Prof. Dr. J. Ruppenthal
Sean Tilson, Ph.D.

Wuppertal, 24.10.2018

Einführung in die Topologie (WS 2018/19)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Die euklidische Topologie des $\mathbb{R}^n$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(b) Die diskrete Topologie auf einer beliebigen Menge erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom genau dann, wenn die Menge abzählbar ist.

Zusatzaufgabe (ohne Punkte). Ermitteln Sie in der Literatur, was man unter dem ersten Abzählbarkeitsaxiom versteht, und beantworten Sie die Frage, ob der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Topologie dieses erfüllt.

Aufgabe 2.
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige nichtleere Teilmenge. Für $x \in X$ sei

$$d_A(x) \quad := \quad \inf \big\{ d(x, a) : a \in A \big\}$$

Zeigen Sie, dass $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und dass $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow d_A(x) = 0$.

Aufgabe 3.

(a) Für eine beliebige Menge X und eine Teilmenge $M \subset X$ bezeichnet

$$\chi_M : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \;\; \chi_M(x) := \begin{cases} 1 & , \; x \in M, \\ 0 & , \; x \notin M, \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von M. Es sei nun X ein topologischer Raum, $M \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass χ_M genau dann stetig ist, wenn M in X sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

(b) Es bezeichne nun τ_1 die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ und τ_2 die Topologie der koendlichen Mengen, d.h.

$$\tau_2 \;\; = \;\; \{ U \subset \mathbb{R} : U = \emptyset \text{ oder } \mathbb{R} \setminus U \text{ besteht aus endlich vielen Punkten } \}.$$

Zeigen Sie, dass es sich bei τ_2 tatsächlich um eine Topologie handelt und untersuchen Sie die Abbildungen

$$f : (\mathbb{R}, \tau_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_2), \;\; x \mapsto x^2,$$
$$g : (\mathbb{R}, \tau_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_1), \;\; x \mapsto x^2$$

auf Stetigkeit.

Abgabe in der Vorlesung am 29.10.2018. Ausnahmsweise sind "verspätete" Abgaben in der Vorlesung am 31.10.2018 gestattet.