Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl. Math. S. Stahn

Wuppertal, 14.07.2016

Topologie I (SS 2016)

Übungsblatt 13

Aufgabe 1.

Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset B \subset X$ zwei Unterräume. Zeigen Sie, dass die kurze Sequenz von Kettenkomplexen relativer singulärer Simplizes

$$0 \to \Delta_*(B, A) \longrightarrow \Delta_*(X, A) \longrightarrow \Delta_*(X, B) \to 0$$

exakt ist, und leiten Sie daraus die lange exakte Sequenz des Tripels (X, B, A) ab:

$$... \to H_k(B, A) \to H_k(X, A) \to H_k(X, B) \to H_{k-1}(B, A) \to ...$$

Aufgabe 2.

a) Es sei $f : S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung, wobei n gerade ist. Zeigen Sie, dass ein Punkt $x \in S^n$ existiert, so dass $f(x) = x$ oder $f(x) = -x$.

Hinweis: Nehmen Sie an, es existiere kein Punkt $x \in S^n$ mit $f(x) = \pm x$ und konstruieren Sie eine Homotopie zwischen f und Id, und eine weitere Homotopie zwischen f und $-Id$.

b) Zeigen Sie: Ist n gerade, so existiert auf S^n kein nicht-verschwindendes stetiges Vektorfeld.

Hinweis: Angenommen, ein solches Vektorfeld würde existieren, so ließe sich daraus eine stetige Abbildung $f : S^n \to S^n$ konstruieren, die Teil a) widerlegt.

Aufgabe 3.

a) Es sei $f : S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung vom Grad 0. Zeigen Sie, dass Punkte $x, y \in S^n$ existieren mit $f(x) = x$ und $f(y) = -y$.

b) Es sei F ein nicht-verschwindendes stetiges Vektorfeld auf dem abgeschlossenen Einheitsball D^n in $\mathbb{R}^n$. Verwenden Sie Teil a) um zu zeigen, dass ein Punkt $x \in \partial D^n$ existiert, in dem F radial nach außen zeigt, und ein Punkt $y \in \partial D^n$, in dem F radial nach innen zeigt.

Hinweis: Verwenden Sie für beide Teilaufgaben die Techniken aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4.

Konstruieren Sie für alle $n \geq 1$ eine surjektive stetige Abbildung $S^n \to S^n$ vom Grad 0.

Abgabe in der Vorlesung am 21.07.2016.