Prof. Dr. J. Ruppenthal
Sean Tilson, Ph.D.

Wuppertal, 19.11.2018

Einführung in die Topologie (WS 2018/19)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1.
Es sei $C_0 := [0,1]$, für $n \geq 1$ sei induktiv

$$C_n \;:=\; C_{n-1} \cap \left([0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{3^{n-1}} \left(\frac{3k-2}{3^n}, \frac{3k-1}{3^n} \right) \right)$$

und $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ die sogenannte *Cantormenge*. Zeigen Sie, dass $C \subset \mathbb{R}$ eine nicht diskrete aber total unzusammenhängende Menge ist.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann Hausdorffsch ist, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X$ abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Produkt $X \times Y$ zweier Hausdorffräume X und Y wieder ein Hausdorffraum ist.

Aufgabe 3.
Der Unterraum $Z = A \cup B$ der Ebene $\mathbb{R}^2$ werde als Vereinigung definiert durch:

$$\begin{aligned} A_n &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ y = x/n\right\} \quad \text{für} n \in \mathbb{N} \\ B &:= \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\} \\ A &:= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Wegzusammenhangskomponenten und die Zusammenhangskomponenten von Z.

Aufgabe 4.
Es sei X ein topologischer Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass X genau dann normal ist, wenn das folgende gilt: Zu je zwei Mengen $A \subset U \subset X$, wobei A abgeschlossen und U offen ist, existiert eine offene Menge V mit:

$$A \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Abgabe in der Vorlesung am 26.11.2018.