Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl. Math. S. Stahn

Wuppertal, 07.07.2016

# Topologie I (SS 2016)

## Übungsblatt 12

**Das Mayer-Vietoris Theorem.**

Es sei $X$ ein topologischer Raum und $A, B \subset X$ zwei Unterräume, so dass $X$ die Vereinigung des Inneren von $A$ und des Inneren von $B$ ist, d.h. $X = A^\circ \cup B^\circ$. Dann induzieren die Inklusionen $j^A : A \cap B \hookrightarrow A$, $j^B : A \cap B \hookrightarrow B$, $\iota^A : A \hookrightarrow X$, $\iota^B : B \hookrightarrow X$ in der singulären Homologie eine lange exakte Sequenz

$$... \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{j_*^A \oplus j_*^B} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\iota_*^A - \iota_*^B} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \to ...$$
$$... \to H_0(X) \to 0.$$

Ist $A \cap B \neq \emptyset$, so ist die entsprechende reduzierte Homologiesequenz ebenfalls exakt.

**Aufgabe 1.**

Beweisen Sie das Mayer-Vietoris Theorem. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Wir bezeichnen mit $\Delta_*(A+B)$ den Komplex der singulären Ketten, die Summen von Ketten in $A$ und Ketten in $B$ sind. D.h. $\Delta_*(A+B) = \Delta_*^{\mathcal{U}}(X)$ für $\mathcal{U} = \{A, B\}$ nach der Notation der Vorlesung. Verwenden Sie Theorem 9.8 aus der Vorlesung um zu zeigen, dass:

$$H_n\big(\Delta_*(A+B)\big) = H_n^{\mathcal{U}}\big(X\big) \quad \cong \quad H_n\big(X\big).$$

b) Zeigen Sie, dass die kurze Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \to \Delta_*(A \cap B) \xrightarrow{j_\Delta^A \oplus j_\Delta^B} \Delta_*(A) \oplus \Delta_*(B) \xrightarrow{\iota_\Delta^A - \iota_\Delta^B} \Delta_*(A+B) \to 0$$

exakt ist. Schließen Sie das Mayer-Vietoris Theorem unter Verwendung der langen exakten Homologie-Sequenz und Teil a).

c) Finden Sie eine explizite Realisierung des Randoperators

$$\partial : H_n(X) \quad \to \quad H_{n-1}(A \cap B).$$

**Aufgabe 2.**

a) Verwenden Sie das Mayer-Vietoris Theorem, um die (reduzierten) singulären Homologiegruppen der Sphären $S^n$, $\widetilde{H}_*(S^n)$, $n \geq 0$, induktiv erneut zu bestimmen.

b) Berechnen Sie die singulären Homologiegruppen des Torus $S^1 \times S^1$.

*Bitte wenden.*

**Aufgabe 3.**

Verwenden Sie das Mayer-Vietoris Theorem, um Aufgabe 1 von Blatt 10 erneut zu lösen, d.h. zeigen Sie dass

$$\widetilde{H}_n(SX) \;\cong\; \widetilde{H}_{n-1}(X)$$

für die Suspension $SX$ eines topologischen Raumes $X$.

**Aufgabe 4. (Eulercharakteristik)**

Ein Kettenkomplex abelscher Gruppen $C_*$ heißt *endlich erzeugt*, falls $C_n \neq 0$ nur für endlich viele $n$ gilt und jedes $C_n$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist. Der *Rang* $r$ einer endlich erzeugten abelschen Gruppe ist die Dimension des freien Anteils (das ist wohldefiniert durch den Klassifikationssatz endlich erzeugter abelscher Gruppen). Die *Eulercharakteristik* eines endlich erzeugten Kettenkomplexes $C_*$ ist definiert durch

$$\chi(C_*) \;:=\; \sum_n (-1)^n r(C_n).$$

a) Zeigen Sie, dass für jeden endlich erzeugten Kettenkomplex $C_*$ gilt:

$$\chi(C_*) \;=\; \chi\big(H_*(C_*)\big).$$

b) Es sei $X$ ein topologischer Raum mit $H_*(X)$ endlich erzeugt. Dann definiert man

$$\chi(X) \;:=\; \chi\big(H_*(X)\big).$$

Sei $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung, so dass auch $H_*(U)$ und $H_*(V)$ endlich erzeugt sind. Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$\chi(X) + \chi(U \cap V) \;=\; \chi(U) + \chi(V).$$

---

Abgabe in der Vorlesung am 14.07.2016.