Prof. Dr. J. Ruppenthal
S. Tilson, Ph.D.

Wuppertal, 21.01.2019

Einführung in die Topologie (WS 2018/19)

Übungsblatt 14

Aufgabe 1.

(a) Sei X ein wegzusammenhängender Raum und $x_0, x_1 \in X$. Zeigen Sie, dass dann $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ gilt.

(b) Untersuchen Sie den Isomorphismus aus (a) auf Eindeutigkeit.

(c) Gilt die Aussage aus (a) noch, falls X nicht wegzusammenhängend ist?

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie: $\big([S^1, S^1], c_1, \bullet, ()^{-1}\big)$ ist eine Gruppe, wobei $f \bullet g : z \mapsto f(z) \cdot g(z)$ die punktweise Multiplikation und $(f)^{-1} : z \mapsto f(z)^{-1}$ das punktweise Inverse komplexer Zahlen ist.

(b) Zeigen Sie: $\deg \circ V : \big(\pi_1(S^1, 1), \star\big) \to (\mathbb{Z}, +)$ ist ein Gruppenisomorphismus.

(c) Ist im punktierten Fall $[f * g] = [f \bullet g]$ in $\pi_1(S^1, 1)$?

Aufgabe 3.
Es sei (G, μ, e) eine topologische Gruppe. Betrachten Sie auf der Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ die Verknüpfung $[\gamma] \odot [\eta] := [\gamma \cdot \eta]$, wobei

$$\gamma \cdot \eta : [0,1] \to G,\ t \mapsto \mu\big(\gamma(t), \eta(t)\big)$$

ist. Zeigen Sie:

(a) Diese Verknüpfung stimmt mit der auf $\pi_1(G, e)$ üblichen überein.

(b) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ ist abelsch.

Aufgabe 4.
Zeigen Sie:

$$\pi_1 : \underline{Top}_\bullet \longrightarrow \underline{Gruppen}$$

ist ein Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen.

Abgabe in der Vorlesung am 28.01.2019.