Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl. Math. S. Stahn Wuppertal, 05.05.2016

Topologie I (SS 2016)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1.

Beweisen Sie Satz 2.5 aus der Vorlesung: Sei B ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Zwei Überlagerungen $p_1 : E_1 \to B$ und $p_2 : E_2 \to B$ sind isomorph durch einen Isomorphismus $\Phi : E_1 \to E_2$, der einen Basispunkt $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ auf einen Basispunkt $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ abbildet, genau dann, wenn

$$(p_1)_* \, \pi_1(E_1, \tilde{x}_1) \; = \; (p_2)_* \, \pi_1(E_2, \tilde{x}_2).$$

Folgern Sie die Eindeutigkeit der universellen Überlagerung.

Hinweis: Verwenden Sie das Hebungskriterium, Satz 1.8.

Aufgabe 2.

Sei $p : E \to B$ eine Überlagerung. Die Überlagerungs-Isomorphismen $\Phi : E \to E$ heißen *Decktransformationen*. Zeigen Sie:

a) Die Decktransformationen bilden mit der Hintereinanderschaltung eine Gruppe.

b) Jede Decktransformation $\Phi : E \to E$ ist Hochhebung von $p : E \to B$.

c) Ist E wegzusammenhängend, so ist jede Decktransformation durch Festlegung des Bildes eines einzelnen Punktes eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3.

Eine Überlagerung $p : E \to B$ heißt normal, falls für alle $b \in B$ und $e, \tilde{e} \in p^{-1}(b)$ eine Decktransformation $\Phi : E \to E$ existiert mit $\Phi(e) = \tilde{e}$.

In einer Überlagerung $p : E \to B$ sei B wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, E sei wegzusammenhängend. Fixiere einen beliebigen Punkt $b_0 \in B$. Zeigen Sie, dass p normal ist, falls p in der Faser über b_0 normal ist, d.h. falls für alle $e, \tilde{e} \in p^{-1}(b_0)$ eine Decktransformation $\Phi : E \to E$ existiert mit $\Phi(e) = \tilde{e}$.

Aufgabe 4.

Es sei B ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender topologischer Raum. Ein Überlagerung $p : E \to B$ heißt *abelsch*, falls sie normal ist und die Gruppe der Decktransformationen abelsch ist. Zeigen Sie, dass B eine abelsche Überlagerung besitzt, die gleichzeitig Überlagerung aller abelschen Überlagerungen von B ist. Zeigen Sie weiterhin, dass diese 'universelle' abelsche Überlagerung bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Bestimmen Sie die universelle abelsche Überlagerung von $S^1 \vee S^1$.

Abgabe in der Vorlesung am 12.05.2016.