Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl. Math. S. Stahn Wuppertal, 02.06.2016

Topologie I (SS 2016)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1.

Beweisen Sie das Fünferlemma aus der Vorlesung.

Aufgabe 2. (Abelsche Kategorien)

Ein Morphismus $f : c \to d$ in einer beliebigen Kategorie heißt *Monomorphismus*, falls für jedes Paar von Morphismen $g, h : b \to c$ gilt: $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$. Dual heißt f *Epimorphismus*, falls für jedes Paar von Morphismen $g, h : d \to e$ gilt: $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.

a) Zeigen Sie, dass in R-Mod gilt: f ist Monomorphismus $\Leftrightarrow$ f ist injektiv; f ist Epimorphismus $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv.

b) Geben Sie einen Epimorphismus in der Kategorie der topologischen Hausdorffräume an, der nicht surjektiv ist.

Eine additive Kategorie $\mathcal{C}$ (siehe Übungsblatt 6) heißt *abelsche Kategorie*, falls jeder Morphismus einen Kern und einen Kokern hat, und falls jeder Monomorphismus ein Kern und jeder Epimorphismus ein Kokern eines Morphismus ist.

Dabei ist ein *Kern* eines Morphismus $f : c \to d$ ein Objekt $\ker(f) \in \mathcal{C}$ zusammen mit einem Monomorphismus $i : \ker(f) \to c$, so dass $f \circ i = 0$ und mit der folgenden universellen Eigenschaft: Zu jedem Morphismus $g : b \to c$ mit $f \circ g = 0$ existiert genau ein Morphismus $h : b \to \ker(f)$, so dass $g = i \circ h$, i.e. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \ker(f) \arrow[r, "i"] & c \arrow[r, "f"] & d \\ & b \arrow[ul, "h"] \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Ein *Kokern* ist ein Objekt $\mathrm{coker}(f) \in \mathcal{C}$ zusammen mit einem Epimorphismus $p : d \to \mathrm{coker}(f)$, so dass $p \circ f = 0$ und mit der folgenden universellen Eigenschaft: Zu jedem Morphismus $g : d \to e$ mit $g \circ f = 0$ existiert genau ein Morphismus $h : \mathrm{coker}(f) \to e$, so dass $g = h \circ p$, i.e. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & d \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{coker}(f) \arrow[dl, "h"'] \\ & e & \end{tikzcd}$$

c) Zeigen Sie, dass R-Mod eine abelsche Kategorie ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 3.

Sei K ein Körper und $0 \to U \to V \to W \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in K-Mod= K-Vekt von K-Vektorräumen, die alle endlich-dimensional sind. Zeigen Sie, dass dann $\dim_K V = \dim_K U + \dim_K W$ ist. Zeigen Sie, dass sogar $V \cong U \oplus W$ gilt. Kurze exakte Sequenzen dieser Form heißen *spaltend* oder *zerfallend*.

Aufgabe 4.

Ermitteln Sie, ob eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}/4 \longrightarrow \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \to 0$$

existiert. Sei p eine Primzahl und $m, n \in \mathbb{Z}$ positiv. Bestimmen Sie, welche abelschen Gruppen A in einer exakten Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}/p^m \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n \to 0$$

auftreten können. Wie ist die Situation bei der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}/n \to 0?$$

Abgabe in der Vorlesung am 09.06.2016.