Prof. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 17.10.2018

Einführung in die Topologie (WS 2018/19)
Übungsblatt 2

Aufgabe 1.
Seien A und B Teilmengen eines topologischen Raumes X. Zeigen Sie:

(a) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Geben Sie auch ein Gegenbeispiel für die Inklusion $\supset$ an.

(b) $\partial A = \emptyset \iff A$ ist offen und abgeschlossen.

(c) Bestimmen Sie $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$ und ∂A für $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

  (i) in $\mathbb{R}^2$,
  (ii) in $D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$,
  (iii) in A.

Aufgabe 2.
Untersuchen Sie die folgende Menge auf Offenheit und Abgeschlossenheit. Bestimmen Sie jeweils auch die abgeschlossene Hülle, den offenen Kern und den Rand:

$$M \quad = \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left|(x, y) - (\tfrac{1}{2^n}, 0)\right| < \tfrac{1}{2^{n+2}}\right\}.$$

Aufgabe 3.
Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *offen*, falls $f(U)$ in Y offen ist für jede offene Menge $U \subset X$. Analog heißt $f : X \longrightarrow Y$ *abgeschlossen*, falls $f(A)$ in Y abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$.

(a) Geben Sie je ein Beispiel einer Abbildung an, die offen aber nicht abgeschlossen ist, und einer, die abgeschlossen aber nicht offen ist.

(b) Untersuchen Sie, ob die Projektion $p_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ offen oder abgeschlossen ist.

(c) Untersuchen Sie, ob die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $x \mapsto \big(\cos(x), \sin(x)\big)$ mit $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ offen oder abgeschlossen ist.

Aufgabe 4.

(a) Besitzt $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik eine abzählbare Basis?

(b) Besitzt $\mathbb{R}$ mit der diskreten Metrik eine abzählbare Basis?

(c) Definiert jede Subbasis eine Topologie? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Abgabe in der Vorlesung am 24.10.2018.