Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl. Math. S. Stahn

Wuppertal, 09.06.2016

Topologie I (SS 2016)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1.

Wir betrachten die folgende kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen:

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0 \tag{1}$$

a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i. Es gibt einen Homomorphismus $s : B \to A$, so dass $s \circ i = id : A \to A$.

ii. Es gibt einen Homomorphismus $t : C \to B$, so dass $p \circ t = id : C \to C$.

iii. Es gibt einen Isomorphismus $\phi : B \to A \oplus C$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"] & C \arrow[r] & 0 \\ & & A \oplus C \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei die Abbildungen $A \to A \oplus C$ und $A \oplus C \to C$ gegeben sind durch $a \mapsto (a, 0)$ und $(a, c) \mapsto c$.

Eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen, die diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, heißt *spaltend* oder *zerfallend*.

b) Zeigen Sie, dass (1) spaltet, falls C eine freie abelsche Gruppe ist.

c) Zeigen Sie, dass die folgenden kurzen exakten Sequenzen nicht spalten:

$$0 \to \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{\text{mod } 2} \mathbb{Z}/2 \to 0$$
$$0 \to 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } 2} \mathbb{Z}/2 \to 0$$

Aufgabe 2.

Sei $f : I \to X$ ein Weg in einem topologischen Raum, den wir als 1-Kette auffassen. Zeigen Sie:

a) Ist f ein konstanter Weg, so ist f ein 1-Rand.

b) Die 1-Kette $f + f^{-1}$ ist ein 1-Rand.

Bitte wenden.

Aufgabe 3.

a) X sei ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $f : X \to X$ eine beliebige stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass $f_* : H_0(X) \to H_0(X)$ die Identität ist.

b) Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $f(x_0) = y_0$. Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_X} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_Y} \\ H_1(X) & \xrightarrow{f_*} & H_1(Y) \end{array}$$

kommutiert, wobei ϕ_X und ϕ_Y die Hurewicz Homomorphismen sind.

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie die singulären Homologiegruppen H_0 und H_1 der folgenden topologischen Räume:

- $S^1 \times \mathbb{R}$ (der Hohlzylinder)
- $D^1 \times \mathbb{R}$ (der Vollzylinder)
- $S^1 \times D^1$ (der Volltorus)
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
- $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (0, 1)\}$
- $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$
- $\bigvee_{j=1}^{n} S^1$ (die Vereinigung von n punktierten Kreisen, deren Basispunkte zu einem Punkt identifiziert werden).

Abgabe in der Vorlesung am 16.06.2016.