eta^s_{k,n}.$$

Für die Koeffizienten von

$$\eta^s_{k,t} = \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_q \leq n} \eta^{k,s,t}_{j_1 \dots j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}}$$

gilt mit Lemma 7.1.5:

$$|\eta^{k,s,t}_{j_1 \dots j_q}(w)| \leq \frac{k_t}{\sqrt{2^q}} \prod_{\substack{u \leq s \\ k\frac{k_u}{m} \notin \mathbb{Z}}} |w_u|^{-1} \frac{\prod_{l=1}^n |w_l|^{\{k\frac{k_l}{m}\}+\frac{k_l}{m}}}{|w_t|} \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \tag{119}$$

für alle $s, t \in \{0, 1, ..., n\}$ und zulässige $w \in \mathbb{D}$. Dabei sei an die Vereinbarung $k_0 = m$ und $|w_0| = |w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}|^{1/m}$ erinnert. Für $t \geq 1$ ist außerdem

$$\eta^{k,s,t}_{j_1 \dots j_q} \equiv 0,$$

falls $t \notin \{j_1, ..., j_q\}$.

Sei nun $s \in \{1, ..., n\}$ und wir nehmen an, $\overline{\partial}\eta^{s-1}_k = 0$ sei bereits gezeigt.
Ist $k\frac{k_s}{m} \in \mathbb{Z}$, so ist $\eta^s_k = \eta^{s-1}_k$ und nichts weiter zu zeigen. Sei also $k\frac{k_s}{m} \notin \mathbb{Z}$ und

$$\eta^s_k = \frac{\eta^{s-1}_k}{w_s}.$$

Nach (119) existieren Funktionen $R_{k,s-1,t}(..., w_{s-1}, w_{s+1}, ...) \in L^1(\mathbb{C}^{n-1})$ mit

$$|\eta^{k,s-1,t}_{j_1 \dots j_q}(w)| \leq |w_s|^{\{k\frac{k_s}{m}\}+\frac{k_s}{m}} R_{k,s-1,t}(...w_{s-1}, w_{s+1}, ...),$$

falls $t \neq s$, und für $t = s$ kann $\eta^{s-1}_{k,s}$ in der Form

$$\eta^{s-1}_{k,s} = d\overline{w_s} \wedge \widehat{\eta}^{s-1}_{k,s}$$

dargestellt werden.

Nach Lemma 7.2.2 gilt nun

$$\overline{\partial}\eta^s_k = \overline{\partial}\left(\frac{\eta^{s-1}_k}{w_s}\right) = 0.$$

Die Induktion liefert also $\overline{\partial}\eta^n_k = 0$, und wegen $\eta_k = \eta^n_k$ ist die Behauptung gezeigt.
$\square$

Nun verwenden wir die Homotopieformel für die Kugel $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$, um die $\overline{\partial}$-Gleichung für η_k lösen. Aus diesen Lösungen konstruieren wir dann die Lösung zu $\overline{\partial} f = \omega$ auf Y. Wegen $\eta_k \in L^{1+}_{0,q}(\mathbb{D})$ und $\overline{\partial}\eta_k = 0$ ist nach Theorem 5.2.8:

$$\psi_k := \mathbf{S}_{q-1}\eta_k \ \in L^{\frac{2n+2}{2n+1}+}_{0,q-1}(\mathbb{D})$$

und es gilt

$$\overline{\partial}\psi_k = \eta_k$$

im Distributionssinne auf $\mathbb{D}$.

Wir setzen

$$f_k \ := \ \frac{N_k(w)}{z^k}\Pi^*\psi_k = \frac{\prod_{j=1}^n w_j^{[k\frac{k_j}{m}]^*}}{z^k}\Pi^*\psi_k \quad \text{und} \quad f := \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f_k.$$

Die f_k und f sind zunächst lediglich auf $Z = \Pi^{-1}(\mathbb{D} \setminus K)$ definiert.

Man beachte

$$\left|\frac{N_k(w)}{z^k}\right| = \prod_{j=1}^n |w_j|^{\{k\frac{k_j}{m}\}^*} \quad \text{für} \quad (z,w) \in X.$$

Damit ist $N_k(w)/z^k$ eine stetige Funktion auf X. Ist X ein normaler komplexer Raum, so liefert $N_k(w)/z^k$ nach dem Fortsetzungssatz auf normalen komplexen Räumen (vgl. [GrRe], 7.4.2) eine holomorphe Funktion.

Auf Z gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} f = \overline{\partial}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f_k\right) \quad &= \quad \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{N_k(w)}{z^k}\Pi^*\overline{\partial}\psi_k\right) \\
&= \quad \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{N_k(w)}{z^k}\Pi^*\left(\frac{\widetilde{\eta_k}}{N_k(w)}\right)\right) \\
&= \quad \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{N_k(w)}{z^k}\,\frac{\Pi^*\widetilde{\eta_k}}{N_k(w)}\right) = \omega,
\end{aligned}$$

da Π lokal biholomorph ist.

Als nächstes werden wir zeigen, dass die f_k auf Z stetig sind und eine stetige Fortsetzung nach Y besitzen. Damit ist $f \in C^0_{0,q-1}(Y)$. Nach dem Fortsetzungssatz 4.3.3 für die $\overline{\partial}$-Gleichung folgt dann

$$\overline{\partial} f = \omega$$

im Distributionssinne auf Y. Das ist die gesuchte Lösung des $\overline{\partial}$-Problems.

Nun bestimmen wir also die Regularität der Formen

$$f_k \quad = \quad \frac{N_k(w)}{z^k}\Pi^*\psi_k = \frac{\prod_{j=1}^n w_j^{[k\frac{k_j}{m}]^*}}{z^k}\Pi^*\psi_k,$$

die bisher nur auf $\Pi^{-1}(\mathbb{D}\backslash K) = Z$ definiert sind. Dazu erinnern wir auch nochmals an $\psi_k = \mathbf{S}_{q-1}\eta_k$ und

$$\overline{\partial}\psi_k = \eta_k = \frac{\widetilde{\eta_k}}{N_k(w)} = \frac{\widetilde{\eta_k}}{\prod_{j=1}^n w_j^{[k\frac{k_j}{m}]^*}} \ \in L^{1+}_{0,q}(\mathbb{D}).$$

Zunächst ermitteln wir die Qualität der Formen η_k. Dazu führen wir folgende Konstanten ein: Für $k \in \{0, ..., m-1\}$ und $j \in \{0, ..., n\}$ sei $\overline{\alpha_{k,j}} \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch:

$$(\overline{\alpha_{k,j}})_t := max\{\{k\frac{k_t}{m}\}^* - (1-\delta_{j0})\frac{k_t}{m} + \delta_{jt}, 0\} \quad \text{für } t = 1, ..., n.$$

Dabei bezeichnet δ_{jt} das Kronecker-δ.

Lemma 7.2.4. *η_k besitzt eine Zerlegung*

$$\eta_k = \eta_{k,0} + ... + \eta_{k,n} \ ,$$

so dass für die Koeffizienten der Darstellung

$$\eta_{k,j} = \sum_{1\leq j_1 < ... < j_q \leq n} \eta^{k,j}_{j_1...j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_q}}$$

gilt:

$$|\eta^{k,j}_{j_1...j_q}(w)| \quad \leq \quad \frac{k_j}{\sqrt{2^q}}\frac{1}{|w_j|}\prod_{t=1}^n |w_t|^{\frac{k_t}{m} - \{k\frac{k_t}{m}\}^*}\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}$$

für alle Punkte $w \in \mathbb{D}$ mit $w_t \neq 0$, falls nötig. Dabei sei an $k_0 = m$ und $|w_0| = |z| = |w_1^{k_1}\cdots w_n^{k_n}|^{1/m}$ erinnert. Anders ausgedrückt:

$$\eta_{k,j} \in L^{\infty,\overline{\alpha_{k,j}}}_{0,q}(\mathbb{D})$$

und es gilt

$$\|\eta_{k,j}\|_{L^{\infty,\overline{\alpha_{k,j}}}_{0,q}(\mathbb{D})} \leq \frac{k_j}{\sqrt{2^q}}\|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}.$$

Beweis. Die Aussage folgt wegen

$$\left|\eta^{k,j}_{j_1...j_q}\right| = \left|\frac{\widetilde{\eta}^{k,j}_{j_1...j_q}}{N_k(w)}\right| = \frac{|\widetilde{\eta}^{k,j}_{j_1...j_q}|}{|w_1^{k_1}\cdots w_n^{k_n}|^{k/m}\prod_{j=1}^n |w_j|^{\{k\frac{k_j}{m}\}^*}}$$

direkt aus Lemma 7.1.5, wo entsprechendes für $\widetilde{\eta_k}$ bewiesen ist. □

Unter Verwendung der Abschätzungen aus Kapitel 6 ergibt sich:

Lemma 7.2.5. *Es sei* $\vartheta = \min_{1\leq t\leq n}\{\frac{k_t}{2m}, \frac{1}{2}\}$. *Dann ist*

$$\psi_0 = \mathbf{S}_{q-1}\eta_0 \in C^{\vartheta}_{0,q-1}(\mathbb{D}).$$

Für alle $k \in \{1, ..., m-1\}$ *ist*

$$\psi_k = \mathbf{S}_{q-1}\eta_k \in C^{0}_{0,q-1}(\overline{\mathbb{D}} \setminus K).$$

Dabei besitzen die ψ_k *eine Zerlegung*

$$\psi_k = \psi_{k,0} + ... + \psi_{k,n}$$

mit

$$\psi_{k,j} = \sum_{1\leq j_1<...<j_{q-1}\leq n} \psi^{k,j}_{j_1...j_q} d\overline{w_{j_1}} \wedge ... \wedge d\overline{w_{j_{q-1}}},$$

so dass für die Koeffizienten folgendes gilt: Es existieren Konstanten $C_{k,j} > 0$, *die nicht von* η_k *und* ψ_k *abhängen, mit*

$$|\psi^{k,j}_{j_1...j_{q-1}}(w)| \leq C_{k,j} \prod_{t=1}^{n} |w_t|^{\beta(k,j,t)} \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \tag{120}$$

für alle $w \in \mathbb{D}$ *mit* $w_t \neq 0$, *falls notwendig. Dabei ist*

$$\beta(k, 0, t) = \min\{0, \frac{1}{n} - \{k\frac{k_t}{m}\}^* - \epsilon\} \geq -\{k\frac{k_t}{m}\}^*$$

und

$$\beta(k, j, t) = \min\{0, \frac{k_t}{m} - \{k\frac{k_t}{m}\}^* - \epsilon \cdot \delta_{jt}\} \geq -\{k\frac{k_t}{m}\}^*$$

für $j > 0$ *und ein fest gewähltes* $0 < \epsilon \leq \min_{1\leq t\leq n}\{\frac{1}{n}, \frac{k_t}{m}\}$. δ_{jt} *bezeichnet das Kronecker-*δ.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ fest gewählt. Die Zerlegung

$$\eta_k = \eta_{k,0} + ... + \eta_{k,n}$$

aus Lemma 7.2.4 überträgt sich auf

$$\psi_{k,j} := \mathbf{S}_{q-1}\eta_{k,j}.$$

Wir erinnern wieder an die Zerlegung des Lösungsoperators in Hauptteil und BMK-Operator:

$$\mathbf{S}_{q-1} = \widehat{\mathbf{S}}_{q-1} - \mathbf{B}_{q-1}.$$

Wir verwenden hier für $\eta_{k,j}$ stets die Abschätzungen aus Lemma 7.2.4 und betrachten zunächst $\psi_{k,0}$. Für die Abschätzung der Koeffizienten von $\mathbf{B}_{q-1}\eta_{k,0}$ verwenden wir Lemma 6.2.1 mit $\alpha = \overline{\alpha_{k,0}}$, $\delta = 1$ und $\delta_t = 1/n$ für alle $t \in \{1, ..., n\}$. Für $\widehat{\mathbf{S}}_{q-1}\eta_{k,0}$ verwenden wir Lemma 6.4.1 mit $\alpha = \overline{\alpha_{k,0}}$ und $\delta_t = 1/n - \epsilon$ für alle $t \in \{1, ..., n\}$. Das liefert zusammen die Existenz einer Konstanten $C_{k,0} > 0$, so dass die gewünschte Abschätzung (120) gilt.

Sei nun $j > 0$. Für $\mathbf{B}_{q-1}\eta_{k,j}$ verwenden wir Lemma 6.2.1 mit $\alpha = \overline{\alpha_{k,j}}$, $\delta = 1$ und

$$\delta_t = \begin{cases} 1 & , \text{ für } t = j, \\ 0 & , \text{ für } t \neq j. \end{cases}$$

Für $\widehat{\mathbf{S}}_{q-1}\eta_{k,j}$ verwenden wir Lemma 6.4.1 mit $\alpha = \overline{\alpha_{k,j}}$ und

$$\delta_t = \begin{cases} 1 - \epsilon & , \text{ für } t = j, \\ 0 & , \text{ für } t \neq j. \end{cases}$$

Das liefert zusammen die Existenz einer Konstanten $C_{k,j} > 0$, so dass auch hier die gewünschte Abschätzung (120) gilt.

Es bleibt noch

$$\psi_0 \in C^{\vartheta}_{0,q-1}(\mathbb{D}) \quad \text{und} \quad \psi_k \in C^0_{0,q-1}(\overline{\mathbb{D}} \setminus K)$$

zu zeigen. Wir betrachten zunächst ψ_0 und können $k_t \leq m$ für alle $t \in \{1, ..., n\}$ annehmen. Wir bemerken

$$\eta_{0,0} \in L^{\infty}_{0,q}(\mathbb{D})$$

und

$$\eta_{0,j} \in L^{\infty, \overline{\alpha_{0,j}}}_{0,q}(\mathbb{D})$$

mit

$$(\overline{\alpha_{0,j}})_t = \begin{cases} 1 - \frac{k_t}{m} & , \text{ falls } t = j, \\ 0 & , \text{ falls } t \neq j. \end{cases}$$

Nach Korollar 6.2.7 folgt:

$$\mathbf{B}_{q-1}\eta_{0,0} \in C^{1^-}_{0,q-1}(\mathbb{D}) \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_{q-1}\eta_{0,j} \in C^{k_j/m}_{0,q-1}(\mathbb{D}).$$

Analog folgt mit Lemma 6.4.7:

$$\widehat{\mathbf{S}}_{q-1}\eta_{0,0} \in C^{1/2}_{0,q-1}(\mathbb{D}) \quad \text{und} \quad \widehat{\mathbf{S}}_{q-1}\eta_{0,j} \in C^{k_j/2m}_{0,q-1}(\mathbb{D}).$$

Sei nun $k \geq 1$. Nach den Hölder-Stetigkeitsaussagen aus Lemma 6.2.5 ist

$$\mathbf{B}_{q-1}\eta_k \in C^0_{0,q-1}(\mathbb{C}^n \setminus K).$$

Weiterhin ist nach Lemma 6.4.6:

$$\widehat{\mathbf{S}}_{q-1}\eta_k \in C^0_{0,q-1}(\mathbb{D} \setminus K).$$

Sei nun $p \in b\mathbb{D} \setminus K$ ein Randpunkt mit $|p_s| \geq 2\mu$ für ein $\mu > 0$ und alle $s \in \{1, ..., n\}$. Nach Lemma 6.4.6 ist dann

$$\widehat{\mathbf{S}}_{q-1}\eta_k \in C^{1/2}_{0,q-1}(\mathbb{D} \cap B_\mu(p)).$$

Vergleiche dazu die Erläuterungen in der Einleitung zu Kapitel 6. Damit setzt sich $\widehat{\mathbf{S}}_{q-1}\eta_k$ stetig auf $\overline{\mathbb{D}} \cap B_\mu(p)$ fort. Variieren wir p über den gesamten Rand $b\mathbb{D} \setminus K$, so ergibt sich auch:

$$\widehat{\mathbf{S}}_{q-1}\eta_k \in C^0_{0,q-1}(\overline{\mathbb{D}} \setminus K).$$

$\square$

Um Aussagen über die Regularität der f_k treffen zu können, müssen die Formen wieder in der kanonischen Darstellung

$$\pi^* f_k = f_k \oplus 0$$

betrachtet werden. Dazu benötigen wir:

Lemma 7.2.6. *Für* $t \in \{1, ..., n\}$ *sei*

$$\pi^* \Pi^* (d\overline{w_t}) = \sum_{j=0}^{n} a_{t,j} d\overline{w_j}$$

über $\Pi^{-1}(\mathbb{C}^n \setminus K) = X \setminus B = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} : w_0 \neq 0\}$. *Dann sind die Koeffizienten* $a_{t,j}$ *stetig differenzierbare Funktionen auf der komplexen Mannigfaltigkeit* $\operatorname{Reg} X$ *und es gilt*

$$|a_{t,j}(p)| \leq 1$$

für alle $p \in \operatorname{Reg} X$.

Beweis. In der Notation unterdrücken wir die Abhängigkeit vom Punkt $p \in X \setminus B$. Wir wollen die Koeffizientenfunktionen $a_{t,j}$ ermitteln. Dazu betrachten wir

$$a_{t,j} \quad = \quad \pi^* \Pi^* (d\overline{w_t}) \left(\frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} \right) = d\overline{w_t} \left(\Pi_* \pi_* \frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} \right).$$

Ist also

$$\pi_* \left(\frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} \right) = \sum_{s=0}^{n} b_{j,s} \frac{\partial}{\partial \overline{w_s}},$$

so folgt

$$\Pi_* \pi_* \left(\frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} \right) = \sum_{s=1}^{n} b_{j,s} \frac{\partial}{\partial \overline{w_s}}$$

und

$$a_{t,j} = \pi^* \Pi^* (d\overline{w_t}) \left(\frac{\partial}{\partial \overline{w_j}} \right) = d\overline{w_t} \left(\sum_{s=1}^{n} b_{j,s} \frac{\partial}{\partial \overline{w_s}} \right) = b_{j,t}.$$

Wir haben also die orthogonale Projektion π_* und die sich ergebenden Koeffizientenfunktionen $b_{j,s}$ (für $s \geq 1$) zu betrachten. Da es sich bei $\operatorname{Reg} X$ aber um eine komplexe Mannigfaltigkeit und bei π_* um die orthogonale Projektion

$$\pi_* : T_p^{0,1} \mathbb{C}^{n+1} \to T_p^{0,1} \operatorname{Reg} X$$

handelt, hängen die Koeffizientenfunktionen $b_{j,s}$ stetig differenzierbar vom Punkt $p \in \operatorname{Reg} X$ ab, und es gilt

$$|b_{j,s}(p)| \leq 1$$

für alle $p \in \operatorname{Reg} X$. □

Damit zeigen wir nun:

Lemma 7.2.7. *Für alle* $k \in \{0, ..., m-1\}$ *ist*

$$f_k \in C^0_{0,q-1}(Y)$$

und es existieren Konstanten $C_k > 0$, *die nicht von den* f_k *abhängen mit:*

$$\|f_k\|_{L^\infty_{0,q-1}(Y)} \leq C_k \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}.$$

Beweis. Wir haben die Koeffizienten von

$$\pi^* f_k \quad = \quad \pi^* \left(\frac{N_k(w)}{z^k} \Pi^* \psi_k \right) = \frac{N_k(w)}{z^k} \pi^* \Pi^* \psi_k$$

zu untersuchen. Nach Lemma 7.2.6 können wir für einen solchen Koeffizienten die Form

$$b_{k,J}(z,w) = \frac{N_k(w)}{z^k} a_{k,J}(z,w) \psi_{k,J}(w)$$

annehmen, wobei $a_{k,J}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf Y mit $|a_{k,J}| \leq 1$ und $\psi_{k,J}$ einen Koeffizienten von ψ_k bezeichnet.

Betrachten wir zunächst den Fall $k = 0$. Dann ist

$$b_{0,J}(z,w) = a_{0,J}(z,w) \psi_{0,J}(w)$$

und nach Lemma 7.2.5 gilt

$$\psi_{0,J} \in C^\vartheta(\mathbb{D})$$

für ein $\vartheta > 0$. Damit erhalten wir

$$b_{0,J} \in C^0(Y).$$

Weiterhin ergibt sich mit den Abschätzungen aus Lemma 7.2.5:

$$|b_{0,J}(z,w)| \leq |\psi_{0,J}(w)| \leq C_0 \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)},$$

wobei wir für $C_0 > 0$ das Maximum der Konstanten $C_{0,j}$ aus Lemma 7.2.5 wählen. Man beachte dafür

$$\beta(0, j, t) = 0$$

für alle j und t.

Sei nun $k \geq 1$. Hier sind zwar N_k / z^k und $a_{k,J}$ stetige beschränkte Funktionen auf Y, aber für die $\psi_{k,J}$ haben wir lediglich

$$\psi_{k,J} \in C^0(\overline{\mathbb{D}} \setminus K).$$

Mit Hilfe der Abschätzungen aus Lemma 7.2.5 können wir die Koeffizienten $b_{k,J}$ aber stetig nach ganz Y fortsetzen.

Aus Lemma 7.2.5 und der Definition von N_k/z^k folgt zunächst

$$\begin{aligned} |b_{k,J}(z,w)| &\leq \left|\frac{N_k(w)}{z^k}\right| |\psi_{k,J}(w)| \\ &\leq \prod_{t=1}^{n} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \cdot C_k \prod_{t=1}^{n} |w_t|^{\beta(k,t)} \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \end{aligned}$$

für alle $(z,w) \in Z = \Pi^{-1}(\mathbb{D} \setminus K)$. Dabei sei wieder $C_k > 0$ das Maximum der Konstanten $C_{k,j}$ aus Lemma 7.2.5 und

$$\beta(k,t) = \min_{0\leq j\leq n} \{0, \frac{1}{n} - \{k\frac{k_t}{m}\}^* - \epsilon, \frac{k_t}{m} - \{k\frac{k_t}{m}\}^* - \delta_{jt}\epsilon\} \geq -\{k\frac{k_t}{m}\}^*$$

für ein fest gewähltes $0 < \epsilon < \min\{\frac{1}{n}, \frac{k_t}{m}\}$. Das zeigt

$$|b_{k,J}(z,w)| \leq C_k \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)} \tag{121}$$

für alle $(z,w) \in Z$.

Nehmen wir an, es gelte $k_t = 1$. Wegen $k \in \{1, ..., m-1\}$ ist dann

$$\{k\frac{k_t}{m}\}^* > 0$$

und es gilt

$$\beta(k,t) > -\{k\frac{k_t}{m}\}^*.$$

Damit folgt:

$$|b_{k,J}(z,w)| \to 0 \quad \text{für} \quad w_t \to 0,$$

und $b_{k,J}$ besitzt eine stetige Fortsetzung (mit 0) nach $Z \cup (Y \cap \{w_t = 0\})$.

Nun ist aber

$$Y = Z \cup \bigcup_{t:k_t=1} (Y \cap \{w_t = 0\}).$$

Also besitzt $b_{k,J}$ eine stetige Fortsetzung (mit 0) nach ganz Y:

$$b_{k,J} \in C^0(Y).$$

Für diese Fortsetzung folgt aus (121) dann natürlich auch

$$|b_{k,J}(z,w)| \leq C_k \|\omega\|_{L^\infty_{0,q}(Y)}$$

für alle $(z,w) \in Y$. $\square$

Zusammengefasst ergibt sich unser erstes Hauptresultat:

Theorem 7.2.8. *Es seien $n, q, m, k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 2$, $1 \leq q \leq n$, $m \geq 2$ und $k_j \geq 1$ fest gewählt. Weiterhin sei*

$$\begin{aligned} X &= \{(z, w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : z^m = w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}\} \subset \mathbb{C}^{n+1} , \\ D &= \{(z, w) \in X : |w_1|^2 + ... + |w_n|^2 < 1\} \end{aligned}$$

und

$$Y = \operatorname{Reg} D.$$

Dann existiert ein stetiger linearer Operator

$$\mathbf{L}_{q-1} : L^\infty_{0,q}(Y) \to L^\infty_{0,q-1}(Y)$$

mit

$$\overline{\partial}\mathbf{L}_{q-1}\omega = \omega$$

im Distributionssinne, falls $\overline{\partial}\omega = 0$ im Distributionssinne. Außerdem ist

$$\mathbf{L}_{q-1}\omega \in C^0_{0,q-1}(Y)$$

für alle $\omega \in L^\infty_{0,q}(Y)$.

Der Operator $\mathbf{L}_{q-1}$ kann explizit angegeben werden:

$$\mathbf{L}_{q-1}\omega = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{N_k}{z^k}\Pi|_Z^* \left(\mathbf{S}_{q-1} \left(\frac{1}{N_k} (\Pi|_Z^*)^{-1} \left(z^k \sum_{j=0}^{m-1} \xi^{kj}\Phi_j^*\omega \right)\right)\right) . \tag{122}$$

Dabei ist $\xi = \exp(2\pi i/m)$ die m-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$,

$$\Phi_j : Y \to Y \ , \quad (z, w) \mapsto (\xi^j z, w)$$

eine Decktransformation bezüglich der Projektion

$$\Pi : X \to \mathbb{C}^n \ , \quad (z, w) \mapsto w,$$

$Z = \{(z, w) \in Y : z \neq 0\}$ und

$$N_k(w) = \prod_{t=1}^{n} w_t^{[k\frac{k_t}{m}]^*} \ , \quad [k\frac{k_t}{m}]^* = \min\{x \in \mathbb{Z} : x \geq k\frac{k_t}{m}\}.$$

$\mathbf{S}_{q-1}$ bezeichnet den Lösungsoperator für die Einheitskugel $\mathbb{D}$ in $\mathbb{C}^n$.

Für den Operator $\mathbf{L}_0$ erhalten wir direkt folgende Regularitätsaussage:

Lemma 7.2.9. *Es sei $k \geq 1$ eine ganze Zahl und $\omega \in L^\infty_{0,1}(Y) \cap C^k_{0,1}(Y)$ mit $\overline{\partial}\omega = 0$ in gewöhnlichem Sinne. Dann ist*

$$\mathbf{L}_0\omega \in C^k(Y),$$

und es gilt $\overline{\partial}\mathbf{L}_0\omega = \omega$ in gewöhnlichem Sinne.
Folglich ist $\mathbf{L}_0\omega \in C^\infty(Y)$ für $\omega \in L^\infty_{0,1}(Y) \cap C^\infty_{0,1}(Y)$ mit $\overline{\partial}\omega = 0$.

Beweis. Es sei $p \in Y$. Dann existiert eine Umgebung $U(p)$ in Y und eine biholomorphe Abbildung

$$\Psi : U(p) \to B_2(0) \subset \mathbb{C}^n$$

mit $\Psi(p) = 0$. Damit ist $\eta := (\Psi^{-1})^*\omega \in C^k_{0,1}(\overline{\mathbb{D}})$ und es gilt

$$\overline{\partial}\eta = 0$$

in gewöhnlichem Sinne.

Sei $\mathbf{S}_0$ der $\overline{\partial}$-Lösungsoperator auf der Einheitskugel und

$$f := \mathbf{S}_0\eta.$$

Nach der Regularitätsaussage Lemma 5.2.6 ist

$$f \in C^k(\mathbb{D}),$$

und nach der Homotopieformel 5.2.5 für die Kugel gilt:

$$\overline{\partial}f = \eta.$$

Jetzt ist wegen der Biholomorphie von Ψ aber

$$\overline{\partial}\left(f - (\Psi^{-1})^*\mathbf{L}_0\omega\right) = \eta - (\Psi^{-1})^*\omega = 0$$

im Distributionssinne auf $\mathbb{D}$. Nach Theorem 4.1.1 folgt

$$F := f - (\Psi^{-1})^*\mathbf{L}_0\omega \in C^\infty(\mathbb{D}).$$

Demnach ist

$$(\Psi^{-1})^*\mathbf{L}_0\omega = f - F \in C^k(\mathbb{D}),$$

und es folgt auch

$$\mathbf{L}_0\omega \in C^k(U(p)).$$

□

Für die Operatoren $\mathbf{L}_q$, $q \geq 1$, ist eine solche Regularitätsaussage nur außerhalb der Verzweigungsmenge $B = \Pi^{-1}(K)$ direkt zugänglich. Dabei kann aber auf die Voraussetzung $\overline{\partial}\omega = 0$ verzichtet werden. Es sei an

$$Z = Y \setminus B = \Pi^{-1}(\mathbb{D} \setminus K)$$

erinnert.

Lemma 7.2.10. *Es seien $0 \leq q \leq n-1$ und $k \geq 1$ ganze Zahlen und $\omega \in L^\infty_{0,q+1}(Y) \cap C^k_{0,q+1}(Z)$. Dann ist*

$$\mathbf{L}_q\omega \in C^0_{0,q}(Y) \cap C^k_{0,q}(Z).$$

Gilt $\overline{\partial}\omega = 0$ im Distributionssinne auf Y, so folgt $\overline{\partial}\mathbf{L}_q\omega = \omega$ in gewöhnlichem Sinne auf Z.

Beweis. Es sei $\omega \in L^\infty_{0,q+1}(Y) \cap C^k_{0,q+1}(Z)$. Nach der Konstruktion (vgl. dazu die explizite Darstellung (122)) ist

$$\eta_l = \frac{1}{N_l}(\Pi|_Z^*)^{-1}\left(z^l \sum_{j=0}^{m-1} \xi^{lj}\Phi_j^*\omega\right) \in C^k_{0,q+1}(\mathbb{D} \setminus K)$$

für alle $l \in \{0, ..., m-1\}$. Damit ist dann aber auch

$$\psi_l = \mathbf{S}_q\eta_l = \widehat{\mathbf{S}}_q\eta_l - \mathbf{B}_q\eta_l \in C^k_{0,q}(\mathbb{D} \setminus K) \tag{123}$$

für alle $l \in \{0, ..., m-1\}$. Das sehen wir folgendermaßen: Da der Hauptteil $\widehat{S}_q$ auf $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ unendlich oft differenzierbar ist, folgt $\widehat{\mathbf{S}}_q\eta_l \in C^\infty_{0,q}(\mathbb{D})$, und nur $\mathbf{B}_q\eta_l$ ist näher zu untersuchen. Hier hilft die übliche Methode. Nach [LiMi], Proposition 5.14, ist $\mathbf{B}_q\eta_l \in C^k_{0,q}(\mathbb{D} \setminus K)$.

Aus (123) folgt nun:

$$\mathbf{L}_q\omega = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} \frac{N_l}{z^l}\Pi|_Z^*\psi_l \in C^k_{0,q}(Z),$$

da N_l/z^l auf Z unendlich oft differenzierbar ist. Die zusätzlich auftretenden Koeffizienten der kanonischen Darstellung $\pi^*\mathbf{L}_q\omega = \mathbf{L}_q\omega \oplus 0$ sind auf Z ebenfalls unendlich oft differenzierbar und müssen nicht berücksichtigt werden.

Alles weitere ergibt sich aus Theorem 7.2.8. □

Als nächstes ermitteln wir Hölder-Abschätzungen für den Operator $\mathbf{L}_0$.

7.3 Hölder-Abschätzungen für den Lösungsoperator $\mathbf{L}_0$

Für diesen Abschnitt führen wir die zusätzlich Voraussetzung $k_j \leq m$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$ ein. Dies dient lediglich dazu, uns eine Reihe zusätzlicher Fallunterscheidungen zu ersparen.

Wir benötigen eine Überlegung zur Geometrie der analytischen Menge X: Sei $p \in \mathbb{C}^n \setminus K$. Dann existiert eine Umgebung $U(p)$ in $\mathbb{C}^n \setminus K$, so dass $\Pi^{-1}(U(p))$ in m disjunkte komplexe Mannigfaltigkeiten zerfällt, die jeweils zu $U(p)$ biholomorph sind. Wir wollen solche Umgebungen $U(p)$ konkret angeben.

Dazu definieren wir für $j = 1, ..., n$ die Winkel

$$\varphi_j(X) = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{k_j}$$

und die zugehörigen Verhältnisse

$$c_j(X) = \sin \varphi_j(X).$$

Sei nun $p = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n \setminus K$ fest gewählt, das heißt es ist $|w_j| > 0$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$. Die gesuchte Umgebung $U(p)$ ist

$$U(p) = \{q = (v_1, ..., v_n) : |w_j - v_j| < c_j(X)|w_j| \text{ für alle } j \in \{1, ..., n\}\},$$

wie wir im folgenden sehen werden. Wegen $c_j(X) = \sin \varphi_j(X) < 1$ und

$$|w_j - v_j| < |w_j| \sin \varphi_j(X)$$

folgt

$$\measuredangle(w_j, v_j) < \varphi_j(X)$$

und

$$\measuredangle(w_j^{k_j}, v_j^{k_j}) < \frac{\pi}{2n} \tag{124}$$

für alle $q = (v_1, ..., v_n) \in U(p)$.

Jetzt betrachten wir die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \ , \quad (z_1, ..., z_n) \mapsto \prod_{j=1}^{n} z_j^{k_j}.$$

Wir werden diese Abbildung in diesem Abschnitt öfter verwenden.
Wegen (124) ist

$$\measuredangle\, (\Phi(p), \Phi(q)) < \frac{\pi}{2}$$

für alle $q \in U(p)$. Außerdem ist $|\Phi(p)| > 0$ und $|\Phi(q)| > 0$ für alle $q \in U(p)$. Wir sehen also: $\Phi(U(p))$ ist in einer Halbebene enthalten. Anders ausgedrückt: Es existiert $0 \neq C(p) \in \mathbb{C}$ mit:

$$\Phi(U(p)) \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } (C(p)z) > 0\}.$$

Also existieren auf $\Phi(U(p))$ genau m Zweige der m-ten Wurzel $R_1, ..., R_m$ und es ist

$$\Pi^{-1}(U(p)) = \bigcup_{s=1}^{m} M_s(p) = \bigcup_{s=1}^{m} \{(R_s(\Phi(v)), v) : v \in U(p)\}. \tag{125}$$

Wegen

$$\Phi(U(p)) \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } (C(p)z) > 0\}$$

ist nicht nur $M_s(p) \cap M_t(p) = \emptyset$, falls $s \neq t$, sondern sogar

$$\measuredangle(u_0, v_0) \geq \pi/m$$

für zwei beliebige Punkte $(u_0, ..., u_n) \in M_s(p)$ und $(v_0, ..., v_n) \in M_t(p)$.

Sei nun $P = (w_0, ..., w_n) \in X \setminus B = \Pi^{-1}(\mathbb{C}^n \setminus K)$, $p = \Pi(P) = (w_1, ..., w_n)$ und

$$U(p) = \{q = (v_1, ..., v_n) : |w_j - v_j| < c_j(X)|w_j| \text{ für alle } j \in \{1, ..., n\}\}.$$

Für einen weiteren Punkt $Q = (v_0, ..., v_n) \in X$ sagen wir: Q liegt im Zweig von P, falls die Punkte P und Q in der disjunkten Zerlegung (125) in der gleichen Mannigfaltigkeit liegen. In diesem Fall ist

$$\measuredangle(w_0, v_0) \leq \pi/2m.$$

Liegt Q nicht im Zweig von P, so kann eine untere Schranke für

$$\text{dist}_X(P, Q)$$

angegeben werden. Dazu können wir $P \in M_1(p)$ und $Q \notin M_1(p)$ annehmen. Sei nun γ ein Weg, der P und Q in X verbindet. Dann muss γ den Graphen

$$M_1(p) = \{(R_1(\Phi(v_1, ..., v_n)), v_1, ..., v_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : (v_1, ..., v_n) \in U(p)\}$$

über $U(p)$ verlassen. Damit ist aber die Länge

$$L(\gamma) \geq \min_{1 \leq j \leq n} \{c_j(X)|w_j|\} > 0$$

und diese Abschätzung überträgt sich auf $\text{dist}_X(P, Q)$, da die Länge einer Kurve in X durch ihre Länge in $\mathbb{C}^{n+1}$ gegeben ist. Es ergibt sich:

Lemma 7.3.1. *Es sei $P = (w_0, ..., w_n) \in X \setminus B = \Pi^{-1}(\mathbb{C}^n \setminus K)$ und*

$$U_P = \{(v_1, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j - v_j| < c_j(X)|w_j| \textit{ für alle } j \in \{1, ..., n\}\}.$$

Dann zerfällt $\Pi^{-1}(U_P)$ in m disjunkte Mannigfaltigkeiten $M_1(P), ...M_m(P)$. Für einen weiteren Punkt $Q = (v_0, ..., v_n) \in X$ sagen wir: Q liegt im Zweig von P, falls die Punkte P und Q in der gleichen Mannigfaltigkeit $M_s(P)$ liegen. In diesem Fall ist

$$\measuredangle(w_0, v_0) \leq \pi/2m.$$

Liegt Q nicht im Zweig von P, so gilt:

$$\text{dist}_X(P, Q) \geq \min_{1 \leq j \leq n} \{c_j(X)|w_j|\}.$$

Jetzt wenden wir uns den Hölder-Abschätzungen für den Operator

$$\mathbf{L}_0 : L^\infty_{0,1}(Y) \to C^0(Y)$$

zu. Das heißt, es sind die Funktionen

$$f_k(z,w) = \frac{N_k(w)}{z^k}\Pi^*\psi_k(z,w) = \frac{N_k(w)}{z^k}\psi_k(\Pi(z,w)) = \frac{N_k(w)}{z^k}\psi_k(w)$$

abzuschätzen. Hier spielt die kanonische Darstellung $\pi^* f$ keine Rolle.

Wir benötigen Abschätzungen für die Funktion $N_k(w)/z^k$:

Lemma 7.3.2. *Für $w = (w_0, ..., w_n) \in Y$ sei*

$$H_k(w) = \frac{N_k(w_1, ..., w_n)}{w_0^k} = \frac{\prod_{t=1}^n w_t^{[k\frac{k_t}{m}]^*}}{w_0^k}.$$

i. *Für $s \in \{1, ..., n\}$ sei $\{k\frac{k_s}{m}\}^* = 0$. Dann gilt:*

$$H_k(w) = H_k(v)$$

für alle $w, v \in Y$ mit $w_t = v_t$ für alle $t \in \{1, ..., n\} \setminus \{s\}$.

ii. *Für $s \in \{1, ..., n\}$ sei $\gamma = \{k\frac{k_s}{m}\}^* > 0$. Dann gilt:*
Es existiert eine Konstante $C(\gamma) > 0$ mit

$$|H_k(w) - H_k(v)| \le C(\gamma) \prod_{\substack{t\in\{1,...,n\} \\ t\neq s}} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} |w_s - v_s|^\gamma$$

für alle $w, v \in Y$ mit $w_t = v_t$ für alle $t \in \{1, ..., n\} \setminus \{s\}$ und $\measuredangle(w_0, v_0) \le \frac{\pi}{m}$.

Beweis. Seien $w, v \in Y$ mit $w_t = v_t$ für alle $t \in \{1, ..., n\} \setminus \{s\}$. Damit sind w_0 und v_0 m-te Wurzeln von

$$\prod_{t=1}^n w_t^{k_t} \quad \text{bzw.} \quad \prod_{t=1}^n v_t^{k_t}.$$

Nun sei

$$W_s = \left(\prod_{t\in\{1,...,n\}\setminus\{s\}} w_t^{k_t} \right)^{1/m} \neq 0$$

eine fest gewählte m-te Wurzel und

$$w_s^{k_s/m} := \frac{w_0}{W_s} \quad \text{bzw.} \quad v_s^{k_s/m} := \frac{v_0}{W_s}.$$

Damit ist $w_s^{k_s/m}$ eine m-te Wurzel von $w_s^{k_s}$ und $v_s^{k_s/m}$ eine m-te Wurzel von $v_s^{k_s}$, und es gilt auch $\measuredangle(w_s^{k_s/m}, v_s^{k_s/m}) \le \pi/m$, falls $\measuredangle(w_0, v_0) \le \pi/m$.

Nehmen wir nun an, es gelte $\{k\frac{k_s}{m}\}^* = 0$, also $l_s = k\frac{k_s}{m} \in \mathbb{Z}$. Damit folgt

$$H_k(w) = \left(\prod_{t\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{s\}} w_t^{[k\frac{k_t}{m}]^*}\right) \frac{{w_s}^{l_s}}{W_s^k w_s^{l_s}} = \frac{1}{W_s^k} \prod_{t\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{s\}} w_t^{[k\frac{k_t}{m}]^*}$$

und

$$H_k(v) = \left(\prod_{t\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{s\}} v_t^{[k\frac{k_t}{m}]^*}\right) \frac{{v_s}^{l_s}}{W_s^k v_s^{l_s}} = \frac{1}{W_s^k} \prod_{t\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{s\}} w_t^{[k\frac{k_t}{m}]^*} = H_k(w).$$

Da H_k stetig ist, gilt dies auch für Punkte $w, v \in Y$ mit $W_s = 0$ und **i**. ist gezeigt.

Sei nun $\gamma = \{k\frac{k_s}{m}\}^* > 0$ und $l_s = [k\frac{k_s}{m}]^*$. Hier ist

$$\begin{aligned} |H_k(w) - H_k(v)| &= \left|\frac{\prod_{t\neq s} w_t^{[k\frac{k_t}{m}]^*}}{W_s^k}\right| \left|\frac{w_s^{l_s}}{(w_s^{k_s/m})^k} - \frac{v_s^{l_s}}{(v_s^{k_s/m})^k}\right| \\ &= \prod_{\substack{t\in\{1,\ldots,n\}\\ t\neq s}} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} |w_s^\gamma - v_s^\gamma| \end{aligned}$$

mit $w_s^\gamma \to v_s^\gamma$ für $w_s \to v_s$. Das ist durch $\measuredangle(w_s^{k_s/m}, v_s^{k_s/m}) \le \pi/m$, woraus

$$w_s^{k_s/m} \to v_s^{k_s/m} \quad \text{für} \quad w_s \to v_s$$

folgt, sichergestellt. Konkreter: Sei $\measuredangle(w_s, v_s) < \epsilon$. Dann ist

$$\measuredangle(w_s^{l_s}, v_s^{l_s}) < l_s\epsilon.$$

Weiterhin ist

$$\measuredangle(w_s^{k_s/m}, v_s^{k_s/m}) < \frac{k_s}{m}\epsilon,$$

da diese beiden m-ten Wurzeln von $w_s^{k_s}$ und $v_s^{k_s}$ nach ihrer Wahl im gleichen Zweig der m-ten Wurzel liegen. Sei ϵ so klein gewählt, dass

$$\measuredangle(w_s^\gamma, v_s^\gamma) < \pi\gamma \tag{126}$$

für $\measuredangle(w_s, v_s) < \epsilon$ gilt, und $c_s = \sin\epsilon$. Wir wollen die Existenz einer Konstanten $C(\gamma) > 0$ mit

$$|w_s^\gamma - v_s^\gamma| \le C(\gamma)|w_s - v_s|^\gamma$$

nachweisen. Dazu kann $|w_s| \ge |v_s|$ und $|w_s| \neq 0$ angenommen werden.
Ist $|w_s - v_s| \ge c_s|w_s|$, so folgt

$$|w_s^\gamma - v_s^\gamma| \le |w_s|^\gamma + |v_s|^\gamma \le 2c_s^\gamma |w_s - v_s|^\gamma.$$

Ist $|w_s - v_s| \le c_s|w_s|$, so gilt wegen $c_s = \sin\epsilon < 1$ auch $\measuredangle(w_s, v_s) < \epsilon$ und damit (126) und mit dem folgenden Lemma 7.3.3 ist **ii.** für $W_s \neq 0$ gezeigt. Wegen der Stetigkeit von $\prod_{t\neq s} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*}$ gilt die Aussage auch für $W_s = 0$. □

Wir vervollständigen den Beweis von Lemma 7.3.2 durch:

Lemma 7.3.3. *Sei $0 \leq \gamma < 1$ und $f(z) := z^\gamma$ ein fest gewählter Zweig der Wurzel. Dann existiert eine Konstante $C(\gamma) > 0$, so dass folgendes gilt:*
Für $w, w' \in \mathbb{C}$ mit $|\measuredangle(f(w), f(w'))| \leq \gamma \cdot \pi$ ist

$$|f(w) - f(w')| \leq C(\gamma)|w - w'|^\gamma.$$

Beweis. Es kann $|w| \leq |w'|$ angenommen werden. Für $w = w' = 0$ ist nichts zu zeigen. Wir können also noch $w' \neq 0$ annehmen.
Sei $z := w/w'$. Dann ist $|z| \leq 1$ und

$$\frac{|f(w) - f(w')|}{|w - w'|^\gamma} = \frac{|z^\gamma - 1|}{|z - 1|^\gamma} =: g(z),$$

wobei nach Voraussetzung $|\arg z^\gamma| \leq \gamma \cdot \pi$ gilt. Damit ist $z^\gamma \to 1$ für $z \to 1$.
Wegen

$$\lim_{z \to 1} \frac{z^\gamma - 1}{(z-1)^\gamma} = \lim_{z \to 1} \frac{\gamma z^{\gamma-1}}{\gamma(z-1)^{\gamma-1}} = 0$$

ist $g(z)$ als stetige Funktion auf $\Delta_\epsilon(1)$ beschränkt und auf $\{|z-1| > \epsilon\}$ beschränkt für $|z| \leq 1$, also existiert $C(\gamma)$ mit

$$|g(z)| \leq C(\gamma)$$

für alle z mit $|z| \leq 1$. □

Jetzt verfügen wir über alle Hilfsmittel, um $f_k(z, w) = \frac{N_k(w)}{z^k}\psi_k(w)$ auf X abschätzen zu können. Seien also $P = (w_0, ..., w_n), Q = (v_0, ..., v_n) \in Z$ und $k \in \{0, ..., m-1\}$. Man beachte $w_j \neq 0$ und $v_j \neq 0$ für alle $j \in \{0, ..., n\}$. Um $|f_k(P) - f_k(Q)|$ in Abhängigkeit von $\mathrm{dist}_X(P, Q)$ abzuschätzen, unterscheiden wir drei Fälle:

1. $\min_{1 \leq j \leq n}\{\{k\frac{k_j}{m}\}^*\} = 0$. Hier kann $\{k\frac{k_n}{m}\}^* = 0$ angenommen werden. Wir zerlegen die Abschätzung in n Abschätzungen in den Koordinaten w_1 bis w_n. Dazu definieren wir induktiv Punkte $P_0, ..., P_n \in Z$ mit

$$P_j = (z_j, v_1, ..., v_j, w_{j+1}, ..., w_n).$$

Wir müssen also die Koordinaten z_j angeben. Es sei $z_0 = w_0$, also $P_0 = P$, und $z_n = v_0$, also $P_n = Q$. Sei nun $j \in \{1, ..., n-1\}$ und z_{j-1} schon gewählt. Dann sei

$$z_j := \left(\prod_{t=1}^{j} v_t^{k_t} \prod_{t=j+1}^{n} w_t^{k_t}\right)^{1/m}$$

eine m-te Wurzel mit

$$\measuredangle(z_{j-1}, z_j) \leq \frac{\pi}{m}. \tag{127}$$

Damit ist auch $P_j \in Z$. Man beachte, dass (127) für alle $j \in \{1, ..., n-1\}$ gilt, für $j = n$ aber in der Regel nicht. Jetzt verwenden wir:

$$|f_k(P) - f_k(Q)| \leq \sum_{j=1}^{n} |f_k(P_{j-1}) - f_k(P_j)|.$$

Es sei $j \in \{1, ..., n\}$. Wir wollen $|f_k(P_{j-1}) - f_k(P_j)|$ abschätzen. Hier sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

a) Es sei $\{k\frac{k_j}{m}\}^* = 0$, also $k\frac{k_j}{m} \in \mathbb{Z}$. Das ist insbesondere für $j = n$ der Fall. In dieser Situation gilt nach Lemma 7.3.2 (i.):

$$\frac{N_k(\Pi(P_{j-1}))}{z_{j-1}^k} = \frac{N_k(\Pi(P_j))}{z_j^k}.$$

Damit folgt:

$$|f_k(P_{j-1}) - f_k(P_j)| = \left|\frac{N_k(\Pi(P_j))}{z_j^k}\right| |\psi_k(P_{j-1}) - \psi_k(P_j)|$$

$$\leq \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} |\psi_k(..., v_{j-1}, w_j, ...) - \psi_k(..., v_{j-1}, v_j, w_{j+1} ...)|.$$

Hier können wir nun die Abschätzungen aus Kapitel 6 einsetzen. Dazu sei an

$$\psi_k = \mathbf{S}_0\eta_{k,0} + ... + \mathbf{S}_0\eta_{k,n}$$

und

$$\|\eta_{k,s}\|_{L^{\infty,\overline{\alpha_{k,s}}}(\mathbb{D})} \leq \frac{k_s}{\sqrt{2^q}} \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)}$$

mit

$$(\overline{\alpha_{k,s}})_t = \max\{\{k\frac{k_t}{m}\}^* - (1 - \delta_{0s})\frac{k_t}{m} + \delta_{st}, 0\} \quad \text{für } t = 1, ..., n$$

nach Lemma 7.2.4 erinnert. Wir werden die Konstante $\|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)}$ im folgenden nicht notieren, aber stets im Gedächtnis mitführen.

Für $\mathbf{B}_0\eta_{k,0}$ verwenden wir die singulären Hölder-Abschätzungen aus Lemma 6.2.5 mit $\alpha = \overline{\alpha_{k,0}}$ und $(\delta_0, ..., \delta_n) = (1, 0, ..., 0)$. Das liefert:

$$|\mathbf{B}_0\eta_{k,0}(\Pi(P_{j-1})) - \mathbf{B}_0\eta_{k,0}(\Pi(P_j))| \lesssim |w_j - v_j|^{1-} \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*}.$$

Dabei beachte man $\alpha_j = (\overline{\alpha_{k,0}})_j = \{k\frac{k_j}{m}\}^* = 0$. Für $\widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,0}$ verwenden wir die singulären Hölder-Abschätzungen aus Lemma 6.4.6 mit den gleichen Konstanten und erhalten:

$$|\widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,0}(\Pi(P_{j-1})) - \widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,0}(\Pi(P_j))| \lesssim |w_j - v_j|^{1/2} \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*}.$$

Also existiert (wegen $\mathbf{S}_0 = \widehat{\mathbf{S}}_0 - \mathbf{B}_0$) eine Konstante $C_{k,0}^j > 0$ mit

$$\begin{aligned}
&\prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} |\psi_{k,0}(\Pi(P_{j-1})) - \psi_{k,0}(\Pi(P_j))| \\
\leq\ & \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} C_{k,0}^j |w_j - v_j|^{1/2} \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \\
=\ & C_{k,0}^j |w_j - v_j|^{1/2}.
\end{aligned}$$

Es sei $s \in \{1, ..., n\}$. Für $\mathbf{B}_0\eta_{k,s}$ verwenden wir Lemma 6.2.5 mit $\alpha = \overline{\alpha_{k,s}}$ und

$$\delta_t = \begin{cases} \frac{k_j}{m} & , \text{ für } t = 0, \\ 1 - \frac{k_j}{m} & , \text{ für } t = j, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Das liefert:

$$|\mathbf{B}_0\eta_{k,s}(\Pi(P_{j-1})) - \mathbf{B}_0\eta_{k,s}(\Pi(P_j))| \lesssim |w_j - v_j|^{k_j/m} \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t}.$$

Mit den gleichen Konstanten folgt aus Lemma 6.4.6:

$$|\widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,s}(\Pi(P_{j-1})) - \widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,s}(\Pi(P_j))| \lesssim |w_j - v_j|^{k_j/2m} \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t}.$$

Also existiert eine Konstante $C_{k,s}^j > 0$ mit

$$\prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} |\psi_{k,s}(\Pi(P_{j-1})) - \psi_{k,s}(\Pi(P_j))| \leq C_{k,s}^j |w_j - v_j|^{k_j/2m},$$

wobei man

$$(\overline{\alpha_{k,s}})_t = \{k\frac{k_t}{m}\}^* - \frac{k_t}{m} \leq \{k\frac{k_t}{m}\}^*$$

für $t \neq j$ beachte. Alle diese Abschätzungen hängen nicht von den Formen $\eta_{k,s}$ und den Punkten P und Q ab. Damit gilt für den Fall 1.a) zusammengefasst:

Im Fall $\{k\frac{k_j}{m}\}^* = 0$ existieren Konstanten $C_k^j > 0$ mit:

$$\begin{aligned}
|f_k(P_{j-1}) - f_k(P_j)| &\leq C_k^j |w_j - v_j|^{k_j/2m} \\
&\leq C_k^j \operatorname{dist}_X(P, Q)^{k_j/2m},
\end{aligned}$$

wobei die Konstante nicht von den f_k und den Punkten $P_0, ..., P_n$ abhängt. Man beachte hier die triviale Abschätzung $|w_j - v_j| \leq \operatorname{dist}_X(P, Q)$, da für die Länge jedes Weges γ, der P und Q in X verbindet,

$$L(\gamma) \geq \|P - Q\|_{\mathbb{C}^{n+1}} \geq |w_j - v_j|$$

gilt, da wir die Länge einer solchen Kurve als Länge der Kurve im umgebenden Raum $\mathbb{C}^{n+1}$ definiert haben.

b) Sei nun $\gamma_{k,j} = \{k\frac{k_j}{m}\}^* > 0$. Das ist nur für $j < n$ möglich. Es kann $|w_j| \leq |v_j|$ angenommen werden. Ansonsten vertauschen wir die beiden Variablen in den folgenden Abschätzungen. Wir spalten die Abschätzung von $H_k\psi_k$ in eine Abschätzung von ψ_k und eine Abschätzung von $H_k = N_k/z^k$, und erhalten unter Verwendung von Lemma 7.3.2 (ii.):

$$\begin{aligned}
& |H_k(P_{j-1})\psi_k(\Pi(P_{j-1})) - H_k(P_j)\psi_k(\Pi(P_j))| \\
\leq\ & |H_k(P_{j-1})||\psi_k(\Pi(P_{j-1})) - \psi_k(\Pi(P_j))| + |\psi_k(\Pi(P_j))||H_k(P_{j-1}) - H_k(P_j)| \\
\leq\ & \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j}^{n} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} |\psi_k(\Pi(P_{j-1})) - \psi_k(\Pi(P_j))| \\
& + |\psi_k(\Pi(P_j))| \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} C(\gamma_{k,j})|w_j - v_j|^{\gamma_{k,j}} \\
=:\ & S^j_{k,1} + S^j_{k,2}.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Voraussetzungen von Lemma 7.3.2 (ii.) erfüllt sind, da wir die z_j so gewählt haben, dass $\measuredangle(z_{j-1}, z_j) \leq \pi/m$ für $j < n$ gilt. Wir verwenden wieder die Abschätzungen für die $\eta_{k,t}$ aus Lemma 7.2.4, die wir schon in Teil a) herangezogen hatten, und betrachten zunächst den zweiten Summanden $S^j_{k,2}$. Für $\mathbf{B}_0\eta_{k,0}$ verwenden wir die L^∞-Abschätzung aus Lemma 6.2.1 mit $\alpha = \overline{\alpha_{k,0}}$ und

$$\delta_t = \begin{cases} 1 & \text{, für } t = j, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Das liefert:

$$|\mathbf{B}_0\eta_{k,0}(\Pi(P_j))| \lesssim \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*}.$$

Für $\widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,0}$ verwenden wir die L^∞-Abschätzung aus Lemma 6.4.1 mit $\alpha = \overline{\alpha_{k,0}}$ und

$$\delta_t = \begin{cases} \gamma_{k,t} & \text{, für } t = j, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Das liefert auch hier:

$$|\widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,0}(\Pi(P_j))| \lesssim \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*}.$$

Zusammengenommen folgt unter Verwendung von

$$\psi_{k,0} = \mathbf{S}_0\eta_{k,0} = (\widehat{\mathbf{S}}_0 - \mathbf{B}_0)\eta_{k,0}$$

die Existenz einer Konstanten $A^j_{k,0} > 0$ mit

$$|\psi_{k,0}(\Pi(P_j))| \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \leq A^j_{k,0}.$$

Sei nun $s \in \{1, ..., n\}$. Für $\mathbf{B}_0\eta_{k,s}$ verwenden wir Lemma 6.2.1 mit $\alpha = \overline{\alpha_{k,s}}$ und δ_t wie für $\mathbf{B}_0\eta_{k,0}$. Das liefert:

$$|\mathbf{B}_0\eta_{k,s}(\Pi(P_j))| \lesssim \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t} \begin{cases} |v_j|^{\frac{k_j}{m}-\gamma_{k,j}} & ,\text{falls } \gamma_{k,j} \geq \frac{k_j}{m}, \\ 1 & ,\text{sonst.} \end{cases}$$

Für $\widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,s}$ verwenden wir Lemma 6.4.1 mit $\alpha = \overline{\alpha_{k,s}}$ und

$$\delta_t = \begin{cases} \mu_{k,j} & , \text{ für } t = j, \\ 0 & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

mit

$$\mu_{k,j} = \begin{cases} 1 - \epsilon_{k,j} & , \text{ falls } \gamma_{k,j} \geq \frac{k_j}{2m}, \\ \gamma_{k,j} - \frac{k_j}{m} + 1 & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

und

$$\epsilon_{k,j} = \frac{k_j}{2m}.$$

Hier wäre auch ein kleineres $\epsilon_{k,j} > 0$ möglich, was die Abschätzungen eventuell verbessert. Für unsere Zwecke ist diese Wahl aber ausreichend. Das liefert hier:

$$|\widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,0}(\Pi(P_j))| \lesssim \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t} \begin{cases} |v_j|^{\frac{k_j}{2m}-\gamma_{k,j}} & ,\text{falls } \gamma_{k,j} \geq \frac{k_j}{2m}, \\ 1 & ,\text{sonst.} \end{cases}$$

Zusammengenommen folgt die Existenz einer Konstanten $A^j_{k,s} > 0$ mit

$$\begin{aligned} &|\psi_{k,s}(\Pi(P_j))| \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} C(\gamma_{k,j})|w_j - v_j|^{\gamma_{k,j}} \\ \leq\ & A^j_{k,s} C(\gamma_{k,j})|w_j - v_j|^{\gamma_{k,j}} \begin{cases} |v_j|^{\frac{k_j}{2m}-\gamma_{k,j}} & ,\text{falls } \gamma_{k,j} \geq \frac{k_j}{2m}, \\ 1 & ,\text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei man

$$(\overline{\alpha_{k,s}})_t = \{k\frac{k_t}{m}\}^* - \frac{k_t}{m} \leq \{k\frac{k_t}{m}\}^*$$

für $t \neq j$ beachte. Für $\gamma_{k,j} \geq \frac{k_j}{2m}$ nutzen wir noch

$$|w_j - v_j|^{\gamma_{k,j}} \leq |w_j - v_j|^{\frac{k_j}{2m}} (|w_j| + |v_j|)^{\gamma_{k,j} - \frac{k_j}{2m}} \lesssim |w_j - v_j|^{\frac{k_j}{2m}} |v_j|^{\gamma_{k,j} - \frac{k_j}{2m}},$$

(wegen $|w_j| \leq |v_j|$), so dass weiter gilt:

$$\lesssim A^j_{k,s} C(\gamma_{k,j}) \begin{cases} |w_j - v_j|^{\frac{k_j}{2m}} & , \text{ falls } \gamma_{k,j} \geq \frac{k_j}{2m}, \\ |w_j - v_j|^{\gamma_{k,j}} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Fassen wir die Aussagen für $\psi_{k,s}$ über alle $s \in \{0,...,n\}$ zusammen, so ist der Summand $S^j_{k,2}$ abgeschätzt: Es existiert eine Konstante $C^j_{k,2} > 0$ mit:

$$S^j_{k,2} \leq C^j_{k,2} \begin{cases} |w_j - v_j|^{\frac{k_j}{2m}} & \text{, falls } \gamma_{k,j} \geq \frac{k_j}{2m}, \\ |w_j - v_j|^{\gamma_{k,j}} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Untersuchen wir also nun den ersten Summanden $S^j_{k,1}$. Wir müssen

$$|\psi_k(\Pi(P_{j-1})) - \psi_k(\Pi(P_j))|$$

abschätzen.

Für $\mathbf{B}_0\eta_{k,0}$ verwenden wir Lemma 6.2.5 mit $\alpha = \overline{\alpha_{k,0}}$ und $(\delta_0,...,\delta_n) = (1,0,...,0)$. Das liefert:

$$|\mathbf{B}_0\eta_{k,0}(\Pi(P_{j-1})) - \mathbf{B}_0\eta_{k,0}(\Pi(P_j))| \lesssim 2\frac{|w_j - v_j|^{1-}}{|w_j|^{\gamma_{k,j}}} \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*}.$$

Für $\widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,0}$ verwenden wir Lemma 6.4.6 mit den gleichen Konstanten und erhalten:

$$|\widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,0}(\Pi(P_{j-1})) - \widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,0}(\Pi(P_j))| \lesssim 2\frac{|w_j - v_j|^{1/2}}{|w_j|^{\gamma_{k,j}}} \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{-\{k\frac{k_t}{m}\}^*}.$$

Zusammengenommen existiert eine Konstante $B^j_{k,0} > 0$ mit

$$\begin{aligned} & \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} \prod_{t=j}^{n} |w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*} |\psi_{k,0}(\Pi(P_{j-1})) - \psi_{k,0}(\Pi(P_j))| \\ \leq \ & B^j_{k,0}|w_j - v_j|^{1/2}. \end{aligned}$$

Nun sei $s \in \{1,...,n\}$. Für $\mathbf{B}_0\eta_{k,s}$ verwenden wir Lemma 6.2.5 mit $\alpha = \overline{\alpha_{k,s}}$ und

$$\delta_t = \begin{cases} \frac{k_j}{m} & \text{, für } t = 0, \\ 1 - \frac{k_j}{m} & \text{, für } t = j, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Das liefert:

$$\begin{aligned} & |\mathbf{B}_0\eta_{k,s}(\Pi(P_{j-1})) - \mathbf{B}_0\eta_{k,s}(\Pi(P_j))| \\ \lesssim \ & 2\frac{|w_j - v_j|^{k_j/m}}{|w_j|^{\gamma_{k,j}}} \prod_{t=1}^{j-1} |v_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t} \prod_{t=j+1}^{n} |w_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t}. \end{aligned}$$

Mit den gleichen Konstanten folgt aus Lemma 6.4.6:

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,s}(\Pi(P_{j-1})) - \widehat{\mathbf{S}}_0\eta_{k,s}(\Pi(P_j))| \\
\lesssim\ & 2\frac{|w_j - v_j|^{k_j/2m}}{|w_j|^{\gamma_{k,j}}}\prod_{t=1}^{j-1}|v_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t}\prod_{t=j+1}^{n}|w_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t}.
\end{aligned}$$

Also existiert eine Konstante $B^j_{k,s} > 0$ mit

$$\prod_{t=1}^{j-1}|v_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*}\prod_{t=j}^{n}|w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*}|\psi_{k,s}(\Pi(P_{j-1})) - \psi_{k,s}(\Pi(P_j))| \leq B^j_{k,s}|w_j - v_j|^{k_j/2m},$$

wobei man wieder

$$(\overline{\alpha_{k,s}})_t = \{k\frac{k_t}{m}\}^* - \frac{k_t}{m} \leq \{k\frac{k_t}{m}\}^*$$

für $t \neq j$ beachte.

Fassen wir die Aussagen für $\psi_{k,s}$ über alle $s \in \{0, ..., n\}$ zusammen, so ist auch der Summand $S^j_{k,1}$ abgeschätzt: Es existiert eine Konstante $C^j_{k,1} > 0$ mit:

$$S^j_{k,1} \leq C^j_{k,1}|w_j - v_j|^{k_j/2m}.$$

Alle diese Abschätzungen hängen nicht von den Formen $\eta_{k,s}$ und den Punkten P und Q ab. Damit gilt für den Fall 1.b) zusammengefasst:

Im Fall $\gamma_{k,j} = \{k\frac{k_j}{m}\}^* > 0$ existieren Konstanten $C^j_{k,1} > 0$ und $C^j_{k,2} > 0$ mit:

$$\begin{aligned}
|f_k(P_{j-1}) - f_k(P_j)| &= |H_k(P_{j-1})\psi_k(\Pi(P_{j-1})) - H_k(P_j)\psi_k(\Pi(P_j))| \\
&\leq |H_k(P_{j-1})||\psi_k(\Pi(P_{j-1})) - \psi_k(\Pi(P_j))| \\
&\quad + |\psi_k(\Pi(P_j))||H_k(P_{j-1}) - H_k(P_j)| \\
&\leq C^j_{k,1}|w_j - v_j|^{k_j/2m} \\
&\quad + C^j_{k,2}\begin{cases} |w_j - v_j|^{\frac{k_j}{2m}} & \text{, falls } \gamma_{k,j} \geq \frac{k_j}{2m}, \\ |w_j - v_j|^{\gamma_{k,j}} & \text{, sonst,} \end{cases}
\end{aligned}$$

wobei die Konstanten nicht von den f_k und den Punkten $P_0, ..., P_n$ abhängt. Auch hier kann die triviale Abschätzung

$$|w_j - v_j| \leq \mathrm{dist}_X(P, Q)$$

angehängt werden.

Jetzt summieren wir über $j = 1, ..., n$, um eine geschlossene Abschätzung für

$$|f_k(P) - f_k(Q)|$$

im Fall 1 zu erhalten. Dazu definieren wir die Konstanten

$$\begin{aligned}
\vartheta &:= \min_{1 \le j \le n} \{\frac{k_j}{2m}\} > 0, \\
\vartheta_k &:= \min_{1 \le j \le n} \{\{k\frac{k_j}{m}\}^* : \{k\frac{k_j}{m}\}^* > 0\} > 0.
\end{aligned}$$

Jetzt gilt: Im Fall 1, also falls

$$\min_{1 \le j \le n} \{\{k\frac{k_j}{m}\}^*\} = 0,$$

existieren Konstanten $C_k > 0$ (unabhängig von den f_k und den Punkten P und Q) mit

$$\begin{aligned}
|f_k(P) - f_k(Q)| &\le \sum_{j=1}^{n} |f_k(P_{j-1}) - f_k(P_j)| \\
&\le \frac{C_k}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{dist}_X(P, Q)^{\min\{\vartheta, \vartheta_k\}} \\
&= C_k \, \mathrm{dist}_X(P, Q)^{\min\{\vartheta, \vartheta_k\}}.
\end{aligned}$$

Dabei sollte folgendes beachtet werden: Die Konstante ϑ ergibt sich aus der Abschätzung der Funktion ψ_k und kann nicht unmittelbar verbessert werden. Die Konstante ϑ_k jedoch ergibt sich aus der Abschätzung der Funktion $H_k = N_k/z^k$. Hier besteht noch Verbesserungspotential. Insbesondere könnte die Koordinate $z = w_0$ in die Abschätzung einbezogen werden. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass wir in den Abschätzungen für

$$|H_k(P_{j-1}) - H_k(P_j)||\psi_k(\Pi(P_j))|$$

bei der L^∞-Abschätzung von $|\psi_k(\Pi(P_j))|$ einiges Potential verschenkt haben.

2. Es sei

$$\min_{1 \le j \le n} \{\{k\frac{k_j}{m}\}^*\} > 0,$$

und der Punkt Q liege gemäß der Definition in Lemma 7.3.1 nicht im Zweig von P und der Punkt P nicht im Zweig von Q. Nach Lemma 7.3.1 folgt

$$\mathrm{dist}_X(P, Q) \ge \min_{1 \le j \le n} \{c_j(X)|w_j|\}$$

und

$$\mathrm{dist}_X(P, Q) \ge \min_{1 \le j \le n} \{c_j(X)|v_j|\},$$

was uns in diesem Fall leichten Zugang zu adäquaten Hölder-Abschätzungen verschafft. In diesem Zusammenhang sei an $w_j \ne 0$ und $v_j \ne 0$ für alle $j \in \{0, ..., n\}$ erinnert.

Hier hilft nämlich einfach

$$\begin{aligned}|f_k(P)-f_k(Q)| &\leq |f_k(P)|+|f_k(Q)|\\ &= |H_k(P)||\psi_k(\Pi(P))|+|H_k(Q)||\psi_k(\Pi(Q))|.\end{aligned}$$

Wir schätzen $H_k(P)\psi_k(\Pi(P))$ ab, $H_k(Q)\psi_k(\Pi(Q))$ geht analog. Es sei $j\in\{1,...,n\}$ mit

$$C_j(X)|w_j| = \min_{1\leq t\leq n}\{C_t(X)|w_t|\}.$$

Für ψ_k verwenden wir genau die L^∞-Abschätzungen, die für den zweiten Summanden $S^j_{k,2}$ in Teil 1.b) benutzt wurden. Das liefert

$$|\psi_{k,s}(\Pi(P))| \lesssim \prod_{t\neq j}|w_t|^{-(\overline{\alpha_{k,s}})_t}\begin{cases}|w_j|^{\frac{k_j}{2m}-\gamma_{k,j}} & \text{, falls } \gamma_{k,j}\geq\frac{k_j}{2m},\\ 1 & \text{, sonst ,}\end{cases}$$

für alle $s\in\{0,...,n\}$. Beachten wir noch

$$|H_k(P)| = \prod_{t=1}^{n}|w_t|^{\{k\frac{k_t}{m}\}^*}$$

und

$$(\overline{\alpha_{k,0}})_t = \{k\frac{k_t}{m}\}^* \quad \text{für} \quad t\in\{1,...,n\},$$

sowie

$$(\overline{\alpha_{k,s}})_t = \{k\frac{k_t}{m}\}^*-\frac{k_t}{m}\leq\{k\frac{k_t}{m}\}^* \quad \text{für } s>1 \text{ und } t\in\{1,...,n\}\setminus\{j\},$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned}|H_k(P)||\psi_k(\Pi(P))| &\lesssim |w_j|^{\gamma_{k,j}}\begin{cases}|w_j|^{\frac{k_j}{2m}-\gamma_{k,j}} & \text{, falls } \gamma_{k,j}\geq\frac{k_j}{2m},\\ 1 & \text{, sonst}\end{cases}\\ &\lesssim |w_j|^{\min\{\vartheta,\vartheta_k\}}.\end{aligned}$$

Wegen

$$|w_j| = \frac{1}{C_j(X)}\min_{1\leq t\leq n}\{C_t(X)|w_t|\}\leq\frac{1}{C_j(X)}\operatorname{dist}_X(P,Q)$$

folgt

$$|f_k(P)|\lesssim \operatorname{dist}_X(P,Q)^{\min\{\vartheta,\vartheta_k\}}.$$

Führen wir die Überlegung analog auch für $f_k(Q)$ durch, so ergibt sich auch in diesem Fall 2 die Existenz einer Konstanten $C'_k>0$ mit:

$$|f_k(P)-f_k(Q)|\leq|f_k(P)|+|f_k(Q)|\leq C'_k\operatorname{dist}_X(P,Q)^{\min\{\vartheta,\vartheta_k\}},$$

wobei die Konstante nicht von den f_k und den Punkten P, Q abhängt.

Bleibt der Fall

3. Es sei

$$\min_{1\leq j\leq n}\{\{k\frac{k_j}{m}\}^*\} > 0,$$

und der Punkt Q liege gemäß der Definition in Lemma 7.3.1 im Zweig von P oder der Punkt P im Zweig von Q. Wir nehmen an, der Punkt Q liege im Zweig von P, ansonsten vertausche man die Punkte P und Q. Damit ist

$$\measuredangle(w_0, v_0) \leq \pi/2m.$$

Wie in Fall 1 zerlegen wir die Abschätzung in n Abschätzungen in den Koordinaten w_1 bis w_n: Wir definieren wieder Punkte $P_0, ..., P_n \in Z$ mit

$$P_j = (z_j, v_1, ..., v_j, w_{j+1}, ..., w_n),$$

wobei wir hier verlangen, dass alle Punkte P_j im Zweig von P liegen. Sei U_P wie in Lemma 7.3.1. Damit ist zunächst

$$\Pi(P_j) \in U_P$$

für alle j. Wir müssen noch die Koordinaten z_j angeben. Dazu sei

$$z_j := \left(\prod_{t=1}^{j} v_t^{k_t} \prod_{t=j+1}^{n} w_t^{k_t}\right)^{1/m}$$

diejenige m-te Wurzel, so dass P_j im Zweig von P liegt. Also ist $P_0 = P$, $P_n = Q$ und für alle $j \in \{1, ..., n\}$ gilt nach Lemma 7.3.1:

$$\measuredangle(z_{j-1}, z_j) \leq \frac{\pi}{2m} < \frac{\pi}{m}. \tag{128}$$

Jetzt verwenden wir wieder

$$|f_k(P) - f_k(Q)| \leq \sum_{j=1}^{n} |f_k(P_{j-1}) - f_k(P_j)|$$

und übernehmen die Abschätzungen aus Teil 1.b). Der einzige Unterschied ist, dass hier günstiger Weise (128) für alle $j \in \{1, ..., n\}$ gilt. Also existiert auch in diesem Fall 3 eine Konstante $C_k'' > 0$ mit

$$|f_k(P) - f_k(Q)| \leq C_k'' \operatorname{dist}_X(P, Q)^{\min\{\vartheta,\vartheta_k\}},$$

wobei die Konstante nicht von den Funktionen f_k und den Punkten P und Q abhängt.

Es sei daran erinnert, dass wir in den vorangegangenen Abschätzungen stets den Faktor

$$\|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)}$$

im Gedächtnis mitgeführt haben.

Summieren wir nun über $k = 0, ..., m-1$ und setzen

$$\vartheta^* = \min_{0 \le k \le m-1} \{\vartheta, \vartheta_k\},$$

so folgt zusammengefasst die Existenz einer Konstanten $C > 0$ mit

$$|f(P) - f(Q)| \le C \operatorname{dist}_X(P,Q)^{\vartheta^*} \|\omega\|_{L^\infty_{0,1}(Y)},$$

für alle Punkte $P, Q \in Z$, wobei C nicht von ω bzw. $f = \mathbf{L}_0\omega$ abhängt. Damit besitzt f eine stetige Fortsetzung auf $\overline{Z} = \overline{Y}$ und die Abschätzung überträgt sich auf alle Punkte $P, Q \in \overline{Y}$.

Damit ist unser zweites Hauptresultat bewiesen:

Theorem 7.3.4. *Es seien $n, m, k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z}$ mit $n \ge 2$, $m \ge 2$ und $1 \le k_j \le m$ fest gewählt. Weiterhin sei*

$$\begin{aligned} X &= \{(z, w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : z^m = w_1^{k_1} \cdots w_n^{k_n}\} \subset \mathbb{C}^{n+1} \ , \\ D &= \{(z,w) \in X : |w_1|^2 + ... + |w_n|^2 < 1\} \end{aligned}$$

und

$$Y = \operatorname{Reg} D,$$

sowie

$$\begin{aligned} \vartheta &= \min_{1 \le t \le n} \{\frac{k_t}{2m}\}, \\ \vartheta_k &= \min_{1 \le t \le n} \{1, \{k\frac{k_t}{m}\}^* : \{k\frac{k_t}{m}\}^* > 0\}, \\ \vartheta^* &= \min_{0 \le k \le m-1} \{\vartheta, \vartheta_k\}. \end{aligned}$$

Dann liefert der Operator $\mathbf{L}_0$ aus Theorem 7.2.8 eine stetige lineare Abbildung

$$\mathbf{L}_0 : L^\infty_{0,1}(Y) \to C^{\vartheta^*}_X(\overline{Y})$$

mit

$$\overline{\partial}\mathbf{L}_0\omega = \omega$$

im Distributionssinne, falls $\overline{\partial}\omega = 0$ im Distributionssinne.

Man beachte $\vartheta_k \ge 1/m$ und $\vartheta^* = \vartheta$, falls $k_t = 1$ oder $k_t = 2$ für ein $t \in \{1, ..., n\}$. Es sei auch an $[x]^* = \min\{l \in \mathbb{Z} : x \le l\}$ und $\{x\}^* = [x]^* - x$ erinnert.

Literatur

[Alt] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[DFV] K. Diederich, J. E. Fornæss, S. Vassiliadou, Local L^2 results for $\overline{\partial}$ on a singular surface, *Math. Scand.* **92** (2003), 269–294.

[FiLi] W. Fischer, I. Lieb, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*, Vieweg, Braunschweig, 1988.

[Fo] J. E. Fornæss, L^2 results for $\overline{\partial}$ in a conic, in *International Symposium, Complex Analysis and Related Topics, Cuernavaca, Operator Theory: Advances and Applications* (Birkhauser, 1999).

[FoGa] J. E. Fornæss, E. A. Gavosto, The Cauchy Riemann Equation on Singular Spaces, *Duke Math. J.* **93** (1998), 453–477.

[FOV1] J. E. Fornæss, N. Øvrelid, S. Vassiliadou, Semiglobal results for $\overline{\partial}$ on a complex space with arbitrary singularities, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), *no. 8*, 2377–2386.

[FOV2] J. E. Fornæss, N. Øvrelid, S. Vassiliadou, Local L^2 results for $\overline{\partial}$: the isolated singularities case, *Internat. J. Math.* **16** (2005), *no. 4*, 387–418.

[FoSi] J. E. Fornæss, N. Sibony, Some open problems in higher dimensional complex analysis and complex dynamics, *Publ. Math.* **45** (2001), *no. 2*, 529–547.

[GrRe] H. Grauert, R. Remmert, *Coherent Analytic Sheaves*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[He1] T. Hefer, Optimale Regularitätssätze für die $\overline{\partial}$-Gleichung auf gewissen konkaven und konvexen Modellgebieten, *Bonner Math. Schr.* **301** (1997).

[He2] T. Hefer, Boundary values of integral operators, *Math. Nachr.* **261/262** (2003), 85–104.

[HeLe1] G. M. Henkin, J. Leiterer, *Andreotti-Grauert Theory by Integral Formulas*, Progress in Mathematics **74**, Birkhäuser Verlag, Boston , 1988.

[HeLe2] G. M. Henkin, J. Leiterer, *Theory of Functions on Complex Manifolds*, Monogr. Math **79**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[HePo] G. M. Henkin, P. Polyakov, The Grothendieck-Dolbeault lemma for complete intersections, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **308** (1989), 405–409.

[HeRo] G. M. Henkin, A. V. Romanov, Exact Hölder estimates for the solution of the $\overline{\partial}$-equation, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **35** (1971), 1171–1183.

[Hoe] L. Hörmander, L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$-operator, *Acta Math.* **113** (1965), 89–152.

[Koe] K. Königsberger, *Analysis 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Ko] W. Koppelman, The Cauchy integral for differential forms, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 554–556.

[Kra] S. G. Krantz, Optimal Lipschitz and L^p regularity for the equation $\overline{\partial}u = f$ on strongly pseudoconvex domains, *Math. Ann.* **219** (1976), 233–260.

[LiMi] I. Lieb, J. Michel, *The Cauchy-Riemann Complex, Integral Formulae and Neumann Problem*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2002.

[Na1] R. Narasimhan, Imbedding of holomorphically complete complex spaces, *Amer. J. Math.* **82** (1960), 917–934.

[Na2] R. Narasimhan, The Levi problem for complex spaces (II), *Math. Ann.* **146** (1962), 195–216.

[Ra] R. M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, (Graduate Texts in Mathematics, Bd. 108), Springer-Verlag, New York, 1986.

[Re] R. Remmert, Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **243** (1956), 118–121.

[Ru] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[Rp] J. Ruppenthal, Regularität der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf komplexen Kurven, Diplomarbeit, Bonn, 2003.

[Sch1] G. Scheja, Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen, *Math. Ann.* **144** (1961), 345–360.

[Sch2] G. Scheja, Eine Anwendung Riemannscher Hebbarkeitssätze für analytische Cohomologieklassen, *Arch. Math.* **12** (1961), 341–348.

[Si] N. Sibony, Un exemple de domain pseudoconvexe regulier ou l'équation $\overline{\partial}u = f$ n'admet pas de solution bornée pour f bornée, *Invent. Math.* **62** (1980), 235–242.