Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl. Math. S. Stahn

Wuppertal, 26.05.2016

Topologie I (SS 2016)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie die Homologie der folgenden Kettenkomplexe:

a)
$$\ldots \xrightarrow{0} C_{i+2} \xrightarrow{0} C_{i+1} \xrightarrow{0} C_i \xrightarrow{0} C_{i-1} \xrightarrow{0} C_{i+2} \xrightarrow{0} \ldots$$

b)
$$\ldots M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} \ldots$$

c)
$$\ldots 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/6 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/6 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}/6 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ldots$$

d)
$$\ldots 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ldots$$

Dabei sei p die Projektion modulo 2 und $\mu = i \circ \pi$, wobei $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$ die Projektion modulo 2 und $i : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/4$ die Inklusion ist.

Aufgabe 2. (Schlangendiagramm I)

Wir betrachten das folgende kommutative exakte *Schlangendiagramm* von R-Moduln:

$$\begin{tikzcd}
& M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & N'' &
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} \delta : \ker(d'') & \to & \operatorname{coker}(d') \\ m & \mapsto & \left[f^{-1} \circ d \circ g^{-1}(m)\right] \end{array}$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

Aufgabe 3. (Schlangendiagramm II)

Man betrachte das Schlangendiagramm und die Abbildung δ aus Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$\ker(d') \xrightarrow{f} \ker(d) \xrightarrow{g} \ker(d'') \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(d') \xrightarrow{f} \operatorname{coker}(d) \xrightarrow{g} \operatorname{coker}(d'')$$

Bitte wenden.

Aufgabe 4. (Additive Kategorien)

Ein Objekt c in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *initial* (bzw. *final*), wenn es zu jedem anderen Objekt d aus $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus von c nach d (bzw. von d nach c) gibt. Es heißt *Nullobjekt*, falls es sowohl initial als auch final ist.

a) Geben Sie, soweit vorhanden, initiale, finale und Nullobjekte in der Kategorie der topologischen Räume **Top** und in der Kategorie der abelschen Gruppen **Ab** an.

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *additiv*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

i. Es gibt ein Nullobjekt.

ii. Zu je zwei Objekten $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ gibt es ein Produkt $c_1 \times c_2$, d.h. es existiert ein Objekt $c_1 \times c_2 \in \mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $\pi_j : c_1 \times c_2 \to c_j$, $j = 1, 2$, Projektionen genannt, so dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Für jedes Objekt $d \in \mathcal{C}$ und Morphismen $f_1 : d \to c_1$ und $f_2 : d \to c_2$ gibt es genau einen Morphismus $f : d \to c_1 \times c_2$ so dass $f_j = \pi_j \circ f$, $j = 1, 2$, i.e. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & c_1 \times c_2 \arrow[d, "\pi_j"] \\ d \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_j"] & c_j \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

iii. Die Hom-Mengen sind abelsche Gruppen, d.h. für alle $c, d \in \mathcal{C}$ ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ eine abelsche Gruppe.

iv. Die Komposition von Morphismen ist bilinear, d.h. für alle $c, d, e \in \mathcal{C}$ und alle $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ und $g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d, e)$ ist:

$$\begin{aligned} g \circ (f_1 + f_2) &= g \circ f_1 + g \circ f_2 \ , \\ (g_1 + g_2) \circ f &= g_1 \circ f + g_2 \circ f. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass R-Mod eine additive Kategorie ist. Machen Sie sich klar, dass damit insbesondere **Ab** eine additive Kategorie ist, da $\mathbf{Ab} = \mathbb{Z}$-Mod.

Abgabe in der Vorlesung am 02.06.2016.