Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl. Math. S. Stahn Wuppertal, 21.04.2016

Topologie I (SS 2016)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1.

Konstruieren Sie eine einfach zusammenhängende Überlagerung eines Raumes $X \subset \mathbb{R}^3$, der die Vereinigung einer Sphäre mit einem ihrer Durchmesser ist.

Aufgabe 2.

Sei B der Unterraum von $\mathbb{R}^2$, der sich zusammensetzt aus der Vereinigung der vier Kanten von $[0,1] \times [0,1]$ und den Segmenten der vertikalen Linien $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$ innerhalb des Quadrates. Sei $p : E \to B$ eine Überlagerung.

Zeigen Sie: Es gibt eine offene Umgebung U der linken Kante von B, die unter p ein homöomorphes Urbild besitzt. D.h. es existiert eine offene Menge $V \subset E$, so dass $p|_V : V \to U$ ein Homöomorphismus ist. Schließen Sie, dass B keine einfach zusammenhängende Überlagerung besitzt.

Aufgabe 3.

In $\mathbb{C}$ mit Koordinate $z = x + iy$ sei $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4$ die zusammenhängende Menge zusammengesetzt aus dem vertikalen Linienelement

$$Y_1 = \{0\} \times [-1, 1],$$

einem Teil des Graphen von $\sin(1/x)$,

$$Y_2 = \{x + i \sin(1/x) : x \in (0, 1/2\pi]\},$$

dem Kreisbogen

$$Y_3 = \{-3i + 3e^{i\phi} : \phi \in [\pi/2, 2\pi + \pi/4]\}$$

mit Zentrum $(0, -3)$ und Radius 3 und dem Linienelement $Y_4 = [1/2\pi, -3i + 3e^{i\pi/4}]$. Somit verbindet $Y_3 \cup Y_4$ den Ursprung mit dem rechten Ende von Y_2. Durch kollabieren von Y_1 auf einen Punkt erhalten wir eine Quotientenabbildung $f : Y \to S^1$.

Zeigen Sie, dass f keine Hochhebung $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}$ in die Überlagerung $p : \mathbb{R} \to S^1$ besitzt, obwohl $\pi_1(Y) = 0$ ist.

Aufgabe 4.

X sei wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und $\pi_1(X)$ sei endlich. Zeigen Sie unter Verwendung der universellen Überlagerung $p : \mathbb{R} \to S^1$, dass jede stetige Abbildung $f : X \to S^1$ nullhomotop ist.

Abgabe in der Vorlesung am 28.04.2016.