Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl. Math. S. Stahn

Wuppertal, 23.06.2016

Topologie I (SS 2016)

Übungsblatt 10

Für das gesamte Aufgabenblatt sei H_* eine Homologietheorie, die den Eilenberg-Steenrod-Milnor Axiomen genügt, und $\widetilde{H}_*$ die assoziierte reduzierte Homologie.

Aufgabe 1.

Es sei X ein topologischer Raum. Wir bezeichnen mit SX die *Suspension* (bzw. *Einhängung*) von X, d.h. den Quotientenraum von $I \times X$, der sich ergibt, wenn wir jeweils $\{0\} \times X$ und $\{1\} \times X$ zu einem Punkt identifizieren. SX ist somit die Vereinigung von zwei Kegeln über X. Zeigen Sie, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\widetilde{H}_i(X) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}_{i+1}(SX)$$

gibt. Natürlichkeit bedeutet, dass für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ und ihre Suspension $Sf : SX \to SY$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}_i(X) & \xrightarrow{\cong} & \widetilde{H}_{i+1}(SX) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle (Sf)_*} \\ \widetilde{H}_i(Y) & \xrightarrow{\cong} & \widetilde{H}_{i+1}(SY) \end{array}$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Kegel CX über X, d.h. den Quotientenraum von $I \times X$, der sich ergibt, wenn $\{0\} \times X$ zu einem Punkt identifiziert wird. Verwenden Sie die Kontrahierbarkeit von CX und die lange exakte reduzierte Homologiesequenz des Paares (CX, X).

Aufgabe 2.

Berechnen Sie die Homologiegruppen $H_i(X, A)$ für $X = S^n$ und A eine endliche Menge von Punkten in X.

Aufgabe 3.

Wir betrachten $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ als topologischen Unterraum. Verwenden Sie die lange exakte Sequenz für die reduzierte Homologie, um zu zeigen, dass $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ eine freie abelsche Gruppe ist und geben Sie eine Basis an.

Bitte wenden.

Aufgabe 4.

a) Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ ein abgeschlossener Punkt und U eine offene Umgebung von x_0. Beweisen Sie mit Hilfe des Ausschneidungssatzes, dass ein Isomorphismus

$$H_*\big(X, X \setminus \{x_0\}\big) \xrightarrow{\cong} H_*\big(U, U \setminus \{x_0\}\big)$$

existiert.

b) Zeigen Sie, dass für $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ abgeschlossene Punkte in Mannigfaltigkeit ohne Rand das folgende gilt: Gibt es offene Umgebungen U und V von x_0 und y_0 und einen punktierten Homöomorphismus $(U, x_0) \to (V, y_0)$, so gilt:

$$H_*\big(X, X \setminus \{x_0\}\big) \cong H_*\big(Y, Y \setminus \{y_0\}\big).$$

c) Es sei X eine Mannigfaltigkeit der Dimension n ohne Rand. Berechnen Sie $H_*\big(X, X \setminus \{x_0\}\big)$.

d) Beweisen Sie, dass aus der Existenz eines Homöomorphismus von Mannigfaltigkeiten ohne Rand, $X \xrightarrow{\cong} Y$, die Gleichheit ihrer Dimensionen folgt: $\dim X = \dim Y$.

Abgabe in der Vorlesung am 30.06.2016.