

Ausarbeitung der Vorlesung

Mathematik 2

Studiengang Master Sicherheitstechnik

SoSe 2015 - apl. Prof. Dr. G. Herbort



Bergische Universität Wuppertal

Quellen

D. Müller-Wiechards: *Transformationen und Signale*, Teubner Verlag

K. Meyberg-P. Vachenaue: *Höhere Mathematik*, Bd. 2, Springer-Verlag

Th. Rießinger: *Mathematik für Ingenieure*, Springer-Verlag

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Vorbereitungen	5
1.1	Motivierende Beobachtungen: Wo braucht man Fourieranalysis?	5
1.2	Hintergrundmaterial	9
2	Fourierreihen	25
2.1	Trigonometrische Reihen	25
2.2	Rechnen mit Fourierreihen	33
2.3	Konvergenz bei Fourierreihen	42
3	Die Fouriertransformation	61
3.1	Uneigentliche Integrale	61
3.2	Die Fouriertransformierte	64
3.3	Die Fouriertransformierte auf L^2	78
3.4	Das Abtasttheorem	79
3.5	Physikalische Anwendungen	84
4	Die Laplace-Transformation	93
4.1	Definition und Beispiele	93
4.2	Rechenregeln für die Laplacetransformierte	97
4.3	Die Rücktransformation	105
4.4	Differenzialgleichungen	110

Kapitel 1

Einleitung und Vorbereitungen

1.1 Motivierende Beobachtungen: Wo braucht man Fourieranalysis?

Einige der Anwendungsgebiete der Fourier-Analyse sind: Signalverarbeitung, Bildverarbeitung, Schaltkreisentwurf, Elektrodynamik, Optik, Akustik, Quantenphysik, Astrophysik, in der Mathematik: Differentialgleichungen.

Unter einem Signal versteht man eine zeitabhängige Funktion, etwa einen Ton, einen elektrischen Strom u. ä. Ein *idealer Ton* wird mathematisch durch eine Funktion der Form

$$f(t) = A \sin(\omega t)$$

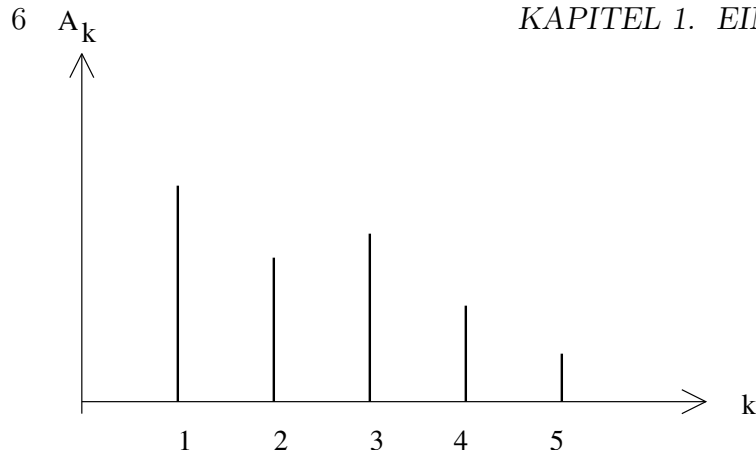
beschrieben. Seine Frequenz, welche die Tonhöhe kennzeichnet, ist dann durch $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ und seine Schwingdauer (Periode) durch $T = \frac{2\pi}{\omega}$ zu berechnen. Die Maßeinheit der Frequenz ist 1Hz, also 1 Schwingung pro Sekunde. Der Vorfaktor A (*die Amplitude*) misst die Lautstärke des Tons.

Ein *idealer Klang* ist die Überlagerung endlich vieler Töne, also

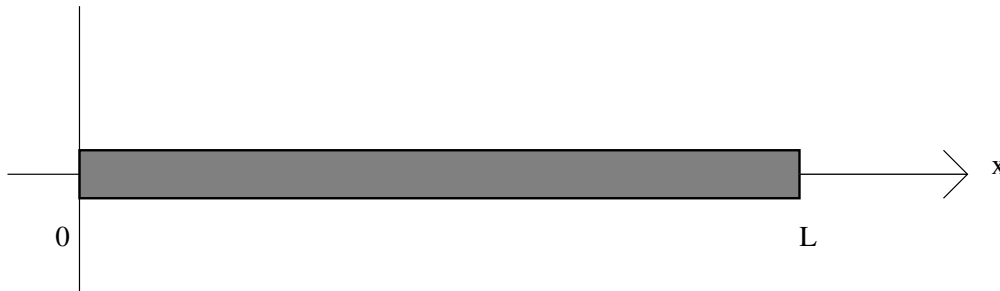
$$f(t) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(k\omega t)$$

Für $k > 1$ nennt man die Beiträge $A_k \sin(k\omega t)$ auch *Obertöne*.

Die Fourieranalyse eines idealen Klanges $f(t)$ mit Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ besteht nun in der Bestimmung der Koeffizienten A_k . Die Wertemenge, welche so entsteht, nennt man Spektrum. Eine graphische Darstellung sieht etwa so aus:



J. FOURIER selbst wurde auf den Ansatz, Funktionen durch unendliche trigonometrische Summen darzustellen durch sein Studium der Temperaturverteilung in einem Stab geführt:



Die analytische Beschreibung des Problems ist folgende: Die Temperaturverteilung $u(x, t)$ zur Zeit t an der Stelle x gehorcht der *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Man kann z.B. vorgeben, dass die Temperatur an den Stabenden 0 sein soll und die Temperaturverteilung zur Zeit 0 durch eine Funktion $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(L) = 0$ beschrieben wird, also $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ und $u(0, x) = f(x)$. Dann führt der Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N \phi_k(t) g_k(x)$$

zu einer partikulären Lösung, sofern f eine Linearkombination von Sinusfunktionen, also von der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^N C_k \sin(\pi k x / L)$$

ist. Denn dann ist u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, wenn nur g_k die Differenzialgleichung

$$g_k'' + \lambda_k^2 g_k = 0$$

mit einer geeigneten Zahl $\lambda_k \neq 0$ und ϕ_k die Gleichung

$$\phi_k' = -\lambda_k^2 \phi_k$$

1.1. MOTIVIERENDE BEOBACHTUNGEN: WO BRAUCHT MAN FOURIERANALYSIS?7

löst. Die Lösungen dieser Differenzialgleichungen sind bekannt:

$$\phi_k(t) = \gamma_k e^{-\lambda_k^2 t}, \quad g_k(x) = \alpha_k \cos(\lambda_k x) + \beta_k \sin(\lambda_k x)$$

mit geeigneten Koeffizienten $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$. Nun müssen wir nur noch $\gamma_k = 1, \alpha_k = 0, \beta_k = C_k$ und $\lambda_k = \frac{k\pi}{L}$ wählen.

Sollte f nun nicht selbst ein trigonometrisches Polynom sein, wird der oben beschriebene Ansatz mit einer endlichen Summe nicht zum Ziel führen. Fourier hatte in seiner Abhandlung aus dem Jahre 1807 die damals sensationelle Mitteilung gemacht, dass für jedes (vernünftige) f eine Lösung für die obige Randwertaufgabe in Form einer *unendlichen* trigonometrischen Summe möglich sei.

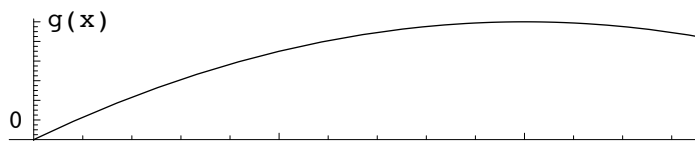
Somit ist die folgende Frage motiviert:

- Wann kann man eine Funktion f durch eine trigonometrische Reihe darstellen?

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k x)$$

Die Koeffizienten A_k definieren wieder das Spektrum der Funktion f .

Ein ähnlicher Ansatz wie bei der Wärmeleitungsgleichung kann auch bei der Behandlung der schwingenden eingespannten Saite erfolgreich gemacht werden.



Hier bedeutet g die Auslenkung der Saite aus der Ruhelage.

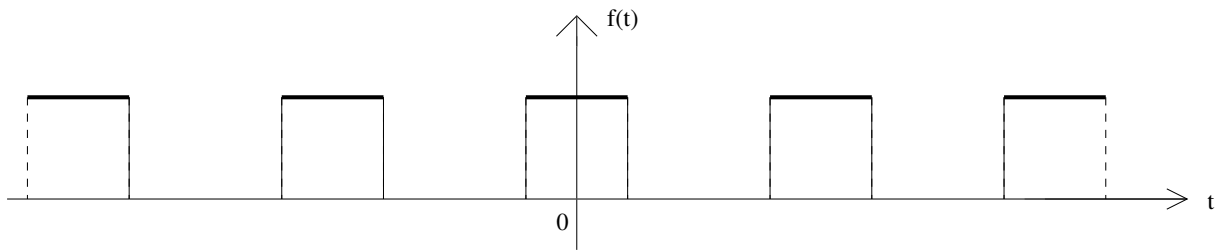
Die Fouriersche Idee lässt sich etwa für stetig differenzierbare periodische Funktionen verwirklichen. Man erhält mit den Fourierkoeffizienten ein "diskretes" Spektrum, aus dem man die Funktion wieder zurückgewinnen kann.

Ist die Funktion f (das Signal) aber aperiodisch, etwa so, dass $f(t) = 0$, wenn $t \notin [0, L]$, so kann man f durch ihre "Fouriertransformierte" beschreiben, man erhält ein kontinuierliches Spektrum.

Angenommen, man habe zunächst ein Signal der Form

$$f(t) := \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

das man periodisch mit einer Periode $T > 1$ auf ganz \mathbb{R} fortsetzt, also



Es ist möglich, dieses f als Reihe darzustellen:

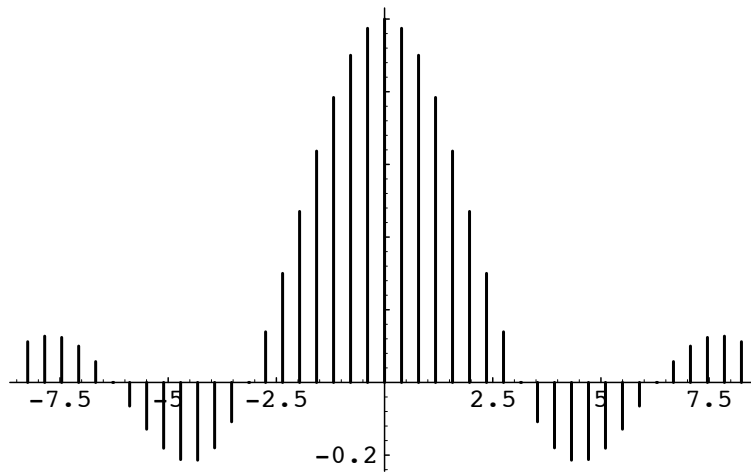
$$f(t) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right),$$

wobei die Koeffizienten a_k gegeben sind durch

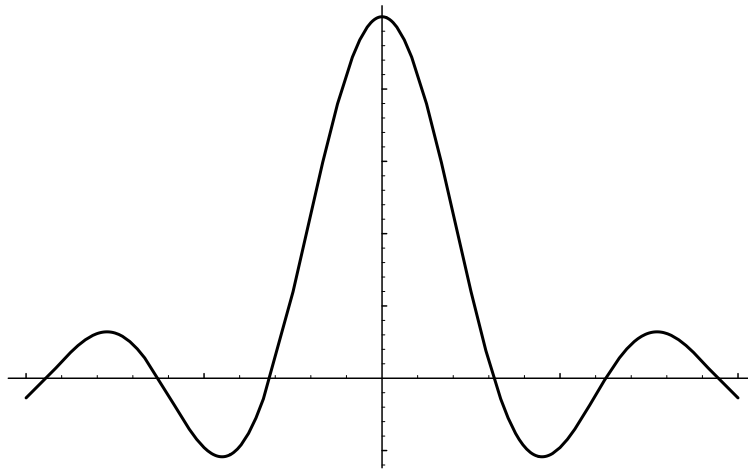
$$a_k = \frac{\sin(\pi k/T)}{\pi k/T}$$

Das Spektrum ist äquidistant mit Schrittweite $1/T$. Mit größer werdendem T nähert sich das Spektrum dem Zustand, kontinuierlich zu sein:

In unserem Spezialfall: $T = 8$, während $k = -21, \dots, 21$.



Im Grenzfall $T \rightarrow \infty$ wird daraus:



Die Frage stellt sich:

- Kann man eine Funktion aus ihrem (kontinuierlichen) Spektrum rekonstruieren?

1.2 Hintergrundmaterial

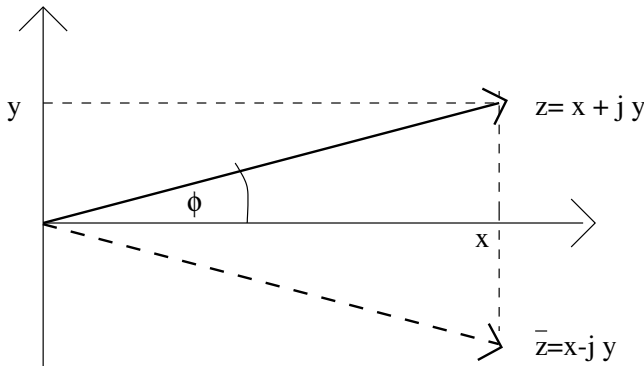
Wir werden im Folgenden immer wieder mit komplexen Zahlen zu tun haben. Daher erinnern wir uns an die wichtigen Eigenschaften des Bereichs \mathbb{C} der komplexen Zahlen.

Wie die reellen Zahlen eindeutig den Punkten auf der Zahlengeraden entsprechen, so entsprechen die komplexen Zahlen den Punkten in der Ebene und lassen sich schreiben als

$$z = x + \mathbf{j}y$$

Dabei sind x und y zwei reelle Zahlen und \mathbf{j} die *imaginäre Einheit*. Wir schreiben $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$.

Die durch Spiegeln an der x -Achse entstehende komplexe Zahl $\bar{z} = x - \mathbf{j}y$ wird auch die zu z komplex konjugierte Zahl genannt.



Mit den komplexen Zahlen wird gerechnet wie mit Vektoren in der Ebene:

$$\begin{aligned} (x_1 + \mathbf{j}y_1) + (x_2 + \mathbf{j}y_2) &= (x_1 + x_2) + \mathbf{j}(y_1 + y_2) \\ \alpha(x + \mathbf{j}y) &= \alpha x + \mathbf{j}\alpha y \end{aligned}$$

für reelle Zahlen α .

Das Besondere bei den komplexen Zahlen ist nun, dass man zwei komplexe Zahlen miteinander multiplizieren kann:

$$(x_1 + \mathbf{j}y_1) \cdot (x_2 + \mathbf{j}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathbf{j}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Wenn weiter $x_2 + \mathbf{j}y_2 \neq 0$ ist, so kann man dividieren

$$\frac{x_1 + \mathbf{j}y_1}{x_2 + \mathbf{j}y_2} = \frac{(x_1 + \mathbf{j}y_1) \cdot (x_2 - \mathbf{j}y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Beispiele: Zunächst haben wir $\mathbf{j}^2 = -1$, $(\frac{1+\mathbf{j}}{\sqrt{2}})^2 = \mathbf{j}$, ferner

$$(2 + 3\mathbf{j})(4 - 5\mathbf{j}) = 23 + 2\mathbf{j}, \quad (2.5 + 31.34\mathbf{j})(7.23 - 5.11\mathbf{j}) = 178.222 + 213.813\mathbf{j}$$

$$\frac{45.2 - 3.1\mathbf{j}}{3 - 8.2\mathbf{j}} = 2.11201 + 4.73951\mathbf{j}, \quad 1 - 5.8\mathbf{j} + \frac{3\mathbf{j}}{2.1 - 3\mathbf{j}} = 0.328859 - 5.3302\mathbf{j}$$

Definition. Für $z = x + \mathbf{j}y$ bezeichnet $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ den Betrag von z . Es gilt für $w := u + \mathbf{j}v$ folgendes

(a) $zw = xu - yv + \mathbf{j}(xv + yu)$, also

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 \\ &= x^2u^2 + y^2v^2 - 2xyuv + x^2v^2 + y^2u^2 + 2xyuv \\ &= x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2 \\ &= (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) \\ &= |z|^2|w|^2 \end{aligned}$$

also $|zw| = |z||w|$.

(b)

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re} z\bar{w} \end{aligned}$$

Anwendung bei der Analyse von Wechselstromkreisen

Einem Kondensator mit Kapazität C wird der Widerstandsoperator $1/\mathbf{j}\omega C$ zugeordnet, wenn an ihn eine Wechselspannung mit der Frequenz ω angelegt wird. Einer Spule kommt in analoger Weise der Widerstandsoperator $\mathbf{j}\omega L$ zu, wobei L die Induktivität der Spule sei.

Es gelten die Kirchhoffschen Regeln.

Schaltet man einen Widerstand R mit einer Spule in Serie und wird die Wechselspannung mit Frequenz ω angelegt, so gehört zu dieser Anordnung der komplexe Widerstand $R + \mathbf{j}\omega L$.

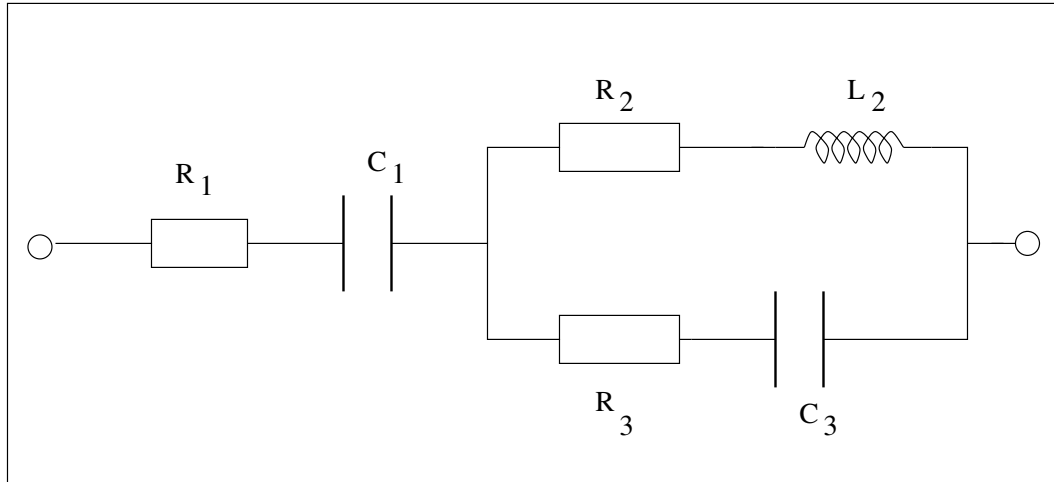
Werden beide parallel geschaltet, so hat die entstehende Schaltung den Widerstand

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{\text{ges}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathbf{j}\omega L}$$

Entsprechendes gilt für Serien-oder Parallelschaltungen von Widerstand und Kondensator.

Hat eine Anordnung den komplexen Widerstand \mathcal{R} , so wird $|\mathcal{R}|$ als ihr *Scheinwiderstand* bezeichnet.

Beispiel: Für die folgende Schaltung berechnen wir den Scheinwiderstand:



Die Serienschaltung aus R_2 und der Spule hat den Widerstand $\mathcal{R}_2 = R_2 + \mathbf{j}\omega L_2$, die Serienschaltung aus R_3 und dem Kondensator mit Kapazität C_3 den Widerstand $\mathcal{R}_3 = R_3 - \mathbf{j}/\omega C_3$. Die Parallelschaltung von beiden Serienschaltungen hat also den Widerstand

$$\mathcal{R}_{23} = \frac{1}{\frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3}} = \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}$$

So finden wir für die obige Schaltung den Gesamtwiderstand

$$\mathcal{R}_{\text{ges}} = \mathcal{R}_1 - \frac{\mathbf{j}}{\omega C_1} + \mathcal{R}_{23}$$

Ist etwa $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $R_3 = 100\Omega$, sowie $C_1 = 20\mu F$, $C_3 = 10\mu F$ und $L_2 = 0,1\text{H}$, so gilt im Falle $\omega = 500\text{Hz}$ folgendes:

$$\mathcal{R}_2 = 50 + \mathbf{j}50, \quad \mathcal{R}_3 = 100 - \mathbf{j}\frac{1}{500 \cdot 10^{-5}} = 100 - 200\mathbf{j},$$

$$\mathcal{R}_{23} = \frac{(50 + 50\mathbf{j})(100 - 200\mathbf{j})}{150 - 150\mathbf{j}} = \frac{5000(1 + \mathbf{j})(1 - 2\mathbf{j})}{150(1 - \mathbf{j})} = \frac{10000\mathbf{j}(1 - 2\mathbf{j})}{300} = \frac{100(2 + \mathbf{j})}{3}$$

und

$$\mathcal{R}_{\text{ges}} = 100 - \mathbf{j}100 + \frac{100(2 + \mathbf{j})}{3} = 100\left(1 - \mathbf{j} + \frac{2 + \mathbf{j}}{3}\right) = 100 \frac{5 - 2\mathbf{j}}{3}$$

Also wird

$$|\mathcal{R}_{\text{ges}}| = \frac{100}{3} \cdot \sqrt{29} \approx 179.505$$

Potenzen und Wurzeln

Die Quadratwurzel

Ist $w := u + \mathbf{j}v$ eine Zahl $v \neq 0$, so finden wir mit dem Ansatz $z := x + \mathbf{j}y$ eine Lösung zur Gleichung $z^2 = w$, wenn wir beachten, dass

$$x^2 - y^2 + 2jxy = w = u + \mathbf{j}v$$

gilt. Es muss nämlich nun $xy = \frac{v}{2}$ werden. Dann ist $x, y \neq 0$. Setzen wir $y = \frac{v}{2x}$ ein, so folgt

$$x^2 - \frac{v^2}{4x^2} = x^2 - y^2 = u$$

oder

$$x^4 - ux^2 = \frac{v^2}{4}, \quad \left(x^2 - \frac{u}{2}\right)^2 = \frac{u^2 + v^2}{4} = \frac{|w|^2}{4}$$

Somit ist

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{u + |w|}$$

und weiter

$$y = \frac{v}{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v}{\sqrt{u + |w|}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v}{|v|} \sqrt{-u + |w|}$$

Also finden wir mit

$$z_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{u + |w|} + \mathbf{j} \frac{v}{|v|} \sqrt{-u + |w|} \right)$$

eine Lösung zu $z^2 = w$. Die andere Lösung ist $z_2 := -z_1$.

Beispiel. Ist $w = -\frac{3}{4} - \mathbf{j}$, so ist $|w| = \frac{5}{4}$ und

$$z_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \mathbf{j} \sqrt{2} \right) = \frac{1}{2} - \mathbf{j}$$

eine Quadratwurzel aus w , die andere ist dann $z_2 := -\frac{1}{2} + \mathbf{j}$.

Komplexe Exponentialfunktion

Folgende komplexe Funktion ist für uns von großer Bedeutung:

Definition: Ist $z = x + \mathbf{j}y \in \mathbb{C}$ mit reellen x, y , so setzen wir

$$e^z = \exp(z) = e^x (\cos y + \mathbf{j} \sin y)$$

und nennen dies die komplexe Exponentialfunktion.

Wir stellen die wichtigen Eigenschaften dieser Funktion zusammen in dem folgenden:

1.2.1 Satz. a) Die Exponentialfunktion besitzt das Additionstheorem

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

b) $e^0 = 1$ und daher $e^{-z} e^z = 1$, insbesondere ist $e^z \neq 0$ für alle z .

c) $|e^z| = e^x$, wenn $x = \operatorname{Re} z$ und $e^{jy} = 1$ für jedes $y \in \mathbb{R}$. Ferner ist die Polarform einer komplexen Zahl $z = r(\cos \phi + \mathbf{j} \sin \phi)$ als $z = r e^{j\phi}$ darstellbar.

d) $e^{z+2\pi j} = e^z$, die komplexe Exponentialfunktion hat also die Periode $2\pi j$.

e) Zu jedem Punkt $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ gibt es $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$. Wenn $e^a = e^b$, so gilt $a = b + 2\pi k j$, für eine geeignete ganze Zahl k .

Beweis. a) bis d) lassen sich direkt aus der Definition durch Nachrechnen herleiten.

Zu e) Schreiben wir w in Polarform an: $w = r(\cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha)$, so ist $z = \ln r + i\alpha$ eine Zahl mit $e^z = w$.

Wenn $e^a = e^b$ ist, so folgt $e^{a-b} = 1$. Es genügt also, wenn wir zeigen: Ist $e^a = 1$, so gilt $a = 2\pi k j$, für eine geeignete ganze Zahl k . Zunächst folgt, dass $a = \mathbf{j} t$ für eine reelle Zahl t ist, denn $e^{\operatorname{Re} a} = 1$, und die (reelle) Exponentialfunktion wächst streng monoton, so dass $\operatorname{Re} a = 0$ sein muss. Für t gilt aber $\cos t = 1$, $\sin t = 0$, woraus folgt, dass t ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein muss. □

Jede komplexe Zahl $z = x + \mathbf{j} y$ kann in der Polarform

$$z = x + \mathbf{j} y = r(\cos \phi + \mathbf{j} \sin \phi)$$

dargestellt werden. Dabei ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von z und ϕ der Winkel zwischen dem zu z gehörigen Ortsvektor in der Ebene und der x -Achse.

Wenn nun $w = s(\cos \psi + \mathbf{j} \sin \psi)$ eine weitere Zahl ist, so gilt

$$zw = rs(\cos(\phi + \psi) + \mathbf{j} \sin(\phi + \psi))$$

Für Potenzen haben wir dann

$$z^k = r^k(\cos(k\phi) + \mathbf{j} \sin(k\phi))$$

Die Umkehrung zum Potenzieren ist das Wurzelziehen:

Ist $k > 1$ eine ganze Zahl, so wird

$$z_k^{(0)} := \sqrt[k]{r} \left(\cos\left(\frac{\phi}{k}\right) + \mathbf{j} \sin\left(\frac{\phi}{k}\right) \right)$$

eine Zahl mit $(z_k^{(0)})^k = z$. Wir finden, wenn $r > 0$ ist, weitere k .te Wurzeln, nämlich

$$\begin{aligned} z_k^{(m)} &= \sqrt[k]{r} \left(\cos\left(\frac{\phi + 2\pi m}{k}\right) + \mathbf{j} \sin\left(\frac{\phi + 2\pi m}{k}\right) \right) \\ &= z_k^{(0)} \left(\cos\left(\frac{2\pi m}{k}\right) + \mathbf{j} \sin\left(\frac{2\pi m}{k}\right) \right), \quad m = 0, \dots, k-1 \end{aligned}$$

Beispiel: Was sind die 3. Wurzeln aus der Zahl $z = 6 + \mathbf{j}$?

Dazu schreiben wir

$$z = \sqrt{37}(\cos \phi + \mathbf{j} \sin \phi),$$

wobei $\phi = \arctan(1/6) = 0.16549$. Es folgt dann

$$\begin{aligned} z^{(0)} &= \sqrt[6]{37}(\cos(\phi/3) + \mathbf{j} \sin(\phi/3)) \\ &= 1.82544(\cos(0.0550497) + \mathbf{j} \sin(0.0550497)) = 1.82544(0.998485 + \mathbf{j} 0.0550497) \\ &= 1.82267 + 0.10049\mathbf{j} \end{aligned}$$

Ähnlich erhält man die beiden anderen 3. Wurzeln:

$$z^{(1)} = -0.998362 + 1.52823\mathbf{j}; \quad z^{(2)} = -0.824304 - 1.62872\mathbf{j}$$

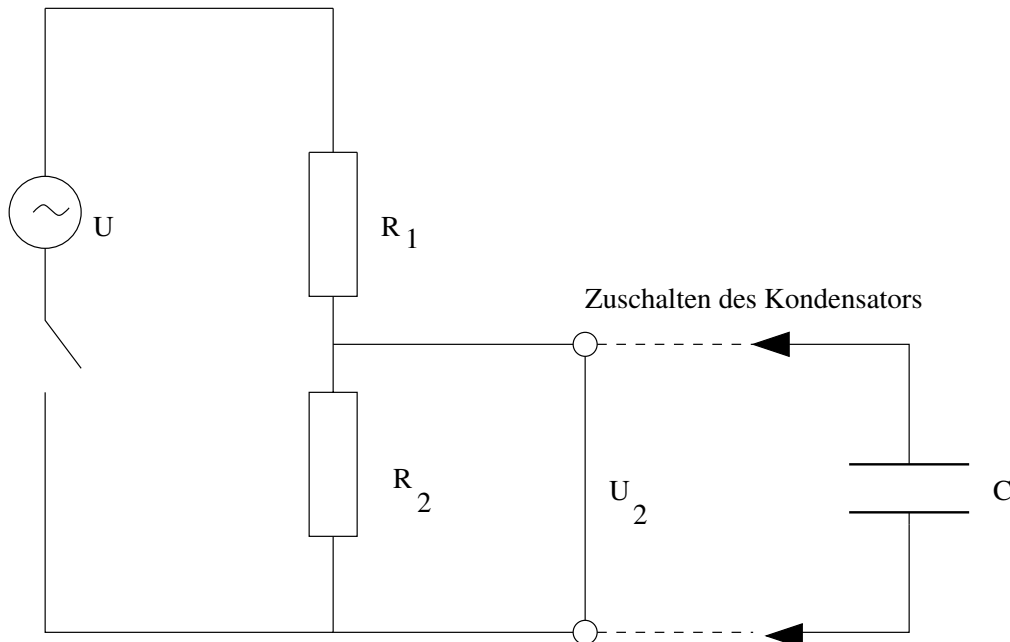
Innerhalb der komplexen Zahlen kann man alle quadratischen und alle anderen algebraischen Gleichungen beliebigen Grades lösen.

Beispiele a) Die Gleichung $x^2 - 3.2x + 67 = 21$ wird durch $z_1 := 1.6 - 6.5909\mathbf{j}$ und $z_2 = 1.6 + 6.5909\mathbf{j}$ gelöst.

b) Die Gleichung $x^3 + 4x + 8 = 0$ hat die 3 Lösungen

$$z_1 = -1.36466, \quad z_2 = 0.682328 + 2.32308\mathbf{j}, \quad z_3 = 0.682328 - 2.32308\mathbf{j}$$

Beispiel: Spannungsteiler. Die folgende Schalter wird als *Spannungsteiler* bezeichnet:



Wir untersuchen zuerst den "unbelasteten" Fall, also den Fall, in dem der Kondensator nicht mit R_2 parallel geschaltet ist.

Dann ist der Strom I bei R_1 derselbe wie bei R_2 , also haben wir

$$U = (R_1 + R_2) \cdot I, \quad U_2 = R_2 \cdot I$$

Also ist

$$U_2 = R_2 \cdot I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$

Nun soll der Kondensator zugeschaltet werden. Dann ist R_2 durch den Widerstandsoperator

$$\mathcal{R}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \mathbf{j}\omega C} = \frac{R_2}{1 + \mathbf{j}\omega R_2 C}$$

zu ersetzen. Wir erhalten als Spannungsabfall an dem " R_2C -Element"

$$\mathcal{U}_2 = \frac{\mathcal{R}_2}{R_1 + \mathcal{R}_2} \cdot U$$

Angenommen, man habe die Daten $R_1 = 400\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, U sei eine Wechselspannung mit Frequenz 50 Hz und $C = 20\mu F$. Dann haben wir wegen $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} = 100\pi \text{ Hz}$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{100}{1 + \mathbf{j}100\pi \cdot 100 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = \frac{100}{1 + \mathbf{j}0.2\pi} = 71.6957 - 45.0477\mathbf{j}$$

Dann wird aber

$$\frac{\mathcal{R}_2}{R_1 + \mathcal{R}_2} = \frac{71.6957 - 45.0477\mathbf{j}}{471.6957 - 45.0477\mathbf{j}} = 0.15966 - 0.0802538\mathbf{j} = 0.178695 \cdot e^{-\mathbf{j} \cdot 0.465769}$$

und schließlich

$$\mathcal{U}_2 = 220 \cdot 0.178695 \cdot e^{-\mathbf{j} \cdot 0.465769} = 39.313 \cdot e^{-\mathbf{j} \cdot 0.465769}$$

Die beim R_2C -Element abfallende Spannung hat die Amplitude 39.313V und gegenüber U einen Phasenunterschied von $0.465769 \approx 26.68^\circ$.

Beispiel: Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen. Gegeben seien zwei Schwingungen mit der Darstellung

$$f_1(t) := A_1 \sin(\omega t + \delta_1), \quad f_2(t) := A_2 \sin(\omega t + \delta_2)$$

Dann errechnen wir für die Überlagerung beider Schwingungen

$$\begin{aligned} f_3(t) &:= f_1(t) + f_2(t) \\ &= \text{Im} (A_1 e^{\mathbf{j}(\omega t + \delta_1)} + A_2 e^{\mathbf{j}(\omega t + \delta_2)}) \\ &= \text{Im} (e^{\mathbf{j}\omega t} (A_1 e^{\mathbf{j}\delta_1} + A_2 e^{\mathbf{j}\delta_2})) \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$A_1 e^{j\delta_1} + A_2 e^{j\delta_2} = |A_1 e^{j\delta_1} + A_2 e^{j\delta_2}| \cdot e^{j\delta_{12}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\delta_1 - \delta_2)} \cdot e^{j\delta_{12}}$$

Setzen wir dies ein, finden wir

$$\begin{aligned} f_3(t) &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\delta_1 - \delta_2)} \operatorname{Im} (e^{j(\omega t + \delta_{12})}) \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\delta_1 - \delta_2)} \cdot \sin(\omega t + \delta_{12}) \end{aligned}$$

Beispiel hierzu: Was ist $3 \sin(2t + 2.5) + 4 \sin(2t + 5)$? Hier ist $A_1 = 3, A_2 = 4, \delta_1 = 2.5 \approx 143.239^\circ, \delta_2 = 5 \approx 286.479^\circ$. Es folgt für die Amplitude A_3 der Überlagerung

$$A_3 = |3e^{2.5j} + 4e^{5j}| = \sqrt{25 + 24 \cos 2.5} = 2.40196$$

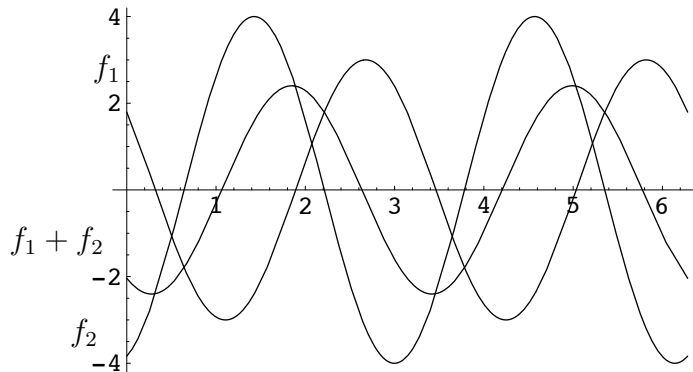
Weiter ist

$$3e^{2.5j} + 4e^{5j} = -1.268 - 2.04028j = 2.40196 e^{j \cdot 4.15605} = 2.40196 e^{-j \cdot 2.12714}$$

Also:

$$f_1(t) + f_2(t) = 2.40196 \sin(2t - 2.12714)$$

Hier ist ein Bild dazu



Das Differenzieren und Integrieren komplexwertiger Funktionen

Ist I ein Intervall in \mathbb{R} , so lässt sich eine komplexwertige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ schreiben als $f = u + jv$, mit reellwertigen Funktionen $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$. Das bedeutet: Für jedes $t \in I$ ist

$$f(t) = u(t) + jv(t)$$

Wir schreiben dann wieder $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$.

Definition: Ist $I = (a, b)$ ein offenes Intervall und $t_0 \in I$, so nennen wir eine komplexe Funktion $f = u + \mathbf{j}v$ (mit $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$) *stetig* in t_0 , wenn u und v es sind, in entsprechender Weise definieren wir die Differenzierbarkeit von f in t_0 . Die Ableitung von f in t_0 ist gegeben durch

$$f'(t_0) = \lim_{s \rightarrow t_0} \frac{f(s) - f(t_0)}{s - t_0} = u'(t_0) + \mathbf{j}v'(t_0)$$

Beispiel a) Die Funktion $f(t) = (t^2 + 2t + \mathbf{j}t^3)^4$ ist überall differenzierbar. Es gilt nun

$$u(t) = \operatorname{Re} f(t) = 16t^4 + 32t^5 + 24t^6 + 8t^7 - 23t^8 - 24t^9 - 6t^{10} + t^{12}$$

$$v(t) = \operatorname{Im} f(t) = 32t^6 + 48t^7 + 24t^8 + 4t^9 - 8t^{10} - 4t^{11}$$

Daraus können wir alles ablesen.

Es folgt

$$u'(t) = 12t^{11} - 60t^9 - 216t^8 - 184t^7 + 56t^6 + 144t^5 + 160t^4 + 64t^3$$

und

$$v'(t) = -44t^{10} - 80t^9 + 36t^8 + 192t^7 + 336t^6 + 192t^5$$

b) Die Funktion $g(t) := \frac{3+t^2}{2-2t-\mathbf{j}t}$ ist überall differenzierbar: Hier gilt

$$\operatorname{Re} g(t) = \frac{6 - 6t + 2t^2 - 2t^3}{4 - 8t + 5t^2}, \quad \operatorname{Im} g(t) = \frac{3t + t^3}{4 - 8t + 5t^2}$$

und entsprechend

$$(\operatorname{Re} g)'(t) = \frac{2(-5t^4 + 16t^3 - 5t^2 - 22t + 12)}{(5t^2 - 8t + 4)^2}$$

und

$$(\operatorname{Im} g)'(t) = \frac{5t^4 - 16t^3 - 3t^2 + 12}{(5t^2 - 8t + 4)^2}$$

Es liegt nahe zu fragen, ob die Ableitung einer solchen Funktion nicht auch einfacher zu berechnen sei, also ohne den Real- und Imaginärteil der Funktion vorher ausrechnen zu müssen. Das ist möglich, denn es gilt wieder die Produktregel für das Ableiten, ebenso die Kettenregel.

1.2.2 Hilfssatz. a) Wenn $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ bei $t_0 \in I$ differenzierbar sind, so gilt das auch für fg , und es ist

$$(fg)'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0)$$

b) Ist J ein Intervall und $a_0 \in J$ und ist $\varphi : J \rightarrow I$ in a_0 differenzierbar, so gilt: Ist $h : I \rightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 := \varphi(a_0)$ differenzierbar, so ist auch $h \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{C}$ in a_0 differenzierbar, und es gilt

$$(h \circ \varphi)'(a_0) = h'(x_0)\varphi'(a_0)$$

Beweis. a) Für $s \neq t_0$ haben wir

$$\frac{fg(s) - fg(t_0)}{s - t_0} = \frac{f(s) - f(t_0)}{s - t_0}g(s) + f(t_0)\frac{g(s) - g(t_0)}{s - t_0}$$

$$\xrightarrow{s \rightarrow t_0} f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0)$$

b) Gibt es eine Folge $(s_k)_k$ von Nullstellen von $\varphi - \varphi(a_0) = \varphi - x_0$, welche gegen a_0 konvergiert, während keine von ihnen gleich a_0 ist, so haben wir $\varphi'(a_0) = 0$, ebenso ist $h \circ \varphi(s_k) - h \circ \varphi(a_0) = 0$ für alle k , also auch $(h \circ \varphi)'(a_0) = 0$.

Gibt es eine solche Folge nicht, so ist auf einem kleinen Intervall M um a_0 stets $\varphi(s) - \varphi(a_0) \neq 0$, wenn $s \in M \setminus \{a_0\}$. Dann haben wir

$$\frac{h \circ \varphi(s) - h \circ \varphi(a_0)}{s - a_0} = \frac{h(\varphi(s)) - h(x_0)}{\varphi(s) - x_0} \frac{\varphi(s) - x_0}{s - a_0} \xrightarrow{s \rightarrow t_0} h'(x_0)\varphi'(a_0)$$

denn $\varphi(s) \rightarrow x_0$, wenn $s \rightarrow a_0$.

□

Beispiele: a) Ist $G : I \rightarrow \mathbb{C}$ in t_0 differenzierbar, so auch G^n für alle $n \in \mathbb{N}$ und, wenn $G(t_0) \neq 0$, auch für $n \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$(G^n)'(t_0) = nG^{n-1}(t_0)G'(t_0)$$

(Induktiv nach n zu beweisen).

b) Die Funktion $F(t) = (t^2 + 2t + \mathbf{j}t^3)^4$ hat die Form $F = G^4$ mit $G(t) = t^2 + 2t + \mathbf{j}t^3$. Es entsteht

$$F'(t) = 4(t^2 + 2t + \mathbf{j}t^3)^3(2t + 2 + 3\mathbf{j}t^2)$$

c) Ist f komplexwertig und differenzierbar, so ist $(e^{f(t)})' = f'(t)e^{f(t)}$.

Die Integration komplexer stetiger Funktionen ist wieder über die Integration der Real- und Imaginärteile erklärt:

Definition: Ist $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ komplexwertig und stetig auf dem beschränkten Intervall $I = [a, b]$, so setzen wir

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + \mathbf{j} \int_a^b v(t)dt,$$

wobei wieder $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$ sein soll.

Beispiel: Wir integrieren die Funktion $f(t) = (t + \mathbf{j}t^2)^3$ über $[0, 1]$. Zuerst haben wir

$$u(t) = -3t^5 + t^3, \quad v(t) = -t^6 + 3t^4$$

Es folgt sofort

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 u(t)dt + \mathbf{j} \int_0^1 v(t)dt \\
 &= \int_0^1 (-3t^5 + t^3)dt + \mathbf{j} \int_0^1 (-t^6 + 3t^4)dt \\
 &= \left(\left(-\frac{1}{2}\right)t^6 + \frac{1}{4}t^4 \right) \Big|_0^1 + \mathbf{j} \left(\left(-\frac{1}{7}\right)t^7 + \frac{3}{4}t^5 \right) \Big|_0^1 \\
 &= -\frac{1}{4} + \mathbf{j} \left(-\frac{1}{7} + \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4} + \mathbf{j} \frac{17}{28}
 \end{aligned}$$

Die aus für Integration reeller Funktionen bekannten Regeln gelten auch für komplexe Funktionen:

1.2.3 Satz. a) Es sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

wobei $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu f ist, also eine differenzierbare Funktion mit $F' = f$.

b) Sind $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbare Funktionen, so ist

$$\int_a^b f g'(t)dt = f g(b) - f g(a) - \int_a^b f' g(t)dt$$

Beispiel: a) Die Funktion $f(t) = (t + \mathbf{j}t^2)^2 = t^2(1 + \mathbf{j}t)^2$ lässt sich durch partielle Integration behandeln:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 t^2(1 + \mathbf{j}t)^2 dt = \frac{t^3}{3}(1 + \mathbf{j}t)^2 \Big|_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 t^3(1 + \mathbf{j}t)\mathbf{j} dt \\
 &= \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2\mathbf{j}}{3} \int_0^1 (t^3 + \mathbf{j}t^4)dt \\
 &= \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2\mathbf{j}}{3} \left(\frac{1}{4} + \mathbf{j} \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{2}{15} + \frac{1}{2}\mathbf{j}
 \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\int_a^b e^{\mathbf{j}tx} dx = \frac{1}{\mathbf{j}t} (e^{\mathbf{j}bt} - e^{\mathbf{j}at})$$

Mit der komplexen Exponentialfunktion können wir folgende "Orthogonalitätsrelationen" für die trigonometrischen Funktionen gewinnen:

1.2.4 Hilfssatz. a) Sind $k, m \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\int_0^{2\pi} e^{j(k-m)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k \neq m \\ 2\pi & \text{wenn } k = m \end{cases}$$

b) Wenn $k, m \geq 0$, so gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k \neq m \\ \pi & \text{wenn } k = m \neq 0 \end{cases}$$

c) Für alle $k, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(mx) dx = 0$$

d) Für $k, m \geq 0$ haben wir:

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k \neq m \\ \pi & \text{wenn } k = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{wenn } k = m = 0 \end{cases}$$

Beweis. Zu a): Ist $k = m$, so ist der Integrand konstant 1 und die Behauptung klar. Anderenfalls haben wir mit $\frac{-j}{(k-m)} e^{j(k-m)x}$ eine Stammfunktion für $e^{j(k-m)x}$, die an den beiden Integrationsgrenzen verschwindet.

Zu b) Angenommen, $k \neq m$. Wir schreiben $\sin(kx) = \frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2j}$ und erhalten:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) e^{-jmx} dx = \frac{1}{2j} \left(\int_0^{2\pi} e^{j(k-m)x} dx - \int_0^{2\pi} e^{-j(k+m)x} dx \right)$$

Zerlegen wir dies in den Real- und den Imaginärteil, so finden wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(mx) dx &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} \sin(kx) e^{-jmx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \sin((k-m)x) dx + \int_0^{2\pi} \sin((k+m)x) dx \right) = 0 \end{aligned}$$

für alle $k, m \in \mathbb{Z}$ und weiter

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(mx) dx &= -\operatorname{Im} \left(\int_0^{2\pi} \sin(kx) e^{-jmx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \cos((k-m)x) dx - \int_0^{2\pi} \cos((k+m)x) dx \right) \end{aligned}$$

Wenn $k, m \geq 0$ und $k \neq m$, haben wir $k \pm m \neq 0$, also ist die rechte Seite in obiger Gleichung 0.

Wenn $k = m$, so errechnen wir:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(kx) dx = \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin^2(kx) k dx = \frac{1}{k} \int_0^{2k\pi} \sin^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi$$

Damit sind b) und c) bewiesen. Der Beweis von d) ergibt sich aus der Beziehung

$$\cos(kx) \cos(mx) = \cos((k+m)x) + \sin(kx) \sin(mx)$$

durch Integration über $[0, 2\pi]$.

□

Trigonometrische Polynome

Definition. a) Unter einem *komplexen trigonometrischen Polynom* verstehen wir eine endliche Summe der Form

$$P^*(t) := \sum_{k=-s}^r a_k e^{j\omega kt}$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$. Dabei sind $s, r \geq 0$ und $\omega > 0$.

Entsprechend bezeichnet man als *reelles trigonometrisches Polynom* eine endliche Summe der Form

$$P(t) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^r \alpha_k \sin(k\omega t) + \beta_k \cos(k\omega t)$$

mit Koeffizienten $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$. Dabei ist $r \geq 0$ und $\omega > 0$.

1.2.5 Hilfssatz. a) Jedes reelle trigonometrische Polynom

$$P(t) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^r \alpha_k \sin(k\omega t) + \beta_k \cos(k\omega t)$$

lässt sich als komplexes trigonometrisches Polynom darstellen: Es gilt

$$P(t) = \sum_{k=-r}^r a_k e^{j k \omega t}$$

wobei

$$a_k := \begin{cases} \frac{1}{2}(\beta_k - \mathbf{j} \alpha_k) & \text{wenn } k > 0 \\ \frac{1}{2}(\beta_{-k} + \mathbf{j} \alpha_{-k}) & \text{wenn } k < 0 \\ \alpha_0 & \text{wenn } k = 0 \end{cases}$$

b) Wenn

$$P(t) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^r \alpha_k \sin(k\omega t) + \beta_k \cos(k\omega t)$$

ein reelles trigonometrisches Polynom ist, so folgt aus $P = 0$, dass alle Koeffizienten schon verschwinden müssen.

c) Die entsprechende Aussage gilt bei komplexen trigonometrischen Polynomen.

Beweis. a) Das folgt aus der Darstellung

$$\cos(k\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\mathbf{j}k\omega t} + e^{-\mathbf{j}k\omega t}), \quad \sin(k\omega t) = \frac{1}{2\mathbf{j}}(e^{\mathbf{j}k\omega t} - e^{-\mathbf{j}k\omega t})$$

b) Mit dem Hilfssatz 1.2.4 folgt

$$\pi\alpha_m = \int_0^{2\pi/\omega} P(t) \sin(m\omega t) dt = 0$$

$$\pi\beta_m = \int_0^{2\pi/\omega} P(t) \cos(m\omega t) dt = 0, \quad m \neq 0$$

Ferner ist

$$2\pi\alpha_0 = \int_0^{2\pi/\omega} P(t) dt = 0$$

Damit ist b) bewiesen.

Genauso zeigt man c).

□

Approximation durch trigonometrische Polynome

Es gilt folgender Satz:

1.2.6 Satz (S. Bernstein). Ist $\tilde{f} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so konvergieren die durch

$$B_{n,\tilde{f}}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tilde{f}\left(-1 + \frac{2k}{n}\right) (x+1)^k (1-x)^{n-k}$$

gegen \tilde{f} , und zwar gilt

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |B_{n,\tilde{f}}(x) - \tilde{f}(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Weiter gilt der

1.2.7 Satz Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, gerade und T -periodisch, also $f(x+T) = f(x)$ für alle x , so gibt es eine stetige Funktion $\tilde{f} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \tilde{f}(\cos(\omega x))$. Dabei ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Insbesondere ist dann aber

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{n, \tilde{f}}(\cos(\omega x))$$

Mit einer der Übungsaufgaben folgt nun, dass alle $B_{n, \tilde{f}}(\cos(\omega x))$ trigonometrische Polynome sind.

Der Fall, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, T -periodisch und ungerade mit $f(T/2) = 0$ ist kann derart auf den vorherigen Satz reduziert werden, dass f als Grenzwert einer Folge der Form $\widehat{B}_n(\cos \omega x) \sin(\omega x)$ geschrieben werden kann. Ist schließlich f stetig und T -periodisch, so schreiben wir

$$f = f_g + f_u$$

mit

$$f_g(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad f_u(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Wenden wir als die oben stehenden Argumente an, erkennen wir den Satz

1.2.8 Satz. Jede stetige T -periodische Funktion f ist als Grenzwert einer Folge trigonometrischer Polynome der Form $p_n(\omega x)$ darstellbar.

Kapitel 2

Fourierreihen

2.1 Definition und Beispiele für trigonometrische Reihen

Definition. Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodisch mit der Periode $T > 0$, wenn

$$f(x + T) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Wir wollen für periodische Funktionen f die sog. *Fourierkoeffizienten* einführen. Dazu muss f "genügend" integrierbar sein:

Definition. a) Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ wird *stückweise stetig* genannt, wenn für $[a, b]$ eine Unterteilung $a < t_1 < t_2 < \dots < t_N < b$ so gefunden werden kann, dass f auf jedem Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ stetig ist.

b) Ist $f : [a, b] \rightarrow M$ stückweise stetig, und sind $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ die unter a) genannten Teilpunkte, so setzen wir

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{t_1} f(t)dt + \sum_{j=2}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t)dt + \int_{t_N}^b f(t)dt$$

Definition: Angenommen, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei periodisch mit der Periode $T > 0$ (dabei soll T die kleinste positive Periode sein). Wir nennen f stückweise stetig, wenn $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig ist. In diesem Fall definieren wir für $k \in \mathbb{Z}$ als den k -ten (komplexen) *Fourierkoeffizienten* $c_k^*(f)$ das Integral

$$c_k^*(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-jk\omega t} dt,$$

wobei

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

gesetzt wird.

d) Unter den Bedingungen unter c) sagen wir, der Funktion f werde die komplexe *Fourierreihe*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^*(f) e^{j\omega kt}$$

zugeordnet, in Zeichen

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^*(f) e^{j\omega kt}$$

Man beachte dabei:

Im Augenblick wird die Frage nach der Konvergenz dieser Reihe zurückgestellt !

Natürlich werden auf diese Frage noch einzugehen haben. Momentan jedoch interessieren wir uns nur für die Familie der Koeffizienten $c_k^*(f)$, welche in jedem Fall wohldefiniert ist.

Bei reellen Funktionen betrachten wir auch reelle Fourierreihen.

2.1.1 Hilfssatz. *Hat die T -periodische stückweise stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nur reelle Werte, so gilt für die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k^*(f)$, das folgende:*

$$c_{-k}^*(f) = \overline{c_k^*(f)}, \quad k \geq 0$$

Ferner ist

$$c_k^*(f) e^{j\omega kt} + c_{-k}^*(f) e^{-j\omega kt} = 2\operatorname{Re} c_k^*(f) \cos(k\omega t) - 2\operatorname{Im} c_k^*(f) \sin(k\omega t)$$

Beweis. Dazu beachten wir

$$T c_{-k}^*(f) = \int_0^T f(t) e^{-j\omega kt} dt = \overline{\int_0^T f(t) e^{j\omega kt} dt} = T \overline{c_k^*(f)}$$

wenn k positiv und ganz ist.

Die zweite Gleichheit rechnet man leicht nach: Es ist

$$\begin{aligned} c_k^*(f) e^{j\omega kt} + c_{-k}^*(f) e^{-j\omega kt} &= 2\operatorname{Re} (c_k^*(f) e^{j\omega kt}) \\ &= 2(\operatorname{Re} c_k^*(f)) \cos(k\omega t) - 2(\operatorname{Im} c_k^*(f)) \sin(k\omega t) \end{aligned}$$

□

Damit bleibt unsere Zuordnung zwischen Funktionen und Fourierreihen konsistent, wenn wir im Falle reeller Funktionen vereinbaren, dass ihnen die *reelle Fourierreihe*

$$c_0^*(f) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} c_k^*(f) \cos(k\omega t) - 2\operatorname{Im} c_k^*(f) \sin(k\omega t)$$

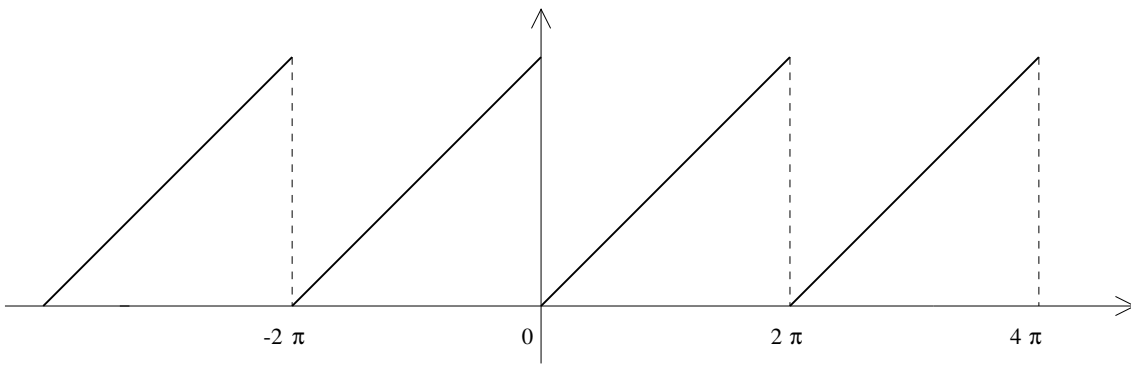
zugeordnet sein soll. Wir schreiben wieder

$$f \sim c_0^*(f) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} c_k^*(f) \cos(k\omega t) - 2\operatorname{Im} c_k^*(f) \sin(k\omega t)$$

Nun rechnen wir einige

Beispiele: a) Die Sägezahnfunktion $f_0(t) := t$, wenn $0 \leq t < 2\pi$ und $f(x) := f_0(x - 2\pi n)$, wenn n ganz ist und $x - 2\pi n \in [0, 2\pi)$.

Im Bild:



Dann wird $T = 2\pi, \omega = 1$ und daher

$$c_0^*(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f dt = \frac{1}{2\pi} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

und für $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_k^*(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t e^{-jkt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left. \frac{t}{-jk} e^{-jkt} \right|_0^{2\pi} + \frac{1}{jk} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-jkt} dt}_{=0} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{-jk} = \frac{j}{k} \end{aligned}$$

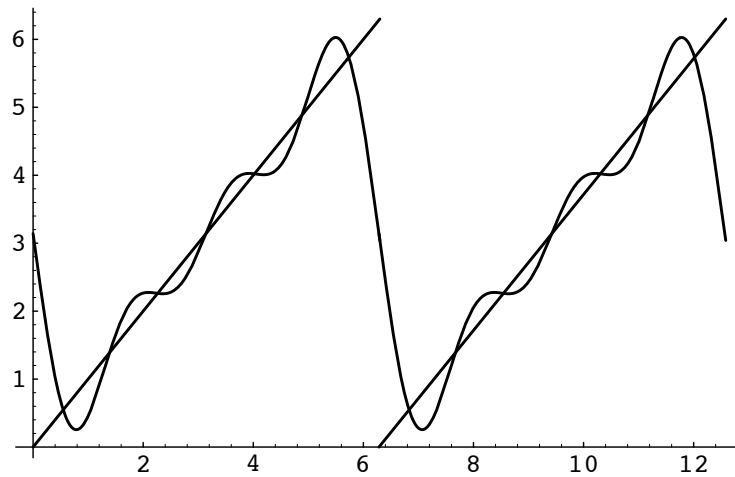
So finden wir

$$f \sim \pi + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{j}{k} e^{jkt}$$

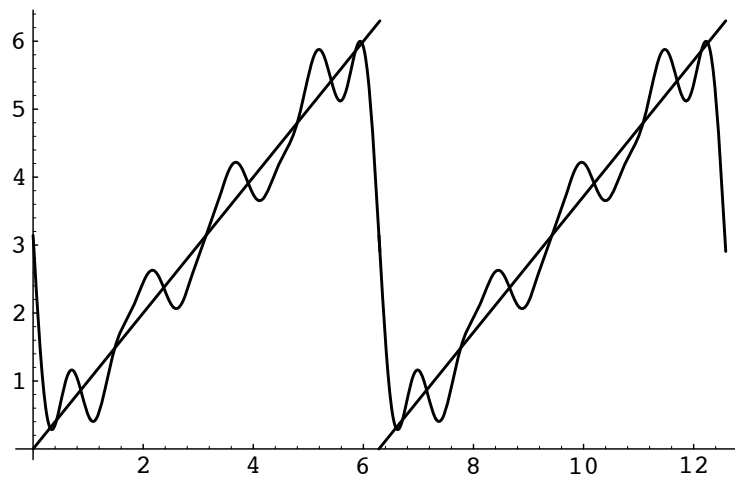
Da f reellwertig ist, haben wir weiter

$$f \sim \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}$$

Hier ist das Schaubild der endlichen Summe $s_4(x) = \pi - 2 \sum_{k=1}^4 \frac{\sin(kt)}{k}$ zusammen mit dem Graphen von f



und hier das von $s_8(x) = \pi - 2 \sum_{k=1}^8 \frac{\sin(kt)}{k}$, zusammen mit dem Graphen von f

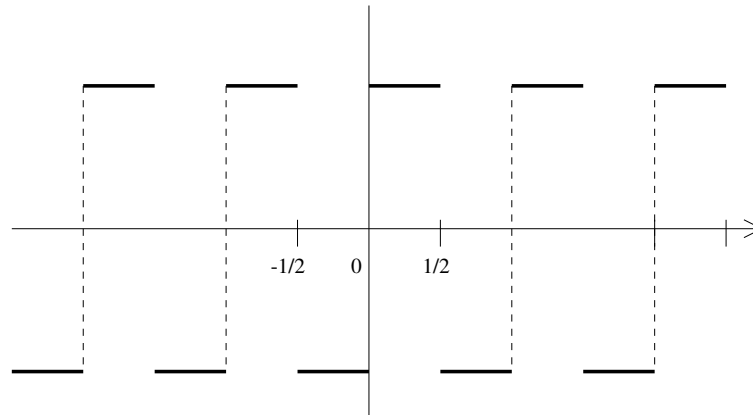


b) Die "pulsierende Funktion" $f(x) := f_0(x - n)$, wenn $n \in \mathbb{Z}$ so gewählt wird, dass $x - n \in$

$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ wobei

$$f_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{wenn } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Im Bild



Wir berechnen die Fourierkoeffizienten (nun ist $T = 1$ und $\omega = 2\pi$)

$$\begin{aligned} c_k^*(f) &= \int_0^1 f_0(t) e^{-2\pi j k t} dt \\ &= \int_0^{1/2} e^{-2\pi j k t} dt - \int_{1/2}^1 e^{-2\pi j k t} dt \\ &= \frac{j}{2\pi k} \left(e^{-2\pi j k t} \Big|_0^{1/2} - e^{-2\pi j k t} \Big|_{1/2}^1 \right) \\ &= \frac{j}{2\pi k} ((-1)^k - 1 - (1 - (-1)^k)) = \frac{j}{\pi k} ((-1)^k - 1) \end{aligned}$$

Somit wird

$$c_k^*(f) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ -\frac{2j}{\pi k} & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

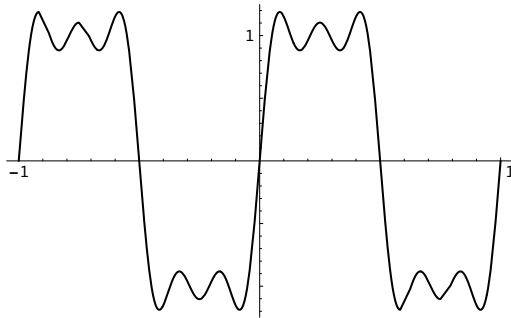
Wir haben also

$$f \sim -\frac{2j}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{e^{2\pi j k t}}{k}$$

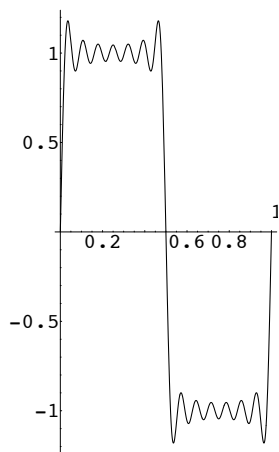
Da f reell ist:

$$f \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{\sin(2\pi kt)}{k} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2k-1)t)}{2k-1}$$

Auch hier vergleichen wir die endliche Teilsumme $s_4(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^3 \frac{\sin(2\pi(2k-1)t)}{2k-1}$ mit der Funktion f selbst:

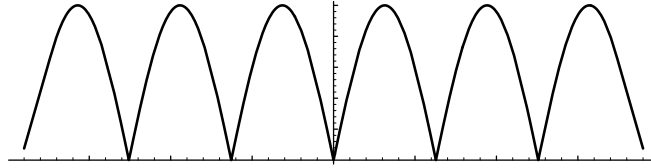


und hier für $s_7(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^7 \frac{\sin(2\pi(2k-1)t)}{2k-1}$



c) Der "zweiweg-gleichgerichtete" Sinus: $f(t) = |\sin t|$.

Schaubild:



Wir errechnen (mit $T = 2\pi, \omega = 1$):

$$\begin{aligned}
 2\pi c_k^*(f) &= \int_0^\pi \sin(t) e^{-\mathbf{j}kt} dt - \int_\pi^{2\pi} \sin(t) e^{-\mathbf{j}kt} dt \\
 &= \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(\int_0^\pi e^{\mathbf{j}(1-k)t} dt - \int_0^\pi e^{-\mathbf{j}(1+k)t} dt \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(\int_\pi^{2\pi} e^{\mathbf{j}(1-k)t} dt - \int_\pi^{2\pi} e^{-\mathbf{j}(1+k)t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(\frac{1}{\mathbf{j}(1-k)} e^{\mathbf{j}(1-k)t} \Big|_0^\pi + \frac{1}{\mathbf{j}(1+k)} e^{-\mathbf{j}(1+k)t} \Big|_0^\pi \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(\frac{1}{\mathbf{j}(1-k)} e^{\mathbf{j}(1-k)t} \Big|_\pi^{2\pi} + \frac{1}{\mathbf{j}(1+k)} e^{-\mathbf{j}(1+k)t} \Big|_\pi^{2\pi} \right) \\
 &= -2 \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) = -\frac{4}{k^2-1}
 \end{aligned}$$

wenn k gerade ist und $c_k^*(f) = 0$ sonst.

Das führt zu

$$f \sim -\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} e^{2\mathbf{j}kt}$$

d) Der "einweg-gleichgerichtete" Sinus: $f(t) = \frac{1}{2}(\sin t + |\sin t|)$.



Wir berechnen die Koeffizienten $c_k^*(f)$. Zuerst sei $k \neq -1, 1$.

$$\begin{aligned}
 c_k^*(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin(t) e^{-jkt} dt \\
 &= \frac{1}{4\pi j} \left(\int_0^\pi e^{-j(k-1)t} dt - \int_0^\pi e^{-j(k+1)t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi j} \left(\frac{((-1)^{k-1} - 1)}{-j(k+1)} - \frac{((-1)^{k+1} - 1)}{-j(k+1)} \right) \\
 &= \frac{-1}{2\pi} \frac{(-1)^k + 1}{k^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $c_k^*(f) = 0$, für ungerade $k \neq -1, 1$ und

$$c_k^*(f) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{k^2 - 1}$$

für gerades k .

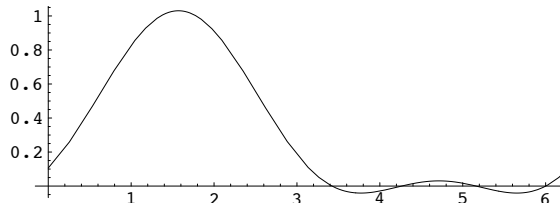
Ebenso finden wir:

$$c_1^*(f) = \frac{1}{4j}, \quad c_0^*(f) = \frac{1}{\pi}, \quad c_{-1}^*(f) = -\frac{1}{4j}$$

Damit erreichen wir

$$f \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$$

Das Bild dazu für $f_2(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$



2.2 Rechnen mit Fourierreihen

In diesem Abschnitt sollen alle Funktionen als stückweise stetig und T -periodisch vorausgesetzt werden. Stets sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Angenommen, wir bilden aus gewissen Funktionen neue Funktionen. Wie sehen die zugehörigen Fourierreihen aus?

2.2.1 Hilfssatz (Linearität). Sind $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen wie oben gefordert, so ist

$$f + g \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} (c_k^*(f) + c_k^*(g)) e^{j\omega kt}$$

$$\alpha f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha c_k^*(f) e^{j\omega kt}$$

Beweis. Klar. □

2.2.2 Hilfssatz (Konjugation und Zeitumkehr). Ist f wie oben und $f_-(t) := f(-t)$, so haben wir

$$\begin{aligned} c_k^*(\bar{f}) &= \overline{c_{-k}^*(f)} \\ c_k^*(f_-) &= c_{-k}^*(f) \end{aligned}$$

Beweis. Direkt nachrechnen:

$$c_k^*(\bar{f}) = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} e^{-j\omega kt} dt = \frac{1}{T} \overline{\int_0^T f(t) e^{j\omega kt} dt} = \overline{c_{-k}^*(f)}$$

Die 2. Behauptung folgt aus der Substitutionsregel:

$$c_k^*(f_-) = \frac{1}{T} \int_0^T f(-t) e^{-j\omega kt} dt = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) e^{j\omega ks} ds = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{j\omega kt} dt = c_{-k}^*(f)$$

□

2.2.3 Hilfssatz (Dilatation, Translation, Frequenzmodulation). Angenommen, f sei wie bisher und $a > 0$.

(i) Dann setzen wir

$$f_a(t) := f(at), \quad \tau_a f(t) = f(a + t)$$

und erhalten für die zugeordneten Fourierreihen:

$$f_a \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^*(f) e^{j\omega a kt}$$

$$\tau_a f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} (e^{j\omega a k} c_k^*(f)) e^{j\omega k t}$$

(ii) (Frequenzmodulation) Wenn f mit $e^{jn\omega t}$ multipliziert wird, entsteht

$$e^{jn\omega t} f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{k-n}^*(f) e^{j\omega k t}$$

Beweis. Auch hier benutzen wir die Definition der Fourierkoeffizienten, weiter nichts.

(i) Die Funktion f_a ist $\frac{T}{a}$ -periodisch, und der zugehörige omega-Wert ist $\omega_a = a\omega$.

$$\begin{aligned} c_k^*(f_a) &= \frac{a}{T} \int_0^{T/a} f(at) e^{-j\omega a k t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\omega k t} dt = c_k^*(f) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Zur Translation:

$$\begin{aligned} c_k^*(\tau_f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(a+t) e^{-j\omega k t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(s) e^{-j\omega k (s-a)} dt = e^{j\omega a k} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(s) e^{-j\omega k s} dt \\ &= e^{j\omega a k} \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(s) e^{-j\omega k s} dt + \int_T^{a+T} f(s) e^{-j\omega k s} dt - \int_0^a f(s) e^{-j\omega k s} dt \right) \\ &= e^{j\omega a k} \frac{1}{T} \int_0^T f(s) e^{-j\omega k s} dt = e^{j\omega a k} c_k^*(f) \end{aligned}$$

Ähnlich beweist man (ii). □

Gliedweise Differenziation

Wir erinnern uns an den Begriff der Stammfunktion:

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so kann man mit

$$F(t) := \int_a^t f(s) ds$$

eine stetig differenzierbare Funktion gewinnen, so dass $F' = f$.

Ist nun f stückweise stetig und beschränkt, so ist F ebenfalls definiert und stetig. Ihre Ableitung existiert dort, wo f stetig ist. Insbesondere ist F stückweise stetig differenzierbar.

Definition. Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn sie in höchstens endlich vielen Stellen nicht differenzierbar ist und ihre Ableitung für jedes x außerhalb dieser Stellen existiert und stetig von x abhängt. Wir nennen die Ableitung wieder f' .

Beispiel. Die Funktion $f(x) := |x|$ ist stückweise stetig differenzierbar und ihre Ableitung existiert für alle $x \neq 0$. Es gilt $f'(x) = 1$, wenn $x > 0$ und $f'(x) = -1$, wenn $x < 0$.

2.2.4 Hilfssatz (Differenziation). Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und T -periodisch, so gilt: Ist f stückweise stetig differenzierbar, so ist

$$f' \sim \mathbf{j} \omega \sum_{k \in \mathbb{Z}} k c_k^*(f) e^{\mathbf{j} \omega k t}$$

Man erhält die Fourierreihe von f' durch gliedweises Differenzieren!

Beweis. Wir unterteilen das Intervall $[0, T]$ in Differenzierbarkeitsbereiche von f , also sind $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N < T$ die Stellen, an denen f keine Ableitung hat, so haben wir

$$\begin{aligned} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t) e^{-\mathbf{j} \omega k t} dt &= f(t) e^{-\mathbf{j} \omega k t} \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} + \mathbf{j} \omega k \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t) e^{-\mathbf{j} \omega k t} dt \\ &= f(t_j) e^{-\mathbf{j} \omega k t_j} - f(t_{j-1}) e^{-\mathbf{j} \omega k t_{j-1}} + \mathbf{j} \omega k \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t) e^{-\mathbf{j} \omega k t} dt \end{aligned}$$

Wenn wir noch setzen $t_0 = 0, t_{N+1} = T$, so erhalten wir durch Aufsummieren

$$c_k^*(f') = \mathbf{j} \omega k c_k^*(f)$$

□

Achtung: Dieser Satz gilt im allgemeinen nicht mehr, wenn f nicht als stetig vorausgesetzt wird.

Ist etwa f die Sägezahnfunktion aus Beispiel a), so wird $f'(t) = 1$, wo immer f' existiert. Damit wird $c_k^*(f') = 1$, wenn $k = 0$ und $c_k^*(f') = 0$ sonst, während aber $c_k^*(f) = \frac{\mathbf{j}}{k}$ für alle $k \neq 0$.

Das folgende kann als "Gegenstück" zum Differenziationssatz angesehen werden:

2.2.5 Hilfssatz (Stammfunktion). Angenommen, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei T -periodisch und stückweise stetig. Es sei

$$F(t) := \int_0^t f(s) ds$$

und angenommen, $F(T) = 0$. Dann ist auch F periodisch mit Periode T , und ihr ist die Fourierreihe

$$F \sim c_0^*(F) - \frac{\mathbf{j}}{\omega} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{k} c_k^*(f) e^{\mathbf{j}\omega kt}$$

zugeordnet. Hierbei ist

$$c_0^*(F) = -\frac{1}{T} \int_0^T t f(t) dt.$$

Die Fourierreihe von f darf also gliedweise integriert werden !

Beweis. Zunächst sehen wir:

$$F(t+T) = \int_0^{t+T} f(s) ds = \underbrace{\int_0^T f(s) ds}_{=F(T)=0} + \int_T^{t+T} f(s) ds = \int_0^t f(s) ds = F(t)$$

Damit ist erkannt, dass auch F die Periode T hat. Für die Fourierkoeffizienten gilt jetzt, da der Differenziationssatz auf F anwendbar ist:

$$c_k^*(f) = c_k^*(F') = -\frac{k\omega}{\mathbf{j}} c_k^*(F),$$

wenn $k \neq 0$. Ferner haben wir

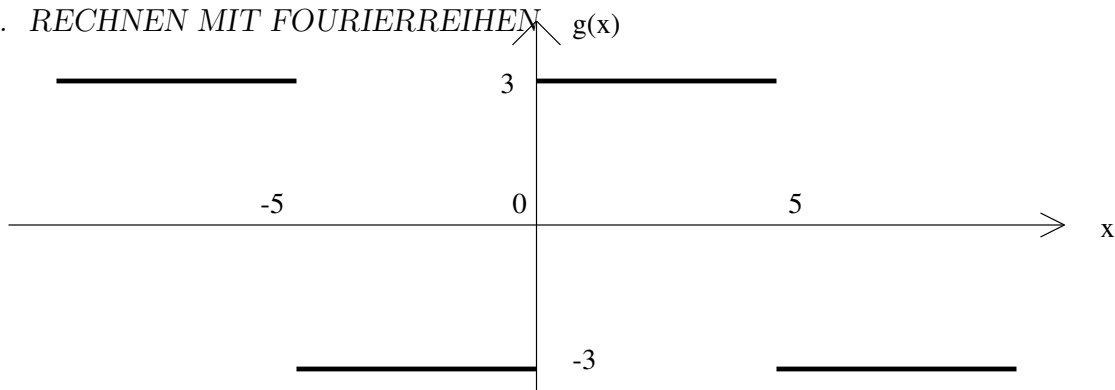
$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} F(t) dt = tF(t) \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} tF'(t) dt$$

Dabei haben wieder die t_j die Bedeutung aus dem Beweis zum Differenziationssatz (wo wir f durch F ersetzen). Summieren wir dies auf über alle $j = 0, \dots, N+1$, folgt die Formel für $c_0^*(F)$. \square

Beispiele. Wir können mit den oben hergeleiteten Regeln die Fourierreihen solcher Funktion berechnen, die mit schon bekannten "verwandt" sind.

a) Sei etwa $g(x) = 3$, wenn $0 \leq x < 5$ und $g(x) = -3$, wenn $-5 \leq x < 0$. Ferner soll die Funktion mit der Periode $T = 10$ auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden.

Im Bild:



Ist nun f die "Pulsfunktion" aus (2.1.1), so haben wir

$$g(x) = 3f\left(\frac{x}{10}\right)$$

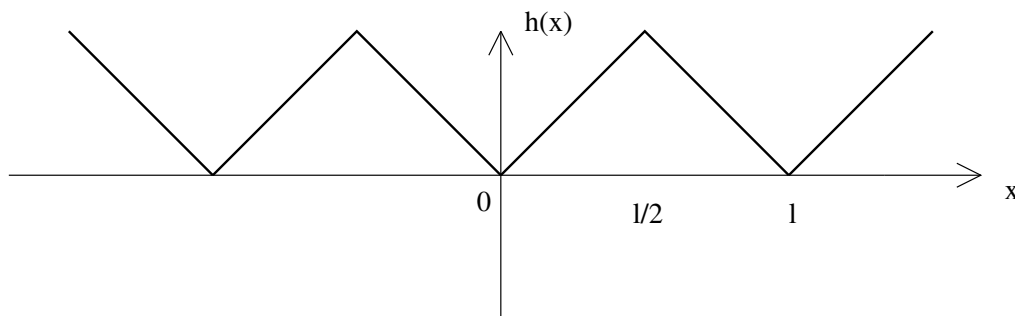
Die Regel für die Dilatation mit Faktor $a = \frac{1}{10}$ ist anwendbar und liefert uns als zu g gehörige Fourierreihe

$$g \sim -\frac{6j}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{e^{jk\frac{\pi}{5}t}}{k}$$

oder reell:

$$g \sim \frac{12}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}(2k-1)t\right)}{2k-1}$$

b) Die "Zackenfunktion" $h(x) = x$, wenn $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$, und $h(x) = l - x$, wenn $\frac{l}{2} \leq x \leq l$. Dabei ist $l > 0$ und h wird l -periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt.



Wir sehen, dass die Ableitung von h außerhalb der Werte $m\frac{l}{2}$, mit ganzzahligen m existiert, und es gilt

$$h'(x) = f\left(\frac{x}{l}\right),$$

wo immer h' definiert ist. Nun ist die Fourierreihe von $f(x/l)$ gerade

$$f\left(\frac{x}{l}\right) \sim -\frac{2j}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{e^{jk\frac{2\pi}{l}x}}{k}$$

Der Satz von der Fourierreihe für Stammfunktionen ist anwendbar auf $f\left(\frac{x}{l}\right)$, da $\int_0^l f\left(\frac{x}{l}\right) dx = 0$.

Für $k \neq 0$ erhalten wir

$$c_k^*(h) = -\frac{2\mathbf{j}}{\pi} \frac{l}{2\pi\mathbf{j}k^2} = -\frac{1}{\pi^2} \frac{l}{k^2}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} c_0^*(h) &= -\frac{1}{l} \int_0^l t f\left(\frac{t}{l}\right) dt = -l \int_0^1 s f(s) ds \\ &= -l \left(\int_0^{1/2} s f(s) ds + \int_{1/2}^1 s f(s) ds \right) \\ &= -l \left(\int_0^{1/2} s ds - \int_{1/2}^1 s ds \right) = -l \left(\frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \right) = \frac{l}{4} \end{aligned}$$

Das reell geschriebene Ergebnis lautet nun

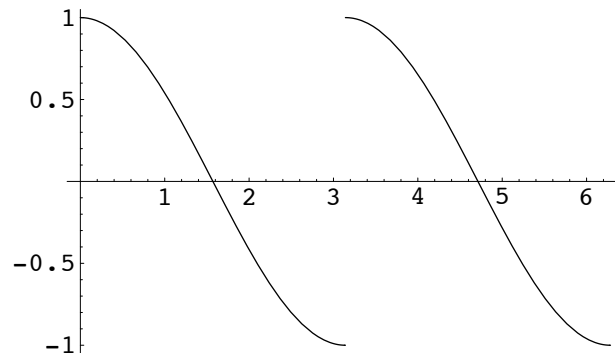
$$h \sim \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k>0 \text{ ungerade}} \frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{2\pi k t}{l}\right)$$

c) Die Funktion

$$h(t) := \begin{cases} \cos t & \text{wenn } 0 < t < \pi \\ -\cos t & \text{wenn } \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Dann ist $T = \pi, \omega = 2$.

Das Schaubild ist folgendes:



Es folgt

$$h(t) = f_2'(t), \quad \text{wenn } t \notin \mathbb{Z}\pi$$

Dabei ist $f_2(t) = |\sin(t)|$ der 2-Weg-gleichgerichtete Sinus. Da f_2 überall stetig ist, ist der Differenziationssatz anwendbar und liefert wegen

$$f_2 \sim -\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} e^{2jk t}$$

nun, dass

$$h \sim f_2' \sim -\frac{2j}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{4k^2 - 1} e^{2jk t}$$

oder reell:

$$h \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{4k^2 - 1} \sin(2kt)$$

Faltung zweier periodischer Funktionen

Definition. Sind die beiden Funktion $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodisch und stückweise stetig (mit Periode T), so bezeichnen wir als *Faltung* von f und g die Funktion

$$f * g(t) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t-s)g(s)ds$$

Folgende Eigenschaften der Faltung sind wichtig:

- 2.2.6 Hilfssatz.** a) Mit f und g ist auch $f * g$ wieder T -periodisch.
b) Ist f stetig differenzierbar, so auch $f * g$, und es gilt

$$(f * g)' = f' * g$$

- c) Es gilt $f * g = g * f$.

Beweis. a) ist klar. Zum Beweis von b) schreibt man den Differenzenquotienten auf

$$\frac{f * g(t + \varepsilon) - f * g(t)}{\varepsilon} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{Q}(t-s, \varepsilon)g(s)ds + f' * g(t)$$

mit

$$\mathcal{Q}(t-s, \varepsilon) = \int_0^T \left(\frac{f(t-s+\varepsilon) - f(t-s)}{\varepsilon} - f'(t-s) \right) g(s)ds$$

Mit Hilfe von

$$\frac{f(t-s+\varepsilon) - f(t-s)}{\varepsilon} - f'(t-s) \rightarrow 0, \quad \text{wenn } \varepsilon \rightarrow 0$$

kann man dann nachweisen, dass $\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{Q}(t-s, \varepsilon)g(s)ds \rightarrow 0$ wenn $\varepsilon \rightarrow 0$.

c) Wir rechnen für $0 \leq t < T$ aus:

$$\begin{aligned}
 T \cdot g * f(t) &= \int_0^T g(t-s)f(s)ds \\
 &\stackrel{\sigma:=t-s}{=} \int_{t-T}^t g(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma \\
 &= \int_{t-T}^t g(\sigma-T)f(t-(\sigma-T))d\sigma \\
 &= \int_t^{t+T} g(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma \\
 &= \int_t^T g(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma + \int_T^{t+T} g(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma \\
 &= \int_t^T g(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma + \int_0^t g(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma \\
 &= T \cdot f * g(t)
 \end{aligned}$$

□

Der Effekt der Faltung ist also, dass eine nicht differenzierbare Funktion (wie hier das g) durch Falten mit f "geglättet" werden kann.

Beispiel. Sei etwa f die "Pulsfunktion", also $f(x) = 1$, wenn $x \in [0, 1/2)$ und $f(x) = -1$, wenn $x \in [-1/2, 0)$. f wird periodisch mit Periode 1 auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt.

Dann ist zunächst

$$f * f(s) = \int_0^{1/2} f(s-t)dt - \int_{1/2}^1 f(s-t)dt$$

Dann gilt für $0 \leq s \leq 1/2$:

$$\int_0^{1/2} f(s-t)dt = \int_0^s f(s-t)dt + \int_s^{1/2} f(s-t)dt = s - \left(\frac{1}{2} - s\right) = 2s - \frac{1}{2}$$

und

$$\int_{1/2}^1 f(s-t)dt = \int_{1/2}^{s+\frac{1}{2}} f(s-t)dt + \int_{s+\frac{1}{2}}^1 f(s-t)dt = -s + 1 - \left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2s$$

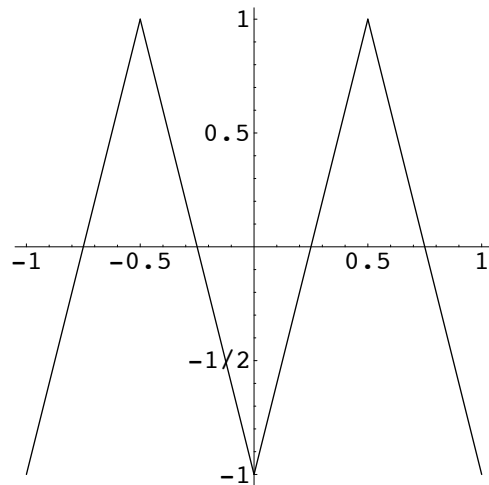
Also

$$f * f(s) = 4s - 1$$

Genauso zeigt man für $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$, dass

$$f * f(s) = 3 - 4s$$

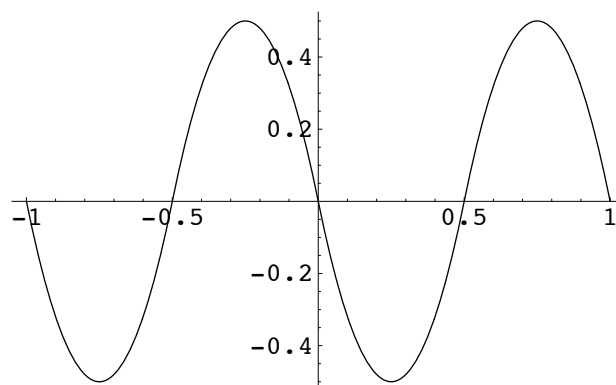
Hier ist das Schaubild:



Ferner ist, wenn wir $g = f * f$ wählen

$$f * g(s) = \begin{cases} 8s^2 - 4s & \text{wenn } 0 \leq s < 1/2 \\ -8s^2 + 12s - 4 & \text{wenn } -1/2 \leq s < 0 \end{cases}$$

Der Graph der Funktion $f * g$ hat schon keinen Knick mehr



Die Berechnung von $f * g$ eignet sich als Übungsaufgabe.

Die Fourierreihe der Faltung periodischer Funktionen

2.2.7 Hilfssatz. Sind $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetige Funktionen mit der Periode T , so ist

$$f * g \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^*(f) c_k^*(g) e^{jk\omega t}$$

Beweis. Dazu rechnen wir die Fourierkoeffizienten von $f * g$ aus:
Zunächst haben wir:

$$\begin{aligned} c_k^*(f * g) &= \frac{1}{T} \int_0^T f * g(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^T f(t-s) g(s) ds \right) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^T f(t-s) g(s) e^{-jk\omega t} ds \right) dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^T f(t-s) e^{-jk\omega(t-s)} dt \right) g(s) e^{-jk\omega s} ds \end{aligned}$$

Für jedes $0 < s < T$ ist aber das innere Integral umzuformen in

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t-s) e^{-jk\omega(t-s)} dt &= \int_{-s}^{T-s} f(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \int_{-s}^0 f(t) e^{-jk\omega t} dt + \int_0^{T-s} f(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \int_{T-s}^T f(t) e^{-jk\omega t} dt + \int_0^{T-s} f(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt = T c_k^*(f) \end{aligned}$$

Setzen wir das ein, so finden wir die behauptete Gleichheit. □

2.3 Konvergenz bei Fourierreihen

Wir müssen jetzt 2 Fragen diskutieren:

- Wann konvergiert eine Fourierreihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{j k \omega t}$?
- Wann kann man eine stückweise stetige Funktion f aus ihrem Spektrum, also der Familie ihrer Fourierkoeffizienten wiedergewinnen, kurz wann gilt

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{j k \omega t}$$

Zuerst erinnern wir uns an den Begriff der Konvergenz einer Reihe:

Definition. a) Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent* gegen ein $a \in \mathbb{C}$, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$ gegen a konvergiert, also

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k \longrightarrow a, \quad \text{wenn } n \longrightarrow \infty$$

Wir schreiben dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a.$$

b) Seien $f_k : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ Funktionen. Dann nennen wir die *Funktionenreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *punktweise konvergent* gegen eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f(x)$$

für alle $x \in [a, b]$ gilt.

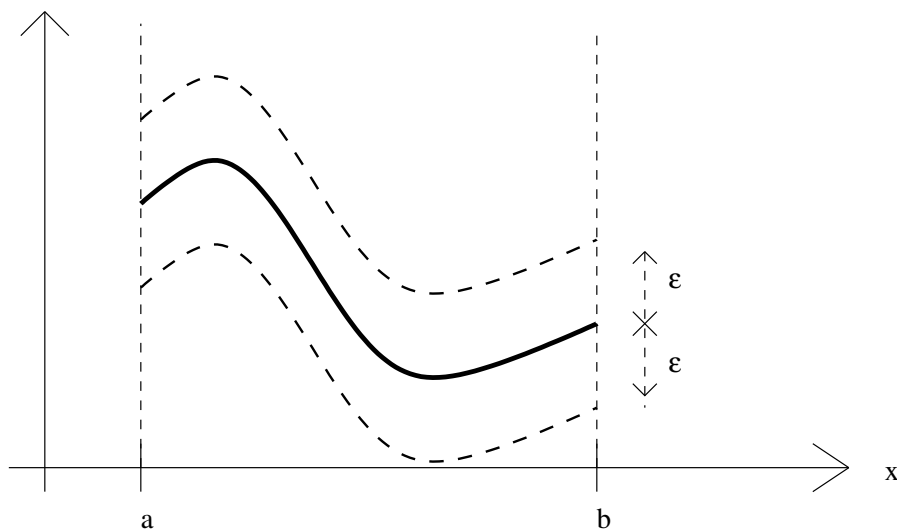
c) Wir sagen, eine Folge $(f_n)_n$ (stückweise stetiger Funktionen) konvergiere im quadratischen Mittel gegen eine (ebenfalls stückweise stetige) Funktion f , wenn $\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \longrightarrow 0$, wenn $n \rightarrow \infty$. Entsprechendes gilt für Funktionenreihen.

d) Angenommen, alle f_k aus (b) seien stetig. Dann nennen wir die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *gleichmäßig gegen f konvergent*, wenn

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right| \longrightarrow 0$$

mit $n \longrightarrow \infty$.

Anschaulich bedeutet das: Wenn f die Grenzfunktion einer Reihe ist, dann muss zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl n_0 existieren, ab der der Graph von $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$ in dem Parallelstreifen der Dicke ε um den Graphen von f verläuft.



Beispiel. Angenommen, $a = 0, b = 1/2$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ gleichmäßig auf $I = [0, 1/2]$ gegen $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Denn

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

also

$$\max_{0 \leq x \leq 1/2} \left| \sum_{k=0}^n x^k - f(x) \right| = \max_{0 \leq x \leq 1/2} \frac{x^{n+1}}{1 - x} = 2^{-n} \rightarrow 0,$$

wenn $n \rightarrow \infty$.

Das folgende Kriterium für Konvergenz benötigt keinen "Kandidaten" für eine mögliche Grenzfunktion:

2.3.1 Satz. a) Eine Reihe von $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ von Funktionen konvergiert punktweise, wenn zu jedem $x \in [a, b]$ Zahlen $c_k(x) > 0$ existieren, so dass $|f_k(x)| \leq c_k(x)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) < \infty$.

b) Eine Reihe von $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ von Funktionen konvergiert gleichmäßig, wenn zu jedem $k \geq 0$ eine Schranke $c_k > 0$ existiert, so dass

$$\max_{a \leq x \leq b} |f_k(x)| \leq c_k$$

für alle k und weiter die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert. In diesem Fall ist auch die Grenzfunktion f wieder stetig.

Beispiele. a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ konvergiert gleichmäßig auf \mathbb{R} . (Folgt aus $\sum_k \frac{1}{k^2} < \infty$).

b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2k-1)x)}{2k-1}$ konvergiert punktweise auf \mathbb{R} , aber auf $[-1/2, 1/2]$ nicht gleichmäßig. Denn sie ist Fourierreihe einer Funktion mit Unstetigkeitsstellen in den ganzen Zahlen.

Die Bessel-Ungleichung

Die folgende Ungleichung sagt etwas über das Verhalten der Fourierkoeffizienten $c_k^*(f)$ aus, wenn $|k| \rightarrow \infty$, nämlich:

2.3.2 Satz. Wenn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und beschränkt ist, so gilt

$$\sum_{k=-n}^n |c_k^*(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt - \frac{1}{T} \int_0^T \left| f(t) - \sum_{k=-n}^n c_k^*(f) e^{j\omega kt} \right|^2 dt$$

Es folgt

$$\sum_{k=-n}^n |c_k^*(f)|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \quad \text{Besselsche Ungleichung}$$

Insbesondere muss $c_k^*(f) \rightarrow 0$ gehen, wenn $|k| \rightarrow \infty$.

Beweis. Wir rechnen ein Integral aus, und zwar

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| f(t) - \sum_{k=-n}^n c_k^*(f) e^{j\omega kt} \right|^2 dt &= \int_0^T |f(t)|^2 dt - 2 \sum_{k=-n}^n \operatorname{Re} \overline{c_k^*(f)} \int_0^T f(t) e^{-j\omega kt} dt \\ &\quad + \sum_{k,l=-n}^n c_k^*(f) \overline{c_l^*(f)} \underbrace{\int_0^T e^{j(k-l)\omega t} dt}_{=0, \text{ wenn } k \neq l, =T, \text{ sonst}} \\ &= \int_0^T |f(t)|^2 dt - 2T \sum_{k=-n}^n |c_k^*(f)|^2 + T \sum_{k=-n}^n |c_k^*(f)|^2 \\ &= \int_0^T |f(t)|^2 dt - T \sum_{k=-n}^n |c_k^*(f)|^2 \end{aligned}$$

Daraus können wir die Behauptung ablesen. □

Die Partialsummen der Fourierreihen bilden in dem folgenden Sinne eine bestmögliche Approximation an eine stückweise stetige Funktion f :

2.3.3 Satz (*Bestapproximation im quadratischen Mittel*). Ist die T -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und beschränkt, und ist $P^*(t) = \sum_{k=-m}^m a_k e^{j\omega kt}$ ein komplexes trigonometrisches Polynom, so haben wir für das quadratische Mittel von $f - P^*$ stets

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t) - P^*(t)|^2 dt = \sum_{k=-n}^n |c_k^*(f) - a_k|^2 + \frac{1}{T} \int_0^T |f(t) - s_n(f)(t)|^2 dt - \sum_{k \in S} |c_k^*(f)|^2$$

wobei $S = \{-m, \dots, m\} \setminus \{-n, \dots, n\}$ und $s_n(f) := \sum_{k=-n}^n c_k^*(f) e^{j\omega kt}$.

Beweis. Der Beweis geht ähnlich wie der des vorherigen Satzes. □

2.3.4 Satz (*Ungleichung v. Cauchy-Schwarz*) Sind $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig, so gilt

$$\left| \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt \right| \leq \left(\int_0^T |f|^2 dt \cdot \int_0^T |g|^2 dt \right)^{1/2}$$

Beweis. Wir nehmen an, es sei $I_g := \int_0^T |g|^2 dt > 0$. Schreiben wir $c := \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt / I_g$, so ist

$$0 \leq \int_0^T |f(t) - c g(t)|^2 dt = \int_0^T |f|^2 dt - |c|^2 I_g$$

Durch Einsetzen von c und leichtes Umstellen der Ungleichung folgt die Behauptung. □

Schließlich fügen wir noch die folgende Verbesserung der Besselungleichung hinzu

2.3.5 Satz (*Parseval-Vollständigkeitsrelation*). Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und T -periodisch, so gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^*(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

Beweis. Ist $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, so finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $f_\varepsilon : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{T} \int_0^T |f - f_\varepsilon|^2 dt < \varepsilon$.

Nun benutzen wir den im ersten Kapitel skizzierten Satz, dass f_ε gleichmäßig durch eine Folge trigonometrischer Polynome $(P_m^*)_m$ approximiert werden kann. Dabei hat P_m^* die Gestalt $P_m^* = \sum_{k=-m}^m a_k e^{j\omega kt}$.

Der Satz über die Bestapproximation für f_ε liefert uns dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{T} \int_0^T |f_\varepsilon - s_n(f_\varepsilon)|^2 dt \right)^{1/2} &\leq \left(\frac{1}{T} \int_0^T |f_\varepsilon - P_m^*|^2 dt + \sum_{n < |k| \leq m} |c_k^*(f_\varepsilon)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{1}{T} \int_0^T |f_\varepsilon - P_m^*|^2 dt + \sum_{n < |k|} |c_k^*(f_\varepsilon)|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

wenn nur $m \geq n$. Lassen wir zuerst $m \rightarrow \infty$ streben, so folgt

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f_\varepsilon - s_n(f_\varepsilon)|^2 dt \leq \sum_{n < |k|} |c_k^*(f_\varepsilon)|^2$$

Danach lassen wir $n \rightarrow \infty$ streben und erhalten die Behauptung zunächst für f_ε , denn es ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f_\varepsilon(t)|^2 dt - \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^*(f_\varepsilon)|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f_\varepsilon - s_n(f_\varepsilon)|^2 dt$$

Hierin darf man noch $\varepsilon \searrow 0$ gehen lassen und erhält dann die Parsevalgleichung. \square

Zur Konvergenz einer Fourierreihe:

Wir erinnern uns an das folgende

Beispiel: Die Sägezahnfunktion $f_0(t) := t$, wenn $0 \leq t < 2\pi$ und $f(x) := f_0(x - 2\pi n)$, wenn n ganz ist und $x - 2\pi n \in [0, 2\pi)$, hat die Fourierreihe

$$f \sim \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}$$

also hat die rechte Seite bei Null den Wert π , während $f(0) = 0$ ist. Eine Funktion, die die von uns bisher gestellten Bedingungen erfüllt, wird im allgemeinen nicht durch ihre Fourierreihe punktweise dargestellt.

Man könnte bei dem oben gegebenen Beispiel vermuten, das liege an der Unstetigkeit der Sägezahnfunktion. Aber auch, wenn man von der Funktion f die Stetigkeit voraussetzt, kann man nicht schließen, dass sie durch ihre Fourierreihe dargestellt wird. Ein erstes Beispiel hierfür wurde von P. Du Bois-Reymond 1876 gefunden, womit eine alte Vermutung von J. Fourier widerlegt wurde. L. Fejer fand 1910 noch einfachere derartige Beispiele.

Unter maßvollen Zusatzvoraussetzungen an eine stückweise stetige Funktion f kann man aber die Konvergenz ihrer Fourierreihe nachweisen.

2.3.6 Satz. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und T -periodisch. Angenommen, es gebe ein kleines $\delta > 0$, so dass f auf $(t_0 - \delta, t_0)$ und auf $(t_0, t_0 + \delta)$ differenzierbar ist, und sogar die Grenzwerte $f'_\pm(t_0) := \lim_{t \searrow 0} f'(t_0 \pm t)$ existieren.

a) Ist f an der Stelle $t_0 \in (0, T)$ stetig, so konvergiert $s_n(f)(t_0)$ gegen $f(t_0)$.

b) Sei $\underline{f}(t_0) := \frac{1}{2}(f_+(t_0) + f_-(t_0))$, wobei $f_\pm(t_0) := \lim_{t \searrow 0} f(t_0 \pm t)$. Dann konvergiert $s_n(f)(t_0)$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen $\underline{f}(t_0)$.

c) Wenn f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist und eine Schranke M existiert, so dass $|f'| \leq M$ überall dort gilt, wo f' definiert ist, so konvergiert ihre Fourierreihe gleichmäßig gegen f .

Beweis. a) nach P. Chernoff (1980). Die Funktion $g(t) := \frac{f(t_0+t)-f(t_0)}{1-e^{j\omega t}}$, mit $\omega := \frac{2\pi}{T}$ ist ebenfalls stückweise stetig, auch in einer Umgebung der 0, denn $g(\pm t) \rightarrow \pm \frac{f'_{\pm}(t_0)}{j\omega}$ mit $t \searrow 0$. Die komplexen Fourierkoeffizienten von g bezeichnen wir mit d_k . Mit der Besselungleichung folgt nun $d_k \rightarrow 0$, wenn $|k| \rightarrow \infty$. Sei nun $\tau_{t_0}f(t) = f(t+t_0)$. Dann haben wir

$$\tau_{t_0}f(t) = f(t_0) + (1 - e^{j\omega t})g(t) = f(t_0) + g(t) - e^{j\omega t}g(t)$$

Für die komplexen Fourierkoeffizienten bedeutet das mit den Regeln zur Translation und Frequenzmodulation

$$c_k e^{j\omega k t_0} = f(t_0) + d_k - d_{k-1}$$

und für die Fouriersummen

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{j\omega(t_0+t)k} = s_n(\tau_{t_0}f)(t) = f(t_0) + \sum_{k=-n}^n (d_k - d_{k-1}) e^{j\omega k t}$$

Wählen wir $t = 0$, so folgt

$$s_n(f)(t_0) - f(t_0) = d_n - d_{-n-1} \rightarrow 0,$$

wenn $n \rightarrow \infty$.

b) Wir arbeiten mit der Mäanderfunktion $\phi(t) := -1$, wenn $-\frac{T}{2} \leq t < 0$ und $\phi(t) := 1$, wenn $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$. Setzen wir $\Delta := f_+(t_0) - f_-(t_0)$, so ist die Funktion $\tilde{f}(t) := f(t) - \frac{\Delta}{2}\phi(t-t_0)$ bei t_0 stetig. Es ist $\tilde{f}(t_0) = \underline{f}(t_0)$. Nun folgt mit Teil a) für \tilde{f} statt f , dass $s_n(\tilde{f})(t_0) \rightarrow \tilde{f}(t_0) = \underline{f}(t_0)$. Aber $s_n(\phi)(t_0) = 0$, also ist auch $s_n(f)(t_0) = s_n(\tilde{f})(t_0)$ konvergent gegen $\underline{f}(t_0)$.

c) Der Differenziationssatz ist anwendbar und liefert $c_k^*(f') = j\omega k c_k^*(f)$, also

$$\left(\sum_{0 < |k| \leq N} |c_k^*(f)| \right)^2 \leq \sum_{0 < |k| \leq N} |c_k^*(f)|^2 \leq S \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

und damit $S = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Daraus folgt alles. □

Es muss eine stärkere Bedingung gestellt werden. Die Bedingung der Differenzierbarkeit ist hinreichend, aber zu restriktiv. Wir werden weiter unten ein "Mittelding" zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit kennen lernen, das die Darstellbarkeit einer stetigen Funktion durch ihre Fourierreihe impliziert.

Wir stellen zuerst die Fouriersummen

$$s_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^n c_k^*(f) e^{jkt}$$

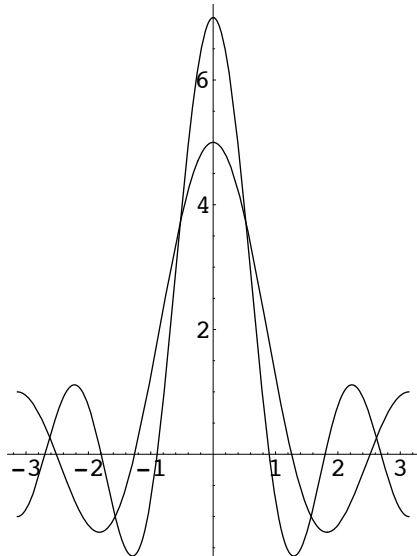
einer 2π -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Hilfe des Dirichletkerns dar:

$$\begin{aligned} s_n(f)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-n}^n f(s) e^{jk(t-s)} \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \mathcal{D}_n(t-s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \mathcal{D}_n(t-s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) \mathcal{D}_n(s) ds \end{aligned}$$

mit dem *Dirichlet-Kern*:

$$\mathcal{D}_n(u) := \sum_{k=-n}^n e^{iku}$$

Hier sind die Graphen von \mathcal{D}_2 und \mathcal{D}_3 :



Übungsaufgabe: Es gilt

a) $\mathcal{D}_n(-u) = \mathcal{D}_n(u)$, b) $\int_0^{2\pi} \mathcal{D}_n(u) du = 2\pi$, c) $\mathcal{D}_n(u) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}$.

2.3.7 Hilfssatz. Ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und beschränkt und hat die Periode 2π , so gilt:

$$\int_0^{\pi} g(s) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Beweis. Die Funktion $g_1(s) = 0$, für $s \leq 0$ und $g_1(s) = g(s)$, für $0 \leq s \leq \pi$, ist stückweise stetig und beschränkt. Aus der Besselungleichung für die Funktion $g_2(s) := g_1(s)e^{-j\frac{s}{2}}$ folgt nun, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(s) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\int_{-\pi}^\pi g_1(s) e^{-j\frac{s}{2}} e^{-jn s} ds \right) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} c_n^*(g_2) \rightarrow 0,$$

mit $n \rightarrow \infty$. Daraus folgt der Hilfssatz.

Zur Formulierung des Konvergenzsatzes brauchen wir noch eine technische Bedingung:

Definition. Eine stückweise stetige T -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllt in einem Punkt $t_0 \in \mathbb{R}$ die *Dini-Bedingung*, wenn mit einer geeigneten Konstanten $\delta > 0$ gilt

$$\int_0^\delta \frac{|f(t^* + s) + f(t^* - s) - 2\underline{f}(t^*)|}{s} ds := \lim_{a \searrow 0} \int_a^\delta \frac{|f(t^* + s) + f(t^* - s) - 2\underline{f}(t^*)|}{s} ds < \infty$$

Dabei ist

$$\underline{f}(t_0) := \frac{f(t_0+) + f(t_0-)}{2}$$

Beispiel: a) Erfüllt f eine Abschätzung $|f(t) - f(s)| \leq C|t - s|^\alpha$ für alle s und t , wobei C von s und t *nicht* abhängt, so ist die Dini-Bedingung an jeder Stelle t^* erfüllt.

Denn

$$|f(t^* + s) + f(t^* - s) - 2\underline{f}(t^*)| \leq 2Cs^\alpha$$

also

$$\int_0^\delta \frac{|f(t^* + s) + f(t^* - s) - 2\underline{f}(t^*)|}{s} ds \leq 2C \int_0^\delta s^{\alpha-1} ds = \frac{2C}{\alpha} \delta^\alpha$$

b) Sei nun $f(t) := (\log(1/|t - \frac{1}{2}|))^{-1}$ für $t \neq 1/2$ und $f(1/2) := 0$ und f sei mit der Periode $T = 1$ periodisch fortgesetzt. Dann ist f stetig überall, $\underline{f}(1/2) = 0$, aber dennoch ist für jedes $\delta > 0$

$$\int_a^\delta \frac{|f(t^* + s) + f(t^* - s) - 2\underline{f}(t^*)|}{s} ds = \int_0^\delta \frac{ds}{s \log(1/s)} = \ln \ln(1/a) \rightarrow \infty, \text{ wenn } a \searrow 0,$$

also ist die Dini-Bedingung bei $1/2$ *nicht* erfüllt.

Man kann zeigen:

2.3.8 Satz. Gegeben sei eine stückweise stetige T -periodische beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

a) Ist dann in t_0 die Dini-Bedingung erfüllt, so konvergiert die Fourierreihe von f in t_0 gegen $\underline{f}(t_0)$.

b) Wenn dann f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist und eine Schranke M existiert, so dass $|f'| \leq M$ überall dort gilt, wo f' definiert ist, so konvergiert ihre Fourierreihe gleichmäßig gegen f .

Beweis. Aus a) folgt b), da eine Funktion mit den Eigenschaften aus Teil b) die Dini-Bedingung erfüllt. Indem wir für $f_1(s) := f(s/\omega)$ argumentieren, dürfen wir annehmen, es sei $T = 2\pi$.

Zum Beweis von a) schreiben wir zuerst (Eigenschaft a) des Dirichletkerns):

$$\begin{aligned} s_n(f)(t_*) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(t_* - s) \mathcal{D}_n(s) ds + \int_0^\pi f(t_* - s) \mathcal{D}_n(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi f(t_* + s) \mathcal{D}_n(s) ds + \int_0^\pi f(t_* - s) \mathcal{D}_n(s) ds \right) \end{aligned}$$

Es folgt (wieder mit Eigenschaft a):

$$\begin{aligned} s_n(f)(t_*) - \underline{f}(t_*) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(t_* + s) - \underline{f}(t_*)) \mathcal{D}_n(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(t_* - s) - \underline{f}(t_*)) \mathcal{D}_n(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(t_* + s) + f(t_* - s) - 2\underline{f}(t_*)) \mathcal{D}_n(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(t_* + s) + f(t_* - s) - 2\underline{f}(t_*)}{\sin(s/2)} \cdot \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(t_* + s) + f(t_* - s) - 2\underline{f}(t_*)}{\sin(s/2)} \cdot \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \frac{f(t_* + s) - f(t_* - s) - 2\underline{f}(t_*)}{s} \cdot s \cdot \mathcal{D}_n(s) ds \end{aligned}$$

Nun ist aber $|s \cdot \mathcal{D}_n(s)| \leq \frac{s}{\sin(s/2)} \leq 3$, für alle n und $0 < s < \delta$, wenn nur δ klein gewählt wird.

Die Dini-Bedingung sagt nun, dass für gegebenes $\varepsilon > 0$ das 2. Integral unabhängig von n dem Betrage nach kleiner als $\varepsilon/2$ wird, wenn nur δ klein gemacht wird. Auf das erste Integral wenden wir den Hilfssatz mit $g(s) := \frac{f(t_*+s)+f(t_*-s)-2\underline{f}(t_*)}{\sin(s/2)}$ an. Sein Betrag wird dann ab einem genügend großen n ebenfalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$.

Beispiele

a) Die Sägezahnfunktion $f_0(t) := t$, wenn $0 \leq t < 2\pi$ und $f(x) := f_0(x - n)$, wenn n ganz ist und $x - n \in [0, 2\pi)$. Der Satz ist anwendbar und sagt, dass $s_n(f)(t)$ gegen $f(t)$ strebt, wenn $t \notin \mathbb{Z}(2\pi)$ und $s_n(f)(2n\pi) \rightarrow \pi$ für alle n .

b) Die "Zackenfunktion" $h(x) = x$, wenn $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$, und $h(x) = l - x$, wenn $\frac{l}{2} \leq x \leq l$. Nun konvergiert die Fourierreihe $\frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k>0 \text{ ungerade}} \frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{2\pi k x}{l}\right)$ überall gegen h .

Mit $x = 0$ erhalten wir

$$\sum_{k>0 \text{ ungerade}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Nun ist aber

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k>0 \text{ ungerade}} \frac{1}{k^2}$$

Also

$$\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Das Gibbs-Phänomen

Der Mangel an Gleichmäßigkeit im Konvergenzverhalten der Fourierreihe einer Funktion mit Sprungstellen lässt sich quantitativ beschreiben:

2.3.9 Satz (Gibbs-Phänomen). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine (2π) -periodische stückweise stetige Funktion und $x_0 \in (-\pi, \pi)$ sei eine Stelle, so dass für ein $h > 0$ die Funktion f sowohl auf $(x_0 - h, x_0)$ als auch auf $(x_0, x_0 + h)$ Lipschitz-stetig ist. Angenommen, es sei $f(x_0-) \neq f(x_0+)$, (wobei $f(x_0\pm) := \lim_{t \searrow 0} f(x_0 \pm t)$ der rechts- bzw. linksseitige Limes sein soll). Dann gibt es Stellen $t_n^+, t_n^- \in (x_0 - h, x_0 + h)$, so dass

$$|s_n(f)(t_n^+) - s_n(f)(t_n^-)| \rightarrow \frac{|\Delta|}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = \frac{|\Delta|}{2} \cdot 1.17898\dots,$$

wenn $n \rightarrow \infty$ und $\Delta := f(x_0+) - f(x_0-)$.

Dabei ist $s_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^n c_k^*(f) e^{j\omega kt}$ die n -te Fouriersumme.

Das bedeutet, dass die Fouriersummen bei x_0 den Funktionswert um bis zu 17.8 % der halben Sprunghöhe "überschwingen" können.

Wir sehen uns die "Mäanderfunktion" $f(x) := -1$ auf $(-\pi, 0]$ und $f(x) = 1$ auf $(0, \pi)$ an, welche (2π) -periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt wird.

a) Die Fourierreihe von f ist

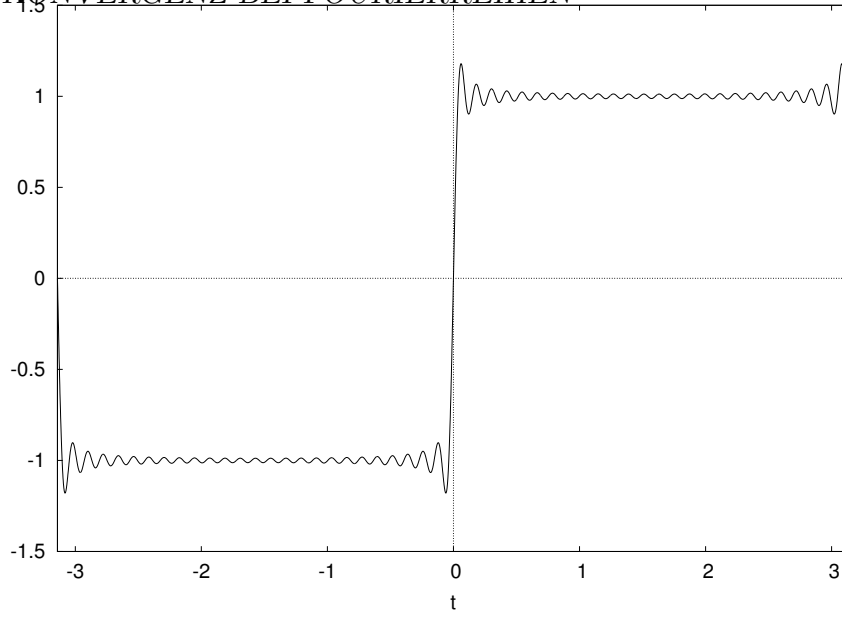
$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

b) Für die n -te Fouriersumme $s_n(f)$ gilt

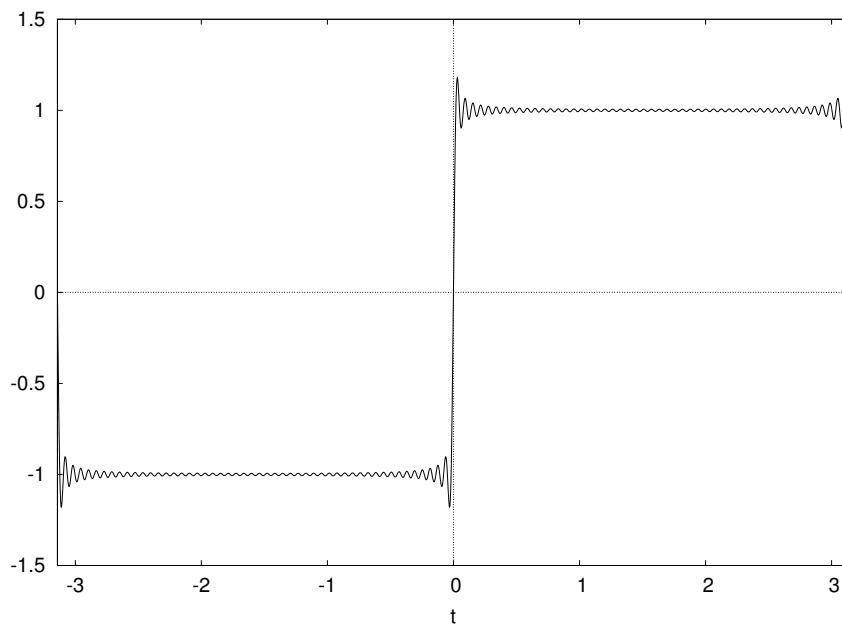
$$s_n(f)\left(\frac{1}{n^3}\right) \rightarrow 0, \quad s_n(f)\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$$

Hier sind Schaubilder der Fouriersummen $s_{25}(f)$:

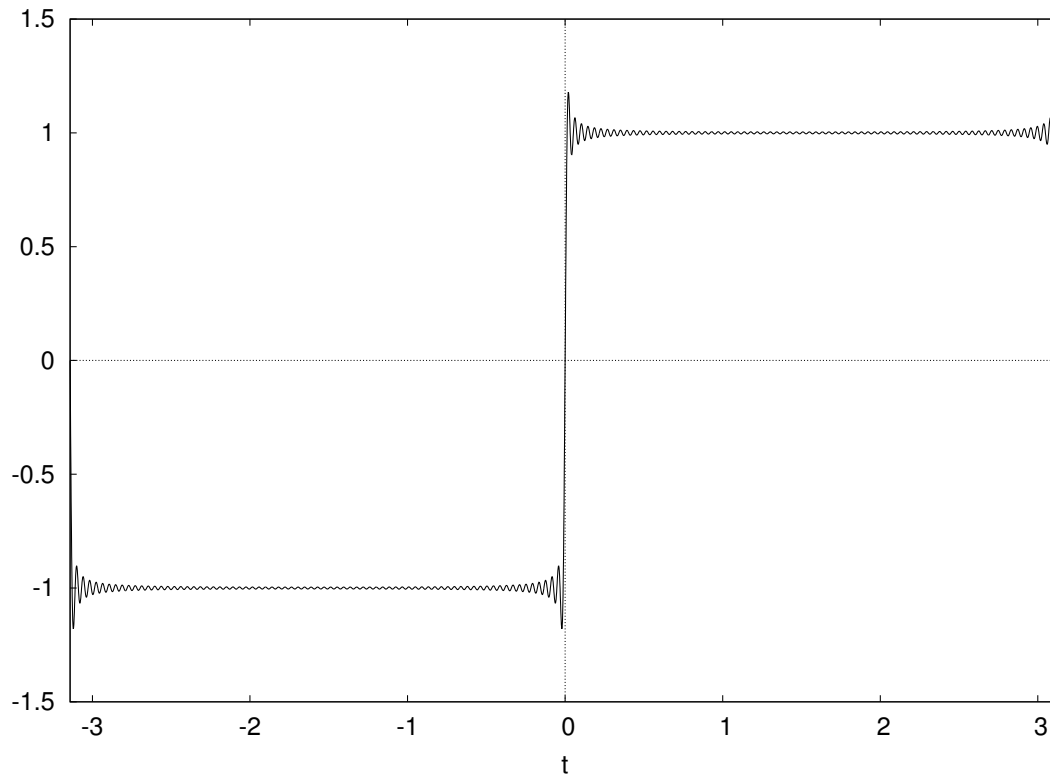
2.3. KONVERGENZ BEI FOURIERREIHEN



sowie $s_{50}(f)$



und $s_{75}(f)$:



Wir wollen nun ein Konvergenzkriterium betrachten, das mit den Fourierkoeffizienten allein auskommt.

2.3.10 Satz. *Angenommen, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei (2π) -periodisch und stückweise stetig. Gibt es dann eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$|c_k^*(f)| \leq \frac{C}{|k|}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, so konvergiert $s_n(f)(t_0)$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen $f(t_0)$, wenn f in t_0 stetig ist.

Beweisskizze.

Schritt 1: Wir bilden das Cesaro-Mittel

$$\sigma_\ell(f) = \frac{s_1(f) + s_1(f) + \dots + s_\ell(f)}{\ell}$$

und stellen dann fest, dass

$$\sigma_\ell(f)(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - s) F_\ell(s) ds$$

wobei F_ℓ der Fejer-Kern

$$F_\ell(t) := \frac{1}{2\pi\ell} \sum_{m=0}^{\ell-1} \mathcal{D}_m(t)$$

ist. Es gilt, ähnlich wie beim Dirichletkern

a) $F_\ell \geq 0$ und $F_\ell(-t) = F_\ell(t)$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} F_\ell(t) dt = 1$

und zusätzlich

c) Für $\delta \in (0, \pi)$ ist $F_\ell(t) \leq \frac{1}{\ell\pi(1-\cos\delta)}$, wenn $\pi \geq |t| \geq \delta$.

Hieraus folgt, dass

$$\sigma_\ell(f)(t_0) \longrightarrow f(t_0)$$

Schritt 2: Wir vergleichen $s_\ell(f)$ mit den "modifizierten" Cesaro-Mitteln

$$\sigma_{m,\ell}(f) := \frac{s_{m+1}(f) + \dots + s_\ell(f)}{\ell - m}$$

für $m < \ell$.

Zuerst stellen wir fest, dass

$$\sigma_{m,\ell}(f) = \frac{(\ell + 1)\sigma_{\ell+1}(f) - (m + 1)\sigma_{m+1}(f)}{\ell - m}$$

und

$$\sigma_{m,\ell}(f)(t) = s_m(f)(t) + \sum_{m < |k| \leq \ell} \frac{\ell + 1 - |k|}{\ell - m} c_k^*(f) e^{\mathbf{j}kt}$$

Aus der ersten Formel erhalten wir dann mit Schritt 1, dass für festes p gilt

$$\sigma_{pn,(p+1)n}(f)(t_0) \longrightarrow f(t_0)$$

mit $n \rightarrow \infty$.

Aus der zweiten Formel erhalten wir, dass für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $kn < m \leq (k+1)n$ gilt

$$|\sigma_{kn,(k+1)n}(f)(t_0) - s_m(f)(t_0)| \leq \frac{C}{k}$$

Beides zusammen liefert uns die Behauptung des Satzes.

□

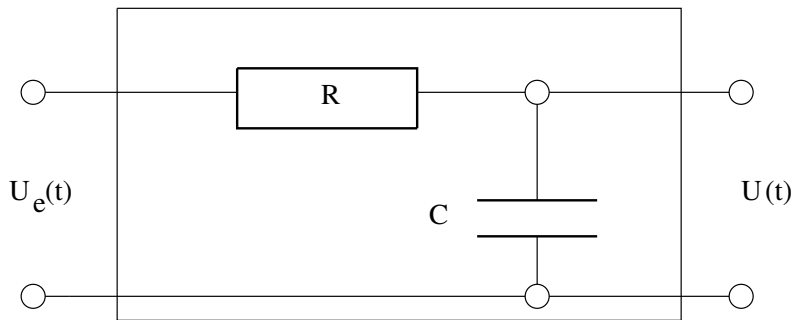
Achtung. Man kann eine (2π) -periodische stetige Funktion konstruieren, bei der die Fourierreihe in $t_0 = 0$ divergiert. Sie erfüllt die Bedingung des obigen Satzes aber nicht.

Anwendungen der Fourierreihen

a) Der Tiefpassfilter

Dies ist ein Schaltkreis, der aus einem Widerstand R und einem Kondensator mit Kapazität C besteht. Sein Zweck besteht darin, Anteile hoher Frequenz in der Fourierzerlegung der Eingangsspannung "herauszufiltern", d.h.: Die Fourierzerlegung der Ausgangsspannung enthält Anteile mit hoher Frequenz nur mit kleinem Gewichtsfaktor.

Tiefpassfilter benutzt man beim Bau von Lautsprechern.



Die Ausgangsspannung $U(t)$ und die Eingangsspannung $U_e(t)$ sind durch die Differentialgleichung

$$RC\dot{U} + U = U_e$$

miteinander verbunden. Nehmen wir jetzt an, dass U_e stetig, T -periodisch und stückweise beschränkt differenzierbar sei, so schreiben wir $U_e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^* e^{j\omega k t}$. Setzen wir auch für U eine Fourierreihe an, $U(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^* e^{j\omega k t}$, so entsteht zwischen den Fourierkoeffizienten beider Funktionen die Beziehung

$$(jRC\omega k + 1)d_k^* = c_k^*, \quad \text{also } d_k^* = \frac{c_k^*}{1 + j\omega RCk}$$

Die Faktoren $\frac{1}{1 + j\omega RCk}$ sind die Fourierkoeffizienten der Übertragungsfunktion:

$$h_T(t) := \frac{T}{RC} \frac{1}{1 - e^{-T/RC}} e^{-t/RC}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

die T -periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt ist.

Das rechnen wir nach:

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{-(\frac{1}{RC} + j\omega k)t} dt = \frac{1}{T} \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega k} \left(-e^{-(\frac{1}{RC} + j\omega k)t} \Big|_0^T \right) = \frac{1}{T} \frac{1 - e^{-T/RC}}{\frac{1}{RC} + j\omega k} = \frac{RC}{T} \frac{1 - e^{-T/RC}}{1 + jRC\omega k}$$

Je größer also der Betrag von k ist, desto kleiner wird $\left| \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega k} \right|$, so dass Anteile von hoher Frequenz (d.h. großes ωk) kleines Gewicht erhalten und unterdrückt, also herausgefiltert werden,

während Anteile mit niedriger Frequenz weniger geschwächt "durchlaufen". Daher rührt der Name "Tiefpassfilter" für die oben skizzierte Anordnung.

Eine Anwendung der Faltungsregel lehrt noch, dass auf $(0, T)$

$$U(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^*(h_T) c_k^* e^{j\omega kt} = h_T * U_e(t) = \frac{1}{T} \int_0^T h_T(s) U_e(t-s) ds$$

wird.

Als Beispiel betrachten wir nun als Input U_e den 2-Weg-gleichgerichteten Sinus, $U_e(t) = U_0 |\sin(\omega t)|$ der Konvergenzsatz ist anwendbar, da U_e stetig ist, und dort, wo U_e existiert, $|U_e'| \leq 1$ gilt. Daher wird

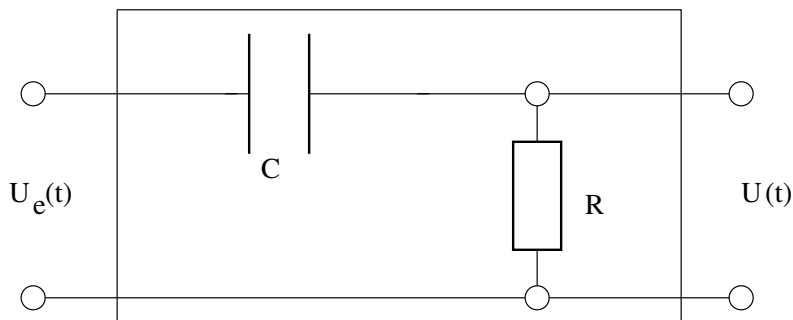
$$U_e(t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} e^{2j\omega kt}$$

Wir erhalten dann

$$U(t) = -\frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + 2j\omega RCk)(4k^2 - 1)} e^{2j\omega kt}$$

Das ist die Fourierdarstellung zu U .

b) Der *Hochpassfilter* ist eine Schaltung ähnlich wie der oben Gezeigten, jedoch sind Kondensator und Widerstand vertauscht, also



Ist U die Spannung am Kondensator, so ist die Ausgangsspannung U_a durch $U_a = RC\dot{U}$ gegeben, und U erfüllt die DGL

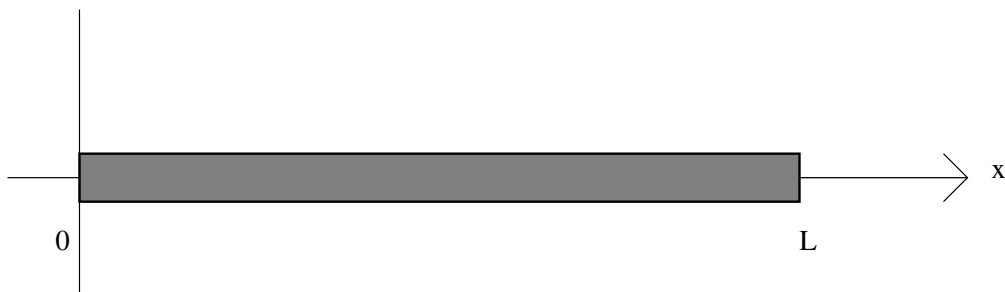
$$\dot{U}_a + \frac{1}{RC} U_a = \frac{1}{RC} \dot{U}_e$$

Ist dann $U_e(t) = \sum_k c_k e^{j\omega kt}$ die Fourierzerlegung der Eingangsspannung U_e , so ist

$$U_a(t) = \sum_k \frac{j\omega RC k}{1 + j\omega RC k} c_k e^{j\omega kt}$$

die Fourierzerlegung der Ausgangsspannung.

c) Temperaturverteilung in einem Stab der Länge L .

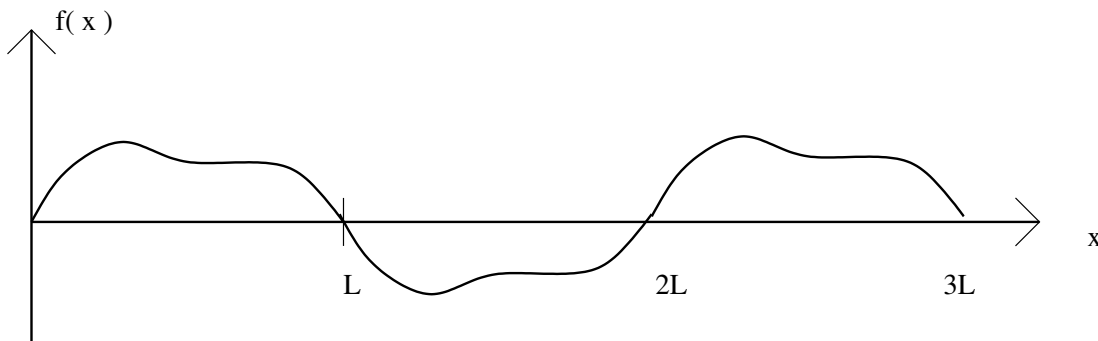


Ist $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und existieren die 3. Ableitungen überall auf $(0, L)$ und sind auch in 0 und L stetig fortsetzbar, so hat die Randwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0 \\ u(0, x) &= f(x) \end{aligned}$$

eine Lösung.

Wir setzen f zu einer ungeraden $2L$ -periodischen Funktion fort, indem wir f auf $[L, 2L]$ definieren als $f(x) := -f(2L - x)$.



Wir können nun f darstellen in der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

Dabei folgt aus der Annahme über die 3-malige stetige Differenzierbarkeit von f , dass f'' durch die Fourierreihe darstellbar ist, die aus der von f durch 2-maliges gliedweises Differenzieren entsteht. Diese Fourierreihe konvergiert absolut und gleichmäßig gegen f'' .

Für jedes $k \geq 1$ erfüllt

$$u_k(t, x) := e^{-\lambda_k^2 t} \sin(\lambda_k x)$$

die Gleichung

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$$

und es gilt zusätzlich $u_k(t, 0) = u_k(t, L) = 0$, wenn $\lambda_k = \frac{\pi k}{L}$ gewählt wird. Daher definieren wir die Funktion

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

Aus unseren Annahmen über f konvergiert aber diese Reihe zusammen mit ihren 1. Zeitableitungen und 2. x -Ableitungen gleichmäßig.

Isoperimetrisches Problem

Gegeben sei eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte und doppelpunktfreie geschlossene Kurve $\alpha(s) := (x(s), y(s))$, für $0 \leq s \leq L$. Wie groß kann die von α umschlossene Fläche sein? Die Antwort lautet so

2.3.11 Satz (*Isoperimetrische Ungleichung*). Sei α wie oben und die Leibnizsche Sektorformel anwendbar. Ist dann A die von α umschlossene Fläche, so gilt $A \leq \frac{L^2}{4\pi}$. Genau dann ist $A = \frac{L^2}{4\pi}$, wenn α ein Kreis mit Radius $R = \frac{L}{2\pi}$ wird.

Beweis. Wir schreiben $x(s)$ und $y(s)$ als Fourierreihen

$$x(s) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega s) + b_k \sin(k\omega s)$$

$$y(s) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \cos(\ell\omega s) + d_\ell \sin(\ell\omega s)$$

woraus folgt

$$x'(s) = \omega \sum_{k=1}^{\infty} k \left(-a_k \sin(k\omega s) + b_k \cos(k\omega s) \right)$$

$$y'(s) = \omega \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \left(-c_\ell \sin(\ell\omega s) + d_\ell \cos(\ell\omega s) \right)$$

Mit den Orthogonalitätsrelationen folgt nun

$$\int_0^L x'(s)^2 ds = \omega\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2)$$

$$\int_0^L y'(s)^2 ds = \omega\pi \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^2 (c_\ell^2 + d_\ell^2)$$

Folglich, da $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$

$$L = \int_0^L (x'(s)^2 + y'(s)^2) ds = \omega\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2)$$

Ebenso folgt

$$\int_0^L x'(s)y(s) ds = - \int_0^L x(s)y'(s) ds = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(-a_k d_k + b_k c_k)$$

Mit der Sektorformel erhalten wir

$$A = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(-a_k d_k + b_k c_k)$$

Nun gilt aber

$$k^2(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) - 2k(-a_k d_k + b_k c_k) = (ka_k + d_k)^2 + (kb_k - c_k)^2 + (k^2 - 1)(d_k^2 + c_k^2)$$

Summieren wir das über alle $k \geq 1$, folgt

$$\frac{L^2}{4\pi} - A = \frac{L}{2\omega} - A = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (ka_k + d_k)^2 + (kb_k - c_k)^2 + (k^2 - 1)(d_k^2 + c_k^2) \geq 0$$

Das ist die isoperimetrische Ungleichung. Soll hierin Gleichheit bestehen, muss $a_1 + d_1 = b_1 - c_1 = 0$ und $a_k = b_k = c_k = d_k = 0$ für $k > 1$ werden. Dann haben wir aber

$$\alpha(s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_0 \\ c_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cos(\omega s) + \begin{pmatrix} b_1 \\ -a_1 \end{pmatrix} \sin(\omega s)$$

Das ist ein Kreis.

Anwendung. Eine Stadt werde von einer Mauer von 20 km Länge umschlossen. Dann ist die Fläche dieser Stadt maximal $A_0 = \frac{100}{\pi} = 31,8 \text{ km}^2$.

Kapitel 3

Die Fouriertransformation

3.1 Uneigentliche Integrale

Wir streben nun an, gewisse Funktionen auch über unbegrenzte Intervalle und solche Intervalle (a, b) zu integrieren, auf denen sie nicht beschränkt sein müssen. Das ist unter vernünftigen Voraussetzungen möglich.

Definition. a) Angenommen, eine Funktion f sei stetig auf dem Intervall $(a, b]$. Wenn dann der Grenzwert

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x) dx$$

existiert, nennen wir f integrel über $(a, b]$. Analog nennen wir eine auf $[a, b)$ stetige Funktion integrel auf $[a, b)$, wenn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

existiert. Wir bezeichnen in beiden Fällen als (*uneigentliches*) Integral von f über (a, b) die Zahl

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Eine entsprechende Definition treffen wir für stückweise stetige Funktionen, wobei wir nicht fordern, dass diese Funktionen beschränkt bleiben.

Angenommen, eine Funktion sei auf $[a, \infty)$ erklärt und (stückweise) stetig; wenn dann der Grenzwert $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$ existiert, so schreiben wir

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

Wenn f auf \mathbb{R} definiert und (stückweise) stetig ist und gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx \quad \text{und} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^a f(x) dx$$

existieren, so definieren wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^a f(x) dx$$

Beispiele. a) Ist $0 < s < 1$, so ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^s} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left. \frac{1}{1-s} x^{1-s} \right|_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1 - \delta^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{1-s}$$

b)

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left. \frac{-1}{\ln x} \right|_{\delta}^{1/2} = \frac{1}{\ln 2} - \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\ln(1/\delta)} = \frac{1}{\ln 2}$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \arctg(R) - \arctg(-R) = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \arctg(R) = \pi$$

d) Sei nun $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Dann existiert zwar

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

(mit Wert 0), aber nicht

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Denn ist $a \in \mathbb{R}$, so haben wir

$$\int_a^R f(x) dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_a^R = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R^2}{1+a^2},$$

so dass der Grenzwert $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$ für *kein* $a \in \mathbb{R}$ existiert.

e) Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist über \mathbb{R} integrierbar. Denn ist $R > 5$ beliebig, so wählen wir ein maximales ganzzahliges n mit $(n+1)\pi \leq R$. Es folgt

$$\int_0^R f(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x) dx + \int_{(n+1)\pi}^R f(x) dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k + \int_{(n+1)\pi}^R f(x) dx$$

mit

$$I_k := (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x) dx$$

Durch partielles Integrieren errechnen wir

$$\begin{aligned} I_k &= (-1)^k \left. \frac{-\cos x}{x} \right|_{k\pi}^{(k+1)\pi} + (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi} + \frac{1}{k\pi} + (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi} + \frac{1}{k\pi} + \int_0^\pi \frac{\cos x}{(x+k\pi)^2} dx > 0 \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\left| \int_{(n+1)\pi}^R f(x) dx \right| \leq \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |f(x)| dx \leq \frac{\pi}{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

und weiter ist

$$\left| \int_0^\pi \frac{\cos x}{(x+k\pi)^2} dx \right| \leq \frac{1}{k^2\pi}$$

Die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{(k+1)\pi} + \frac{1}{k\pi} \right)$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\cos x}{(x+k\pi)^2} dx$$

konvergieren, also auch $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_k$, und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k$$

Das beweist alles.

3.1.1 Satz. Wenn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stückweise stetig ist, d.h. auf jedem Intervall der Form $[-a, a]$ nur endlich viele Unstetigkeitsstellen hat, so existiert das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, wenn das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ endlich ist.

Das Beispiel e) lehrt, dass die Umkehrung dieses Schlusses im Allgemeinen nicht gilt.

3.2 Die Fouriertransformierte

Wir ordnen nun jeder "vernünftigen" Funktion eine neue Funktion zu, deren Werte in den ganzen Zahlen die Fourierkoeffizienten liefern, wenn die Funktion periodisch ist.

Definition. Angenommen, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei stückweise stetig. Ferner unterstellen wir, es sei

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$$

Wir nennen f in diesem Fall *absolut integabel*. Dann bezeichnen wir als

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x} dx$$

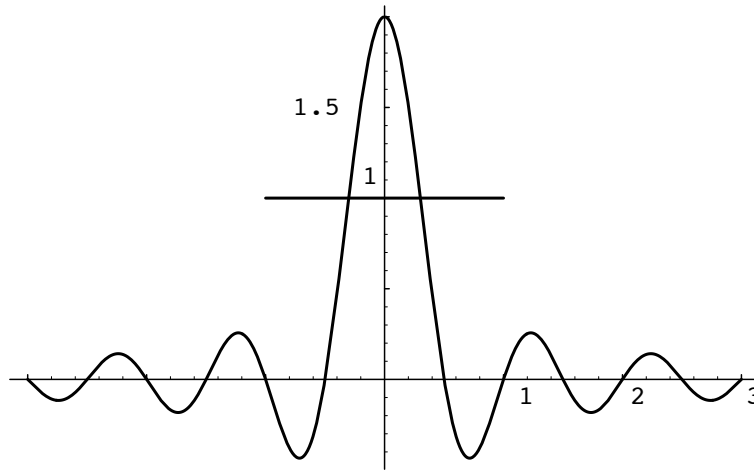
die *Fouriertransformierte* von f . Sie ist eine Funktion von $\omega \in \mathbb{R}$

Wir studieren wichtige Eigenschaften dieser Funktion. Zunächst einige

Beispiele. i) Sei $f(x) = 1$, wenn $a \leq x \leq b$ (mit endlichen Zahlen $a < b$). Ferner sei $f(x) = 0$, wenn $x \notin [a, b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_a^b e^{-j\omega x} dx \\ &= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega x} \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega b} - e^{-j\omega a}) \\ &= \frac{1}{-j\omega} e^{-\frac{1}{2}j\omega(b+a)} \left(e^{-\frac{1}{2}j\omega(b-a)} - e^{\frac{1}{2}j\omega(b-a)} \right) \\ &= \frac{2}{\omega} e^{-\frac{1}{2}j\omega(b+a)} \sin\left(\frac{1}{2}(b-a)\omega\right) \end{aligned}$$

Das Bild für den Fall $a = -b$, sieht so aus:



ii) Die Funktion $f(t) = t$, wenn $t \in [0, l]$ und $f(t) = 2l - t$, wenn $t \in [l, 2l]$ und $f(t) = 0$ sonst. Dann gilt

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^l t e^{-j\omega t} dt + \int_l^{2l} (2l - t) e^{-j\omega t} dt$$

Nun errechnen wir für die Einzelintegrale:

$$\begin{aligned} \int_0^l t e^{-j\omega t} dt &= \frac{1}{-j\omega} t e^{-j\omega t} \Big|_0^l + \frac{1}{j\omega} \int_0^l e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{-j\omega} l e^{-j\omega l} - \left(\frac{1}{j\omega} \right)^2 e^{-j\omega t} \Big|_0^l \\ &= \frac{1}{-j\omega} l e^{-j\omega l} + \frac{1}{\omega^2} (e^{-j\omega l} - 1) \end{aligned}$$

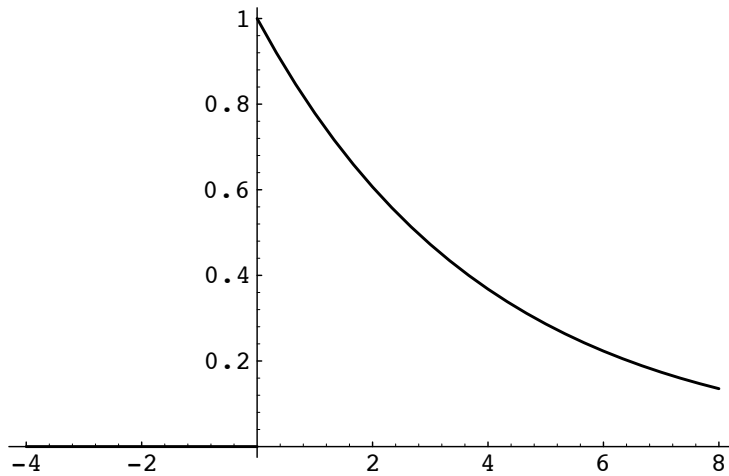
und

$$\begin{aligned} \int_l^{2l} (2l - t) e^{-j\omega t} dt &= \int_0^l s e^{-j\omega(2l-s)} ds = e^{-2j\omega l} \int_0^l s e^{j\omega s} ds \\ &= e^{-2j\omega l} \left(\frac{1}{j\omega} s e^{j\omega s} \Big|_0^l - \frac{1}{j\omega} \int_0^l e^{j\omega s} ds \right) \\ &= e^{-2j\omega l} \left(\frac{1}{j\omega} l e^{j\omega l} + \frac{1}{\omega^2} (e^{j\omega l} - 1) \right) \end{aligned}$$

Zusammen ergibt das

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \left(\int_0^l t e^{-j\omega t} dt + \int_l^{2l} (2l-t) e^{-j\omega t} dt \right) \\ &= \frac{1}{\omega^2} (-1 + 2e^{-j\omega l} - e^{-2j\omega l}) \\ &= \frac{-1}{\omega^2} (e^{-j\omega l} - 1)^2 = \frac{4}{\omega^2} e^{-j\omega l} \sin^2\left(\frac{1}{2}l\omega\right)\end{aligned}$$

(iii) Für $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = e^{-(a+jb)x}$, wenn $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ sonst. Hier ist der Graph von $|f|$:



Dann erhalten wir

$$\widehat{f}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(a+j(b+\omega))x} dx = \frac{1}{a + j(b + \omega)}$$

Genauso folgt für $g(x) = e^{-(a-jb)x}$, wenn $x \geq 0$ und $g(x) = 0$ sonst

$$\widehat{g}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(a-j(b-\omega))x} dx = \frac{1}{a - j(b - \omega)}$$

Nun ist

$$(f - g)(x) = \begin{cases} -2j e^{-ax} \sin(bx) & , \text{ wenn } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ wenn } x < 0 \end{cases}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ax-j\omega x} \sin(bx) dx &= \frac{1}{-2j} (\widehat{f} - \widehat{g})(\omega) \\ &= \frac{1}{-2j} \left(\frac{1}{a+j(b+\omega)} - \frac{1}{a-j(b-\omega)} \right) \\ &= \frac{b}{(a+j\omega)^2 + b^2} = \frac{b}{a^2 + b^2 - \omega^2 + 2aj\omega} \end{aligned}$$

Wir können die Funktion f aus ihren Fourierkoeffizienten zurückgewinnen, wenn sie stetig differenzierbar ist. Ferner genügen die Fourierkoeffizienten gewissen Rechenregeln

Wir untersuchen daher,

- ob entsprechende Regeln auch für die Fouriertransformierte gelten
- ob und wann man eine über \mathbb{R} integrable Funktion aus ihrer Fouriertransformierten rekonstruieren kann

Rechenregeln für die Fouriertransformierte

Von jetzt an setzen wir unsere Funktionen stets als stückweise stetig und absolut integrabel voraus.

3.2.1 Satz. Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen wie oben gefordert. Dann erfüllt die Fouriertransformierte die folgenden Regeln:

a)

$$\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}, \quad \widehat{\lambda f} = \lambda \widehat{f} \quad (\text{Linearität})$$

b) Ist $a \neq 0$, und $f_a(x) := f(ax)$, so ist

$$\widehat{f_a}(\omega) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (\text{Dilatationsregel})$$

c) Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\tau_{x_0}f(x) = f(x+x_0)$, so ist

$$\widehat{\tau_{x_0}f}(\omega) = e^{j\omega x_0} \widehat{f}(\omega) \quad (1. \text{Translationsregel})$$

Ist $\omega_0 \in \mathbb{R}$, so gilt

$$(f \cdot e^{j\omega_0 x})^\wedge = \widehat{f}(\omega - \omega_0) \quad (2. \text{Translationsregel})$$

d) Wenn gerade ist: $f(-x) = f(x)$, so ist \widehat{f} reellwertig, ist f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$, so hat \widehat{f} nur rein imaginäre Werte.

Beweis. Folgt aus der Substitutionsregel für das Integrieren. □

Die folgende Eigenschaft ist mit partieller Integration zu beweisen und ist einer der Hauptgründe für die Einführung der Fouriertransformierten

3.2.2 Satz (1. Differenziationssatz). a) Ist f wie zuvor und k -mal stetig differenzierbar, so dass auch $f^{(k)}$ wieder integrierbar ist, so gilt

$$\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (\mathbf{j}\omega)^k \widehat{f}(\omega)$$

Beweis. Wir rechnen für $k = 1$. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_0^R f'(x)e^{-\mathbf{j}\omega x} dx &= f(x)e^{-\mathbf{j}\omega x} \Big|_0^R - (-\mathbf{j}\omega) \int_0^R f(x)e^{-\mathbf{j}\omega x} dx \\ &= f(R)e^{-\mathbf{j}\omega R} + (\mathbf{j}\omega) \int_0^R f(x)e^{-\mathbf{j}\omega x} dx \end{aligned}$$

Da f integrierbar ist, können wir R eine Folge $(R_n)_n$ so durchlaufen lassen, dass $f(R_n) \rightarrow 0$ mit $n \rightarrow \infty$. Ferner erhalten wir mit $n \rightarrow \infty$:

$$\int_0^\infty f'(x)e^{-\mathbf{j}\omega x} dx = (\mathbf{j}\omega) \int_0^\infty f(x)e^{-\mathbf{j}\omega x} dx$$

Genauso zeigt man

$$\int_{-\infty}^0 f'(x)e^{-\mathbf{j}\omega x} dx = (\mathbf{j}\omega) \int_{-\infty}^0 f(x)e^{-\mathbf{j}\omega x} dx$$

Das liefert die Behauptung. □

Nun fragen wir: Was muss man von f fordern, wenn \widehat{f} differenzierbar sein soll? Da der Exponentialfaktor $e^{-\mathbf{j}\omega x}$ in ω differenzierbar ist und die Ableitung $(-\mathbf{j}x)^k e^{-\mathbf{j}\omega x}$ hat, sollte man erwarten, dass man mehr als die Integrierbarkeit fordern müssen.

Zunächst ein Hilfsmittel:

3.2.3 Hilfssatz. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left| e^{\mathbf{j}\alpha} - 1 \right| \leq |\alpha| \quad \text{und} \quad \left| \frac{e^{\mathbf{j}\alpha} - 1}{\mathbf{j}\alpha} - 1 \right| \leq 2|\alpha|$$

Beweis. Die erste Abschätzung erhalten wir durch Integrieren:

$$\left| e^{\mathbf{j}\alpha} - 1 \right| \leq \left| \int_0^\alpha e^{\mathbf{j}t} dt \right| \leq |\alpha|$$

Ähnlich finden wir die 2. Abschätzung, wenn wir von der Gleichung

$$\mathbf{j} \int_0^\alpha t e^{\mathbf{j}t} dt = \alpha e^{\mathbf{j}\alpha} + \mathbf{j} (e^{\mathbf{j}\alpha} - 1)$$

ausgehen. □

Nunmehr lautet unser 2. Differenziationssatz

3.2.4 Satz (2. Differenziationssatz). *Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und für ein ganzzahliges $k \geq 0$ die Funktion $(1 + |x|^k)|f|$ integrabel, so ist \widehat{f} k -mal stetig differenzierbar und*

$$\widehat{f}^{(k)} = (-\mathbf{j})^k \widehat{(x^k f)}$$

Beweis. Sei ω_0 fest. Wenn $k = 0$, haben wir:

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\omega) - \widehat{f}(\omega_0)| &\leq \left| \int_{-R}^R f(x)(e^{-\mathbf{j}\omega x} - e^{-\mathbf{j}\omega_0 x}) dx \right| + 2 \int_{\{|x|>R\}} |f(x)| dx \\ &\leq \int_{-R}^R |f(x)| |e^{-\mathbf{j}(\omega - \omega_0)x} - 1| dx + 2 \int_{\{|x|>R\}} |f(x)| dx \\ &\leq R|\omega - \omega_0| \int_{-R}^R |f(x)| dx + 2 \int_{\{|x|>R\}} |f(x)| dx \end{aligned}$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so machen wir R so groß, dass $2 \int_{\{|x|>R\}} |f(x)| dx < \varepsilon$ und dann $|\omega - \omega_0|$ so klein, dass auch $R|\omega - \omega_0| \int_{-R}^R |f(x)| dx < \varepsilon$ wird. Das beweist die Stetigkeit von \widehat{f} in ω_0 .

Angenommen, es sei $k = 1$. Dann folgt mit der 2. Ungleichung des Hilfssatzes:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\widehat{f}(\omega) - \widehat{f}(\omega_0)}{\omega - \omega_0} - (-\mathbf{j}) \widehat{(x \cdot f)}(\omega_0) \right| &\leq 2R|\omega - \omega_0| \int_{-R}^R (1 + |x|) |f(x)| dx \\ &\quad + 2 \int_{|x|>R} (1 + |x|) |f(x)| dx \end{aligned}$$

Die rechte Seite geht wieder gegen 0, wenn $\omega \rightarrow \omega_0$. Der allgemeine Fall wird durch ein Induktionsargument erledigt. □

Als eine schöne Anwendung dieser Differenziationssätze berechnen wir die

Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-ax^2}$

Beide Sätze sind anwendbar. Es entsteht:

$$\widehat{f'} = \mathbf{j} \omega \widehat{f}$$

Zum anderen ist aber $f'(x) = -2axf(x)$, also

$$\widehat{f}' = -2a\widehat{x}\widehat{f} = -2a\mathbf{j}\widehat{f}'$$

Damit muss \widehat{f} die Differentialgleichung

$$\widehat{f}' = -\frac{\omega}{2a}\widehat{f}$$

lösen. Wir betrachten dazu die Ableitung der Funktion

$$g(\omega) := \widehat{f} \cdot e^{\frac{\omega^2}{4a}}$$

Wir finden, dass $g' = 0$ ist. Damit haben wir aber

$$\widehat{f}(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

Dabei ist

$$C = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Also

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} f\left(\frac{\omega}{2a}\right)$$

Definition. Für zwei absolut integrierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir als die *Faltung* von f mit g das Integral

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Ihr Verhalten gegenüber Fouriertransformation ist ähnlich wie bei der periodischen Faltung:

3.2.5 Satz (Faltungssatz). Sind $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ absolut integrierbar, so auch $f * g$ und es gilt für die Fouriertransformierte

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$$

Beweis. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-j\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)dx \right) e^{-j\omega y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-j\omega y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)dx \right) e^{-j\omega(x-y)} dy \\ &= \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega) \end{aligned}$$

Die Umkehrformel

Wir beantworten jetzt die Frage, wann man eine integrable Funktion f aus ihrer Fouriertransformierten zurückgewinnen kann.

Dazu beachten wir

3.2.6 Satz (*Parsevalsche Gleichung*). Angenommen, es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ absolut integrabel, also $|f|$ und $|g|$ integrabel, ebenso $|fg|$. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)g(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta$$

Beweis. Wir setzen die Definition der Fouriertransformierten ein und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)g(\omega)d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(\omega)e^{-j\omega\eta}d\eta \right) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(\omega)e^{-j\omega\eta}d\omega \right) d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta \end{aligned}$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist gerechtfertigt, da die Funktion

$$(x, y) \mapsto |f(x)g(y)|$$

über \mathbb{R}^2 integrabel ist. □

Damit können wir die Umkehrformel aufstellen:

3.2.7 Satz (*1. Umkehrformel*). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ absolut integrierbar und die Fouriertransformierte \widehat{f} sei es auch. Dann gilt für jede Stelle $x \in \mathbb{R}$, an der f stetig ist:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{j\omega x}d\omega$$

Beweis. Zunächst nehmen wir an, es sei f in $x = 0$ stetig. Wir wenden die Parsevalgleichung auf f und $g(x) = e^{-ax^2}$ an, wobei $a > 0$. Das ergibt wegen $\widehat{g}(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\eta^2}{4a}}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{-a\omega^2}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\eta^2}{4a}}d\eta = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{2a}y)e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

Wir dürfen wegen unserer Voraussetzungen über f hierin a gegen 0 gehen lassen und finden

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)d\omega = \sqrt{2\pi}f(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy = 2\pi f(0)$$

Ist jetzt f an irgendeiner Stelle x stetig, so schreiben wir das Obige noch einmal an mit $\tau_x f$ statt f und beachten, dass $\widehat{\tau_x f} = e^{j\omega x} \widehat{f}$ und $\tau_x f(0) = f(x)$. Das liefert die Umkehrformel. \square

Wir können auch für stückweise stetige Funktionen eine Version der Umkehrformel beweisen:

3.2.8 Satz (2. Umkehrformel). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ absolut integrierbar und die Fouriertransformierte \widehat{f} sei es auch. Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\underline{f}(x_0) := \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$ und existieren für x_0 die links- und rechtsseitige Ableitung, so ist

$$\underline{f}(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{j\omega x_0} d\omega$$

Beweis. Es sei wieder $\Delta := f(x_0+) - f(x_0-)$ und

$$f_2(x) := \begin{cases} -e^{-|x-x_0|}, & x < x_0 \\ e^{-|x-x_0|}, & x \geq x_0 \end{cases}$$

Dann ist $f_1 := f - f_2$ in x_0 stetig mit $f_1(x_0) = \underline{f}(x_0)$. Weiter erfüllt die Funktion

$$g(x) := \frac{f_1(x) - e^{-|x-x_0|} f_1(x_0)}{x - x_0}$$

die Bedingungen des 2. Differenziationssatzes. Aus $f_1(x) = f_1(x_0)e^{-|x-x_0|} + (x-x_0)g(x)$ erhalten wir nun

$$\widehat{f}_1(\omega) = 2f_1(x_0) \frac{e^{-jx_0\omega}}{1+\omega^2} + j\widehat{g}'(\omega) - x_0\widehat{g}(\omega)$$

Wir multiplizieren mit $e^{jx_0\omega}$ und integrieren über $[-R, R]$, mit irgendeinem $R > 0$. Dann wird

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \widehat{f}_1(\omega) e^{jx_0\omega} d\omega &= 2f_1(x_0) \int_{-R}^R \frac{1}{1+\omega^2} d\omega + j \int_{-R}^R \widehat{g}'(\omega) e^{jx_0\omega} d\omega - x_0 \int_{-R}^R \widehat{g}(\omega) e^{jx_0\omega} d\omega \\ &= 4\arctg(R) f_1(x_0) + j\widehat{g}(\omega) e^{jx_0\omega} \Big|_{-R}^R \end{aligned}$$

denn es gilt ja

$$j \int_{-R}^R \widehat{g}'(\omega) e^{jx_0\omega} d\omega = j\widehat{g}(\omega) e^{jx_0\omega} \Big|_{-R}^R + x_0 \int_{-R}^R \widehat{g}(\omega) e^{jx_0\omega} d\omega, \quad \int_{-R}^R \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = 2\arctg(R)$$

Gleichzeitig haben wir

$$\int_{-R}^R \widehat{f}_1(\omega) e^{jx_0\omega} d\omega = \int_{-R}^R \widehat{f}(\omega) e^{jx_0\omega} d\omega - \int_{-R}^R \widehat{f}_2(\omega) e^{jx_0\omega} d\omega = \int_{-R}^R \widehat{f}(\omega) e^{jx_0\omega} d\omega,$$

denn $\widehat{f}_2(\omega)e^{jx_0\omega} = -2j\frac{\omega}{1+\omega^2}$ ist ungerade.

Insgesamt folgt nun

$$\int_{-R}^R \widehat{f}(\omega)e^{jx_0\omega} d\omega = 4\arctg(R) \underline{f}(x_0) + j\widehat{g}(\omega)e^{jx_0\omega} \Big|_{-R}^R$$

Lassen wir nun noch R eine geeignete unbeschränkte Folge durchlaufen, folgt die Behauptung. \square

Eine interessante Anwendung ist diese:

3.2.9 Hilfssatz. Angenommen, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und absolut integabel, weiter sei \widehat{f} außerhalb eines Intervalls $[-A, A]$ identisch Null (wobei $A > 0$). Dann ist f selbst beliebig oft differenzierbar.

Beweis. Zunächst ist \widehat{f} selbst absolut integabel und erfüllt die Forderung des 2. Differenziationssatzes. Damit ist die Fouriertransformierte f^* von \widehat{f} beliebig oft differenzierbar. Aber

$$2\pi f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{j\omega x} d\omega = f^*(-x)$$

\square

Folgerung. Sind $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und absolut integabel und ist fg es ebenfalls, so gilt

$$\widehat{f} * \widehat{g} = 2\pi \widehat{fg},$$

sofern auch \widehat{f}, \widehat{g} und \widehat{fg} absolut integabel sind.

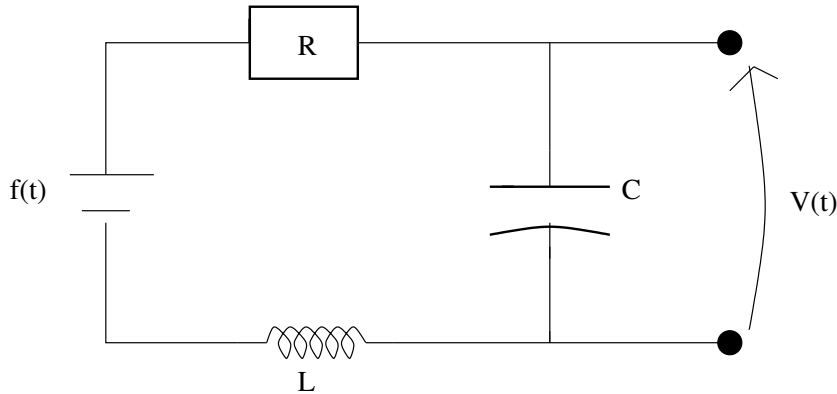
Beweis. Mit dem Faltungssatz folgt ja, zusammen mit einer Übungsaufgabe, dass

$$\widehat{\widehat{f} * \widehat{g}}(x) = \widehat{\widehat{f}}(x)\widehat{\widehat{g}}(x) = (2\pi)^2(fg)(-x) = 2\pi \widehat{fg}(x)$$

Also haben $\widehat{f} * \widehat{g}$ und $2\pi \widehat{fg}$ dieselbe Fouriertransformierte. Die Umkehrformel liefert die Behauptung. \square

Der RCL-Kreis

Wir analysieren einen Stromkreis aus Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C :



Gefragt ist nach der Spannung V am Kondensator, wenn die Spannung f angelegt wird. Wir suchen nach absolut integralen Lösungen V . Angenommen, f sei absolut integral.

Das Ohm'sche Gesetz liefert nun die Differentialgleichung

$$LCV'' + RCV' + V = f$$

Fouriertransformieren dieser Gleichung führt auf

$$(LC(\mathbf{j}\xi)^2 + RC(\mathbf{j}\xi) + 1)\widehat{V} = \widehat{f}$$

also

$$\widehat{V} = \frac{1}{LC} \frac{1}{(\mathbf{j}\xi)^2 + \frac{R}{L}(\mathbf{j}\xi) + \frac{1}{LC}} \widehat{f}$$

Jetzt erinnern wir uns an ein früher gerechnetes Beispiel einer Fouriertransformierten: Setzen wir

$$h(x) = \begin{cases} e^{-ax} \sin(bx) & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

für $a > 0, b \in \mathbb{R}$, so wird

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{b}{2a \cdot \mathbf{j}\xi + a^2 + b^2 - \xi^2}$$

1) Angenommen, es ist $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$. Nun wählen wir

$$a = \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Damit wird

$$\widehat{V}(\xi) = \frac{1}{LC} \widehat{h}(\xi) \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{LC} \widehat{h * f}(\xi)$$

und folglich

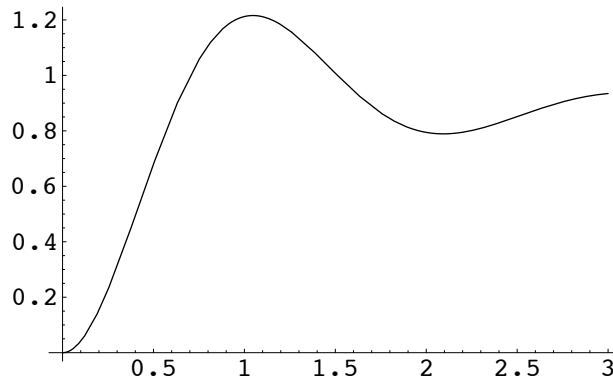
$$V(t) = \frac{1}{LC} h * f(t) = \frac{1}{LC} \int_0^\infty h(s) f(t-s) ds = \frac{1}{LC} \int_0^\infty e^{-as} \sin(bs) f(t-s) ds$$

Nun nehmen wir an, es sei $f(s) = f_0$, wenn $0 \leq s \leq S$ und $f(s) = 0$ sonst. Dann folgt mit $T := \max\{t - S, 0\}$:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{f_0}{LC} \int_T^t e^{-as} \sin(bs) ds \\ &= \begin{cases} \frac{f_0}{LC} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (-e^{-at} \sin(bt + \delta_0) + \sin(\delta_0)) & , \text{ wenn } 0 \leq t \leq S \\ \frac{f_0}{LC} \frac{e^{-at}}{\sqrt{a^2+b^2}} (-\sin(bt + \delta_0) + e^{aS} \sin(b(t-S) + \delta_0)) & , \text{ wenn } t \geq S \end{cases} \end{aligned}$$

mit $\delta_0 = \arctg \frac{b}{a}$.

Hier sehen wir das Schaubild für $a = 1, b = f_0 = 3$ und $S \rightarrow \infty$.



II) Angenommen, es ist $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$, also $R = 2\sqrt{L/C}$. Dann wird für allgemeinen Input f :

$$LCV'' + 2\sqrt{LC}V' + V = f$$

oder fouriertransformiert:

$$\hat{f} = (\mathbf{j}\sqrt{LC}\xi + 1)^2 \hat{V} = \hat{h}_1 \cdot \hat{f},$$

wobei

$$h_1(x) = xe^{-ax}, \text{ wenn } x \geq 0, \text{ und } h_1(x) = 0, \text{ sonst}$$

Dabei ist $a = 1/\sqrt{LC}$. Damit entsteht $\widehat{V} = \widehat{h}_1 \widehat{f} = \widehat{h_1 * f}$, also

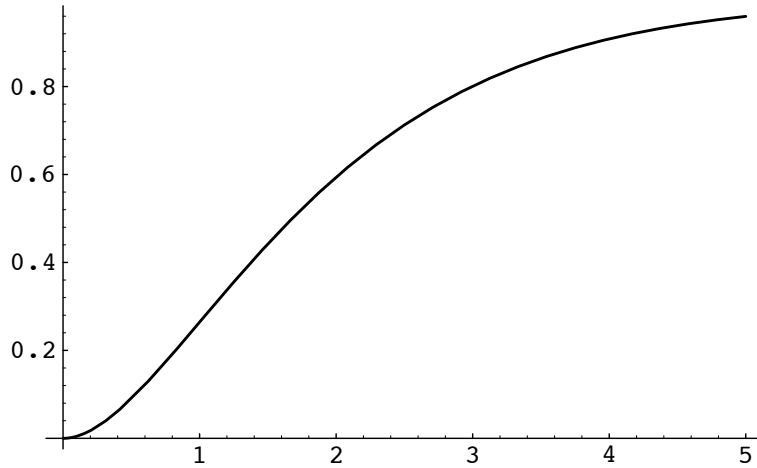
$$V(t) = h_1 * f(t) = \int_0^\infty s e^{-as} f(t-s) ds$$

Ist nun wieder $f = f_0$ auf $[0, S)$ und $f = 0$ sonst, so entsteht als Lösung

$$V(t) = f_0 \int_T^t s e^{-as} ds = \frac{1}{a^2} (e^{-aT} - (1 + at)e^{-at}) + \frac{1}{a} e^{-aT}$$

(wieder sei $T := \max\{t - S, 0\}$).

Für $a = 1$ sieht das Schaubild von V bei $S \rightarrow \infty$ so aus:



III) Sei jetzt $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$. Dann entsteht

$$\widehat{V} = \frac{\widehat{f}}{LC} \frac{1}{(\mathbf{j}\xi + a\frac{R}{2L})^2 - b^2 (\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC})} = \frac{1}{LC} \widehat{f} \widehat{h}_2,$$

mit

$$a = \frac{R}{2L}, \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$h_2(x) = \frac{e^{-ax}}{LCb} \sinh(bx), \quad x \geq 0$$

und $h_2(x) = 0$ sonst. Wir erhalten entsprechend zu früheren Rechnungen:

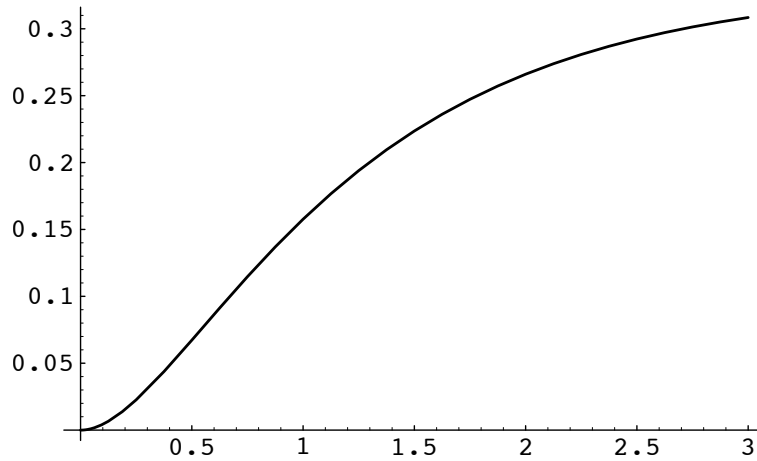
$$V(t) = \int_0^\infty h_2(s) f(t-s) ds$$

Ist wieder f die Sprungfunktion mit $f = f_0$ auf $[0, S)$ und 0 sonst, so entsteht

$$V_S(t) = f_0 \int_T^t h_2(s) ds \longrightarrow \frac{f_0}{LC} \left(\frac{1}{a^2 - b^2} - \frac{1}{b\sqrt{a^2 - b^2}} e^{-at} \sinh(bt + \varepsilon_0) \right)$$

mit $\varepsilon_0 = \operatorname{Arsinh}(b/\sqrt{a^2 - b^2})$, wenn $S \rightarrow \infty$.

Das Schaubild für $R = 4, L = 1, C = 1/3$, also $a = 2, b = 1$ sieht bei $f_0 = 1/3$ so aus:



Wenn nun eine Wechselspannung $f(s) = f_0 \sin(\omega s)$, für $0 \leq s \leq S$ und $f(s) = 0$ sonst, angelegt wird, so erhalten wir mit $S \rightarrow \infty$, wenn wir annehmen, es sei Fall I gegeben:

$$\begin{aligned} V_S(t) &\longrightarrow \frac{2ab \cos(bt) + \omega(\omega^2 + a^2 + b^2) \sin(bt)}{a^4 + (b^2 - \omega^2)^2 + 2a^2(b^2 + \omega^2)} e^{-at} \\ &\quad + \frac{-2ab\omega \cos(\omega t) + b(a^2 + b^2 - \omega^2) \sin(\omega t)}{a^4 + (b^2 - \omega^2)^2 + 2a^2(b^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{2ab \cos(bt) + \omega(\omega^2 + a^2 + b^2) \sin(bt)}{(a^2 + b^2 - \omega^2) + (2a\omega)^2} e^{-at} \\ &\quad + \frac{\cos(\omega t + \varphi_0)}{\sqrt{(a^2 + b^2 - \omega^2) + (2a\omega)^2}} \end{aligned}$$

mit $\varphi_0 := \operatorname{arctg}\left(\frac{a^2 + b^2 - \omega^2}{2a\omega}\right)$.

3.3 Die Fouriertransformierte auf L^2

Man kann die Fouriertransformation auch auf anderen Funktionenklassen erklären, etwa auf der Klasse L^2 aller stückweise stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $\|f\|_2^2 := \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2(x) dx$ endlich ist.

Beispiel. Die Funktionen $e^{-|x|}$, $\frac{\sin x}{x}$ und $\frac{1}{1+|x|}$ gehören zur Klasse L^2 .

3.3.1 Hilfssatz. Wenn $f, g \in L^2$, so ist $f\bar{g}$, absolut integrabel, und es ist

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \|g\|_2^2,$$

wobei

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Beweis. Denn $|f\bar{g}| \leq |f|^2 + |g|^2$, so dass das Integral $\langle f, g \rangle$ definiert ist. Nehmen wir an, $b := \|g\|_2 > 0$, so ist

$$\|f - \frac{\langle f, g \rangle}{b} g\|_2 \geq 0$$

Andererseits errechnen wir, dass

$$\begin{aligned} \|f - \frac{\langle f, g \rangle}{b} g\|_2 &= \left\langle f - \frac{\langle f, g \rangle}{b} g, f - \frac{\langle f, g \rangle}{b} g \right\rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|g\|_2^2} \end{aligned}$$

Das ergibt die Behauptung. □

Folgerung. Mit $f, g \in L^2$ ist auch $f + g \in L^2$, und es ist $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

3.3.2 Satz. Angenommen, f sei absolut integrabel und $f \in L^2$. Dann ist $\widehat{f} \in L^2$ und $\|\widehat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$

Beweis. Definieren wir $g(x) = \overline{f(-x)}$, so erhalten wir $\widehat{g} = \widehat{\bar{f}}$, und daher, wenn wir $h := f * g$ wählen: $\widehat{h} = |\widehat{f}|^2$. Mit dem Beweis der Umkehrformel kann man daraus ableiten, dass $\widehat{f} \in L^2$ und weiter

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h} dx = 2\pi h(0) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(-x) dx = 2\pi \|f\|_2^2$$

Das erlaubt uns, die Fouriertransformierte für Funktionen aus L^2 zu definieren:

3.3.3 Satz. Ist $f \in L^2$, so wählen wir eine Folge $(f_k)_k \subset L^2$ von absolut integrierbaren Funktionen, für die $\|f_k - f\|_2 \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$. Dann ist

$$\mathcal{F}f(\omega) := \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f}_k(\omega)$$

unabhängig von der Wahl der Folge $(f_k)_k \subset L^2$, und es gilt

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = 2\pi\|f\|_2^2$$

Man kann etwa \mathcal{F} durch

$$\mathcal{F}f(\omega) := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k f(x)e^{-j\omega x} dx$$

berechnen.

Beweis. Sind $(f_k)_k, (g_k)_k \subset L^2$ zwei Folgen absolut integrierbarer Funktionen mit $\|f_k - f\|_2, \|g_k - f\|_2 \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$, so haben wir

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}_k - \widehat{g}_k\|_2 &= \sqrt{2\pi}\|f_k - g_k\|_2 \\ &\leq \sqrt{2\pi}(\|f_k - f\|_2 + \|g_k - f\|_2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

mit $k \rightarrow \infty$. Nun ist ja $\|\mathcal{F}f_k\|_2^2 = 2\pi\|f_k\|_2^2$, woraus mit $k \rightarrow \infty$ folgt $\|\mathcal{F}f\|_2^2 = 2\pi\|f\|_2^2$. Die dritte Behauptung folgt daraus, dass $f_k(x) := f(x)$ für $|x| \leq k$ und $f_k(x) = 0$ sonst, eine absolut integrierbare (stückweise stetige) und quadratintegrierbare Funktion liefert, so dass $\|f_k - f\|_2 \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$.

Übungsaufgabe. Ist $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, so wird $\mathcal{F}f(\omega) = \pi$ auf $(-1, 1)$ und $\mathcal{F}f = 0$ außerhalb $[-1, 1]$, ist also ein Rechteckimpuls.

3.4 Das Abtasttheorem

Gegeben sei eine zeitabhängige Funktion, ein *Signal*. Die Frage lautet

- Wann kann man f aus den diskret "abgetasteten" Werten $f(na)$ (mit $a > 0$ und ganzzahligem n) rekonstruieren?

Eine solche Frage ist wichtig bei der CD-Technik, beim ISDN-Telefon oder der Bildverarbeitung. In all diesen Fällen muss man kontinuierliche Information (ein auf einem Intervall definiertes Signal) digitalisieren, also f durch die Werte $f(na)$ ersetzen, um sie mit Computern verarbeiten zu können (Sprachsignal beim ISDN-Telefon). Es stellt sich die Frage unter welchen Voraussetzungen man vermeiden kann, Information oder (wie beim Telefon oder Fernsehen) Qualität zu verlieren.

Das Abtasttheorem von Shannon-Whitaker besagt, dass man ein Signal f mit bandbegrenztem Spektrum (d.h. \widehat{f} ist außerhalb eines beschränkten Intervalls Null) aus den Werten $f(2\pi na)$ rekonstruieren kann, wenn nur a nicht zu groß gewählt wird.

Im Detail lautet es so:

3.4.1 Satz (*Abtasttheorem v. Shannon*). Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ absolut integabel und stetig, und hat \widehat{f} nur in dem Intervall $[-\lambda_c, \lambda_c]$ von 0 verschiedene Werte, so gilt für jede Zahl $0 < a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$:

Wenn die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(2\pi na)|$ konvergiert, so ist

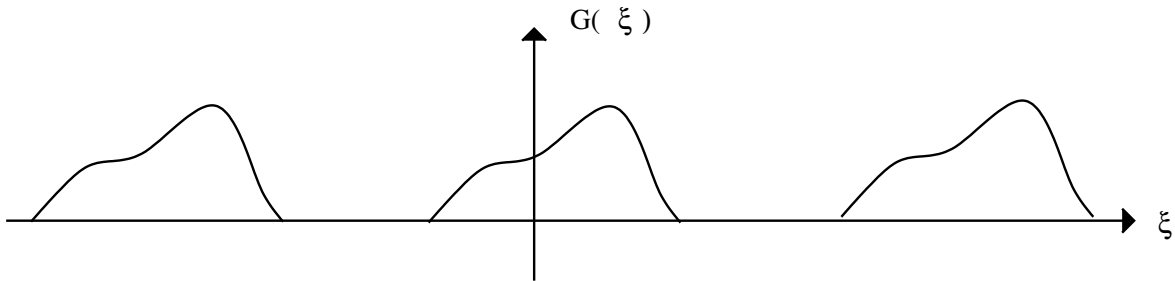
$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi na) \frac{\sin\left(\frac{t}{2a} - n\pi\right)}{\frac{t}{2a} - n\pi}$$

für alle t .

Beweis. Wir sehen uns die Funktion

$$G(\xi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\xi - \frac{n}{a}\right)$$

an. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist nur ein Term der Summe ungleich 0, da nun $\frac{1}{2a} \geq \lambda_c$. Also ist diese Funktion überall stetig. Außerdem ist sie T -periodisch, wobei $T = 1/a$.



Wir berechnen die Fourierreihe von G . Es gilt (wegen $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi a$)

$$\begin{aligned} c_k^*(G) &= a \int_0^{1/a} G(\xi) e^{-2\pi j k a \xi} d\xi \\ &= a \int_0^{1/a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\xi - \frac{n}{a}\right) e^{-2\pi j k a \xi} d\xi \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi j k a \xi} d\xi \\ &= 2\pi a f(-2\pi k a) \end{aligned}$$

denn \widehat{f} ist absolut integabel und damit die Fourier-Umkehrformel anwendbar. Da die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(2\pi na)|$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe

$$(F) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2\pi k a) e^{-2\pi j a k t}$$

gleichmäßig auf \mathbb{R} . Ihren Grenzwert nennen wir F . Dann wissen wir, dass F stetig ist und ferner im quadratischen Mittel die Reihe (F) sowohl gegen G als auch gegen F strebt. Da auch G stetig ist, haben wir $F = G$. Damit finden wir, dass

$$G(\xi) = 2\pi a \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2\pi k a) e^{-2\pi j a k \xi}$$

Nun setzen wir $\chi(\xi) = 1$, wenn $|\xi| < 1/2a$ und $\chi(\xi) = 0$ sonst. Dann wird

$$\widehat{f}(\xi) = G(\xi)\chi(\xi) = 2\pi a \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2\pi k a) \chi(\xi) e^{-2\pi j a k \xi}$$

Multiplizieren wir mit $e^{j\xi t}$ und integrieren über ξ , so finden wir heraus

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{j\xi t} d\xi = a \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2\pi k a) \int_{-1/2a}^{1/2a} e^{j(t-2\pi a k)\xi} d\xi$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-1/2a}^{1/2a} e^{j(t-2\pi a k)\xi} d\xi &= \frac{1}{j(t-2\pi a k)} e^{j(t-2\pi a k)\xi} \Big|_{\xi=-1/2a}^{1/2a} \\ &= \frac{1}{j(t-2\pi a k)} \left(e^{j\frac{1}{2a}(t-2\pi a k)} - e^{-j\frac{1}{2a}(t-2\pi a k)} \right) \\ &= \frac{1/a}{\left(\frac{t}{2a} - \pi k\right)} \sin\left(\frac{t}{2a} - \pi k\right) \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Reihendarstellung ein, folgt die Behauptung. □

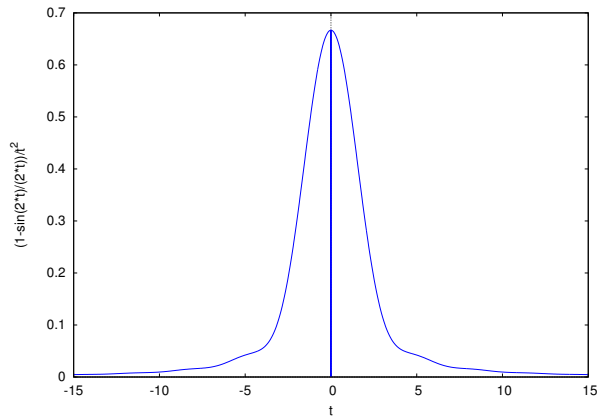
Hier ist ein

Beispiel: Das Signal $g(z) := \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{\sin(2z)}{2z}\right)$ ist bandbegrenzt, denn $\widehat{g}(\omega) = (|\omega| - 2)^2$, wenn $|\omega| \leq 2$ und $\widehat{g}(\omega) = 0$, sonst. (Ü.A.)

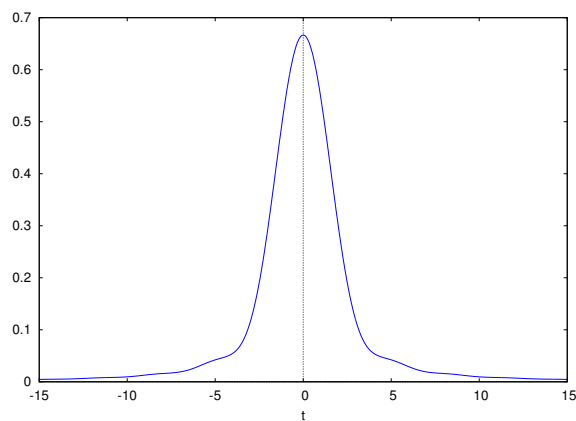
Hier ist also $\lambda_c = 2$. Wir betrachten $f(t, a) = \sum_{|n| \leq 500} g(2\pi n a) \frac{\sin\left(\frac{t}{2a} - n\pi\right)}{\frac{t}{2a} - n\pi}$.

Hier sind die Graphen von

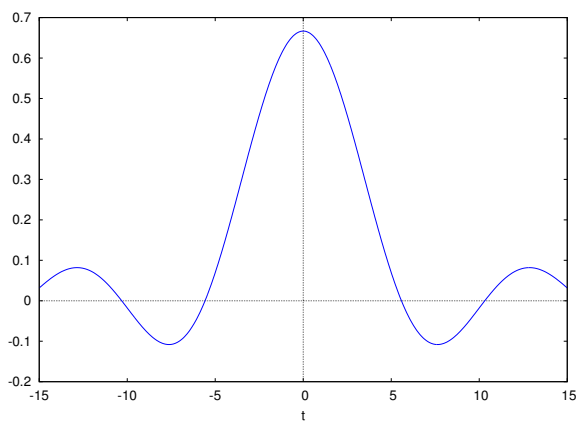
von g :



von $f(t, 1/40)$:



und von $f(t, 1)$:



Eine Variante des Abtasttheorems ist diese:

3.4.2 Satz . Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ absolut integrabel und stetig, und hat \widehat{f} nur in dem Intervall $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ von 0 verschiedene Werte, so gilt für jede Zahl $0 < a \leq \frac{1}{b}$, wenn wir $b := \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ setzen:

Konvergiert die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(2\pi na)|$, so ist

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-j\lambda_0(t-2\pi na)} f(2\pi na) \frac{\sin\left(\frac{t}{2a} - n\pi\right)}{\frac{t}{2a} - n\pi}$$

für alle t . Dabei ist $\lambda_0 := \frac{1}{2}(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$.

Beweis. Nun arbeiten wir mit dem Signal $f_1(t) := e^{j\lambda_0 t} f(t)$. Nach dem 2. Translationssatz ist nun $\widehat{f}_1 = \widehat{f}(\cdot - \lambda_0)$, also $\widehat{f}_1(\omega) = 0$, sobald $|\omega| > b/2$. Der Abtastsatz für f_1 ist anwendbar mit $\lambda_c = b/2$ und liefert die Behauptung. □

3.5 Physikalische Anwendungen

Die Potentialgleichung in der oberen Halbebene

Gesucht ist auf der oberen Halbebene $H := \{(x, y) \mid y > 0\}$ eine harmonische Funktion $v(x, y)$, also eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta v := \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

so dass $v(x, 0) = f(x)$ für eine absolut integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zusätzlich soll v beschränkt bleiben. Dazu bilden wir die Fouriertransformierte $\widehat{v}(\cdot, y)$ bezgl. der Variablen x und erhalten mit dem Differentiationsatz:

$$-\omega^2 \widehat{v}(\omega, y) + \frac{d^2}{dy^2} \widehat{v}(\omega, y) = 0$$

Die Randbedingung $v(x, 0) = f(x)$ wird verwandelt in

$$\widehat{v}(\omega, 0) = \widehat{f}$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet allgemein

$$\widehat{v}(\omega, y) = A(\omega)e^{|\omega|y} + B(\omega)e^{-|\omega|y}$$

Die Forderung der Beschränktheit von v zusammen mit der Randbedingung legt nahe, $A \equiv 0$ und $B = \widehat{f}$ zu wählen. Ferner wissen wir, dass $e^{-|\omega|y}$ die Fouriertransformierte einer Funktion ist, nämlich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega x}}{x^2 + y^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + y^2} dx - j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega x)}{x^2 + y^2} dx = \frac{\pi}{y} e^{-|\omega|y},$$

denn das 2. Integral ist Null. Schreiben wir also $k(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, so wird

$$e^{-|\omega|y} = \frac{1}{\pi} \widehat{k}(\omega, y)$$

Das bedeutet:

$$\widehat{v}(\omega, y) = \frac{1}{\pi} \widehat{f}(\omega) \widehat{k}(\omega, y) = \frac{1}{\pi} \widehat{f * k(\cdot, y)} = \frac{1}{\pi} \widehat{f * k(\cdot, y)}$$

Das ergibt uns als Lösung

$$v(x, y) = f * k(\cdot, y)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

Die Diffusionsgleichung

Wir betrachten weiter die Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit Randbedingung $u(0, x) = f(x)$ mit einer geeigneten Funktion. Wir bilden wieder die Fouriertransformierte bezgl. der Variablen x und erhalten

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(\omega, t) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t)$$

mit Randbedingung

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega)$$

Diese Gleichung (als Differenzialgleichung in t aufgefasst) hat die Lösung

$$\hat{u}(\omega, t) = e^{-\omega^2 t} \hat{f}(\omega)$$

Aber wir wissen schon, dass $e^{-\omega^2 t}$ die Fouriertransformierte einer Funktion ist:

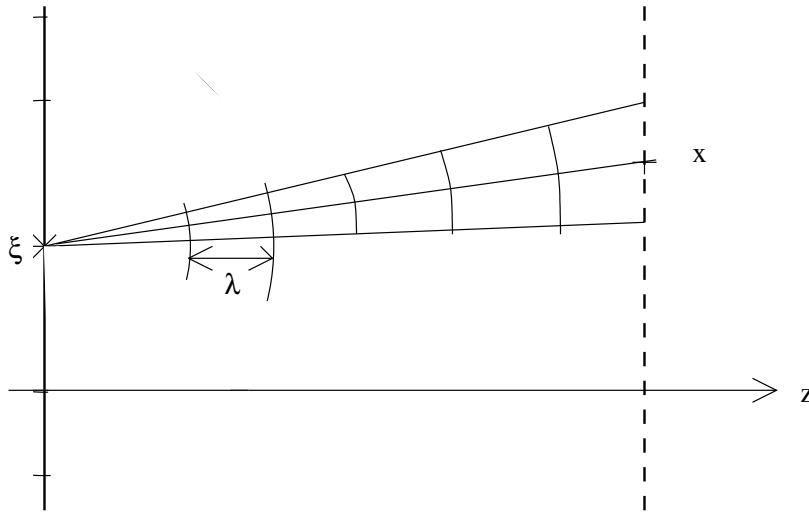
$$e^{-\omega^2 t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \widehat{e^{-x^2/4t}}$$

Das ergibt

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} * f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s)^2/4t} f(s) ds$$

Beugung von Licht

Angenommen, an der Stelle $(0, \xi)$ befinde sich eine punktförmige Lichtquelle, die Licht der Wellenlänge λ aussendet. Dieses breite sich in der positiven z -Richtung aus. Mit $U(x, z, t)$ bezeichnen wir die x -Komponente des elektrischen Feldes an der Stelle (x, z) zur Zeit $t > 0$.



Wir folgen einer auf Ch. Huygens zurückgehenden Idee, indem wir für U den Ansatz

$$U(x, z, t) := A a(r) \cos \left(2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \phi \right)$$

versuchen, wobei ϕ die Startphase der ausgesandten Welle, $T = 1/\nu$, und ν die Lichtfrequenz sein soll. Ferner ist

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + z^2}.$$

Die Zahl A ist positiv und $a(r)$ eine geeignete Funktion. Wie sie zu wählen ist, werden wir später sehen.

Für den Radius r setzen wir eine Näherung ein

$$r = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{z} \right)^2} = z \left(1 + \frac{(x - \xi)^2}{2z^2} - \frac{(x - \xi)^4}{8z^4} + \dots \right)$$

Dies ist erlaubt, solange

$$(x - \xi)^2 \ll z^2, \quad (x - \xi)^4 \ll \lambda z^3$$

Berücksichtigen wir die ersten beiden Glieder, so finden wir die Fresnelsche Approximation

$$U(x, z, t) = A a(z) \cos \left(2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \pi \frac{(x - \xi)^2}{\lambda z} + \phi \right)$$

Führen wir die *reduzierte Wellenfunktion*

$$u(x, z) = A e^{j\phi} a(z) e^{j\pi \frac{(x-\xi)^2}{\lambda z}}$$

ein, so nimmt U die Form an:

$$U(x, z, t) = \operatorname{Re} \left(u(x, z) e^{2\pi j \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)} \right)$$

Sind nun an endlich vielen Stellen ξ_1, \dots, ξ_N (punktförmig gedachte) Lichtquellen auf der Geraden $\{z = 0\}$ angebracht, so wird u modifiziert zu

$$u(x, z) = \sum_{m=1}^N A_m e^{j\phi_m} a(z) e^{j\pi \frac{(x-\xi_m)^2}{\lambda z}}$$

Ist die Lichtquelle kontinuierlich verteilt, so ist die Summe durch ein Integral zu ersetzen:

$$u(x, z) = a(z) \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{j\pi \frac{(x-\xi)^2}{\lambda z}} d\xi$$

Dabei ist u_0 eine die Intensitätsverteilung der Lichtquelle beschreibende Funktion.

Definieren wir

$$g_{\lambda, z}(y) = e^{j\pi \frac{y^2}{\lambda z}}$$

so hat u die Form

$$u = a(z) u_0 * g_{\lambda, z}.$$

Die Wahl des Faktors $a(z)$ wird jetzt durch eine Konsistenzüberlegung motiviert. Angenommen, es seien $z_1, z_2 > 0$. Breitet sich die Welle von $\{z = 0\}$ nach $\{z = z_1\}$ aus, so induziert sie dort die Intensitätsverteilung

$$u(x, z_1) = a(z_1) u_0 * g_{\lambda, z_1}.$$

Nun können wir aber die Fläche $\{z = z_1\}$ als Ausgangsfront einer Welle mit $u(x, z_1)$ als anfängliche Intensitätsverteilung ansehen. Bei $\{z = z_1 + z_2\}$ ist aus ihr die Intensitätsverteilung

$$a(z_2) u(\cdot, z_1) * g_{\lambda, z_2}$$

geworden. Diese sollte übereinstimmen mit

$$u(x, z_1 + z_2) = a(z_1 + z_2) u_0 * g_{\lambda, z_1 + z_2}$$

Das führt auf

$$a(z_1 + z_2)u_0 * g_{\lambda, z_1 + z_2} = a(z_2)u(\cdot, z_1) * g_{\lambda, z_2} = a(z_1)a(z_2)u_0 * g_{\lambda, z_1} * g_{\lambda, z_2}$$

Die Faltung soll durch Fouriertransformation bezgl. x in ein Produkt überführt werden. Dazu benötigen wir die Fourtransformierte zur Funktion $g_{\lambda, z}$. Hierfür rechnen wir aus

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{\lambda, z}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi \mathbf{j} y^2 / \lambda z} e^{-\mathbf{j} y s} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{j} \pi (y^2 / \lambda z - \frac{1}{\pi} y s)} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi \mathbf{j} (\frac{y}{\sqrt{\lambda z}} - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda z} s)^2} e^{-\frac{1}{4\pi} \mathbf{j} \lambda z s^2} dy \\ &= e^{-\frac{1}{4\pi} \mathbf{j} \lambda z s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi \mathbf{j} (\frac{v}{\sqrt{\lambda z}})^2} dv \\ &= \sqrt{\lambda z} e^{-\frac{1}{4\pi} \mathbf{j} \lambda z s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi \mathbf{j} v^2} dv \\ &= e^{\pi \mathbf{j} / 4} \sqrt{\lambda z} e^{-\frac{1}{4\pi} \mathbf{j} \lambda z s^2}, \end{aligned}$$

denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi \mathbf{j} v^2} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi v^2) dv + \mathbf{j} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi v^2) dv = \frac{1 + \mathbf{j}}{\sqrt{2}} = e^{\mathbf{j} \pi / 4},$$

denn die *Fresnelschen Integrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi v^2) dv \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi v^2) dv$$

haben den Wert $1/\sqrt{2}$.

3.5.1 Satz. Angenommen, $f \in \mathcal{E}$ sei an der Stelle $t_0 > 0$ stetig, und $F = \mathcal{L}f$ sei auf der Halbebene R_σ definiert. Gibt es dann ein $a > \sigma$, so dass die Funktion $g(\omega) := |F(a + \mathbf{j}\omega)|$ über \mathbb{R} integrabel ist, so gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a + \mathbf{j}\omega) e^{(a + \mathbf{j}\omega)t_0} d\omega = f(t_0)$$

Beweis. Wir setzen $f_a(t) := e^{-at} f(t)$ und sehen, dass

$$\widehat{f}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t) e^{-\mathbf{j}\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(a + \mathbf{j}\omega)t} dt = F(a + \mathbf{j}\omega)$$

Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(a + \mathbf{j}\omega) e^{(a + \mathbf{j}\omega)t_0} d\omega = e^{at_0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_a(\omega) e^{\mathbf{j}\omega t_0} d\omega = 2\pi e^{at_0} f_a(t_0) = 2\pi f(t_0)$$

□ Wenn wir

jetzt die Konsistenzbedingung fouriertransformieren, so erhalten wir

$$a(z_1 + z_2) \widehat{u_0 g_{\lambda, z_1 + z_2}} = a(z_1) a(z_2) \widehat{u_0 g_{\lambda, z_1}} \widehat{g_{\lambda, z_2}},$$

also

$$e^{\pi \mathbf{j}/4} a(z_1 + z_2) \sqrt{\lambda(z_1 + z_2)} e^{-\frac{1}{4\pi} \mathbf{j} \lambda (z_1 + z_2) s^2} = e^{\pi \mathbf{j}/4} a(z_1) \sqrt{\lambda z_1} e^{-\frac{1}{4\pi} \mathbf{j} \lambda z_1 s^2} e^{\pi \mathbf{j}/4} a(z_2) \sqrt{\lambda z_2} e^{-\frac{1}{4\pi} \mathbf{j} \lambda z_2 s^2}$$

oder

$$e^{\pi \mathbf{j}/4} a(z_1 + z_2) \sqrt{\lambda(z_1 + z_2)} = e^{\pi \mathbf{j}/4} a(z_1) \sqrt{\lambda z_1} e^{\pi \mathbf{j}/4} a(z_2) \sqrt{\lambda z_2}$$

Das motiviert die Wahl

$$a(z) = \frac{e^{-\pi \mathbf{j}/4}}{\sqrt{\lambda z}}$$

Damit ist es leicht, die Differenzialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mathbf{j} \lambda}{4\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

zu verifizieren.

Physikalisch ist $|u(x, z)|^2$ als lokale Energiedichte der Welle zu deuten.

Eine Anwendung

Angenommen, aus einer kreisrunden Öffnung mit Radius σ trete ein Laserstrahl der Wellenlänge λ mit Gaußscher Energiedichte, also

$$u_0(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\sigma^2}$$

Dieser Strahl werde auf den Mond gerichtet. Wie groß ist der Fleck, den der gebeugte Laserstrahl auf dem Mond erzeugt?

Wir können schreiben:

$$u = \frac{e^{-\pi \mathbf{j}/4}}{\sqrt{\lambda z}} u_0 * g_{\lambda, z}$$

also

$$\widehat{u}(s, z) = \frac{e^{-\pi \mathbf{j}/4}}{\sqrt{\lambda z}} \widehat{u_0}(s, z) e^{\pi \mathbf{j}/4} \sqrt{\lambda z} e^{-\frac{1}{4\pi} \mathbf{j} \lambda z s^2} = \widehat{u_0}(s, z) e^{-\frac{1}{4\pi} \mathbf{j} \lambda z s^2}$$

Zur Berechnung von $\widehat{u_0}$ erinnern wir uns an die Berechnung der Fouriertransformierten der Funktion e^{-ax^2} mit $a > 0$. Es gilt

$$\widehat{e^{-ax^2}}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-s^2/4a}$$

Wählen wir $a = 1/4\sigma^2$, so folgt

$$\widehat{u}_0(s) = (2\pi)^{1/4} \sqrt{2\sigma} e^{-\sigma^2 s^2}$$

Somit haben wir

$$\widehat{u}(s, z) = \frac{\sqrt{2\sigma}}{(2\pi)^{1/4}} e^{-\sigma^2 s^2 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{j} \lambda z s^2} = (2\pi)^{1/4} \sqrt{2\sigma} e^{-(\sigma^2 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{j} \lambda z) s^2}$$

Die rechte Seite ist Fouriertransformierte einer Funktion, die wir nun bestimmen wollen.

Wir haben bei der Berechnung von $\widehat{e^{-ax^2}}(s)$ die Differenziationssätze benützt und so eine Dgl. für $\widehat{e^{-ax^2}}$ gefunden, die auf

$$\widehat{e^{-ax^2}}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-s^2/4a}$$

geführt hat. Das Argument lässt sich mit komplexem a nachmachen, wenn nur $\operatorname{Re} a > 0$ bleibt. Wir wählen jetzt

$$a = \frac{1}{4(\alpha + \mathbf{j}\beta)^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2 + 2\mathbf{j}\alpha\beta}{4(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

Wenn dann $\alpha > 0$ und weiter $\alpha > |\beta|$ ist, so wird $\operatorname{Re} a > 0$ und die Formel für die Fouriertransformierte zu e^{-ax^2} bleibt gültig. So finden wir, dass die Fouriertransformierte zu

$$e^{-x^2/4(\alpha + \mathbf{j}\beta)^2}$$

gegeben ist durch

$$\sqrt{4\pi}(\alpha + \mathbf{j}\beta) e^{-s^2(\alpha + \mathbf{j}\beta)^2}$$

Nun wählen wir als $\alpha + \mathbf{j}\beta$ diejenige Quadratwurzel aus $\sigma^2 + \mathbf{j}\frac{1}{4\pi}\lambda z$, deren Realteil positiv ist. Dann gilt $\alpha^2 - \beta^2 = \operatorname{Re}(\alpha + \mathbf{j}\beta)^2 = \sigma^2 > 0$. Die obigen Überlegungen zur Fouriertransformierten von e^{-ax^2} mit komplexem a sind nun anwendbar und ergeben, dass

$$e^{-(\sigma^2 + \mathbf{j}\frac{1}{4\pi}\lambda z)s^2}$$

die Fouriertransformierte zur Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\alpha + \mathbf{j}\beta} e^{-x^2/4(\alpha + \mathbf{j}\beta)^2}$$

ist.

Das ergibt schließlich

$$u(x, z) = \frac{\sqrt{\sigma}}{(2\pi)^{1/4}} \frac{1}{\alpha + \mathbf{j}\beta} e^{-x^2/4(\alpha + \mathbf{j}\beta)^2}$$

Das bedeutet für die Energiedichte des gebeugten Strahls:

$$\begin{aligned}
 |u(x, z)|^2 &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|(\alpha + \mathbf{j}\beta)|^2} e^{-x^2 \operatorname{Re} \frac{1}{2(\alpha + \mathbf{j}\beta)^2}} \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|\sigma^2 + \mathbf{j} \frac{1}{4\pi} \lambda z|} e^{-\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Re} \frac{1}{\sigma^2 + \mathbf{j} \frac{1}{4\pi} \lambda z}} \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|\sigma^2 + \mathbf{j} \frac{1}{\pi} \lambda z|} e^{\frac{-\frac{1}{2} x^2 \sigma^2}{\sigma^4 + (\frac{1}{4\pi} \lambda z)^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(z)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(z)^2}},
 \end{aligned}$$

wobei

$$\sigma(z) = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{\lambda z}{4\pi\sigma}\right)^2}$$

So sehen wir, dass auch der gebeugte Strahl eine Gaußsche Energiedichteverteilung hat, nur mit der Streuung $\sigma(z)$ im Abstand z von der Quelle.

Wenn wir jetzt annehmen, es handele sich um einen He-Ne-Laser, so ist $\lambda = 0.6328 \cdot 10^{-3} \text{mm}$. Ist dann $\sigma = 1 \text{mm}$, so erhalten wir mit $z = 384000 \text{km} = 3.84 \cdot 10^{11} \text{mm}$:

$$\sigma(z) = \sqrt{1 + \left(\frac{0.6328 \cdot 3.84 \cdot 10^8}{4\pi}\right)^2} \text{mm} = 19.336 \text{km}$$

Der Laserstrahl wird also auf der Mondoberfläche einen kreisrundes Gebiet von 19.336 km Radius beleuchten.

Kapitel 4

Die Laplace-Transformation

4.1 Definition und Beispiele

Die Laplacetransformation ist eine weitere nützliche Integraltransformation, mit deren Hilfe sich Differenzialgleichungen in algebraische Gleichungen überführen lassen. Denn wie die Fouriertransformierte verhält sich auch die Laplacetransformierte unter Differenziation "vernünftig".

Zu Beginn zeigen wir

4.1.1 Hilfssatz. *Angenommen, $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$ sei stückweise stetig. Ist dann $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ eine Zahl, so dass*

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

so konvergiert für alle komplexen Zahlen $s = \sigma + \mathbf{j}\tau$ das Integral

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt,$$

sofern nur $\sigma \geq \sigma_0$ ist.

Beweis. Das folgt aus

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt = \int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t} dt \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma_0 t} dt$$

□

Dies motiviert die folgende

Definition: Angenommen, $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$ sei stückweise stetig und $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ eine Zahl, so dass

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty.$$

Dann heißt

$$\mathcal{L}f(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

die *Laplace-Transformierte* zu f . Sie ist dann definiert auf der Halbebene $R_{\sigma_0} := \{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$.

Beispiele. a) Die Heavisidefunktion: $h_0(t) := 1$, wenn $t \geq 0$ und $h_0(t) = 0$, wenn $t < 0$. Dann ist

$$\mathcal{L}h_0(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Man schreibt auch

$$h_0 \circ \bullet \frac{1}{s} =: H_0(s)$$

Diese Funktion ist auf R_0 erklärt.

b) Angenommen, es sei $a > 0$. Wir modifizieren die Heavisidefunktion zu $h_a(t) = h_0(t - a)$, also $h_a(t) = 1$, wenn $t \geq a$ und $h_a(t) = 0$ sonst. Dann erhalten wir

$$\mathcal{L}h_a(s) = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}$$

Oder:

$$h_a \circ \bullet \frac{e^{-as}}{s} =: H_a(s)$$

c) Für $\omega > 0$ sei $f(t) = h_0(t) \sin(\omega t)$. Dann errechnen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s) &= \int_0^\infty \sin(\omega t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left(\int_0^\infty e^{(j\omega - s)t} dt - \int_0^\infty e^{-(j\omega + s)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{j\omega - s} \Big|_0^\infty + \frac{1}{j\omega + s} \Big|_0^\infty \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{j\omega - s} + \frac{1}{j\omega + s} \right) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}, \quad \text{wenn } \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

d) Für $\omega > 0$ sei $g(t) = h_0(t) \cos(\omega t)$. Dann wird in entsprechender Weise

$$\mathcal{L}g(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}, \quad \text{wenn } \operatorname{Re} s > 0$$

e) Eine allgemeine periodische stückweise stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Ist T die Periode, so haben wir für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^T f(t)e^{-s(t+kT)} dt \\ &= \left(\int_0^T f(t)e^{-st} dt \right) \sum_{k=0}^\infty e^{-kTs} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

Beispiel: Wenn $0 < \delta < T$ und $f(t) = f_0$ für $kT - \delta \leq t \leq kT + \delta$ für eine ganze Zahl k und $f(t) = 0$ sonst, so wird

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{f_0}{s} \left(1 - \frac{\sinh(T/2 - \delta)s}{\sinh(Ts/2)} \right)$$

f) Ist $k > 0$ ganzzahlig und setzen wir $f_k(t) = t^k$, so finden wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_k)(s) &= \int_0^\infty t^k e^{-st} dt \\ &= \frac{-1}{s} t^k e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{k}{s} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-st} dt \\ &= \frac{k}{s} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-st} dt = \frac{k}{s} \mathcal{L}(f_{k-1})(s), \text{ wenn } \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir damit:

$$\mathcal{L}(f_k)(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}, \text{ auf } R_0$$

g) Sei nun $g_a(t) := e^{at}$. Dann wird

$$\mathcal{L}(g_a)(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}, \text{ wenn } \operatorname{Re} s > a.$$

Wir schreiben auch

$$g_a \circ \bullet \frac{1}{s-a}$$

Wir arbeiten künftig mit folgender Funktionenklasse, deren Elemente Laplace-transformierbar sind:

Definition. Wir nennen eine stückweise stetige Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung, wenn Zahlen $M, c, T_0 > 0$ existieren, für die gilt:

$$e^{-ct}|f(t)| \leq M, \text{ wenn } t \geq t_0$$

Dann gilt für die Funktionen dieser Klasse:

4.1.2 Satz. Ist $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung, und ist

$$e^{-ct}|f(t)| \leq M, \text{ wenn } t \geq t_0$$

für geeignete M, c und t_0 , so ist $\mathcal{L}f$ auf der Halbene R_c definiert.

Beweis. Denn ist $\operatorname{Re} s > c$, so finden wir ein $c' > c$ so dass $\operatorname{Re} s > c'$. Also gilt für alle $t > t_0$:

$$|f(t)e^{-st}| \leq M e^{ct} e^{-\operatorname{Re} s t} \leq M e^{-(c'-c)t}$$

Die rechts stehende Funktion ist über $[t_0, \infty)$ integrierbar. Die Integrierbarkeit von $f(t)e^{-st}$ über das Intervall $[0, t_0]$ ist klar. Damit ist also

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt < \infty$$

wenn nur $\operatorname{Re} s > c$.

□

4.1.3 Hilfssatz. a) Sind die Funktionen f und g von exponentieller Ordnung, so auch $f + g$ und fg .

b) Alle Polynome und erst recht alle beschränkten Funktionen sind von exponentieller Ordnung.

c) Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise differenzierbar und ihre Ableitung von exponentieller Ordnung, so gilt dies auch für f .

d) Angenommen, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sind von exponentieller Ordnung, und verschwinden auf $(-\infty, 0)$, so ist auch

$$f * g(t) := \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

von exponentieller Ordnung.

Beweis. a) und b) sind leicht einzusehen.

Zu c): Wir nehmen Zahlen M, c und t_0 her, so dass $|f'(t)|e^{-ct} \leq M$, wenn $t \geq t_0$ ist. Dann finden wir für alle $x \geq t_0$:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f(t_0) + \int_{t_0}^x f'(t) dt \right| \leq |f(t_0)| + \int_{t_0}^x |f'(t)| dt \\ &\leq |f(t_0)| + \int_{t_0}^x M e^{ct} dt \\ &= |f(t_0)| + \frac{M}{c} (e^{cx} - e^{ct_0}) \leq |f(t_0)| + \frac{M}{c} e^{cx} \end{aligned}$$

Somit wird

$$|f(x)|e^{-cx} \leq |f(t_0)| + \frac{M}{c} =: M^*$$

für alle $x \geq t_0$.

Zu d) Der Beweis dieser Aussage geht ähnlich, ist aber etwas länger. Wir stellen fest: Wenn $x < 0$, so können nicht t und $x - t$ gleichzeitig positiv sein. Daher ist $f(t)g(x - t)$ die Nullfunktion und somit

$$f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x - t) dt = 0$$

Wenn nun M, c und t_0 so gemacht sind, dass $|f(t)|, |g(t)| \leq M e^{ct}$ für $t \geq t_0$, so finden wir für alle $x > 2t_0$ mit etwas Routine

$$|f * g(x)| \leq (M' + M) \frac{M}{c} e^{cx},$$

wobei die Schranke M' so gewählt ist, dass $|f|$ und $|g|$ auf $[0, t_0]$ nur Werte $\leq M'$ annehmen. \square

4.2 Rechenregeln für die Laplacetransformierte

Ähnlich wie für die Fouriertransformierte lassen sich auch für die Laplacetransformierte Rechenregeln ableiten.

Zur Vereinfachung schreiben wir die Menge der Funktionen von exponentieller Ordnung als \mathcal{E} .

4.2.1 Hilfssatz. Für $f \in \mathcal{E}$ und $c > 0$ setzen wir $f_c(t) := f(ct)$; ferner definieren wir für $t_0 > 0$ die "Translatierte" von f durch $\tau_{t_0} f(t) = h_{t_0}(t)f(t - t_0)$.

Dann haben wir die Korrespondenzen

a) (Ähnlichkeitssatz):

$$\mathcal{L}f_c(s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}f\left(\frac{s}{c}\right), \text{ oder : } f_c \circ \bullet \frac{1}{c} (\mathcal{L}f)_{1/c},$$

b) (Translation im Urbildbereich):

$$\mathcal{L}(\tau_{t_0}f)(s) = e^{-t_0s} \mathcal{L}f(s), \text{ oder : } \tau_{t_0}f \circ \bullet e^{-t_0s} \mathcal{L}f,$$

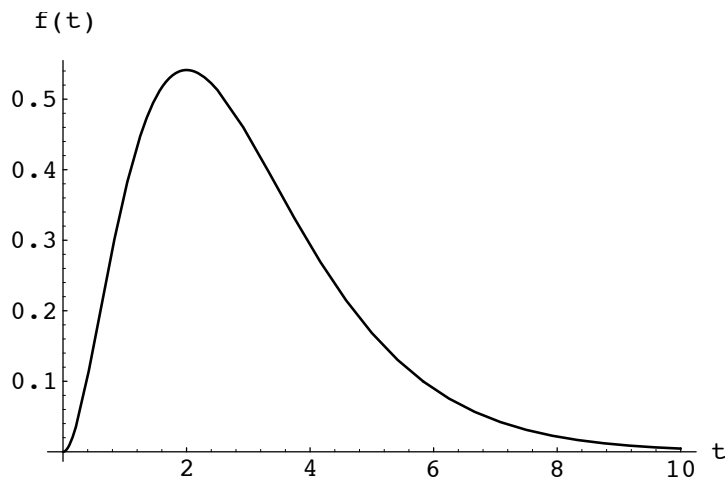
c) (Translation im Bildbereich):

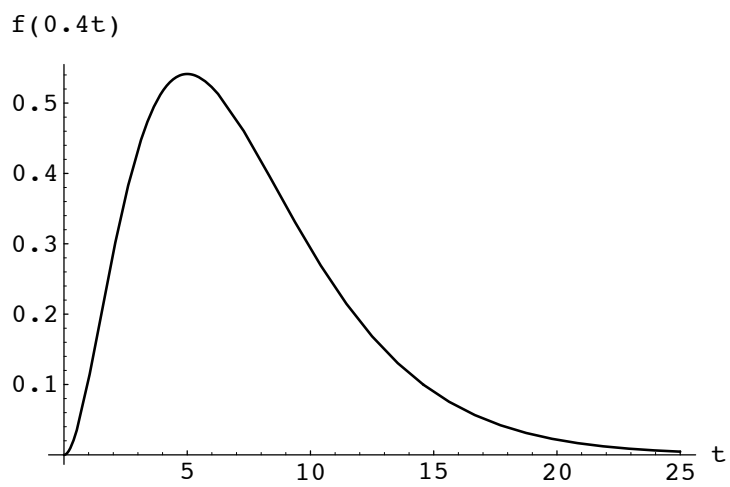
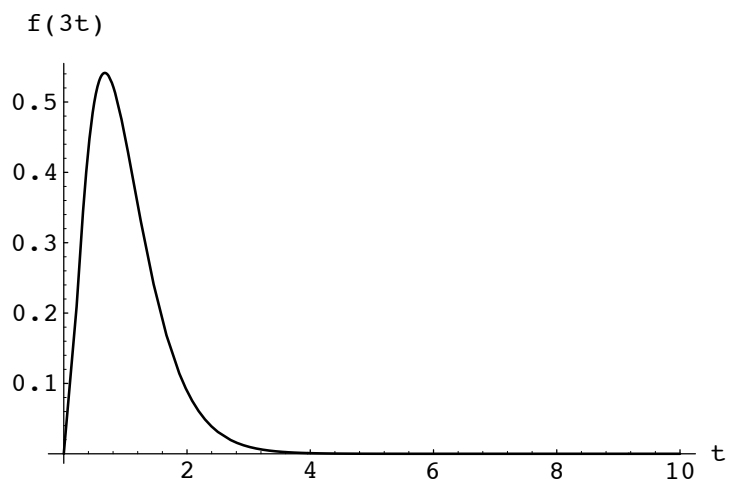
$$\mathcal{L}(e^{-ct}f)(s) = \mathcal{L}f(s+c), \text{ oder : } e^{-ct}f \circ \bullet \mathcal{L}f(s+c).$$

Beweis. Die Beweise geschehen durch Nachrechnen mit der Substitutionsregel.

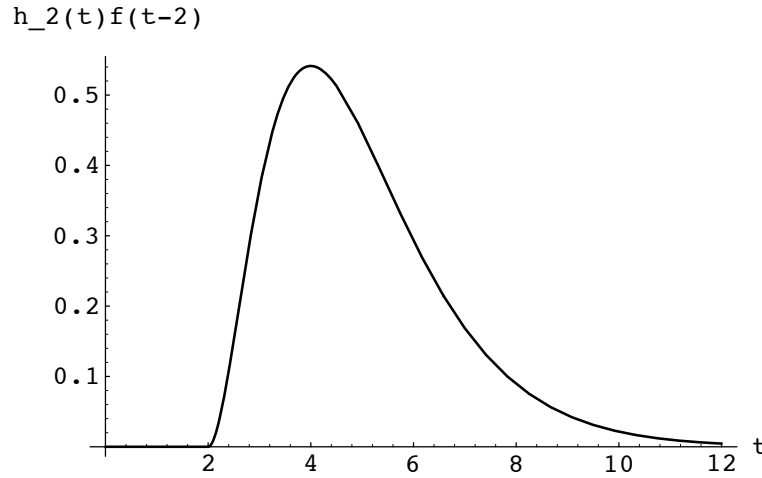
□

Schaubilder zu den Funktionen unter a)-c) für die Funktion $f(t) = t^2e^{-t}$.





Für die Translatierte: $\tau_2 f$:



Für die Laplacetransformierte zu f finden wir

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{2}{(1+s)^3},$$

Es folgt

$$\mathcal{L}f_2(s) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}s)^3} = \frac{8}{(2+s)^3}$$

$$\mathcal{L}f_{0.4}(s) = \frac{5}{(1 + \frac{5}{2}s)^3} = \frac{40}{(2+5s)^3}$$

$$\mathcal{L}(\tau_2 f)(s) = \frac{2e^{-2s}}{(1+s)^3}$$

auf R_{-1} .

Laplacetransformierte und Differenziation

Die Laplacetransformation überführt eine Differentiation wieder in eine Multiplikation:

4.2.2 Satz. Angenommen, f sei stückweise differenzierbar.

a) (Differenziation im Urbild). Wenn dann $f' \in \mathcal{E}$, und $f(0) := \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ existiert, so haben wir für $s \in R_{\sigma_0}$, mit passendem σ_0 :

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0), \quad f \circ \bullet F \implies f' \circ \bullet sF(s) - f(0)$$

b) (Differenziation im Bild). Wenn $f \in \mathcal{E}$, so gilt

$$(\mathcal{L}f)'(s) = -\mathcal{L}(tf(t)), \quad f \circ \bullet F \implies -tf(t) \circ \bullet F'$$

Beweis. Wir müssen partiell integrieren: Für $s \in R_{\sigma_0}$, für ein geeignet zu wählendes σ_0 gilt dann

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f'(t)e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(f(t)e^{-st} \Big|_0^T + s \int_0^T f(t)e^{-st} dt \right) = -f(0) + s\mathcal{L}f(s)$$

Das ergibt Behauptung a).

Genauso folgt:

$$(\mathcal{L}f)'(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds} (e^{-st} f(t)) dt = - \int_0^\infty t e^{-st} f(t) dt = -\mathcal{L}(tf(t))$$

Das ergibt b). □

Die Punkte (a) und (b) dieses Satzes sind so zu verallgemeinern:

4.2.3 Satz. (a') Wenn $f \in \mathcal{E}$ sogar k -mal stetig differenzierbar ist, die k -te Ableitung zu \mathcal{E} gehört und alle Ableitungen $f^{(j)}$ bei 0 stetig sind, so gilt: Ist $f \circ \bullet F$, so

$$f^{(k)} \circ \bullet s^k F(s) - \sum_{j=0}^{k-1} f^{(k-1-j)}(0) s^j$$

(b') Ist $f \in \mathcal{E}$, und $f \circ \bullet F$, so gilt $t^k f \circ \bullet (-1)^k F^{(k)}$.

Beweis. Beides wird durch Induktion nach k gezeigt. □

Stammfunktion und Laplacetransformation

Zur Laplacetransformierten der Stammfunktion haben wir folgendes:

4.2.4 Satz. a) Ist $f \in \mathcal{E}$, so auch $f^*(x) := \int_0^x f(t) dt$, und es gilt

$$\mathcal{L}(f^*)(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}f(s)$$

(Stammfunktion im Urbild).

b) Wenn mit geeignetem s_0 gilt $\int_{s_0}^\infty |\mathcal{L}f(s)| ds < \infty$, so gilt für alle $s \geq s_0$:

$$\int_s^\infty (\mathcal{L}f)(s) ds = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s)$$

Beweis. a) Es gilt $(f^*)' = f$. Also gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^*)(s) &= \int_0^\infty f^*(x)e^{-sx} dx \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f^*(x)e^{-sx} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-sx}}{s} f^*(x) \Big|_0^T + \frac{1}{s} \int_0^T f(t)e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{s} \mathcal{L}f(s),\end{aligned}$$

wenn nur $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ und σ_0 groß genug ist.

b) Beim Beweis von b) müssen wir ein Doppelintegral verwenden und die Integrationsreihenfolge vertauschen, was durch die Voraussetzung $\int_{s_0}^\infty |\mathcal{L}f(s)| ds < \infty$ gerechtfertigt ist:

$$\begin{aligned}\int_s^\infty (\mathcal{L}f)(s') ds' &= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s't} f(t) dt \right) ds' \\ &= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-s't} ds' \right) f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-s't}}{t} \Big|_s^\infty \right) f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt\end{aligned}$$

□

Beispiel. Wir setzen $g(t) = \frac{\sin(\omega t)}{t}$ mit $\omega > 0$ und $f(t) = \sin(\omega t)$.

Dann gilt $\mathcal{L}f(\sigma) = \frac{\omega}{\omega^2 + \sigma^2}$, also

$$\mathcal{L}g(s) = \int_s^\infty \mathcal{L}(f)(\sigma) d\sigma = \omega \int_s^\infty \frac{d\sigma}{\omega^2 + \sigma^2} \stackrel{u:=\sigma/\omega}{=} \int_{s/\omega}^\infty \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{s}{\omega}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{s}\right)$$

4.2.5 Hilfssatz. (*Faltungssatz*). Sind $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung (insbesondere $f(t) = g(t) = 0$, wenn $t < 0$), so ist die Laplacetransformierte der Faltung

$$f * g(t) := \int_0^t f(u)g(t-u) du$$

gegeben durch

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g.$$

Beweis. In der Tat können wir umformen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} f * g(x) dx \\
 &= \int_0^\infty e^{-sx} \left(\int_0^x f(u)g(x-u) du \right) dx = \int_{-\infty}^\infty f(u) \left(\int_0^\infty e^{-sx} g(x-u) dx \right) du \\
 &= \int_{-\infty}^\infty f(u) e^{-su} \left(\int_0^\infty e^{-s(x-u)} g(x-u) dx \right) du \\
 &= \int_{-\infty}^\infty f(u) e^{-su} \left(\int_{-u}^\infty e^{-sx} g(x) dx \right) du = \int_{-\infty}^\infty f(u) e^{-su} \left(\int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx \right) du \\
 &= (\mathcal{L}f(s))(\mathcal{L}g(s))
 \end{aligned}$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist erlaubt, da

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |f(u)g(x-u)| e^{-\sigma x} dx du < \infty,$$

wenn nur $\sigma > 0$ groß genug gewählt wird. □

Der Faltungssatz ist bei der Behandlung von Anfangswertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen von großer Bedeutung, wie wir bald sehen werden.

Grenzwertverhalten

Wir untersuchen jetzt das Verhalten der Laplacetransformierten $F(s)$ einer Funktion f , wenn $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$.

4.2.6 Satz. a) Angenommen, $f \in \mathcal{E}$, und $f \circ \bullet \rightarrow F$. Dann gilt

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

b) Wenn auch $f' \in \mathcal{E}$, so haben wir, wenn f in 0 stetig ist:

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0)$$

c) Sind $f, g \in \mathcal{E}$ und ist $R := f - g$, und sind die Laplacetransformierten $F = \mathcal{L}f$ und $G = \mathcal{L}g$ auf der rechten Halbebene $\{\operatorname{Re} s > 0\}$ definiert, so gilt folgendes: Wenn

- $\left| \frac{R(t)}{g(t)} \right| \leq M$ für alle t und $|G(s)| \rightarrow \infty$ mit $s \rightarrow 0$, $\operatorname{Re} s > 0$,
so wird

$$\lim_{s \rightarrow 0, \operatorname{Re} s > 0} \frac{F(s)}{G(s)} = 1.$$

d) Ist $f \in \mathcal{E}$ und existiert $A := \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, so gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0, \operatorname{Re} s \geq 0} sF(s) = A$$

Beweis. Zu a). Wir nehmen an, es gilt mit geeigneten $c, M, t_0 > 0$:

$$|f(t)| \leq M e^{ct}, \quad \text{wenn } t \leq t_0$$

Schreiben wir dann für ein beliebiges $a \in (0, t_0)$:

$$|F(s)| \leq \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re} s)t} |f(t)| dt = \int_0^a e^{-(\operatorname{Re} s)t} |f(t)| dt + \int_a^{t_0} e^{-(\operatorname{Re} s)t} |f(t)| dt + \int_{t_0}^\infty e^{-(\operatorname{Re} s)t} |f(t)| dt$$

so sehen wir: Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so können wir a so klein machen, dass, wenn $\operatorname{Re} s > 0$, das 1. Integral kleiner als $\int_0^a |f(t)| dt < \varepsilon/3$ wird. Das 2. Integral wird kleiner als $e^{-a \operatorname{Re} s} \int_a^{t_0} |f(t)| dt$ und damit kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$, wenn nur $\operatorname{Re} s$ groß genug gemacht wird. Das 3. Integral ist kleiner als $M \int_{t_0}^\infty e^{(c-\operatorname{Re} s)t} dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re} s - c}$, wenn $\operatorname{Re} s > c$. Das wird für genügend großes $\operatorname{Re} s$ ebenfalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$.

Zu b) Das folgt aus $f' \circ \bullet sF(s) - f(0)$ und a) für f' anstelle von f .

Zu c) Für irgendein $T > 1$ schreiben wir

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty g(t) e^{-st} dt + \int_T^\infty R(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^T e^{-st} (f(t) - g(t)) dt + \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt + \int_T^\infty R(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^T e^{-st} (f(t) - g(t)) dt + G(s) + \int_T^\infty R(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

Also für s mit $\operatorname{Re} s > 0$:

$$\begin{aligned} |F(s) - G(s)| &\leq \int_0^T |f(t) - g(t)| dt + \int_T^\infty \left| \frac{R(t)}{g(t)} \right| |g(t)| dt \\ &\leq S := (M+1) \int_0^\infty (|f| + |g|) dt \end{aligned}$$

Teilen wir das durch $|G(s)|$, so finden wir

$$\left| \frac{F(s)}{G(s)} - 1 \right| \leq \frac{S}{|G(s)|} \rightarrow 0.$$

Zu d). Ist $A \neq 0$, wenden wir c) an auf f und $g = A$, denn $G(s) = A/s$. Ist $A = 0$, so nehmen wir $f + 1$ statt f und $g = 1$ und erhalten mit c), dass $\lim_{s \rightarrow 0, \operatorname{Re} s > 0} sF(s) + 1 = 1$, also $\lim_{s \rightarrow 0, \operatorname{Re} s > 0} sF(s) = 0$.

□

4.3 Die Rücktransformation

Es soll jetzt um die folgende Frage gehen:

- Gegeben sei eine Funktion F . Kann man eine Funktion f finden, deren Laplacetransformierte gerade die Funktion F ist? ($f \circ \bullet F$). Wenn ja, wie brechnet man sie?

Folgendes ist wichtig:

4.3.1 Satz. Angenommen, $f \in \mathcal{E}$ sei an der Stelle $t_0 > 0$ stetig, und $F = \mathcal{L}f$ sei auf der Halbebene R_σ definiert. Gibt es dann ein $a > \sigma$, so dass die Funktion $g(\omega) := |F(a + \mathbf{j}\omega)|$ über \mathbb{R} integrabel ist, so gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a + \mathbf{j}\omega) e^{(a+\mathbf{j}\omega)t_0} d\omega = f(t_0)$$

Beweis. Wir setzen $f_a(t) := e^{-at}f(t)$ und sehen, dass

$$\widehat{f}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t) e^{-\mathbf{j}\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(a+\mathbf{j}\omega)t} dt = F(a + \mathbf{j}\omega)$$

Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(a + \mathbf{j}\omega) e^{(a+\mathbf{j}\omega)t_0} d\omega = e^{at_0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_a(\omega) e^{\mathbf{j}\omega t_0} d\omega = 2\pi e^{at_0} f_a(t_0) = 2\pi f(t_0)$$

□

Wir wollen unsere Regeln zur Berechnung der Laplacetransformierten anwenden, um die Rücktransformierte $f(t)$ zu $F(s) = e^{-\sqrt{s}}$ zu berechnen. Dabei bedeutet $\sqrt{s} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, wenn $s = re^{i\theta}$ und $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ist.

Wir beachten

$$F'(s) = -\frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}}, \quad F''(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{4s^{3/2}} + \frac{e^{-\sqrt{s}}}{4s}$$

woraus folgt

$$4sF''(s) + 2F'(s) - F(s) = 0$$

Auf der anderen Seite ist aber auch $F'(s) = -\mathcal{L}(tf)$ und

$$sF''(s) = s\mathcal{L}(t^2f) = \mathcal{L}((t^2f)') = \mathcal{L}(2tf + t^2f')$$

Einsetzen liefert uns

$$\mathcal{L}(t^2f' + 8tf - 2tf - f) = 0$$

Somit ist

$$4t^2 f' + (6t - 1)f = 0$$

Nun schreiben wir

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f} = -\frac{3}{2t} + \frac{1}{4t^2} = -\left(\frac{3}{2}\ln t + \frac{1}{4t}\right)'$$

Das ergibt

$$\ln f(t) = -\frac{3}{2}\ln t - \frac{1}{4t} + C$$

oder

$$f(t) = Ct^{-3/2}e^{-\frac{1}{4t}}$$

Mit dem Grenzwertsatz c) aus Satz 4.2.6 erhalten wir die Konstante C . Ist $f_1(t) = tf(t)$, so folgt $f_1(t) = Ct^{-1/2} + R(t)$, wobei der Rest R schnell genug gegen 0 geht, wenn $t \rightarrow \infty$. Ist $g_1(t) = Ct^{-1/2}$, so folgt mit c) aus Satz 4.2.6, dass

$$\frac{\mathcal{L}(f_1)}{\mathcal{L}g_1}(s) \rightarrow 1, \quad s \rightarrow 0, \operatorname{Re} s > 0$$

Zum anderen ist aber auch

$$\mathcal{L}f_1 = -F'(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}}$$

und (Ü.A.)

$$\mathcal{L}g_1(s) = C\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

Das liefert uns $C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

Jetzt wollen wir die Laplace-Rücktransformation für rationale Funktionen durchführen. Wir erinnern uns an den

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom f vom Grade $n \geq 1$ lässt sich in Linearfaktoren zerlegen:

$$f(z) = a_n(z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \cdots (z - z_k)^{r_k}$$

mit komplexen Nullstellen z_1, \dots, z_k mit Vielfachheiten $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$, so dass $r_1 + \dots + r_k = n$.

Beispiele: 1) $f(z) = z^3 + z^2 + 5z + 9 + 12\mathbf{j}$ hat die Darstellung $f(z) = (z - (1 - 2\mathbf{j}))(z - 3\mathbf{j})(z + 2 + \mathbf{j})$. Hier ist $n = 3, r_1 = r_2 = r_3 = 1$.

2) $f(z) = z^4 + 2(3 - \mathbf{j})z^3 + 3(3 - 4\mathbf{j})z^2 - 2(3 + 10\mathbf{j})z - 10$ ist zerlegbar als $f(z) = (z + 3 - \mathbf{j})(z + 3 + \mathbf{j})(z - \mathbf{j})^2$, also $n = 4, r_1 = r_2 = 1, r_3 = 2$.

Man kann über \mathbb{C} rationale Funktionen zerlegen wie folgt

4.3.2 Satz (Partialbruchzerlegung). Ist $R = P/Q$ eine rationale Funktion mit zwei Polynomen P und Q , so dass der Grad von P kleiner als der von Q ist, und hat Q die Linearfaktorzerlegung

$$Q(z) = a_n(z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \cdots (z - z_k)^{r_k}$$

so lässt sich R schreiben als

$$R(z) = \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{r_m} \frac{A_{lm}}{(z - z_m)^l}$$

mit geeigneten Koeffizienten $A_{lm} \in \mathbb{C}$.

Beispiele. a) $R(z) = \frac{z^2}{z^4-1}$. Nun ist $Q(z) = z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z-\mathbf{j})(z+\mathbf{j})$ und $P(z) = z^2$. Es entsteht

$$R(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-\mathbf{j}} + \frac{D}{z+\mathbf{j}}$$

Die Koeffizienten finden wir so:

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-\mathbf{j}} + \frac{D}{z+\mathbf{j}} \\ &= \frac{A(z+1)(z^2+1) + B(z-1)(z^2+1) + C(z+\mathbf{j})(z^2-1) + D(z-\mathbf{j})(z^2-1)}{z^4-1} \\ &= \frac{A(z^3+z^2+z+1) + B(z^3-z^2+z-1) + C(z^3+\mathbf{j}z^2-z-\mathbf{j}) + D(z^3-\mathbf{j}z^2-z+\mathbf{j})}{z^4-1} \\ &= \frac{(A+B+C+D)z^3 + (A-B+\mathbf{j}C-\mathbf{j}D)z^2 + (A+B-C-D)z + A-B-\mathbf{j}C+\mathbf{j}D}{z^4-1} \end{aligned}$$

Da ergibt ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} A+B+C+D &= 0 \\ A-B+\mathbf{j}C-\mathbf{j}D &= 1 \\ A+B-C-D &= 0 \\ A-B-\mathbf{j}C+\mathbf{j}D &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{-\mathbf{j}}{4}, D = \frac{\mathbf{j}}{4}$$

Somit

$$R(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} - \frac{\mathbf{j}}{4} \frac{1}{z-\mathbf{j}} + \frac{\mathbf{j}}{4} \frac{1}{z+\mathbf{j}}$$

Ein einfacheres Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten ist folgendes

4.3.3 Hilfssatz. Angenommen, es sei $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion und Q habe nur einfache Nullstellen, etwa die Nullstellen s_1, \dots, s_k . Dann gilt

$$R(z) = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} \frac{1}{z-s_1} + \cdots + \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} \frac{1}{z-s_k}$$

Beweis. Wir können schreiben:

$$R(z) = \frac{A_1}{z - s_1} + \cdots + \frac{A_k}{z - s_k}$$

Wir finden dann

$$A_1 = \lim_{z \rightarrow s_1} (z - s_1)R(z) = \lim_{z \rightarrow s_1} (z - s_1) \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow s_1} \frac{P(z)}{Q(z)/(z - s_1)} = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)}$$

Genauso argumentiert man für die anderen Koeffizienten. □

Beispiele. 1) $R(z) = \frac{z^2}{z^4 - 1}$. Dann ist $P(z) = z^2$, $Q(z) = z^4 - 1$. Die Nullstellen sind $s_1 = 1$, $s_2 = -1$, $s_3 = \mathbf{j}$, $s_4 = -\mathbf{j}$. Also folgt

$$\frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{P(\mathbf{j})}{Q'(\mathbf{j})} = \frac{1}{4\mathbf{j}} = -\frac{\mathbf{j}}{4}, \quad \frac{P(-\mathbf{j})}{Q'(-\mathbf{j})} = \frac{\mathbf{j}}{4}$$

2) $R(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1}$. Nun ist $P(z) = z^2 + 1$ und $Q(z) = z^4 + 1$ mit den Nullstellen:

$$s_1 = \frac{1 + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \quad s_2 = -s_1 = -\frac{1 + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \quad s_3 = \overline{s_1} = \frac{1 - \mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \quad s_4 = \overline{s_2} = \frac{-1 + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$

Wir finden dann

$$\frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} = \frac{s_1^2 + 1}{4s_1^3} = \frac{\overline{s_1} + \overline{s_1}^3}{4} = -\frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{2}}$$

Entsprechend folgt

$$\frac{P(s_2)}{Q'(s_2)} = \frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{P(s_3)}{Q'(s_3)} = \frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{P(s_4)}{Q'(s_4)} = \frac{-\mathbf{j}}{2\sqrt{2}}$$

Also

$$R(z) = \frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{z - \frac{1+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{z + \frac{1+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{z - \frac{1-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{z + \frac{1-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}} \right)$$

Damit können wir wir gewisse rationale Funktionen die Rücktransformierte angeben:

4.3.4 Hilfssatz. *Ist eine rationale Funktion R von der Form $R = P/Q$, mit einem Polynom Q , das nur einfache Nullstellen hat, ist also R zerlegbar in der Form*

$$\frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} \frac{1}{z - s_1} + \cdots + \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} \frac{1}{z - s_k}$$

so ist R die Laplacetransformierte der Funktion

$$f(t) := \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} e^{s_1 t} + \cdots + \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}$$

gewesen: Also $R \bullet \circ f$.

Der Fall rationaler Funktionen mit einem Nennerpolynom mit mehrfachen Nullstellen ergibt sich nun aus der Regel

$$-t \cdot f(t) \circ \bullet F', \quad (-t)^k \cdot f \circ \bullet F^{(k)}, \quad k \geq 1$$

4.3.5 Hilfssatz. Sei

$$R(z) = \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{r_m} \frac{A_{lm}}{(z - z_m)^l}$$

rational. Dann gilt

$$R \bullet \circ \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{r_m} \frac{A_{lm}}{(l-1)!} t^{l-1} e^{z_m t}$$

Man kann die Koeffizienten A_{lm} in der Partialbruchdarstellung berechnen durch

$$A_{lm} = \frac{1}{(r_m - l)!} \lim_{s \rightarrow z_m} ((s - z_m)^{r_m} R(s))^{(r_m - l)}$$

Beispiel. Ist etwa $R(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2}$ mit $a > 0$, so haben wir $R = P/Q$ mit $P = 1$ und $Q(z) = (z - a\mathbf{j})^2(z + a\mathbf{j})^2$, also zwei 2-fache Nullstellen bei $\pm a\mathbf{j}$. Es folgt zuerst

$$R(z) = \frac{A}{(z - a\mathbf{j})^2} + \frac{B}{z - a\mathbf{j}} + \frac{C}{(z + a\mathbf{j})^2} + \frac{D}{z + a\mathbf{j}}$$

Dann wird

$$A = \lim_{s \rightarrow a\mathbf{j}} (s - a\mathbf{j})^2 R(s) = \lim_{s \rightarrow a\mathbf{j}} \frac{1}{(s + a\mathbf{j})^2} = -\frac{1}{4a^2}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow a\mathbf{j}} ((s - a\mathbf{j})^2 R(s))' = \lim_{s \rightarrow a\mathbf{j}} \left(\frac{1}{(s + a\mathbf{j})^2} \right)' = -\frac{2}{(2a\mathbf{j})^3} = \frac{-\mathbf{j}}{4a^3}$$

Nun ist aber auch $C = \bar{A}$ und $D = \bar{B}$, da R reelle Koeffizienten hat und $-a\mathbf{j} = \overline{a\mathbf{j}}$.

Das liefert

$$R(z) = \frac{-1}{4a^2} \left(\frac{1}{(z - a\mathbf{j})^2} + \frac{\mathbf{j}/a}{z - a\mathbf{j}} + \frac{1}{(z + a\mathbf{j})^2} - \frac{\mathbf{j}/a}{z + a\mathbf{j}} \right)$$

und weiter

$$R \bullet \circ \frac{-1}{4a^2} \left(te^{\mathbf{j}at} + \frac{\mathbf{j}}{a} e^{\mathbf{j}at} + te^{-\mathbf{j}at} - \frac{\mathbf{j}}{a} e^{-\mathbf{j}at} \right) = \frac{1}{2a^2} \left(-t \cos(at) + \frac{1}{a} \sin(at) \right)$$

4.4 Anwendungen der Laplacetransformation auf Differenzialgleichungen

Die Laplacetransformation überführt eine lineare Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung. Diese lässt sich lösen. Man gelangt dann durch Rücktransformation zu einer Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Gegeben sei die lineare DGL der Ordnung n

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f,$$

wobei $f \in \mathcal{E}$. Wir wollen die Startwerte $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ vorschreiben.

Durch Laplacetransformation überführen wir die DGL in eine Gleichung für die Laplacetransformierte Y von y und finden

$$P(s)Y(s) - Q(s) = F(s)$$

wobei F die Laplacetransformierte zu f sein soll und Q ein Polynom vom Grade $\leq n - 1$ ist, dessen Koeffizienten von den Startwerten y_0, \dots, y_{n-1} abhängen. P ist gerade das charakteristische Polynom der DGL. Es folgt

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{F(s)}{P(s)}$$

Durch Rücktransformation berechnen wir daraus y . Dabei bestimmen wir $u := \mathcal{L}^{-1}(1/P)$ und erhalten dann

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{P(s)}\right) = f * u$$

Beispiele. (i) Die Differentialgleichung $y' + ay = f$ mit einer konstanten a und einer stetigen Funktion $f \in \mathcal{E}$. Dabei geben wir vor, dass $y(0) = y_0$ sein soll.

Durch Laplacetransformieren finden wir, wenn $y \circ \bullet Y$, dass $y' \circ \bullet sY - y_0$. Das ergibt, wenn $f \circ \bullet F$:

$$sY - y_0 + aY = F, \quad (s + a)Y = F - y_0, \quad Y = \frac{F - y_0}{s + a}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{s + a} \bullet \circ e^{-at}, \quad \frac{F}{s + a} = \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}(e^{-at}) = \mathcal{L}(f * e^{-at}), \quad \frac{y_0}{s + a} \bullet \circ y_0 e^{-at}$$

Damit folgt

$$Y \bullet \circ y_0 e^{-at} + f * e^{-at} = y_0 e^{-at} + \int_0^t f(x) e^{a(x-t)} dx$$

(ii) Die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + ay' + by = f, \quad y(0) = y_0, y'(0) = y_1$$

wobei $f \in \mathcal{E}$. Ist wieder $y \circ \bullet Y, f \circ \bullet F$, so haben wir

$$y'' \circ \bullet s^2 Y - y_1 - y_0 s, \quad y' \circ \bullet s Y - y_0$$

Das ergibt

$$(s^2 + as + b)Y - y_0 s - y_1 - ay_0 = F, \quad Y = \frac{F + y_0 s + y_1 + ay_0}{s^2 + as + b}$$

Wir müssen also jetzt die Nullstellen s_1, s_2 von $s^2 + as + b$ ansehen. Es gilt

$$s^2 + as + b = \left(s + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

Wir nehmen an, es sei $b \neq a^2/4$. Dann ist $s_1 \neq s_2$, und ferner

$$\frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right)$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} \frac{y_0 s + y_1 + ay_0}{s^2 + as + b} &= \frac{y_1 + ay_0}{s^2 + as + b} + \frac{y_0 s}{s^2 + as + b} \\ &= \frac{y_1 + ay_0}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right) + \frac{y_0(s - s_1)}{s^2 + as + b} + \frac{y_0 s_1}{s^2 + as + b} \\ &= \frac{y_1 + ay_0 + y_0 s_1}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right) + \frac{y_0}{s - s_2} \\ \bullet \circ & \frac{y_1 + ay_0 + y_0 s_1}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + y_0 e^{s_2 t} \end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$\frac{F}{s^2 + as + b} \bullet \circ \frac{1}{s_1 - s_2} f * (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) = \frac{1}{s_1 - s_2} \int_0^t f(x) (e^{s_1(t-x)} - e^{s_2(t-x)}) dx$$

Das führt uns auf die Lösung

$$y(t) = \frac{y_1 + ay_0 + y_0 s_1}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + y_0 e^{s_2 t} + \frac{1}{s_1 - s_2} \int_0^t f(x) (e^{s_1(t-x)} - e^{s_2(t-x)}) dx$$

(iii) Die DGL

$$x'''(t) + 5x''(t) + 8x'(t) + 4x(t) = e^t$$

mit Anfangswerten $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Nun ist $P(s) = s^3 + 5s^2 + 8s + 4 = (s + 1)(s + 2)^2$ und $Y(s)$ muss die Gleichung

$$(s + 1)(s + 2)^2 Y(s) = \frac{1}{s - 1}$$

lösen. Also

$$Y(s) = \frac{1}{(s - 1)(s + 1)(s + 2)^2} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2} + \frac{D}{(s + 2)^2}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} A &= (s - 1)Y(s) \Big|_{s=1} = \frac{1}{18}, & B &= (s + 1)Y(s) \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{2} \\ D &= (s + 2)^2 Y(s) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{3}, & C &= ((s + 2)^2 Y(s))' \Big|_{s=-2} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Das ergibt uns

$$y(t) = \frac{1}{18}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{1}{3}te^{-2t}$$

Systeme linearer Differenzialgleichungen

Wir betrachten für eine $n \times n$ -Matrix \mathcal{A} das System

$$\vec{y}' = \mathcal{A} \cdot \vec{y} + \vec{b}(t)$$

wobei \vec{b} eine vektorwertige Funktion aus \mathcal{E} sein soll. Wir stellen die Startbedingung $\vec{y}(0) := \vec{y}_0$.

Die Methode der Laplacetransformation ermöglicht eine Lösung dieses Differenzialgleichungssystems. Ist nämlich \vec{Y} der Vektor der Laplacetransformierten der in \vec{y} als Komponenten auftretenden Funktionen, so ist

$$s\vec{Y} - \vec{y}_0 = \mathcal{A} \cdot \vec{Y} + \vec{B}$$

wobei \vec{B} die Laplacetransformierte zu \vec{b} bedeutet. Damit ist \vec{Y} Lösungsvektor eines linearen Gleichungssystems:

$$(s\mathcal{E}_n - \mathcal{A})\vec{Y} = \vec{y}_0 + \vec{B}$$

Das ist lösbar, und die Lösung hat die Gestalt

$$\vec{Y}(s) = \frac{1}{P(s)} \tilde{\mathcal{A}}(s) \cdot (\vec{y}_0 + \vec{B}(s))$$

mit einem Polynom P vom Grad n und einer geeigneten Matrix $\tilde{\mathcal{A}}$, deren Einträge ebenfalls bestimmte Polynome sind, deren Grad nicht größer als $n - 1$ ist. Mit der Methode Laplace-Rücktransformierten und mit Hilfe des Faltungssatzes kann so die Lösung $\vec{y}(t)$ des DGL-Systems berechnet werden.

Beispiele: Das System

$$\begin{aligned}y_1' &= 33y_1 + 48y_2 + t \\y_2' &= -24y_1 - 35y_2 + 1\end{aligned}$$

mit Startbedingungen $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = -1$.

Die Laplacetransformierten Y_1 und Y_2 erfüllen die Bedingungen

$$(s - 33)Y_1 - 48Y_2 = 2 + \frac{1}{s^2}$$

$$24Y_1 + (s + 35)Y_2 = -1 + \frac{1}{s}$$

Es folgt

$$Y_1(s) = \frac{2s^3 + 22s^2 + 49s + 35}{s^2(s + 3)(s - 1)}, \quad Y_2(s) = \frac{-s^3 - 14s^2 - 33s - 24}{s^2(s + 3)(s - 1)}$$

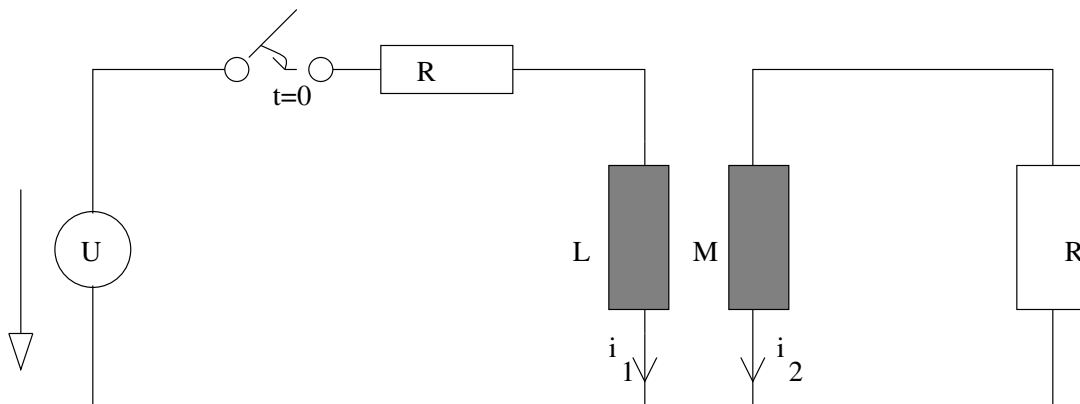
Die Rücktransformation liefert uns

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}Y_1 = -\frac{217}{9} - \frac{35}{3}t + 27e^t - \frac{8}{9}e^{-3t}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}Y_2 = \frac{49}{3} + 8t - 18e^t + \frac{2}{3}e^{-3t}$$

(ii) Der Transformator

Wir suchen in der folgenden Schaltung die Ströme i_1 und i_2 . Dabei ist U eine Gleichspannung, die bei $t = 0$ eingeschaltet werden soll. (h_0 bedeutet die Heavyside-Funktion).



Die Ströme genügen den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}Li_1' + Ri_1 + Mi_2' &= Uh_0 \\Li_2' + Ri_2 + Mi_1' &= 0\end{aligned}$$

äquivalent:

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = -R \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Uh_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & L \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(-R \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Uh_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

wobei $L \neq M$. Gehen wir zu den Laplacetransformierten I_1 und I_2 zu i_1 bzw. i_2 über, und beachten $i_1(0) = i_2(0) = 0$, so geht das Differenzialgleichungssystem in das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (Ls + R)I_1 + sMI_2 &= \frac{U}{s} \\ MsI_1 + (Ls + R)I_2 &= 0 \end{aligned}$$

über. Die Lösung dazu ist

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \frac{U}{L} \begin{pmatrix} \frac{1 + \frac{1}{Ts}}{(1-k^2)s^2 + \frac{2}{T}s + \frac{1}{T^2}} \\ \frac{-k}{(1-k^2)s^2 + \frac{2}{T}s + \frac{1}{T^2}} \end{pmatrix} = \frac{U}{L} \begin{pmatrix} \frac{s + \frac{1}{T}}{(1-k^2)s^2 + \frac{2}{T}s + \frac{1}{T^2}} \\ \frac{-k}{(1-k^2)s^2 + \frac{2}{T}s + \frac{1}{T^2}} \end{pmatrix}$$

Dabei ist

$$T = \frac{L}{R}, \quad k = \frac{M}{L} < 1$$

Wir nehmen nun die Rücktransformation vor.

Es gilt für das Nennerpolynom:

$$\begin{aligned} (1-k^2)s^2 + \frac{2}{T}s + \frac{1}{T^2} &= (1-k^2) \left(s^2 + \frac{2}{(1-k^2)T}s + \frac{1}{(1-k^2)T^2} \right) \\ &= (1-k^2) \left(\left(s + \frac{1}{(1-k^2)T} \right)^2 + \frac{1}{(1-k^2)T^2} - \left(\frac{1}{(1-k^2)T} \right)^2 \right) \\ &= (1-k^2)(s-s_1)(s-s_2), \end{aligned}$$

wobei

$$s_1 = -\frac{1}{T} \frac{1}{1+k}, \quad s_2 = -\frac{1}{T} \frac{1}{1-k}$$

Es folgt

$$I_1 = \frac{U}{(1-k^2)L} \left(\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{1}{T} \frac{1}{s(s-s_1)(s-s_2)} \right)$$

Die Partialbruchzerlegungen der Terme innerhalb der Klammern lauten nun

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{(s_1-s_2)} \left(\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2} \right)$$

und

$$\frac{1}{s(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{s-s_2}$$

mit den Koeffizienten

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{s_1 s_2}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{1}{s(s-s_2)} = \frac{1}{s_1(s_1-s_2)}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow s_2} \frac{1}{s(s-s_1)} = -\frac{1}{s_2(s_1-s_2)}$$

Das ergibt zusammen:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U}{(1-k^2)L} \left(\frac{1}{(s_1-s_2)} \frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{(s_1-s_2)} \frac{1}{s-s_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{T} \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{s-s_2} \right) \right) \\ &= \frac{U}{(1-k^2)L} \left(\frac{1}{s_1-s_2} \left(1 + \frac{1}{T s_1} \right) \frac{1}{s-s_1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{s_1-s_2} \left(1 + \frac{1}{T s_2} \right) \frac{1}{s-s_2} + \frac{1}{T s_1 s_2} \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{s_1-s_2} \left(1 + \frac{1}{T s_1} \right) = -\frac{(1-k^2)T}{2}, \quad \frac{1}{s_1-s_2} \left(1 + \frac{1}{T s_2} \right) = \frac{(1-k^2)T}{2}, \quad \frac{1}{T s_1 s_2} = (1-k^2)T$$

und damit

$$I_1 = \frac{UT}{L} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s-s_2} + \frac{1}{s} \right)$$

Mit den Korrespondenzen

$$\frac{1}{s-s_1} \bullet \circ e^{s_1 t}, \quad \frac{1}{s-s_2} \bullet \circ e^{s_2 t}, \quad \frac{1}{s} \bullet \circ h_0$$

(h_0 ist die Heavyside-Funktion), folgt (wegen $\frac{UT}{L} = \frac{U}{R}$)

$$I_1 \bullet \circ \frac{-U}{2R} \left(e^{-\frac{t}{T} \frac{1}{1+k}} + e^{-\frac{t}{T} \frac{1}{1-k}} - 2h_0(t) \right)$$

Genauso finden wir

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{-kU}{(1-k^2)L} \frac{1}{s_1-s_2} \left(\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2} \right) \\ &\bullet \circ \frac{-U}{2R} \left(e^{-\frac{t}{T} \frac{1}{1+k}} - e^{-\frac{t}{T} \frac{1}{1-k}} \right) \end{aligned}$$

Damit fließen also in den Teilstromkreisen nach Einschalten der Spannung die folgenden Ströme

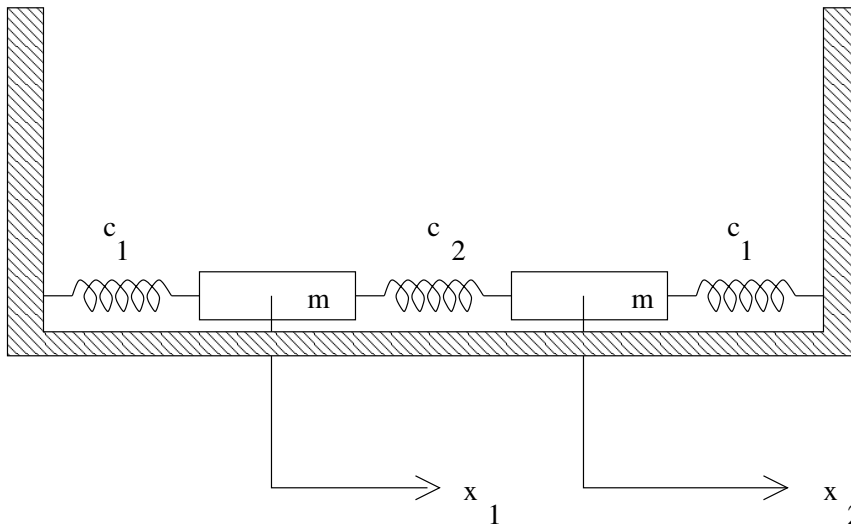
$$i_1(t) = \frac{-U}{2R} \left(e^{-\frac{t}{T} \frac{1}{1+k}} + e^{-\frac{t}{T} \frac{1}{1-k}} - 2 \right)$$

und

$$i_2(t) = \frac{-U}{2R} \left(e^{-\frac{t}{T} \frac{1}{1+k}} - e^{-\frac{t}{T} \frac{1}{1-k}} \right)$$

(iii) *Gekoppelte schwingende Teilchen*

Angenommen, 2 Körper der Masse m sind untereinander und mit 2 Wänden durch eine Feder verbunden und sollen sich reibungsfrei auf einer Unterlage bewegen können. Die Federn sollen die Federkonstanten c_1, c_2 haben.



Zu Beginn soll der 2. Körper in Ruhelage sein, so dass $x_2(0) = x_2'(0) = 0$. Der 1. Körper soll in Ruhe befindlich und um x_0 ausgelenkt sein: $x_1(0) = x_0, x_1'(0) = 0$.

Dann bewegen sich beide Teilchen so, dass folgendes System von Differentialgleichungen gilt

$$x_1'' = -\omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 (x_2 - x_1)$$

$$x_2'' = -\omega_1^2 x_2 + \omega_2^2 (x_1 - x_2)$$

Dabei ist $\omega_1^2 = c_1/m, \omega_2^2 = c_2/m$. Wenn $x_1 \circ \bullet X_1, x_2 \circ \bullet X_2$, so wird daraus durch Laplacetransformation

$$\begin{aligned} s^2 X_1 - s x_0 &= -\omega_1^2 X_1 + \omega_2^2 (X_2 - X_1) \\ s^2 X_2 &= -\omega_1^2 X_2 + \omega_2^2 (X_1 - X_2) \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} (s^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) X_1 - \omega_2^2 X_2 &= s x_0 \\ -\omega_2^2 X_1 + (s^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) X_2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist

$$X_1 = \frac{x_0 s (s^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_1^2 + 2\omega_2^2)}$$

und

$$X_2 = \frac{\omega_2^2 x_0 s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_1^2 + 2\omega_2^2)}$$

Nun bestimmen wir die Partialbruchzerlegung zu diesen Funktionen und finden

$$X_1 = \frac{1}{2} x_0 \left(\frac{s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{s}{s^2 + \omega_1^2 + 2\omega_2^2} \right)$$

$$X_2 = \frac{1}{2} x_0 \left(\frac{s}{s^2 + \omega_1^2} - \frac{s}{s^2 + \omega_1^2 + 2\omega_2^2} \right)$$

Wir erinnern uns, dass

$$\frac{s}{s^2 + \omega_1^2} \bullet \circ \cos(\omega_1 t), \quad \frac{s}{s^2 + \omega_1^2 + 2\omega_2^2} \bullet \circ \cos(\sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2} t)$$

damit finden wir durch Rücktransformation

$$x_1(t) = \frac{1}{2} x_0 \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2} t) \right)$$

und

$$x_2(t) = \frac{1}{2} x_0 \left(\cos(\omega_1 t) - \cos(\sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2} t) \right)$$

(iv) *Gleichstrommotor*

Bei einem Gleichstrommotor bestehen zwischen der Drehgeschwindigkeit ω und dem Strom J , der den Anker durchfließt, die Beziehungen

$$\begin{aligned} -\theta \omega' &= -aJ + M \\ LJ' &= -a\omega - RJ + U \end{aligned}$$

wobei θ das Trägheitsmoment, L die Induktivität der Spule, R den Widerstand, U die Spannung und $a > 0$ eine Materialkonstante bedeuten. Es folgt also

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{a}{\theta} J - \frac{M}{\theta} \\ J' &= -\frac{a}{L} \omega - \frac{R}{L} J + \frac{U}{L} \end{aligned}$$

Angenommen, der Motor werde zur Zeit $t = 0$ angeschaltet. Dann erfüllen die Laplacetransformierten $\Omega(s)$ und $\mathcal{L}J$ von ω und J die Gleichungen

$$\begin{aligned} s\Omega - \frac{a}{\theta}\mathcal{L}J &= -\frac{M}{\theta s} \\ \frac{a}{L}\Omega + \left(\frac{R}{L} + s\right)\mathcal{L}J &= \frac{U}{Ls} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} s & -\frac{a}{\theta} \\ \frac{a}{L} & \frac{R}{L} + s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ \mathcal{L}J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M/\theta s \\ U/Ls \end{pmatrix}$$

Das führt auf

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ \mathcal{L}J \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{a^2}{L\theta}} \begin{pmatrix} \frac{R}{L} + s & \frac{a}{\theta} \\ -\frac{a}{L} & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M/\theta s \\ U/Ls \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\Omega(s) = \frac{1}{\theta L} \frac{aU - MR - MLs}{s(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{a^2}{L\theta})}, \quad \mathcal{L}J = \frac{1}{\theta L} \frac{aM + \theta Us}{s(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{a^2}{L\theta})}$$

Das Polynom $P(s) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{a^2}{L\theta}$ hat im Falle $\Delta := \frac{R^2}{4L^2} - \frac{a^2}{\theta L} > 0$ die reellen Nullstellen $s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\Delta}$. In dem Ansatz

$$\Omega(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2}$$

erhalten wir dann $A = \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega(s) = \frac{U}{a} - \frac{RM}{a^2}$. Somit wird

$$\omega(t) = \frac{U}{a} - \frac{RM}{a^2} + Be^{s_1 t} + Ce^{s_2 t} \longrightarrow \frac{U}{a} - \frac{RM}{a^2}$$

wenn $t \rightarrow \infty$. Analog wird

$$\mathcal{L}J = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2}$$

mit $A = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}J(s) = \frac{M}{a}$, so dass $J(t) \longrightarrow \frac{M}{a}$, wenn $t \rightarrow \infty$.

(v) *Eine Differenzialgleichung mit Verzögerung.*

Wir betrachten noch die Dgl:

$$y'(t) = y(t-1)$$

Durch Laplacetransformation $y \circ \longrightarrow \bullet Y$ erhalten wir

$$sY - y(0) = e^{-s}Y$$

Oder

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s - e^{-s}} = \frac{y(0)}{s} \frac{1}{1 - \frac{e^{-s}}{s}}$$

Ist nun $s > 1$, so wird $0 < \frac{e^{-s}}{s} < 1$ und daher ist die Reihenentwicklung

$$Y(s) = y(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s^{n+1}}$$

erlaubt. Nun ist aber

$$(u \cdot h_0)(t-n) \circ \bullet e^{-ns} \mathcal{L}u(s), \quad \frac{t^n}{n!} \circ \bullet \frac{1}{s^n}$$

Das ergibt

$$Y \bullet \circ y(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t-n)^n h_0(t-n)$$

also

$$y(t) = y(0) \sum_{n=0}^{[t]} \frac{1}{n!} (t-n)^n$$

Diese Funktion ist auf $(2, \infty)$ unendlich oft stetig differenzierbar, und auf $(1, \infty)$ stetig differenzierbar. Ihr Schaubild sieht so aus:

