Prof. Dr. J, Ruppenthal
Dr. T. Pawlaschyk, Artur Mildner

WiSe23/24

Mathematik 1/IA und 2/IB für Maschinenbau & Sicherheitstechnik

Skript

Stand: 8. Oktober 2023

Inhaltsverzeichnis

Mathematik 1/IA (Wintersemester)

Einführung in die Kultur der Mathematik

Um zu lernen, wie man für die Mathematik[1] lernt, versuchen wir zuerst zu verstehen, was Mathematik überhaupt ist und wie man innerhalb der Mathematik arbeitet. Daraus leiten wir eine Lernreihenfolge ab, die wir **Lernen auf Verstehen** nennen. Das bedeutet, dass Sie nicht nur Aufgaben lösen können sollen, sondern auch **Definitionen, Rechenregeln und Formeln auswendig lernen** und die **Zusammenhänge** zwischen allen Themen kennen und **verstehen** müssen. Gerade letzteres kostet viel Zeit und muss durch das Nacharbeiten der Vorlesungsinhalte außerhalb der Uni im Selbstudium geleistet werden.

Mathematik ist die Untersuchung von abstrakten Strukturen und Objekten und deren Zusammenhänge. Daher ist Mathematik eine Naturwissenschaft für sich. Mathematik bedient sich wie die Philosophie der Logik, um Schlüsse zu begründen. Daher kann sie auch als Philosophie betrachtet werden. Ferner können die Resultate in der Praxis angewendet werden. Deshalb ist Mathematik auch eine Hilfswissenschaft, z.B. für Ingenieure. Umgekehrt motivieren Probleme u.a. aus dem Ingenieursbereich neue mathematische Objekte zu untersuchen und Theorien zu entwickeln.

Objekte werden in **Definitionen** genau und widerspruchsfrei beschrieben und werden durch Begriffe wie „Wurzel" oder Symbole „$\sqrt{\ }$" repräsentiert. Objekte haben Eigenschaften und hängen zusammen. Diese werden in einem **Satz** zusammengefasst, z.B. Rechenregeln oder Formeln. Ein Satz wird durch einen **Beweis** mit Hilfe der Regeln der **Aussagenlogik** begründet. Man bedient sich dabei häufig eines starken Formalismus und drückt Definitionen, Sätze und Beweise mit Hilfe der Symbole aus.

Aussagen & Logik

In der Mathematik führen Beobachtungen von abstrakten Objekten zu Erkenntnissen, die als **Aussagen** formuliert werden. Aussagen sind entweder **wahr** oder **falsch**. Die Gründe, die diese Aussagen stützen, bestehen aus anderen Aussagen (z.B. Axiome, Regeln, Formeln, Sätze, Theoreme o.ä.). Die Begründung einer Aussage nennt man **Argument** oder **Beweis**. Mehr dazu erfahren wir in Kapitel 1.

Die Mathematik hat den Anspruch, Erkenntnisse über wohldefinierte, abstrakte Objekte und deren Zusammenhänge zu gewinnen, Aussagen zu formulieren und diese mit Hilfe von logisch korrekten Argumenten zu beweisen. Im Beweis neuer Aussagen liefert die Aussagenlogik ein konsistentes, widerspruchsfreies Regelwerk.

Da alle Aussagen innerhalb der Mathematik aus wenigen **Axiomen** (elementaren Aussagen, die als wahr angenommen werden), hergeleitet werden, sind aufgrund der Logik alle bewiesenen Aussagen ebenfalls wahr. Die Axiome sind dabei derart elementar, dass die mathematische Theorie universell in anderen Wissenschaften und im Alltag anwendbar ist. Die Übertragung vom Alltag in die **formale Sprache** der Mathematik geschieht durch **Modellierung**.

Definitionen

Mathematische Objekte werden durch Eigenschaften eindeutig und widerspruchsfrei in einer **Definition** festgelegt und mit einem Namen und ggf. Symbol versehen. Definitionen bilden unsere gemeinsame Kommunikationsgrundlage, die MissVerstehense und damit Fehlschlüsse und Widersprüche vermeidet.

[1] Der Begriff *Mathematik* hat seinen Ursprung im Altgriechischen $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\eta\ \tau\eta\chi\nu\eta$ (mathematike techne) und bedeutet etwa so viel wie „die Kunst des Lernens".

Definition Ein *quadratisches Polynom* ist definiert als eine Funktion der Form

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

wobei a, b, c reelle Zahlen sind mit $a \neq 0$ und x eine Variable ist, die jeden reellen Wert annimmt. Ein quadratisches Polynom heißt *normiert*, falls $a = 1$ ist.

Definition Sei a eine nicht-negative Zahl. Unter dem Symbol $\sqrt{a}$ verstehen wir die nicht-negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Lerntipp Lernen Sie die Definitionen, die Ihnen in der Vorlesung begegnen, auswendig, z.B. anhand von Karteikarten. Es macht keinen Sinn, wenn Sie einen mathematischen Text (z.B. Skript, Buch, Aufgabe, Klausuraufgabe) lesen und die darin enthaltenen Begriffe nicht kennen. Sie werden nichts verstehen. Dasselbe gilt für die Symbole. Zudem sollten Sie prüfen, ob Sie die Begriffe aus der Schule kennen und wiedergeben können, z.B. was ist ein Bruch? Eine Potenz? Eine Wurzel? Falls nicht, empfehlen wir das Wiederholen des Schulstoffs mit Studiport.

Sätze

Mathematische Schlussfolgerungen sind Aussagen und werden in einem *Satz* zusammengefasst. Der Satz besteht immer aus den Voraussetzungen (Prämissen), die die Objekte und das Setting beschreiben, und einem Schluss (Konklusion). Erst, wenn die Prämissen wahr sind, ist auch die Konklusion wahr, und der Satz darf bedenkenlos angewendet werden. Daher müssen die Voraussetzungen stets überprüft werden. Sätze beinhalten z.B. Rechenregeln, Formeln oder weitere Aussagen. Sätze müssen immer bewiesen werden, oder es muss zumindest ein Verweis auf einen gültigen Beweis existieren.

Spezielle Sätze sind das *Lemma* (Hilfssatz), das *Korollar* (Folgerung aus einem Satz) und das *Theorem* (sehr wichtiger Satz).

Satz (pq-Formel) Sei $p(x) = x^2 + px + q$ ein normiertes quadratisches Polynom. Dann sind

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

die Nullstellen des Polynoms, d.h. $p(x_1) = 0$ und $p(x_2) = 0$. Wir nennen $\Delta = \frac{p^2}{4} - q$ die Diskriminante von p.

Dem Satz folgt der Beweis des Satzes (oder zumindest eine Referenz auf einen Beweis.)

Beweis Wir führen nur den Beweis, dass $p(x_1) = 0$ ist. Der Beweis, dass $p(x_2) = 0$ verläuft analog und ist daher trivial.

$$\begin{aligned}
p(x_1) &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + q \\
&= \frac{p^2}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} + \left(\frac{p^2}{4} - q\right) - \frac{p^2}{2} + p \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} + q \\
&= \frac{p^2}{4} - p \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} + \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{2} + p \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} + q = 0
\end{aligned}$$

Wir sehen hier, wie wichtig die Prämisse ist, dass p ein normiertes Polynom ist. Die pq-Formel in dieser Form geht nur für normierte Polynome. Hat man ein Polynom der Form $ax^2 + bx + q$ mit $a \neq 1$, so muss das Polynom zuerst normiert werden.

Korollar Ein beliebiges quadratisches Polynom hat keine Nullstelle, genau eine oder genau zwei Nullstellen.

Beweis Sei $p(x) = ax^2 + bx + c$ ein quadratisches Polynom. Wegen $a \neq 0$ gilt dann

$$p(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 + px + q) = aq(x)$$

mit $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$ und $q(x) = x^2 + px + q$. Da eine Nullstelle von q auch eine Nullstelle von p ist, hat p genau dann keine, eine oder zwei Nullstellen, wenn q keine, eine oder zwei Nullstellen besitzt. Nun ist q ein normiertes quadratisches Polynom, sodass man den vorherigen Satz anwenden kann. Ist $\Delta < 0$, so hat q keine Nullstelle. Ist $\Delta = 0$, so hat q genau eine Nullstelle. Ist $\Delta > 0$, so hat q zwei Nullstellen. Mehr Fälle für Δ gibt es nicht. Daher ist der Beweis abgeschlossen.

In den Beweisen fielen die Begriffe *analog*, was so viel wie „sehr ähnlich bis auf technische Kleinigkeiten" bedeutet, und *trivial*, was meint, dass die Idee des Nachweises relativ klar ist und technisch einfach auszuführen ist. Beides ist natürlich subjektiv interpretierbar. Außerdem haben wir eine *Fallunterscheidung* durchgeführt und auf einen vorherigen Satz verwiesen.

In der Vorlesung werden wir auf Beweise überwiegend verzichten. Allerdings werden wir stets Begründungen für die Gültigkeit der Sätze liefern.

Lerntipp Lernen Sie die wichtigsten Sätze ebenfalls auswendig. Falls Ihnen schwerfällt, sich die Prämissen des Satzes zu merken, schreiben Sie die Konklusion auf und überlegen Sie sich selbst, welche Voraussetzungen überhaupt nur Sinn ergeben könnten. Dadurch trainieren Sie ebenfalls Ihr Verstehen. Das Prinzip greift übrigens auch bei den Definitionen. Verstehen erwerben Sie auch, wenn Sie die Beweise reproduzieren und anderen erklären können.

Strukturen

Objekte werden in Mengen zusammengefasst, wie z.B. die Menge der reellen Zahlen. In der Mathematik interessieren Strukturen auf Mengen, mit denen man die Objekte manipulieren oder in einen Zusammenhang stellen kann.

Satz Die reellen Zahlen genügen folgenden Rechenregeln.

(a) Assoziativgesetz der Addition: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

(b) Assoziativgesetz der Multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

(c) Kommutativgesetz der Addition: $a + b = b + a$

(d) Kommutativgesetz der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$

(e) Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Lerntipp Klammern müssen immer sein (bis auf einige Ausnahmen). Achten Sie auf Ihre Klammerung! Merken Sie sich auch folgendes Prinzip: Rechenregeln sind intuitiv und recht einfach innerhalb derselben Rechenoperationen, wie sie oben anhand des Assoziativ- und Kommutativgesetzes sehen. Beim Mischen der Operationen wird es kompliziert, siehe z.B. das Distributivgesetz oder die binomischen Formeln. Es gilt $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$, aber $(ab)^2 = a^2b^2$.

Rechnen

Beim Rechnen ist das Ziel, einen Term umzuformen und meistens zu vereinfachen, um die Essenz des Terms zu ermitteln. Für fehlerfreie Rechnungen ist es notwendig, die Rechenoperation (Definition) und die Rechenregeln (Satz) zu kennen.

Definition Sei a eine reelle und k eine natürliche Zahl. Dann ist die Potenz a^k definiert als

$$a^k := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k\text{-mal}} \quad \text{und} \quad a^{-k} := \frac{1}{a^k}$$

a heißt Basis, k heißt Exponent. Ferner definiert man $a^0 := 1$ und speziell $0^0 := 1$.

Daraus ergeben sich folgende Rechenregeln, die bewiesen werden müssen. Beweise finden man in fast jedem Buch über Potenzgesetze.

Satz (Rechenregeln für Potenzen) Seien a und b reelle Zahlen mit $a, b \neq 0$ und k und m ganze Zahlen. Dann gelten:

(A) $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$

(B) $\frac{a^k}{a^m} = a^{k-m}$

(C) $(a^k)^m = a^{k \cdot m}$

(D) $a^k b^k = (ab)^k$

Beispiel

$$a^6 \cdot (a^2)^{-3} \overset{\text{(C)}}{=} a^6 \cdot a^{-6} \overset{\text{(A)}}{=} a^{6-6} = a^0 \overset{\text{Def.}}{=} 1$$

Lerntipp Lernen Sie die Definitionen der Rechenoperationen und die Rechenregeln auswendig. Trainieren Sie Rechnungen mit Hilfe von Übungsaufgaben. Verzichten Sie beim Trainung auf einen Taschenrechner, da Sie ihn in der Klausur eh nicht benutzen dürfen. Dadurch lernen Sie, schnell zu rechnen. Extratipp: Verweisen Sie beim Training nach jedem Gleichheitszeichen auf die entsprechende Rechenregel.

Lernprinzip: Lernen auf Verstehen

Prinzipiell setzen sich die Inhalte der Veranstaltung (und damit der Klausur) aus vier Komponenten zusammen:

- Basics (aus der Schule)
- Wissen (aus der Vorlesung)
- Verstehen (des Vorlesungsstoffs)
- Anwendung (der Vorlesungsinhalte)

Generell müssen beim Lernen die Objekte und Zusammenhänge verstanden werden, um sie flexibel auf Probleme anwenden zu können. Aus diesem Grund halten wir uns an das folgende Prinzip:

Lernen auf Verstehen ist ein Lernprinzip, bei dem der Fokus erst auf dem Erwerb des Wissens und des Verstehenses liegt und danach anschließend beim Erwerb der Fähigkeit, das Wissen anzuwenden.

Warum?

Wenn Sie Wissen & Verstehen erworben haben, erst dann können Sie das Wissen anwenden.

Wenn Sie das Wissen anwenden können, dann bestehen Sie die Klausur.

Verstandenes lässt sich viel besser einprägen als auswendig gelernte Rezepte, die für Sie ohne genügend Vorwissen sinnlos erscheinen und daher auch langweilig und schwierig. Mit Rezeptlösungen können Sie nur genau dieselben Aufgaben lösen, aber keine Variationen der Aufgaben. Wenn Sie ein Thema verstanden haben, können Sie flexibel auf Aufgaben und Problemstellungen reagieren.

Verstehen erwerben Sie nur durch Eigenarbeit oder Gruppenarbeit durch das Durcharbeiten des Skripts und der Theorie, nur nicht nur in der Vorlesung, sondern auch außerhalb der Uni zu Hause.

Der Dozent bietet Ihnen nur eine Erklärung des Themas, aber es ist **Ihre** Aufgabe, den Stoff zu verstehen, d.h. notfalls müssen Sie sich entsprechende, für Sie verständliche Bücher oder andere Skripte besorgen. Lernen Sie erst die Theorie, dann die Praxis bzw. Anwendung.

Wichtig! Sie müssen die Komponenten Wissen, Verstehen und Anwendung beim Lernen berücksichtigen. Es kann natürlich passieren, dass Sie Wissen bereits besitzen oder es sehr schnell erwerben, sodass Sie sofort mit der Anwendung beginnen können. Da Sie Wissen in den Aufgaben, Übungsblättern, der Probeklausur, den Altklausuren etc. anwenden, müssen Sie sich zuerst genügend gut mit der Vorlesung, also dem Skript, beschäftigt haben. Um die Musterlösungen zu verstehen, müssen Sie sich ebenfalls mit dem Skript beschäftigt haben, in dem erklärt wird, weswegen die Lösung zum Ziel führt. Lösungswege ergeben sich nahezu automatisch, wenn genügend Wissen vorhanden ist. Daher werden die o.g. in der Klausur abgefragt.
Es ist auch wichtig, dass Sie in der Vorlesungszeit lernen, damit das Wissen sacken kann, und Können trainieren, um das Wissen zu vertiefen. In der Klausurphase müssen Sie dann nur noch wiederholen, letzte Lücken schließen und für die Klausur trainieren.

Literaturhinweise

- Papula, Lothar: Mathematik fur Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1. Ein Lehr- und Arbeitsbuch fur das Grundstudium. Vieweg - Verlag
- R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar: Mathematik fur Ingenieure I und II, Wiley - VCH Verlag
- St. Goebbels, St. Ritter: Mathematik verstehen und anwenden, Spektrum-Verlag
- Rießinger, Thomas: Mathematik fur Ingenieure, Springer - Verlag
- Brauch, Wolfgang: Mathematik fur Ingenieure, Teubner - Verlag
- Duma, Andrei: Kompaktkurs Mathematik fur Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer - Verlag
- Bärwolff, Gunter: Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure. Elsevier, SpektrumVerlag

Schauen Sie auch, ob es zu diesen Büchern Aufgabenbücher oder Formelsammlungen gibt (z.B. Papula).

Folgende Bücher sind ebenfalls für Interessierte zu empfehlen.

- Wofür brauche ich das? Ehrhardt, Günther, Schilders: *Erfolgsformeln. Anwendungen der Mathematik*, https://erfolgsformeln.uni-wuppertal.de
- Salmon, Wesley C., *Logik*, Reclam, 1973.

1 Mathematische Grundlagen

Lernziele

Wissen & Verständnis

- Sie verstehen die grundlegenden Konzepte der Aussagenlogik (Aussagen, Verknüpfungen, Implikationen, Äquivalenzen, DNF).
- Sie wissen, was man unter einer Menge versteht und kennen die zugehörigen Relationen (Gleichheit, Teil-/Obermenge) und Operationen (Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, Differenz).
- Sie kennen die wichtigsten Zahlbereiche $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ und verstehen die Unterschiede.
- Sie wissen, was man unter dem Betrag $|x|$ einer reellen Zahl x versteht und verstehen die Interpretation des Betrages als Abstandsfunktion.
- Sie verstehen den Unterschied zwischen Deduktion und Induktion, was das Prinzip der vollständigen Induktion ist.

Anwendung

- Sie beherrschen die elementare mathematische Symbolik (Logiksymbole, Elemente, Quantoren, Mengennotation, Mengensymbole, Zahlbereiche, Intervalle, Summenzeichen, ...)
- Sie beherrschen den Umgang mit Mengenoperationen (Rechenregeln, Wahrheitstafeln).
- Sie können mit Gleichungen und Ungleichungen umgehen, insbesondere Lösungsmengen bestimmen. Das beinhaltet das Auflösen und Interpretieren von Betrags(un)gleichungen (Rechenregeln für den Betrag, Fallunterscheidungen).
- Sie können das Prinzip der vollständigen Induktion anwenden.

1.1 Aussagenlogik

Logische Argumentationen sind in der Wissenschaft und der Philosophie essentiell, um Behauptungen zu begründen. Dabei geht es vielmehr darum, die logische Struktur hinter den Aussagen zu untersuchen statt den Inhalt der Aussagen selbst. In der Mathematik werden aus gültigen Aussagen (Prämissen) neue Aussagen geschlussfolgert (Konklusion) und in einem Satz zusammengefasst. Die Logik bietet ein Regelwerk für Argumentionen, um den Satz widerspruchsfrei und logisch konsistent zu beweisen. Andererseits lassen sich durch logische Verknüpfungen Beweismethoden erstellen. Logische Verknüpfung werden z.B. in der Elektrotechnik durch Schaltungen/Gatter realisiert oder in der Programmierung in Bedingungen bei while- oder for-Schleifen.
In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Logik von Aussagen, d.h. Behauptungen, denen man eindeitig einen Wahrheitsgehalt zuordnen kann, und studieren deren Eigenschaften.

Aussage

Definition 1.1.1 Unter einer **Aussage** versteht man einen (sprachlich formulierten) Satz, von dem eindeutig entschieden werden kann, ob er wahr oder falsch ist. Einer Aussage ordnet man die Wahrheitswerte **wahr** (w) oder **falsch** (f) zu.

Definition 1.1.2 Eine **Tautologie** ist eine allgemeingültige Aussage, die **immer wahr** ist. Wir bezeichnen sie der Einfachheit halber mit w. Ist eine Aussage immer falsch, so schreiben wir einfach f.

Lerntipp Lernen Sie diese Definitionen und nachfolgende Definitionen sowie Sätze auswendig!

Beispiel

A_1: 49 ist eine Primzahl. (f)

A_2: 49 ist eine Quadratzahl. (w)

A_3: Alle Menschen sind sterblich. (w)

A_4: Für jede natürliche Zahl n gilt: $n+3=6$. (f)

A_5: Es gibt drei natürliche Zahlen a,b,c mit: $a^2+b^2=c^2$. (w)

B_1: „Mathematik macht Spaß." ist keine Aussage, da diese Behauptung nicht objektiv als wahr oder falsch klassifiziert werden kann.

B_2: „Diese Aussage ist falsch." ist keine Aussage, da sie sich selbst widerspricht. Wieso?

Definition 1.1.3 Sei A eine Aussage. Dann bezeichnet $\neg A$ (gesprochen „nicht A") die **Negation** der Aussage A. $\neg A$ ist wieder eine Aussage, die wahr ist, wenn A falsch ist, und falsch ist, wenn A wahr ist.

Wahrheitstafel der Negation

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beispiel

$\neg A_1$: 49 ist keine Primzahl. (w)

$\neg A_2$: 49 ist keine Quadratzahl. (f)

$\neg A_3$: Es gibt mindestens einen unsterblichen Menschen. (f)

$\neg A_4$: Es gibt eine natürliche Zahl n mit: $n+3\neq 6$. (w)

$\neg A_5$: Für alle natürlichen Zahlen a,b,c gilt: $a^2+b^2\neq c^2$. (f)

Verknüpfung von Aussagen

Definition 1.1.4 Sind A,B Aussagen, so wird durch $A\wedge B$ (gesprochen „A und B") eine neue Aussage, die **Konjunktion** (Und-Verknüpfung) von A und B definiert. Die Aussage $A\wedge B$ ist wahr, wenn sowohl A als auch B wahre Aussagen sind, und ansonsten falsch. $A\wedge B$ ist also falsch, wenn (mindestens) eine der beiden Aussagen falsch ist.

Wahrheitstafel der Konjunktion

A	B	$A\wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiel

A: $2+2=4$ (w)

B: 49 ist eine Primzahl. (f)

C: 49 ist eine Quadratzahl. (w)

$A \wedge B$: $2+2=4$ und 49 ist eine Primzahl. (f)

$A \wedge C$: $2+2=4$ und 49 ist eine Quadratzahl. (w)

$B \wedge C$: 49 ist eine Primzahl und eine Quadratzahl. (f)

Bemerkung Einen **Widerspruch** erhält man leicht durch $A \wedge \neg A$, denn $A \wedge \neg A = f$. Demzufolge ist die Negation des Widerspruchs eine Tautologie.

Definition 1.1.5 Sind A, B Aussagen, so wird durch $A \vee B$ (sprich „A oder B") eine neue Aussage, die **(inklusive) Disjunktion** (Oder-Verknüpfung) von A und B definiert. $A \vee B$ ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr ist. $A \vee B$ ist nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind. Meint man „entweder A oder B", so schreibt man $A \dot{\vee} B$ und spricht von der **exklusiven Disjunktion** (Entweder-Oder-Verknüpfung).

Wahrheitstafeln der inklusiven bzw. exklusiven Disjunktion

A	B	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$
w	w	w	f
w	f	w	w
f	w	w	w
f	f	f	f

Beispiel

A: $2+2=4$ (w)

B: 49 ist eine Primzahl. (f)

C: 49 ist eine Quadratzahl. (w)

$A \vee B$: $2+2=4$ oder 49 ist eine Primzahl. (w)

$A \vee C$: $2+2=4$ oder 49 ist eine Quadratzahl. (w)

$B \dot{\vee} C$: Entweder 49 ist eine Primzahl oder eine Quadratzahl. (w)

Bemerkung Eine Tautologie erhält man leicht durch $A \vee \neg A = w$.

Implikation

Ein Argument besteht aus zwei Aussagen: einer Prämisse (P) und einer Konklusion (K). Ein konditionales Argument kann wie folgt als Aussage ausgedrückt werden:

„Wenn P wahr ist, dann ist auch K wahr."

Diese Aussage schreiben wir symbolisch wie folgt auf:

$$P \Rightarrow K,$$

Beispiel Sherlock Holmes hält einen großen Hut in der Hand und behauptet, der Träger des Hutes sei sehr intelligent. Dazu liefert er das folgende Argument:

„Wenn Menschen mit großen Köpfen große Gehirne haben und Menschen mit großen Gehirnen sehr intelligent sind, dann ist der Eigentümer des Hutes sehr intelligent."[2]

[2]Leicht abgewandelt aus: Salmon, Wesley C., *Logik*, Reclam, 1973.

Folgende Fragen ergeben sich sofort:

- Was sind die Prämissen, was ist die Konklusion in Holmes' Argument?
- Sind die Prämissen wahr oder falsch?
- Ist die Behauptung, also die Konklusion wahr oder falsch?
- Überzeugt Sie das Argument?

Wir formalisieren Holmes' Argument. Hier ist die Konklusion Holmes' Behauptung.

P_1: Das ist ein großer Hut.

P_2: Menschen mit großen Köpfen haben große Gehirne.

P_3: Menschen mit großen Gehirnen sind intelligent.

K: Der Eigentümer des Hutes ist sehr intelligent.

Argument: $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \Rightarrow K$

Klar ist, dass P_2 falsch ist. Damit ist das Argument zwar im logischen Sinne trotzdem gültig, aber nicht stichhaltig und daher nicht überzeugend. Warum ist es gültig?

Definition 1.1.6 Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \Rightarrow B$ (gesprochen „wenn A dann B“ oder „aus A folgt B“) wieder eine Aussage definiert, die **Implikation** genannt wird. Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist nur dann eine falsche Aussage, wenn A wahr und B falsch ist, ansonsten ist die Implikation wahr. Demzufolge können wir aus etwas Wahrem nie etwas Falsches schließen. Statt $A \Rightarrow B$ kann man auch $B \Leftarrow A$ schreiben („B folgt aus A“).

Wahrheitstafel der Implikation

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Beispiel

A: 49 ist Quadratzahl. (w)

B: 49 ist Primzahl. (f)

C: 2 ist Teiler von 8. (w)

$A \Rightarrow C$: Wenn 49 Quadratzahl ist, dann ist 2 Teiler von 8. (w)

$C \Rightarrow A$: Wenn 2 Teiler von 8 ist, dann ist 49 Quadratzahl. (w)

$B \Rightarrow A$: Wenn 49 Primzahl ist, dann ist 49 Quadratzahl. (w)

$A \Rightarrow B$: Wenn 49 Quadratzahl ist, dann ist 49 Primzahl. (f)

Sehr wichtig: Wir sehen anhand der beiden Beispiele, dass ein Argument bzw. eine Implikation gültig bzw. wahr sein kann, obwohl die Prämisse zweifelhaft bzw. falsch oder inhaltlich mit der Konklusion nichts zu schaffen hat.

Äquivalenz

Definition 1.1.7 Sind A und B Aussagen, dann ist $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ebenfalls eine Aussage, die **Äquivalenz** genannt wird ($A \Leftrightarrow B$, gesprochen „A äquivalent zu B“oder „A genau dann, wenn B“). $A \Leftrightarrow B$ ist eine wahre Aussage, wenn A und B die gleichen Wahrheitswerte haben, also entweder beide wahr oder beide falsch sind.

Wahrheitstafel der Äquivalenz

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Beispiel Es sei x eine reelle Zahl.

A: $x < 3$

B: $x < 4$

C: $x + 1 < 4$

$A \Rightarrow B$: Wenn $x < 3$ gilt, dann gilt (auch) $x < 4$. (w)

$A \Leftrightarrow B$: $x < 3$ genau dann, wenn $x < 4$. (f)

$A \Leftrightarrow C$: $x < 3$ genau dann, wenn $x + 1 < 4$. (w)

Satz 1.1.8 (Äquivalenz von Aussagen) Zwei verknüpfte Aussagen A und B sind äquivalent, wenn ihre entsprechenden Wahrheitstafeln für jede Belegung dieselben Wahrheitsgehälter liefern.

Beispiel Die beiden Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind äquivalent, d.h.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Das folgt aus der Wahrheitstafel und dem obigen Satz:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Man verwendet diese Äquivalenz um einen **Beweis durch Widerspruch** zu führen. D.h. statt $A \Rightarrow B$ kann man alternativ $\neg B \Rightarrow \neg A$ beweisen.

Beispiel Im Beispiel von Sherlock Holmes war die Implikation $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \Rightarrow K$. Sie ist äquivalent zu

$$\neg K \Rightarrow \neg(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3),$$

was nach der De Morgan Regel äquivalent ist zu

$$\neg K \Rightarrow (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \neg P_3).$$

D.h. das Argument hätte auch sein können: „Wäre der Hutträger nicht intelligent, so wäre der Hut nicht groß, Menschen mit großen Köpfen hätten kleine Gehirne oder Menschen mit großen Gehirnen wären nicht intelligent.“ Wäre also die Konklusion falsch, würde Holmes aufgrund seiner Überzeugung, dass P_2 und P_3 wahr sind, folgern müssen, dass der Hut klein ist, was nicht stimmt. Aus diesem Widerspruch muss die Annahme „Der Hutträger ist nicht intelligent“, verworfen werden, da sie ins Absurde führt, so dass schließlich nur übrig bleibt, dass der Hutträger intelligent ist.

Beispiel Beim Auflösen von Gleichungen (oder Ungleichungen) werden **Äquivalenzumformungen** geführt:

$$\begin{array}{rcl} & 2x^2 = 4 & \quad | : 2 \\ \Leftrightarrow & x^2 = 2 & \quad |\sqrt{} \\ \Leftrightarrow & x = \sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\sqrt{2} & \end{array}$$

Hier wird die Aussage „$2x^2$ ist gleich 4“ äquivalent zur Aussage „x ist gleich $\sqrt{2}$ oder x ist gleich $-\sqrt{2}$“ umgeformt. Im Unterschied dazu liefert folgende Rechnung nicht die vollständige Lösung.

$$\begin{array}{rcl} & 2x^2 = 4 & | : 2 \\ \Leftrightarrow & x^2 = 2 & |\sqrt{} \\ \Leftarrow & x = \sqrt{2} & \end{array}$$

Rechenregeln für Aussagen

Mit Hilfe von Wahrheitstafeln weist man folgende Äquivalenzen nach.

Satz 1.1.9 (Rechenregeln für Aussagen) Seien A, B und C Aussagen. Dann gelten:

(a) Kommutativgesetze
$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$
$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

(b) Assoziativgesetze
$$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$
$$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$$

(c) Distributivgesetze
$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

(d) doppelte Verneinung
$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$$

(e) Regeln von De Morgan
$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Beweis Wir beweisen hier nur eine der De Morgan Regeln zu Demonstrationszwecken. Die Beweise, dass die restlichen Regeln gelten, können Sie als Übung verwenden. Für den Beweis benutzen wir Satz 1.1.8 über die Äquivalenz von Aussagen, indem wir die Wahrheitstafeln von $\neg(A \vee B)$ und von $\neg A \wedge \neg B$ miteinander vergleichen.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

Da für alle Belegungen die Wahrheitsgehälter von $\neg(A \vee B)$ und von $\neg A \wedge \neg B$ übereinstimmen, sind die beiden Aussagen nach Satz 1.1.8 äquivalent. □

Beispiel Wir vereinfachen die nachstehende Aussage mit Hilfe von Satz 1.1.9, den Rechenregeln für Aussagen.

$$
\begin{array}{cl}
 & (\neg(A \vee B) \wedge A) \vee B \\
\overset{(e)}{\Leftrightarrow} & ((\neg A \wedge \neg B) \wedge A) \vee B \\
\overset{(a)}{\Leftrightarrow} & ((\neg B \wedge \neg A) \wedge A) \vee B \\
\overset{(b)}{\Leftrightarrow} & (\neg B \wedge (\neg A \wedge A)) \vee B \\
\overset{\text{Widerspruch}}{\Leftrightarrow} & (\neg B \wedge f) \vee B \\
\overset{\text{Def. Konjunktion}}{\Leftrightarrow} & f \vee B \\
\overset{\text{Def. Disjunktion}}{\Leftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{ll} f \vee B = f, & \text{falls } B = f \\ w \vee B = w, & \text{falls } B = w \end{array} \right\} \\
\Leftrightarrow & B
\end{array}
$$

Insgesamt gilt also: $\big[(\neg(A \vee B) \wedge \neg A) \vee B\big] \Leftrightarrow B.$

Lerntipp Trainieren Sie Rechnen, indem Sie bei jedem Schritt die Regel angeben!

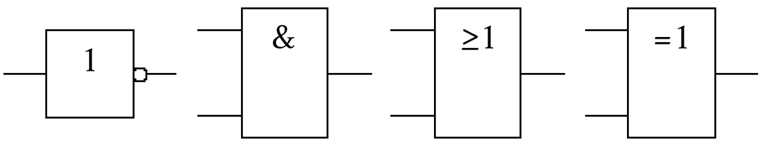
Beispiel Zeigen Sie:

$$A \dot{\vee} B \Leftrightarrow \big((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)\big).$$

Exkurs: Elektrotechnik & logische Schaltungen

Grundlage für Schaltungen bildet die Aussage „Strom fließt", die die Wahrheitsgehälter wahr (1) und falsch (0) annehmen kann. Somit lässt sich die Aussagenlogik auf Schaltungen übertragen. Die Verknüpfungen werden dabei durch Logikgatter realisiert.

Beispiel In den Beispielen unten sind links die Eingänge E bei der Negation bzw. E_1 und E_2 (bei AND, OR und XOR) und rechts der Ausgang A ist:



Negation UND ODER Exklusives ODER

Die Gatter sind derart konstruiert, dass sie folgenden Zuständen genügen.

E	A
1	0
0	1

(Negation)

E_1	E_2	A
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(AND)

E_1	E_2	A
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

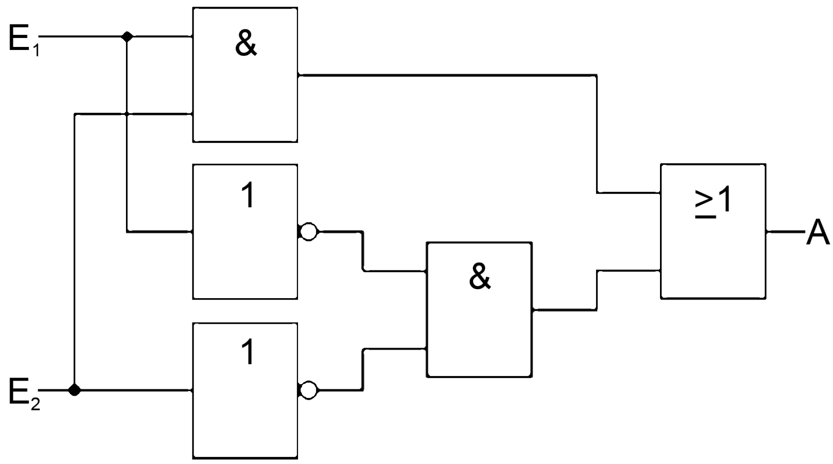
(OR)

E_1	E_2	A
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(XOR)

Wir sehen, dass AND der Konjunktion, OR der (inklusiven) Disjunktion und XOR der exklusiven Disjunktion entsprechen. Ferner fällt auf, dass wir mit Hilfe dieser Gatter binär addieren und multiplizieren können: Bei XOR sehen wir die Rechnung $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$ und $1+1=(1)0$. Bei AND sehen wir $0\cdot 0=0$, $0\cdot 1=0$, $1\cdot 0=0$ sowie $1\cdot 1=1$. Diese Gatter bilden die Grundlage, dass ein Computer überhaupt rechnen kann.

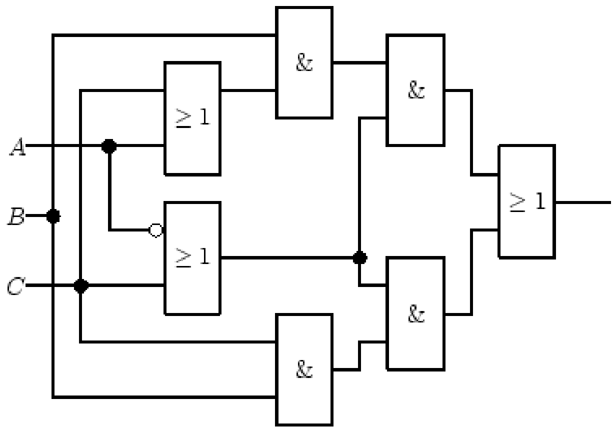
Beispiel Hier ist ein Beispiel, wie man mit Hilfe der elementaren Gatter und der disjunktiven Normalenform eine Äquivalenz erzeugt, die auch EXKLUSIV-NICHT-ODER oder XNOR genannt wird.



$$(E_1 \Leftrightarrow E_2) \Leftrightarrow \big[(E_1 \wedge E_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2)\big]$$

Für welche Zustände von E_1 und E_2 fließt der Strom bei A?

Beispiel Stellen Sie eine Zustandstabelle auf und drücken Sie die Schaltung mit Hilfe der aussagenlogischen Operationen aus.



1.2 Mengen

Definition 1.2.1 Unter einer **Menge** verstehen wir die Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte einer Menge heißen **Elemente** der Menge. Eine Menge kann endlich oder unendlich viele Elemente enthalten.

Definition 1.2.2 Um auszudrücken, dass ein Objekt a zu einer Menge M gehört, schreibt man:

$$a \in M \qquad (\text{„}a \text{ ist Element von } M\text{“})$$

Ist dies nicht der Fall, so schreibt man:

$$a \notin M \qquad \text{(„}a\text{ ist nicht Element von }M\text{“)}$$

Beispiel (Schreibweisen & sehr wichtige Beispiele)

(a) Mengen werden meist durch Großbuchstaben bezeichnet, also z.B. A, B, M, N, X, Y usw. Ist M eine Menge, so sind die Elemente von M alle paarweise verschieden, z.B.

$$M = \{\text{rot}, \text{grün}, \text{blau}\} \qquad \text{oder} \qquad X = \{1, 2, 3, 4\},$$

aber nicht $N = \{1, 1, 1, 1\}$, sondern einfach nur $N = \{1\}$.

(b) Elemente werden auch durch eine Eigenschaft (E) beschrieben und können dadurch zu einer Menge zusammengefasst werden:

$$M = \{x : x \text{ hat die Eigenschaft (E)}\},$$

(„Menge aller x, für die gilt: Eigenschaft (E)“) zum Beispiel

$$X = \{x : x \text{ ist eine natürliche Zahl kleiner gleich 4}\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

oder Lösungsmengen

$$\mathbb{L} = \{x : x^2 = 1\} = \{-1, 1\} = \{\pm 1\}.$$

(c) Manche Mengen kann man auch durch das Aufzählen ihrer Elemente angeben, z.B. die Menge der **natürlichen Zahlen**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \quad \text{oder} \quad F = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\},$$

wobei „$\ldots$“ andeutet, dass es klar ist, wie es weitergeht, was nicht immer sehr präzise ist, wenn man die Abfolge nicht genau kennt. Präzise wäre:

$$\mathbb{N} = \{n : n = 1 \text{ oder mit } n \text{ ist auch } n + 1 \text{ in der Menge enthalten}\}$$

Hier ist $\mathbb{N}$ **induktiv** definiert.

Lerntipp Schauen Sie sich speziell diese Definition für den späteren Abschnitt über die vollständige Induktion an

(d) Die „Null“ ist eine revolutionäre Erfindung des menschlichen Geistes (siehe Perser!) und aus dem Zahlenbereich nicht mehr wegzudenken. Sie ist Nichts und doch Etwas, wie z.B. der Fluchtpunkt in einem Bild, und führte maßgeblich zur Weiterentwicklung der Mathematik bei.

(Elevated Station Adams and Wabash in Chicago, Quelle: Wikipedia)

Aus diesem Grund betrachten wir die Null als keine natürliche Zahl und schreiben

$$\mathbb{N}_0 = \{x : x = 0 \text{ oder } x \in \mathbb{N}\}.$$

(e) Die Null entsteht ganz einfach, indem wir z.B. $1 - 1 = 0$ rechnen, aber was ist, wenn wir $1 - 3$ rechnen? Wir erhalten die Menge der **ganzen Zahlen**

$$\mathbb{Z} = \{x : x \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } (-x) \in \mathbb{N}\}.$$

$$= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

(f) Wir können Zahlen teilen und erhalten Brüche $\frac{p}{q}$. Die Menge aller Brüche bilden die **rationalen Zahlen**

$$\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}\}$$

(g) Wurzeln $\sqrt{a}$, die Zahl π oder die Eulerzahl e sind keine rationalen Zahlen, entstehen aber durch Grenzwertprozesse aus rationalen Zahlen. Wir nennen sie **reelle Zahlen** und benutzen das Symbol $\mathbb{R}$.

(h) **Geschlossene Intervalle** sind Mengen der Form:

$$\begin{aligned} I = [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ist eine Zahl größer gleich } a \text{ und kleiner gleich } b\} \\ &= \{x : a \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

Daneben gibt es noch **offene Intervalle**:

$$I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

und **halboffene Intervalle** (auch halbgeschlossene genannt):

$$I = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \text{und} \quad I = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Insbesondere: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$

(i) **Komplexe Zahlen** $\mathbb{C}$ entstehen mit Hilfe der **imaginären Einheit** i, die ein künstliches Objekt ist und wie eine Konstante behandelt wird, deren Wert man nicht kennt, sondern nur die Eigenschaft:

$$i \cdot i = i^2 = -1 \qquad \text{bzw.} \qquad \sqrt{-1} = i$$

Dann ist die Menge der komplexen Zahlen wie folgt definiert:

$$\mathbb{C} = \{z : z = a + i \cdot b \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

In $\mathbb{C}$ gelten das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz. **Beispiele:**

$$(3 + 4i)(1 - 2i) = 3 \cdot 1 + 3(-2i) + 4i \cdot 1 + (4i)(-2i) = 3 - 6i + 4i - 8i^2$$

$$= 3 - 2i - 8(-1) = 3 - 2i + 8 = 11 - 2i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

(j) Eine weitere wichtige Menge ist die **leere Menge**, die symbolisch mit $\emptyset$ bezeichnet wird und eine ähnliche Rolle für Mengen spielt wie die Null für Zahlen. Beispiel:

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \emptyset, \quad \text{aber} \quad \{z \in \mathbb{C} : z^2 = -1\} = \{\pm i\}$$

(k) Die Menge der zwei- bzw. dreidimensionalen **Vektoren** sind

$$\mathbb{R}^2 = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^3 = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

(l) (Russelsche Antinomie) Die Zusammenfassung aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten, d.h. also $\{M : M \notin M\}$ ist **keine Menge**. Wieso?

Verknüpfung von Mengen

Durch „$x \in M$“ erhält man eine Aussage. Von daher kann die Aussagenlogik unmittelbar auf Mengen angewendet werden und erhält nahezu dieselben Operationen und Rechenregeln.

Definition 1.2.3 Zwei Mengen M und N heißen **gleich**, falls jedes Element von M auch zu N gehört und jedes Element von N auch zu M gehört, d.h. falls

$$x \in M \quad \Leftrightarrow \quad x \in N.$$

Wir schreiben dafür:

$$M \ = \ N.$$

Definition 1.2.4 Seien M und X zwei Mengen. Ist jedes Element einer Menge M auch Element der Menge X, also

$$x \in M \quad \Rightarrow \quad x \in X,$$

so heißt M **Teilmenge** oder **Untermenge** von X und X heißt **Obermenge** von M. Wir schreiben dafür:

$$M \ \subset \ X \quad \text{oder} \quad M \subseteq X$$

Insbesondere gilt die Äquivalenz:

$$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

Falls gilt $(A \subset B) \wedge (A \neq B)$, schreiben wir

$$A \subsetneq B$$

und sagen „A ist echt in B enthalten“.

Beispiel Für Zahlen gelten folgende Teilmengenbeziehungen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

oder genauer

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

Definition 1.2.5 Es sei M eine Menge und $A, B \subset M$ zwei Teilmengen von M.

(a) Die Menge

$$A \cup B \ := \ \{x \in M : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

heißt **Vereinigung** von A und B.

(b) Die Menge

$$A \cap B \ := \ \{x \in M : x \in A \text{ und } x \in B\}$$

heißt **Durchschnitt** von A und B. Ist $A \cap B = \emptyset$, haben also A und B keine gemeinsamen Elemente, so nennen wir A und B **disjunkt**.

(c) Die Menge
$$A^c \ := \ \{x \in M : x \notin A\}$$
heißt **Komplement** von A in M. Insbesondere:
$$M^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = M, \quad A \cup A^c = M \quad \text{und} \quad A \cap A^c = \emptyset,$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{und} \quad A \cup \emptyset = A$$

(d) Die Menge
$$B \setminus A \ := \ B \cap A^c = \{x \in M : x \in B \text{ und } x \notin A\} = \{x \in B : x \notin A\}$$
heißt **Differenz** von B und A, gelesen: „B ohne A“.

(e) Die Menge
$$A \Delta B \ := \ \{x \in M : \text{Entweder } x \in A \text{ oder } x \in B\}$$
heißt **symmetrische Differenz** von A und B.

Beispiel (Weitere wichtige Mengen)

(a) $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist ungerade}\}$ ist eine disjunkte Vereinigung.

(b) $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ bzw. $\mathbb{N}_0 \setminus \{0\} = \mathbb{N}$

(c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist die Menge der **irrationalen Zahlen**.

(d) $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}_0^+$

(Wie ist die Definition von gerade/ungerade?)

Beispiel (Mengenoperationen & Intervalle)

(a) $[-2, 0] \cup (0, 2) = [-2, 2)$

(b) $[-2, 0] \cap (-1, 3] = (-1, 0]$

(c) $[-2, 0]^c = \mathbb{R} \setminus [-2, 0] = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

(d) $[-2, 0] \setminus (-1, 3] = [-2, -1]$

(e) $[-2, 0]\Delta(-1, 3] = [-1, 2) \setminus (-1, 0] = [-2, -1] \cup (0, 3]$

Zeichnen Sie die obigen Intervalle auf einem Zahlenstrahl und vergleichen Sie die Zeichnungen mit den Mengenverknüpfungen.

Satz 1.2.6 (Rechenregeln für Mengen) Es sei M eine Menge und $A, B, C \subset M$ Teilmengen. Dann gelten:

(a) Kommutativgesetze:
$$A \cup B = B \cup A \quad \text{und} \quad A \cap B = B \cap A$$

(b) Assoziativgesetze:
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \text{und} \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(c) Distributivgesetze:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{und} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

(d) Doppeltes Komplement:
$$(A^c)^c = A$$

(e) Regeln von De Morgan:
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{und} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

(f) Weitere Regeln:
$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B$$

(g) Teilmengenbeziehungen:
$$\emptyset \subset A \cap B \subset A \subset A \cup B \subset M$$

Beweis Die Rechenregeln lassen sich unmittelbar aus den Regeln für logische Operationen ableiten. Beispielsweise folgen die mengentheoretischen De Morganschen Regeln (e) direkt aus den logischen De Morganschen Regeln:

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \\
&\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\
&\Leftrightarrow \big(\neg(x \in A)\big) \wedge \big(\neg(x \in B)\big) \\
&\Leftrightarrow \big(x \notin A\big) \wedge \big(x \notin B\big) \\
&\Leftrightarrow \big(x \in A^c\big) \wedge \big(x \in B^c\big) \\
&\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c
\end{aligned}$$

Man kann diesen Beweis auch sehr gut unter Verwendung einer Wahrheitstafel führen. Da x entweder in A enthalten ist oder nicht, und x entweder in B enthalten ist oder nicht, sind insgesamt 4 Fälle zu unterscheiden. Das sollte man sich auch an einem **Venn-Diagramm** verdeutlichen. Wegen

$$\begin{aligned}
(A \cap B)^c &= \{x : x \notin A \cap B\}, \\
A^c &= \{x : x \notin A\}, \\
B^c &= \{x : x \notin B\}, \\
A^c \cup B^c &= \{x : (x \in A^c) \vee (x \in B^c)\} \\
&= \{x : x : (x \notin A) \vee (x \notin B)\}
\end{aligned}$$

erhält man:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$x \notin A \cap B$ $\Leftrightarrow$ $x \in (A \cap B)^c$	$x \notin A$ $\Leftrightarrow$ $x \in A^c$	$x \notin B$ $\Leftrightarrow$ $x \in B^c$	$x \in A^c \cup B^c$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Die beiden Aussagen $x \in (A \cap B)^c$ und $x \in A^c \cup B^c$ sind äquivalent, da sie in allen vier Fällen die gleichen Wahrheitswerte aufweisen.

Den Beweis der restlichen Regeln empfehlen wir als Übung. $\square$

Beispiel (Vereinfachung mit Hilfe der Rechenregeln für Mengen)

$$
\begin{aligned}
& ((A\cup B)^c\cap A)\cup B\\
\overset{\text{Satz 1.2.6(e)}}{=}\; & ((A^c\cap B^c)\cap A)\cup B\\
\overset{\text{Satz 1.2.6(a)}}{=}\; & ((B^c\cap A^c)\cap A)\cup B\\
\overset{\text{Satz 1.2.6(b)}}{=}\; & (B^c\cap(A^c\cap A))\cup B\\
\overset{\text{Satz 1.2.6(b)}}{=}\; & (B^c\cap\emptyset)\cup B\\
\overset{\text{Def. Leere Menge}}{=}\; & \emptyset\cup B\\
\overset{\text{Def. Leere Menge}}{=}\; & B
\end{aligned}
$$

1.3 Zahlenbereiche

Im vorherigen Kapitel haben wir die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und sogar bereits die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kennengelernt. Diese Zahlenbereiche enthalten eigene Strukturen für sich, die nur dort gelten.

- Die natürlichen Zahlen
$$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\ldots\}$$
sind abgeschlossen bzgl. der **Addition** und der **Multiplikation**, d.h. Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen liefert wieder eine natürliche Zahl.

- Wollen wir zusätzlich auch die Umkehrung der Addition, also die **Subtraktion** gestatten, so müssen wir den Zahlbereich erweitern zu den **ganzen Zahlen**
$$\mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$$
die unter Addition, Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen sind.

- Durch Hinzunahme der Umkehrung der Multiplikation, also der **Division**, erhalten wir die **rationalen Zahlen**
$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}:p,q\in\mathbb{Z},q\neq 0\right\},$$
die unter allen vier Operationen abgeschlossen sind.

- Um alle geometrisch denkbaren Zahlen einzuschließen, „vervollständigt“ man die rationalen Zahlen zu den sogenannten **reellen Zahlen**, die mit $\mathbb{R}$ bezeichnet werden. Anschaulich entsprechen die die reellen Zahlen den Punkten des Zahlenstrahls, während die rationalen Zahlen (auf dem Zahlenstrahl dargestellt) voller „Lücken“ sind. Die nicht-rationalen reellen Zahlen, also die Menge $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, wird als die Menge der **irrationalen Zahlen** bezeichnet. Andere Beispiele nicht-rationaler Zahlen sind die Fläche π und der Umfang 2π des Einheitskreises, was aber deutlich schwieriger zu zeigen ist.

Für das „gewöhnliche“ Rechnen mit Punkt- und Strichrechnung sind die rationalen Zahlen also völlig ausreichend. Betrachtet man aber auch geometrische Strukturen oder Grenzprozesse, so sind die rationalen Zahlen zur Beschreibung nicht ausreichend. Betrachtet man etwa ein Quadrat der Seitenlänge 1 und bezeichnet die Länge der Diagonalen mit der Variablen x, so besagt der Satz von Pythagoras:
$$1^2+1^2\;=\;x^2,$$
also
$$x^2=2\quad\text{bzw.}\quad x=\sqrt{2}.$$

Zwei Beweistechniken

Nun stellen wir zwei Beweistechniken vor, um Implikationen zu wiederholen und zu üben.

Satz 1.3.1 ($\mathbb{Q}$ liegt echt in $\mathbb{R}$) Die positive Lösung $x = \sqrt{2}$ der quadratischen Gleichung $x^2 = 2$ ist **keine** rationale Zahl. Daher ist $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Beweis (durch Widerspruch) Wir führen einen Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen das Gegenteil an und schlussfolgern auf eine andere Aussage, die auf jeden Fall offensichtlich falsch ist. Daher muss unsere Annahme falsch gewesen sein, was die Behauptung des Satzes beweist.

Wäre $x = \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit kleinsten natürlichen Zahlen p, q, so ergäbe sich:

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 2q^2 \tag{1}$$

Das bedeutet, dass p^2 durch 2 teilbar ist. Als quadratische Zahlen kommen die Primfaktoren von p^2 und q^2 stets in gerader Anzahl vor, so auch die 2 in p^2. Daher ist auch q^2 durch 2 teilbar und hat eine gerade Anzahl des Primfaktors 2. Allerdings sind auf der linken Seite der Gleichung 1 $p^2 = 2q^2$ eine gerade Anzahl, aber auf der rechten Seite eine ungerade Anzahl des Primfaktors 2. Das ist ein Widerspruch. Daher ist unsere Annahme, $\sqrt{2}$ sei eine rationale Zahl, falsch. $\square$

Arithmetisch lassen sich die rationalen und die irrationalen Zahlen gut unterscheiden.

Satz 1.3.2 (Dezimaldarstellung von Zahlen) Jede reelle Zahl x lässt sich als **Dezimalbruch** in der Form

$$x = \pm x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_2 x_1 x_0 \ , \ x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} \cdots \tag{2}$$

mit unendlich vielen Ziffern

$$x_j \in \{0, 1, 2, ..., 9\} \quad \text{für } j \leq n$$

schreiben. Dann gilt:

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ist periodisch}\} \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ist nicht periodisch}\}$$

Beweis Wir müssen zeigen, dass

$$x \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ ist periodisch},$$

was äquivalent ist zu

$$\big(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \text{ ist periodisch}\big) \wedge \big(x \text{ ist periodisch} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}\big).$$

Den Beweis dieser Tatsache kann man demnach in zwei Schritten führen:

1. **Notwendige Bedingung:** $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x$ ist periodisch
   Wir können $x > 0$ annehmen. Es sei also
   $$x = \frac{p}{q}$$
   mit $p, q \in \mathbb{N}$. Nun erhält man die Darstellung (2) durch den üblichen Divisionsalgorithmus für p/q. In jedem Schritt gibt es für den Divisionsrest nur q unterschiedliche Fälle $0, 1, 2, ..., q-2, q-1$. Also muss es eine Periode der maximalen Länge $q-1$ geben (wird der Rest gleich 0, so ergibt sich die Periode $000000000 \cdots$).

2. **Hinreichende Bedingung:** $x \in \mathbb{Q} \Leftarrow x$ ist periodisch

   Diese Implikation zeigt man unter Verwendung der unendlichen geometrischen Reihe. Wir werden dies später im Abschnitt über Reihen als Beispiel behandeln. □

Man sieht an diesem Beispiel, dass man den Beweis einer Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ in den Beweis der beiden Implikationen $A \Rightarrow B$ und $A \Leftarrow B$ zerlegen kann, die oft auf völlig unterschiedlichen Methoden beruhen.

Übung Wieso haben wir durch den Beweis der Äquivalenz

$$x \in \mathbb{Q} \;\Leftrightarrow\; x \text{ ist periodisch}$$

auch die Äquivalenz

$$x \notin \mathbb{Q} \;\Leftrightarrow\; x \text{ ist nicht periodisch}$$

bewiesen?

Quantoren

Definition 1.3.3 Für eine Menge M bedeutet die mathematische Schreibweise

$$\exists\, x \in M : \; E(x)$$

dasselbe wie: „Es existiert ein Element $x \in M$, so dass x die Eigenschaft $E(x)$ hat.“ Mit $\exists$ bezeichnen wir den **Existenzquantor.**

Beispiel

(a) Die Aussage „$\exists\, x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4$“ ist wahr, denn $x = 2$ oder $x = -2$ sind ganze Zahlen und erfüllen die Bedingung.

(b) Die Menge aller ganzen Zahlen, die man durch n mit Rest r teilen kann, schreiben wir als
$$[r]_n = \{z \in \mathbb{Z} : \exists\, k \in \mathbb{Z} : z = nk + r\}.$$
Zum Beispiel die Menge der Zahlen, die man mit Rest durch 3 teilen kann:
$$\begin{aligned}
[0]_3 &= \{z \in \mathbb{Z} : \exists\, k \in \mathbb{Z} : z = 3k\} = [3]_3 = [6]_3 = [9]_3 = \dots \\
[1]_3 &= \{z \in \mathbb{Z} : \exists\, k \in \mathbb{Z} : z = 3k + 1\} = [4]_3 = [7]_3 = [10]_3 = \dots \\
[2]_3 &= \{z \in \mathbb{Z} : \exists\, k \in \mathbb{Z} : z = 3k + 2\} = [5]_3 = [8]_3 = [11]_3 = \dots
\end{aligned}$$
Betrachten wir bei der Addition von ganezn Zahlen die Reste, so stellen wir fest, dass sie sich aufsummieren. In diesem Sinne sind „$3 = 6 = 9 = 0$“ oder $[1]_3 + [2]_3 = [0]_3$ bzw. „$1 + 2 = 0$“.

Definition 1.3.4 Für eine Menge M bedeutet die mathematische Schreibweise

$$\forall\, x \in M : \; E(x)$$

dasselbe wie: „Für jedes Element $x \in M$ gilt: x hat die Eigenschaft $E(x)$.“ Mit $\forall$ bezeichnen wir den **Allquantor.**

Beispiel

(a) Die Aussage „$\forall\, x \in \mathbb{N} : x \geq -1$“ ist wahr, denn alle natürlichen Zahlen sind echt größer als Null.

(b) Die Aussage „$\forall\, x \in \mathbb{N} : x > 3$“ ist falsch, denn $1, 2, 3 \in \mathbb{N}$ erfüllen die Bedingung $x > 3$ nicht.

Bemerkung Die beiden Quantoren werden wie folgt negiert und hängen dann wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \neg\big(\forall\, x \in M :\ E(x)\big) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, x \in M :\ \neg E(x) \\ \neg\big(\exists\, x \in M :\ E(x)\big) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in M :\ \neg E(x) \end{aligned}$$

Beispiel Alle Menschen sind sterblich heißt „Für jeden Menschen x gilt: x ist sterblich“. Die Negation davon ist: „Es gibt einen Menschen x, der unsterblich ist“.

Betrag

Definition 1.3.5 Als **Betrag** einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die nicht-negative reelle Zahl

$$|x| \ := \ \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x - y|$ der **Abstand von x zu y.**

Beispiel Die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 1\} = \{x : 1 < x < 3\} = (1, 3)$$

beschreibt alle reellen Zahlen, deren Abstand zur Zahl 2 kleiner 1 ist. Allgemein gilt: Für $r \geq 0$ und $m \in \mathbb{R}$ ist

$$|x - m| < r \qquad \Leftrightarrow \qquad -r + m < x < r + m. \tag{3}$$

Das folgt unmittelbar aus der obigen Defintion des Betrags. Eine ähnliche Ungleichung gilt, wenn man „$<$“ mit „$\leq$“ ersetzt. Hier kann man r als Radius und m als Mittelpunkt eines eindimensionalen Kreises betrachten.

Übung Finden Sie eine ähnliche Formel wie in (3) für $|x - m| > r$ und drücken Sie die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| > 3\}$ mit Hilfe von Intervallen aus.

Satz 1.3.6 (Eigenschaften des Betrags) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $|x| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$

(b) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(c) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

Desweiteren gelten folgende wichtige Abschätzungen:

(d) **Dreiecksungleichung:** $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis Beweise finden wir in allen Büchern über Analysis. Wir führen hier allerdings einen Beweis zu Eigenschaft (c), um zu verdeutlichen, wie man mit Beträgen rechnet. Den Rest überlassen wir als Übung. Es geht hier um den Umgang mit **Fallunterscheidungen**, die wir vornehmen müssen, da der Betrag abschnittweise definiert ist.

$$|x|^2 = \left\{ \begin{array}{ll} x^2, & \text{falls } x \geq 0, \\ (-x)^2, & \text{falls } x < 0. \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} x^2, & \text{falls } x \geq 0, \\ x^2, & \text{falls } x < 0. \end{array} \right\} = x^2$$

Andererseits gilt:

1. **Fall:** Ist $x^2 \geq 0$, so ist $|x^2| = x^2$.
2. **Fall:** Ist $x^2 < 0$, so ist $|x^2| = -x^2$. Da aber x^2 niemals echt kleiner als Null ist, fällt der zweite Fall weg.

Daher ist $|x^2| = x^2$. Ingesamt also $|x|^2 = x^2 = |x^2|$.

□

Auflösen von Gleichungen und Ungleichungen

In diesem Abschnitt lernen wir, wie wir einige Gleichungen und Ungleichungen auflösen. Einige Methoden kennen wir bereits aus den vorherigen Kapiteln.

Satz (pq-Formel) Sei $p(x) = x^2 + px + q$ ein normiertes quadratisches Polynom. Dann sind

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

die Nullstellen des Polynoms, d.h. $p(x_1) = 0$ und $p(x_2) = 0$. Wir nennen $\Delta = \frac{p^2}{4} - q$ die **Diskriminante von** p. Die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + px + q = 0\}$$

hat dann folgende Gestalt:

- $\mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{\Delta},\ -\frac{p}{2} - \sqrt{\Delta}\right\}$, falls $\Delta > 0$.
- $\mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2}\right\}$, falls $\Delta = 0$.
- $\mathbb{L} = \emptyset$, falls $\Delta < 0$.

Beweis Siehe vorheriges Kapitel.

Übung Frischen Sie die pq-Formel eigenständig auf. Recherchieren Sie in diesem Zusammenhang auch den **Satz von Vieta** sowie **quadratische Ergänzung**.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir also quadratische Gleichungen lösen. Liegen Sie nicht normiert vor, also $ax^2 + bx = c = 0$ mit $a \neq 1$, müssen wir zunächst die Gleichung durch a dividieren. Für lineare Gleichungen der Form $mx + b = 0$ ist die Lösung klar. Nach dem Satz über die Rechenregeln des Betrags sind

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - m| < r\} = (m - r, m + r) \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{R} : |x - m| \leq r\} = [m - r, m + r],$$

d.h. auch solche einfachen Ungleichungen können wir lösen.

Äquivalenzumformungen

Um generell Gleichungen oder Ungleichungen zu lösen, formen wir sie nach Möglichkeit äquivalent um. Dabei müssen wir diejenigen Operationen kennen, die äquivalante Umformungen erlauben (z.B. Addieren auf beiden Seiten) und die sie nicht (sofort) erlauben (z.B. Quadrieren/Wurzeln ziehen auf beiden Seiten). Es wäre nun sehr mühselig, alle Operationen aufzuschreiben und einzeln zu prüfen, ob sie äquivalente Umformungen erlauben. Daher greifen wir auf die Aussagenlogik zurück und prüfen stets im Einzelfall, ob tatsächlich eine Äquivalenz oder nur eine Implikation in eine Richtung vorliegt.

Beispiel (Äquivalenz oder Implikation?)

(a) Gesucht sind alle reellen Zahlen mit $\frac{|x-2|}{|x|} > 1$. Das schließt sofort $x = 0$ aus. Wegen $|c|^2 = c^2$ und da Beträge positiv sind, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{|x-2|}{|x|} > 1 &\iff |x-2| > |x| \\ &\iff (x-2)^2 > x^2 \\ &\iff x^2 - 4x + 4 > x^2 \\ &\iff 1 > x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist hier also

$$\mathbb{L} = \Big\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x-2|}{|x|} > 1\Big\} = (-\infty, 1) \setminus \{0\}.$$

Achtung! Der Trick mit dem Quadrieren funktioniert nur hier in diesem oder ähnlichen Beispielen. Gewöhnlicherweise benutzt man Fallunterscheidungen, um den Betrag aufzulösen. Es funktioniert z.B. nicht bei $|x-2| + |x| > 1$.

(b) Gesucht ist $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|2x^2 - 4|} = x\}$. Mit einer Fallunterscheidung zur Auflösung des Betrages im zweiten Schritt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sqrt{|2x^2-4|} = x &\implies |2x^2 - 4| = x^2 \\ &\iff \big(x^2 \geq 2 \ \wedge \ 2x^2 - 4 = x^2\ \big) \ \vee \ \big(x^2 < 2 \ \wedge \ 4 - 2x^2 = x^2\big) \\ &\iff \big(x^2 \geq 2 \ \wedge \ x^2 = 4\big) \ \vee \ \big(x^2 < 2 \ \wedge \ x^2 = \frac{4}{3}\big) \\ &\iff x^2 = 4 \ \vee \ x^2 = \frac{4}{3} \\ &\iff \big(x = 2 \ \vee \ x = -2\big) \ \vee \ \big(x = \frac{2}{\sqrt{3}} \ \vee \ x = \frac{-2}{\sqrt{3}}\big) \end{aligned}$$

Sammeln wir diese Lösungen in der Menge $M = \{\pm 2, \ \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\}$. Wie hängen A und M zusammen? Nach der obigen Rechnung haben wir wegen der allersten Implikation nur $A \subset M$ gezeigt, da das Quadrieren in der ersten Zeile der Umformungen **keine** Äquivalenzumformung, sondern lediglich eine Implikation ist. Da $x = \sqrt{|2x^2 - 4|} \geq 0$ erfüllt sein muss, können $x = -2$ und $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ nicht in A liegen. Es gilt daher $A = \{2, \frac{2}{\sqrt{3}}\}$.

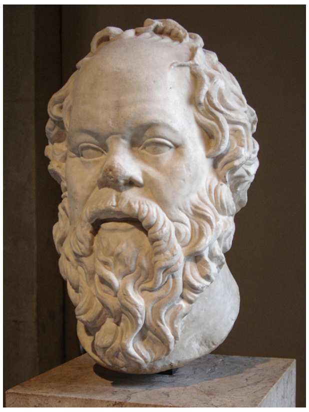
1.4 Induktion

Bei einer **Induktion** oder einem induktivem Argument schließen vor von einer Beobachtung, die ggf. nur auf eine kleine Teilmenge zutrifft, auf die gesamte Menge. Auf diese Art begründen wir z.B., *wie* wir auf Behauptungen oder eine Theorie gekommen sind (siehe Beobachtungen in der Naturwissenschaft). In Gegensatz dazu steht die **Deduktion** bzw. das deduktive Argument, in der wir neue Behauptungen aus einer bereits vorhandenen Theorie begründen bzw. ableiten. Mathematische Beweise sind stets deduktiv, wohingegen Beispiele oder Skizzen induktiv sein können. Daher ist ein Beispiel oder eine Zeichnung niemals ein Beweis.

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Theorie} \\ \text{(allgemein)} \\ \text{z.B. Sätze, Beweise} \end{array}\right\} \ \underset{\text{Induktion}}{\overset{\text{Deduktion}}{\rightleftarrows}} \ \left\{\begin{array}{c} \text{Praxis/Empirie} \\ \text{(speziell)} \\ \text{z.B. Beispiele, Skizzen} \end{array}\right\}$$

Beispiel Sind die Argumente gültig?

(a) Sokrates ist ein Mensch. Sokrates ist ein Grieche. Alle Menschen sind Griechen.



Sokrates[3]

Sei x Sokrates, M die Menge der Menschen und G die Menge der Griechen. Hier steht

$$x \in M \cap G \Longrightarrow M = G,$$

was natürlich keinen Sinn ergibt. Abgesehen davon gibt es Gegenbeispiele: Angela Merkel ist keine Griechin.

(b) Die Zahlen $1 \cdot (1+1) = 2$, $2 \cdot (2+1) = 6$, $3 \cdot (3+1) = 12$, $4 \cdot (4+1) = 20$, $5 \cdot (5+1) = 30$ sind alle durch 2 teilbar. Daher ist auch für jede natürliche Zahl n die Zahl $n(n+1)$ durch 2 teilbar.

Hier ist nur deswegen „klar“, dass das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Zahl immer gerade ist, da man noch nie ein Gegenbeispiel gesehen hat. Das zählt aber nicht als (mathematischer) Beweis.

(c) Die Zahlen $5^1 + 7 = 12$, $5^2 + 7 = 32$, $5^3 + 7 = 132$, $5^4 + 7 = 632$, $5^5 + 7 = 3132$ sind alle durch 4 teilbar. Daher ist auch für jede natürliche Zahl n die Zahl $5^n + 7$ durch 4 teilbar.

Hier würde man nach Bedarf schauen, ob das zutrifft und ggf. einen Computer zu Rate ziehen. Allerdings muss man die Schranken der Rechenleistung respektieren, da $5^{100} + 7$ womöglich eine zu große Zahl ist. Mathematisch ist natürlich gar nichts bewiesen.

Beispiel Sind die Argumente gültig?

(a) Sokrates ist ein Grieche. Jeder Nachbar eines Griechen ist ein Grieche, und alle Menschen sind miteinander nachbarschaftlich verbunden. Also sind alle Menschen Griechen.

Dieses Argument ist tatsächlich gültig, sofern man an die Prämissen glaubt. Wir zählen alle Menschen durch, wobei wir bei Sokrates beginnen. Er sei der Grieche Nummer Eins, $G(1)$. Dass alle verbunden sind und sich das Griechische überträgt, können wir auffassen als Implikation $G(x) \Rightarrow G(x+1)$, wobei x ein Mensch ist und $x+1$ sein Nachbar. Dann ist das obige Argument:

$$G(1) \land \big(\forall\, x \in M :\; G(x) \Rightarrow G(x+1)\big)$$

Aus dieser Verkettung folgt, dass alle Menschen Griechen sind.

[3] 469 – 399 v.Chr. (Quelle: Wikipedia)

(b) Es gilt: $\forall\ n \in \mathbb{N} : 2$ teilt $n(n+1)$.

Beweis: Ist $n = 2k$ gerade, so ist $n+1 = 2k+1$ ungerade, und daher ist auch $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2(2k^2+k)$ gerade. Der Fall n ungerade geht analog.

(c) Wie zeigt man, dass $5^n + 7$ durch 4 teilbar ist?

Beim Schließen vom Speziellen auf die Allgemeinheit lassen sich meist schnell Gegenbeispiele finden, die den Schluss widerlegen. In diesem Sinne ist die Induktion zwar nicht vollständig, daber dennoch effektiv und erkenntniserweiternd. Gibt es daher ein Prinzip, dass die Stärke der Induktion inne hat und trotzdem logisch vollständig ist?

Satz 1.4.1 (Vollständige Induktion) Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte ferner:

(IA) Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ ist wahr.

(IS) Induktionsschluß: Die Implikation $\forall\ n \in \mathbb{N} :\ \ A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr, d.h. unter der Voraussetzung (IV), $A(n)$ sei wahr, muss auch $A(n+1)$ wahr sein.

Dann sind alle Aussagen $A(n)$ wahr.

Achtung! Im Induktionsanfang wird geprüft, ob die Aussage an sich wahr ist, wohingegen im Induktionsschritt nur geprüft wird, ob die Implikation „Wenn die eine Aussage wahr ist, dann auch die nächste" wahr ist. Ob die eine Aussage an sich wahr ist, wird nicht geprüft, sondern man nimmt nur an, dass sie stimmt, und schließt damit auf die nächste Aussage. Sind IA und IS geprüft worden und wahr, so sind automatisch alle Aussagen wahr, denn es ergibt sich die Kette:

$$\underbrace{A(1)}_{\text{IA}} \wedge \big(A(1) \overset{\text{IS}}{\Longrightarrow} A(2) \overset{\text{IS}}{\Longrightarrow} A(3) \overset{\text{IS}}{\Longrightarrow} A(4) \overset{\text{IS}}{\Longrightarrow} \dots\big)$$

Beweis (durch Widerspruch) Wäre eine Aussage $A(m)$ falsch, so ist $\neg A(m)$ wahr, und wir haben wegen dem (IS) eine endliche Kette von Implikationen

$$\neg A(m) \Rightarrow \neg A(m-1) \Rightarrow \neg A(m-2) \Rightarrow \dots \Rightarrow \neg A(1).$$

Weil $\neg A(m)$ als wahr angenommen wurde, muss also schließlich auch $\neg A(1)$ wahr sein. Das heißt aber, dass $A(1)$ falsch ist. Das ist aber ein Widerspruch zum (IA). $\square$

Beispiel Zeigen Sie: $\forall\ n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage $A(n)$: $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar.

(IA) Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr, denn:

$5^1 + 7 = 12$, also durch 4 teilbar.

(IV) Induktionsvoraussetzung: $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

(IS) Induktionsschluss: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gilt, denn:

$$5^{n+1} + 7 = 5 \cdot 5^n + 7 = (4+1) \cdot 5^n + 7 = 4 \cdot 5^n\ \ +\ \ 5^n + 7$$

Da nach Induktionsvoraussetzung $5^n + 7$ durch 4 teilbar ist und klarerweise $4 \cdot 5^n$ durch 4 teilbar ist, ist auch die Summe $4 \cdot 5^n + 5^n + 7$ durch 4 teilbar. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit beweisen, dass $5^n + 7$ durch 4 teilbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Anwendung der vollständigen Induktion

Einschub: Summennotation

Definition 1.4.2 Für endlich viele reelle Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \;:=\; a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$$\text{und} \quad \sum_{k=m}^{n} a_k \;:=\; a_m + a_{m+1} + ... + a_n$$

Satz 1.4.3 (Linearität der Summe) Es gelten die einfachen Rechenregeln:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

Beweis Übung!

Satz 1.4.4 (Gaußsche Summenformel) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n \;=\; \frac{n(n+1)}{2}$$

Carl Friedrich Gauß[4]

Übung Recherchieren Sie, was Gauß mit der Summenformel zu schaffen hat.

Beweis Wir beweisen per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

(IA) Induktionsanfang: Zu überprüfen ist, ob die Aussage $A(1)$ wahr ist:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \;=\; \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

[4] 1777 – 1855 (Quelle: Wikipedia)

(IS) Induktionsschluß: Es ist zu zeigen: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Wir nehmen an, dass die Summenformel für ein festes n gilt (IV). Dann ist:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= 1+2+3+\ldots+n \;+\; (n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \;+\; n+1 \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

Ist die Formel also für ein festes n wahr, so auch für $n+1$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Summelformel also stets wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Satz 1.4.5 (Geometrische Summenformel) Sei $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \tag{4}$$

Beweis Wir beweisen per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:

(IA) Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ ist offensichtlich richtig:

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{q-1}{q-1} = \frac{q^{0+1}-1}{q-1}$$

(IS) Induktionsschluss: Es gilt $A(n-1) \Rightarrow A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn:

Wir nehmen an, dass die Summenformel für ein festes n gilt (IV). Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} \\
&= \frac{q^{n+1}-1+q^{n+1}(q-1)}{q-1} \\
&= \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{n+2}-1}{q-1}
\end{aligned}$$

Damit ist auch der Induktionsschluß gültig und die Formel durch vollständige Induktion bewiesen.

□

Korollar 1.4.6 Für $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \quad = \quad \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

Beweis Verwende Satz 1.4.5 mit $q = \frac{a}{b}$ (**Übung!**). □

Satz 1.4.7 (Bernoulli-Ungleichung) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ gilt:

$$(1 + x)^n \quad \geq \quad 1 + nx.$$

Beweis Sei $A(n)$ die obige Aussage. Wir beweisen per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

(IA) Induktionsanfang $n = 0$: Für $n = 0$ ist die Aussage $A(0)$ richtig, denn:

$$(1 + x)^0 = 1 \ \geq \ 1 = 1 + 0 \cdot x$$

(IS) Induktionsschluss $n \to n + 1$: Wegen $1 + x \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} \geq (1 + x)^n(1 + x) &\overset{\text{IV}}{\geq} (1 + nx)(1 + x) \\ = 1 + (n + 1)x + nx^2 &\geq 1 + (n + 1)x\end{aligned}$$

Damit folgt die Formel aus dem Induktionsprinzip. □

Satz 1.4.8 (Geometrisch-Arithmetische Ungleichung) Sind $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ nicht-negative reelle Zahlen, so gilt:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \quad \leq \quad \frac{x_1 + ... + x_n}{n},$$

d.h. das geometrische Mittel nicht-negativer reeller Zahlen ist immer kleiner gleich dem arithmetischen Mittel.

Beweis Siehe Bücher über Analysis. □

Fakultät und Binomialkoeffizienten

Definition 1.4.9 Für $n \in \mathbb{N}_0$ steht das Symbol $n!$ für die n-**Fakultät** und ist definiert als:

$$n! \ := \ \begin{cases} 1 & , \text{ falls } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n & , \text{ falls } n > 0 \end{cases}$$

Definition 1.4.10 Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ ist der **Binomialkoeffizient** definiert als

$$\binom{n}{k} \quad := \quad \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!},$$

gelesen „n über k“ oder „k aus n“.

Satz 1.4.11 (Rechenregeln für Binomialkoeffizienten) Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$. Dann gelten:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}$ (Symmetrie)

(b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k + 1} = \binom{n + 1}{k + 1}$

(c) Aus der **Kombinatorik** ist bekannt, dass eine Menge von n Elementen genau $\binom{n}{k}$ unterschiedliche k-elementige Teilmengen besitzt.

Beweis Einsetzen der Definition und Bruchrechnen.

Beispiel Es gibt

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13.983.816$$

Möglichkeiten 6 aus 49 nummerierten Kugeln zu ziehen.

Übung Recherchieren Sie, wie der Binomialkoeffizient mit dem **Pascalschen Dreieck** zusammenhängt und bestimmen Sie $\binom{5}{k}$ für $k = 0, \ldots, 5$.

Es folgt die Verallgemeinerung der binomischen Formeln. Man erhält sie im Fall $n = 2$.

Satz 1.4.12 (Binomischer Lehrsatz) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

Beweis Wir beweisen per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

(IA) Induktionsanfang $n = 1$: Für $n = 1$ ist die Formel wahr, denn:

$$(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0} a \cdot b^0 + \binom{1}{1} a^0 \cdot b$$

(IS) Induktionschluss $n \to n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k \cdot b^{(n+1)-k} = ????$$

[BEWEIS ERGÄNZEN]

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt daher der Binomische Lehrsatz.

$\square$

Übung Benutzen Sie den Binomischen Lehrsatz.

(a) Stellen Sie eine Formel auf für $(a+b)^3$ und $(a-b)^3$.

(b) Berechnen Sie $(x+2)^5$.

Übung Zeigen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Vergleichen Sie mit den Aussagen über die Anzahl der Elemente der Potenzmenge einer endlichen Mengen.

(b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} = 0$

[ÜBUNGEN ZU $\sum q^n$ UND BEISPIEL ZU GAUSS SUMMENFORMEL]

2 Vektorrechnung

Lernziele

Wissen & Verständnis

- Sie kennen und verstehen die grundlegenden Begriffe im Umgang mit Vektorräumen: Vektoren, Linearkombinationen, (affne) Unterräume, Erzeugende & Basen, Dimension, lineare (Un-)Abhängigkeit.
- Sie kennen Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$.
- Sie kennen Determinanten in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und verstehen die geometrische Bedeutung für Flächen und Volumina.
- Sie kennen das Skalarprodukt und die Norm und wissen, wie man diese einsetzt, um Winkel zu bestimmen.
- Sie kennen das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ und verstehen seine geometrische Bedeutung.
- Sie kennen die Lageverhältnisse von Geraden und Ebenen im Raum.
- Sie kennen die Formeln zur Bestimmung von Abständen.

Anwendung

- Sie beherrschen den Umgang mit (affnen) Unterräumen, insbesondere die Darstellung in Parameterform.
- Sie beherrschen die Darstellung von Ebenen in $\mathbb{R}^3$ in Parameter-, Koordinaten- und Normalenform.
- Sie können Vektoren auf lineare (Un-)Abhängigkeit untersuchen. Stichworte: Dimension, Determinanten.
- Sie können Winkel und Abstände berechnen.

Erinnerung: Lernen auf Verständnis

- Voraussetzungen: Studiport LE12
- Lernen Sie die Definitionen und Sätze auswendig und versuchen Sie, sie zu verstehen. Gerade in der Vektorrechnungen bieten sich Zeichnungen im $\mathbb{R}^2$ an.
- Lernen Sie, die Zusammenhänge der Begriffe zu verstehen. Finden Sie den roten Faden, indem Sie z.B. eine Mindmap erstellen.
- Nachdem Sie die obigen Punkte abgearbeitet haben, fällt Ihnen die Bearbeitung der Aufgaben wesentlich einfacher. Wenden Sie Ihr Wissen auf die Aufgaben an und nicht „umgekehrt“.

2.1 Der euklidische Raum

Euklid von Alexandria[5]

Definition 2.1.1 Sei $n \in \mathbb{N}$. Der n-**dimensionale euklidische Raum** $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Spaltenvektoren bzw. **Vektoren**

$$\vec{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ die Komponenten von $\vec{x}$ bilden. Anders ausgedrückt

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_j \in \mathbb{R} \,, j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Nullvektor** oder **Ursprung**.

Beispiel

(a) Für $n = 1$ erhält man die reellen Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ und schreibt x statt $\vec{x} = (x_1)$.

(b) Für $n = 2$ erhält man die Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ und schreibt auch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(c) Für $n = 3$ hat man den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ und schreibt auch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(d) Für $n = 4$ erhält man - grob - die Raumzeit und schreibt auch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Zunächst ist $\mathbb{R}^n$ nur eine Menge, die aus n-Tupel besteht, deren n Einträge vertikal angeordnet sind. Die Frage ist nun, wie man eine Struktur auf $\mathbb{R}^n$ erzeugt, mit Hilfe derer man rechnen kann.

[5] ca. 3. Jhd. v. Chr.; Quelle: Wikipedia

Definition 2.1.2 Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Addition** und **skalare Multiplikation** wie folgt:

$$\vec{x} + \vec{y} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \;\in \mathbb{R}^n$$

und

$$\alpha \cdot \vec{x} \;=\; \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \alpha \cdot x_3 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix} \;\in \mathbb{R}^n.$$

Übung Gibt es ähnliche Gesetze für die Addition und skalare Multiplikation wie beim Zahlen/Aussagen/Mengen, wie z.B. das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz? Falls ja, wie sehen sie aus?

Beispiel (Visualisierung von Vektoren)

(a) Ein Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^n$ ist sehr einfach zu interpretieren: Der Nullpunkt wird mit Hilfe eines Pfeils mit dem Punkt $P = P(x_1|\ldots|x_n)$ verbunden. Umgekehrt lässt sich jeder Punkt P mit dem Nullpunkt verbinden, so dass der Pfeil in Richtung des Punktes P zeigt. In diesem Sinne identifizieren wir Vektoren mit Pfeilen oder Punkten. Im folgenden schreiben wir eher $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ als $P(x_1|\ldots|x_n)$ und sprechen eher nur noch von Vektoren statt Punkten.

(b) Mit Hilfe der obigen Interpretation lassen sich die Addition von Vektoren und die skalare Multiplikation geometrisch erklären: Die Summe von Vektoren

$$\vec{v} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \ldots + \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$$

erzeugt einen „Vektorzug“, indem man für jedes $j = 0, \ldots, m-1$ den Vektor $\vec{x}_{j+1}$ an die Pfeilspitze des vorherigen Vektors $\vec{x}_j$ klebt. Bei der skalaren Multiplikation ist $\alpha\vec{x}$ der um den Faktor α *(negativ) gestreckte* ($|\alpha| > 1$) oder *(negativ) gestauchte* Vektor ($|\alpha| < 1$). Für $\alpha = -1$ ist $-\vec{x}$ der **Gegenvektor** von $\vec{x}$.

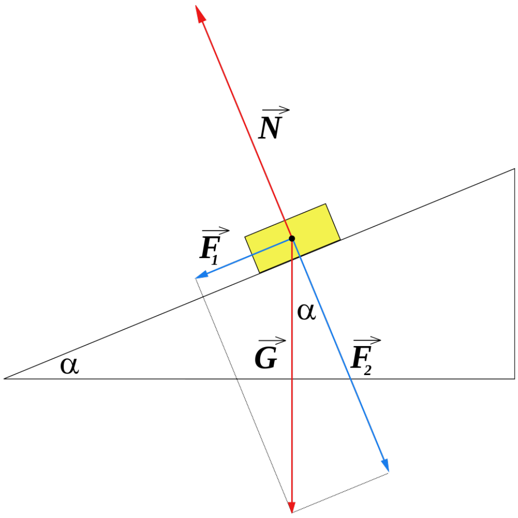
(c) Sind zwei Punkte $A(a_1|\ldots|a_n)$ und $B(b_1|\ldots|b_n)$ im $\mathbb{R}^n$ gegeben, so ist

$$\overline{AB} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

derjenige Pfeil, der von A nach B zeigt.

Zu beachten ist hier, dass man nicht so ohne weiteres eine Multiplikation zwischen Vektoren einführen kann. Wie wir trotzdem sinnvolle Produkte erzeugen können, lernen wir später.

Beispiel (Physikalische Kräfte als Vektoren)



Hangabtriebskraft $\vec{F}_1$, *Gewichtskraft* $\vec{G}$, *Normalkraft* $\vec{N}$ *und Gegenkraft* $\vec{F}_2 = -\vec{N}$

Mit welcher Beschleunigung rutscht der Körper den Hang hinunter, wenn die Gewichtskraft $\vec{G}$ und die Normalkraft $\vec{N}$ gegeben sind? Für die Hangabtriebgskraft $\vec{F}_1$ gilt

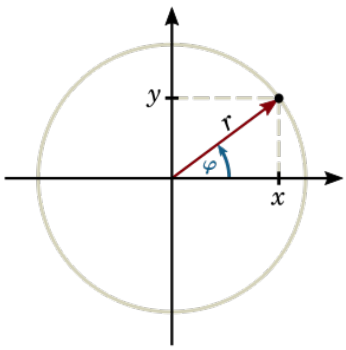
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 + \vec{G} = \vec{N} + \vec{G} = m \cdot \vec{a} \qquad [N = kg \cdot \frac{m}{s^2}],$$

wobei m die Masse des Körpers und $\vec{a}$ der Beschleunigungsvektor sind. Diese Formel folgt aus dem 2. Newtonschen Gesetz.[6]

Satz 2.1.3 (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$)
Jeder Punkt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ lässt sich mit Hilfe des Winkels $\varphi \in [0, 2\pi)$ und seiner Länge $r = x^2 + y^2$ eindeutig via

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

im Raum darstellen.



$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *in Polarkoordinaten* (r, φ)

Das Tupel (r, φ) nennen wir die **Polarkoordinaten von** $\vec{x}$ und die obige Form die **Polarkoordinatendarstellung von** $\vec{x}$. Speziell $\vec{0}$ hat die Polarkoordianten $(0, 0)$.

[6]Quelle: Artikel zu „Kraft“, Wikipedia, 2019

Beweis Nach dem Kosinus- und Sinussatz sind

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{y}{r}.$$

Umstellen nach x bzw. y liefert dann die Polarkoordinatendarstellung. □

Übung Recherchieren Sie Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ und allgemein im $\mathbb{R}^n$.

2.2 Lineare (Un-)Abhängigkeit, Unterraum und Basis

Definition 2.2.1 Der Vektor

$$\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{-ter Eintrag}$$

mit dem Eintrag 1 in der j-ten Komponente heißt j-**ter Einheitsvektor**.

Beispiel
Mit Hilfe der j-ten Einheitsvektoren lassen sich alle Vektoren des $\mathbb{R}^n$ erzeugen:

$$\begin{aligned}
\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&\overset{(2)}{=} x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{(3)}{=} x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n \overset{(4)}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k
\end{aligned}$$

(1) Def. Addition von Vektoren (2) Skalare Multiplikation (3) Def. Einheitsvektoren (4) Summennotation

Diese Beobachtung motiviert die folgende Definition.

Definition 2.2.2

(a) Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ gegeben. Dann nennt man

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{v}_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\vec{v}_k$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$.

In diesem Sinne ist $\vec{x}$ **linear abhängig von** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$.

(b) Die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ bildet einen **Unterraum**[7] U im $\mathbb{R}^n$:

$$U = \{\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{v}_m : \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

Wir schreiben abkürzend U in **Parameterform** bzw. als **linearen Spann**:

$$U = \mathbb{R} \cdot \vec{v}_1 + \mathbb{R} \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \mathbb{R} \cdot \vec{v}_m.$$

Auch sagen wir, dass die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ den Unterraum U **erzeugen**. Ein Unterraum kann durch verschiedene Vektoren erzeugt werden.

Beispiel

(a) Die euklidischen Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$ erzeugen den $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\vec{e}_2 + \ldots + \mathbb{R}\vec{e}_n = \mathbb{R}^n.$$

(b) Im $\mathbb{R}^2$ erzeugt ein Vektor $\vec{v}$ den Ursprung $\vec{0}$ oder eine **Gerade** durch den Ursprung:

$$G = \mathbb{R}\vec{v}$$

(c) Im $\mathbb{R}^3$ erzeugen zwei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ den Ursprung, eine Gerade oder eine **Ebene** durch den Ursprung:

$$E = \mathbb{R}\vec{v}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_2$$

(d) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugen den $\mathbb{R}^2$, d.h.

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2.$$

Denn jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ kann man schreiben als

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y-x}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Der Unterraum $U = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ wird von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ erzeugt, aber auch nur von dem einzelnen Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder allgemein nur von $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ mit $a \neq 0$, denn:

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3)\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1-3)\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2)\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\mathbb{R}a)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

Letzteres Beispiel motiviert das folgende Lemma.[8]

[7] siehe Exkurs: Lineare Algebra

[8] Ein *Lemma* ist ein Hilfssatz.

Lemma 2.2.3 Sei U ein Unterraum im $\mathbb{R}^n$ erzeugt von den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$. Angenommen, der Vektor $\vec{v}_m$ ist linear abhängig von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{m-1}$, d.h. es gibt reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ mit $\vec{v}_m = \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \vec{v}_k$. Dann wird U bereits nur von den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{m-1}$ erzeugt, d.h.

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{R}\vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{R}\vec{v}_{m-1} + \mathbb{R}\vec{v}_m \\ &= \mathbb{R}\vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{R}\vec{v}_{m-1}. \end{aligned}$$

Beweis Da $\vec{v}_m = \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \vec{v}_k$, erhalten wir:

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{R}\vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{R}\vec{v}_{m-1} \ + \ \mathbb{R}\vec{v}_m \\ &= \mathbb{R}\vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{R}\vec{v}_{m-1} \ + \ \mathbb{R}\sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \vec{v}_k \\ &= \mathbb{R}\vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{R}\vec{v}_{m-1} \ + \ \mathbb{R}\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{R}\alpha_{m-1}\vec{v}_{m-1} \\ &= (\mathbb{R} + \alpha_1\mathbb{R})\vec{v}_1 + \ldots + (\mathbb{R} + \alpha_{m-1}\mathbb{R})\vec{v}_{m-1} \\ &= \mathbb{R}\vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{R}\vec{v}_{m-1}. \end{aligned}$$

□

ist nicht ausgeschlossen, dass U durch noch weniger Vektoren erzeugt werden kann.

Satz 2.2.4 (Minimale Erzeuger) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ erzeugt von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$. Dann kann man unter diesen Vektoren genau d Vektoren $\vec{v}_{j_1}, \vec{v}_{j_2}, \ldots, \vec{v}_{j_d}$ derart auswählen, so dass sie immer noch U erzeugen und d kleinstmöglich gewählt ist. Die Zahl d hängt *nicht* von der Wahl der Erzeuger ab.

Beweis Durch mehrfache Anwendung des vorherigen Lemmas entnimmt man sukzessive solange linear abhängige Vektoren wie mindestens nötig sind, um U zu erzeugen. Dass diese Anzahl d nicht von der Wahl der Erzeuger abhängt, ist schwieriger zu beweisen. Daher beschränken wir uns nur auf den Verweis auf die Bücher über Lineare Algebra. □

Definition 2.2.5 Sei U erzeugt von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ und die Zahl d aus Satz 2.2.4.

(a) Die Zahl d nennen wir die **Dimension von** U und schreiben

$$\dim U = d.$$

Ist U erzeugt von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$, so gilt stets $d \leq m$.

(b) Ist $\dim U < m$, so nennen wir die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ **linear abhängig**.

(c) Ist $\dim U = m$, so nennen wir die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ **linear unabhängig**. In diesem Fall nennt man die Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ der Erzeuger von U auch eine **Basis von** U.

Bemerkung Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ linear abhängig im Sinne der Definition 2.2.5 (b), so gibt es unter diesen Vektoren mindestens einen Vektor $\vec{v}_{j_l}$, der von den restlichen Vektoren im Sinne der Definition 2.2.2 (a) linear abhängig ist.

Beispiel Sei $U = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ wie vorhin. Dann sind $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ linear abhängig. Da $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ den Unterraum U erzeugt, sind $\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$ aber auch $\{\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}\}$ mit $a \neq 0$ Basen von U. Die Dimension von U ist gleich 1, und U ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung (Visualisierung der linearen (Un-)Abhängigkeit)
Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ linear abhängig, so gibt es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, wovon mindestens eine nicht Null ist, so dass

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}, \qquad \text{(Wieso?)}$$

d.h. wenn man den Vektorzug $\alpha_1\vec{v}_1, \ldots, \alpha_m\vec{v}_m$ zeichnet, gelangt man vom Ursprung wieder zum Ursprung. Bei linearer Unabhängigkeit passiert dies nicht.

Beispiel Zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ erzeugen eine Ebene E durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$.

Übung Seien die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ gegeben. Was ist eine Basis von $U = \mathbb{R}\vec{v}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_2 + \mathbb{R}\vec{v}_3$ und welche Dimension hat U?

Satz 2.2.6 (Weitere Eigenschaften von Unterräumen) Sei U ein Unterraum im $\mathbb{R}^n$.

(a) Ist $\vec{x} \in U$, so ist auch $\mathbb{R}\vec{x} \subset U$, d.h. befindet sich ein Vektor in U, so auch schon die gesamte vom ihm erzeugte Gerade.

(b) Sind $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in U$, so auch der gesamte von diesen Vektoren erzeugte Unterraum V, d.h.

$$\mathbb{R}\vec{x}_1 + \ldots + \mathbb{R}\vec{x}_m \subset U.$$

Es gilt dann $\dim V \leq \dim U$.

(c) Ist V ein weiterer Unterraum mit $V \subset U$ derart, dass $\dim V = \dim U$, so muss bereits $V = U$ gelten.

Beweis Wir deuten nur an, was hier passiert. Da U ein Unterraum ist, wird er von Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ erzeugt. Ist $x \in U$, so gibt es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ mit

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k.$$

Ist nun β eine beliebige reelle Zahl, so gilt

$$\beta\vec{x} = (\beta\alpha_1)\vec{v}_1 + \ldots + (\beta\alpha_k)\vec{v}_k.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\mathbb{R}\vec{x} \;\subset\; \mathbb{R}\vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{R}\vec{v}_k = U.$$

Die restlichen Argumente kann man aus dieser Rechnung ableiten und bleiben dem Leser überlassen. □

Exkurs: Lineare Algebra & Unterräume

Definition Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Unterraum** oder Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$, falls gilt:

(a) $\vec{0} \in U$

(b) $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in U:\ \vec{x} + \vec{y} \in U$

(c) $\forall\ \vec{x} \in U,\ \alpha \in \mathbb{R}:\ \alpha \cdot \vec{x} \in U$

(a) bedeutet, dass die Menge U den Ursprung schneidet. (b) und (c) bedeuten, dass U abgeschlossen ist bzgl. der Addition von Vektoren und der Multiplikation mit Skalaren $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beispiel

(a) Trivialerweise sind $\{\vec{0}\}$ und $\mathbb{R}^n$ Unterräume des $\mathbb{R}^n$.

(b) Jeder lineare Spann im $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

(c) $X = \mathbb{R}\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\} \cup \mathbb{R}\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$ ist kein Unterraum im $\mathbb{R}^2$. Wieso?

(d) $P = \{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; y = x^2\}$ ist kein Unterraum. Wieso?

Satz (Zusammenhang von Spann & Unterraum) Jeder lineare Spann von Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$; und umgekehrt ist jeder Unterraum U des $\mathbb{R}^n$ ein linearer Spann von Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$. In diesem Fall bildet die Menge der Vektoren $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ ein sog. **Erzeugensystem von** U, d.h. es gilt $U = \mathbb{R}\vec{v}_1 + \ldots + \vec{\mathbb{R}}v_m$.

Beweis Dass jeder lineare Spann ein Unterraum ist, lässt sich leicht nachweisen mit Hilfe der Definitionen 2.2.2 und 4. Die Umkehrung ist aber wesentlich schwieriger zu zeigen. Beweise findet man in Büchern über Lineare Algebra. □

Dieser Satz legitimiert, dass wir die Begriffe *Unterraum* und *Linearer Spann* synonym verwenden können. Der Vorteil dieser abstrakten Definition des Unterraums ist, das man keine konkreten Vektoren angeben muss und dass sich diese Definition auf abstraktere Objekte wie Matrizen oder Funktionen verallgemeinern lässt.

Satz (Minimales Erzeugendensystem) Jeder Unterraum U des $\mathbb{R}^n$ besitzt ein minimales Erzeugendensystem, genannt Basis von U. Die Anzahl der Vektoren dieser Basis nennt man Dimension von U.

Beweis Siehe Bücher zur Linearen Algebra. □

Determinanten

Allgemein testet man lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren mit dem **Gauß-Algorithmus**. Wir behandeln dies im nächsten Kapitel über lineare Gleichungssysteme. Im Spezialfall von zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ oder drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ bietet sich die Determinante an, um auf lineare Abhänigigkeit zu testen.

Definition 2.2.7 Seien $\vec{v} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\det(\vec{v}, \vec{w}) := \det \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix} := a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

die **Determinante** derjenigen Matrix, die aus $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zusammengestellt ist.

Bemerkung Die Determinante ist der *orientierte* Flächeninhalt des Parallelogramms P, welches von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird. Der Betrag der Determinante ist der Flächeninhalt dieses Parallelogramms, d.h.

$$A(P) = |\det(\vec{v}, \vec{w})|$$

Diese geometrische Interpretation motiviert den folgenden Satz.

Satz 2.2.8 (Lineare Abhängigkeit & Determinante im $\mathbb{R}^2$) Zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ des $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ist. Ansonsten sind die beiden Vektoren linear unabhängig.

Beweis

„$\Rightarrow$" (Notwendige Bedingung) Sind $\vec{v}, \vec{w}$ linear abhängig, so gibt es eine Zahl α mit $\vec{w} = \alpha\vec{v}$. Dann rechnet man leicht nach, dass $\det(\vec{v}, \alpha\vec{v}) = \alpha \det(\vec{v}, \vec{v}) = 0$.

„$\Leftarrow$" (Hinreichende Bedingung) Ist $\det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ und schreiben wir $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, so gilt:

$$0 = \det(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 w_2 - v_2 w_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 w_2 = v_2 w_1$$

Daher ist $w_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 v_1 \\ w_1 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 v_1 \\ w_2 v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Somit sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig.

□

Definition 2.2.9 Seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) := \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$:= a_1 \cdot \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - a_2 \cdot \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

die **Determinante** derjenigen Matrix, die aus $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ zusammengestellt ist.

Bemerkung Die Determinante ist das *orientierte* Volumen des Parallelepipeds/Spats P, welches von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird. Der Betrag dieser Determinante ist das Volumen dieses Parallelepipeds, d.h.

$$V(P) = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Satz 2.2.10 (Lineare Abhängigkeit & Determinante im $\mathbb{R}^3$) Drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ ist. Ansonsten sind die drei Vektoren linear unabhängig.

Beweis Der Beweis ist aufwendiger als der in $\mathbb{R}^2$. Daher verweisen wir nur auf Bücher zur Linearen Algebra. □

Beispiel Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$, denn:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= 0 \cdot 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \\ &\quad -(-1) \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 5 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \cdot (-3) = -15 \end{aligned}$$

Hier wurde die **Regel von Sarrus** benutzt, um die Determinante auszurechnen. Recherchieren Sie sie. **Sie funktioniert nur im $\mathbb{R}^3$!!!**

Bemerkung Man kann auch Determinanten für Matrizen im $\mathbb{R}^n$ definieren (ähnlich wie für $\mathbb{R}^3$) und berechnet sie wie in Defintion 2.2.9 mit Hilfe der sog. *Laplace-Entwicklung*. Man hat einen ähnlichen Zusammenhang zwischen der linearen Abhängigkeit und der Determinante im $\mathbb{R}^n$. Das findet man samt Beweisen in allen Büchern über Lineare Algebra.

2.3 Längen & Winkel

Das Skalarprodukt & die Norm

Definition 2.3.1 Für zwei Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;,\; \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

definieren wir das **Skalarprodukt**

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \;\; := \;\; \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j = x_1 y_1 + ... + x_n y_n \quad \in \mathbb{R}.$$

Manchmal schreibt man für das Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ auch einfach: $\vec{x} \cdot \vec{y}$

Satz 2.3.2 (Rechenregeln für das Skalarprodukt)
Für Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ ist:

(a) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \;=\; \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

(b) $\langle \vec{x} + \vec{v}, \vec{y} \rangle \;=\; \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{y} \rangle$

(c) $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{w} \rangle \;=\; \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle$

(d) $\langle t \cdot \vec{x}, \vec{y} \rangle \;=\; \langle \vec{x}, t \cdot \vec{y} \rangle \;=\; t \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

Beweis Die Regeln sind sehr leicht mit Hilfe der Rechenregeln für Summen und dem Distributivgesetz zu beweisen. $\square$

Definition 2.3.3 Als **Länge** oder **Norm** eines Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bezeichnet man die Zahl

$$\|\vec{x}\| \;\; := \;\; \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Bemerkung Nach dem Satz von Pythagoras stimmt die so definierte Länge eines Vektors tatsächlich mit der euklidischen Länge unserer Anschauung überein. Für zwei Vektoren $\vec{P}, \vec{Q} \in \mathbb{R}^n$ mit Endpunkten P, Q bezeichnet man in der Geometrie mit $\overline{PQ}$ den Verbindungsvektor. $\|\vec{P} - \vec{Q}\|$ beschreibt die Länge von $\overline{PQ}$ und damit den Abstand der Punkte P und Q.

Satz 2.3.4 (Rechenregeln für die Norm) Für Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\|\vec{x}\| \geq 0$ und $\|\vec{x}\| = 0$ genau dann, wenn $\vec{x} = 0$.

(b) $\|t \cdot \vec{x}\| = |t| \cdot \|\vec{x}\|$

(c) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

Ferner gelten die Ungleichungen:

(d) Dreiecksungleichung: $\Big| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \Big| \leq \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

(e) Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $\big|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\big| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Die Norm ist für $n = 1$ nichts anders als der Betrag.

Beweis Die ersten beiden Regeln (a) und (b) folgen sofort aus der Definition der Norm und sind leicht zu zeigen. Für die dritte Regel (c) benutzt man einfach den Zusammenhang $\|\vec{x}\|^2 = \langle\vec{x},\vec{x}\rangle$ und die Rechenregeln für das Skalarprodukt. Die Dreiecksungleichung (nach oben) folgt unmittelbar aus (c). Die Dreiecksungleichung nach unten folgt aus

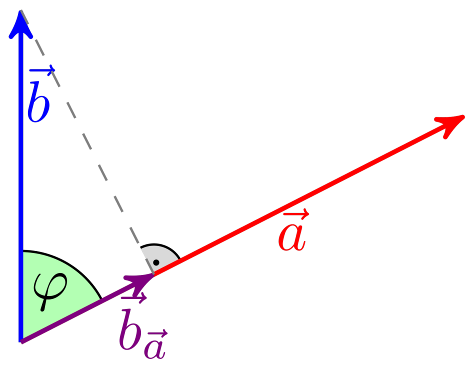
$$\|\vec{x}\| = \|\vec{x}+\vec{y}-\vec{y}\| \leq \|\vec{x}+\vec{y}\| + \|\vec{y}\|.$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist schwieriger zu zeigen. Beweise finden sich in jedem Buch über Analysis. □

Definition 2.3.5 Seien zwei Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ gegeben. Dann ist

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|^2}\cdot\vec{a}$$

die **Senkrechtprojektion von $\vec{b}$ entlang** $\vec{a}$.



Projektion $\vec{b}_{\vec{a}}$ von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$[9]

Bemerkung (Visualisierung des Skalarprodukts) Hat $\vec{a}$ die Länge gleich 1, so lässt sich das Skalarprodukt wie folgt interpretieren:

$$\|\vec{b}_{\vec{a}}\| = |\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|.$$

Wir betrachten zunächst Winkel in der Ebene. Diese können leicht unter Verwendung des Skalarproduktes berechnet werden. Zur Vorbereitung benötigen wir den aus der elementaren Geometrie bekannten Kosinussatz.

Satz 2.3.6 (Kosinussatz)
Bilden in einem Dreieck zwei Seiten $\vec{x},\vec{y}$ im $\mathbb{R}^2$ einen Winkel φ, so berechnet sich das Quadrat der Länge der dritten Seite, also $r = \|\vec{x}-\vec{y}\|$ als:

$$r^2 = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \quad = \quad \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos(\varphi) \tag{5}$$

Bemerkung Man beachte, dass der Kosinussatz den Satz von Pythagoras miteinschließt: die Seiten $\vec{x}$ und $\vec{y}$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn $\cos(\varphi) = 0$ ist, und dann liest sich (5) als:

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \quad = \quad \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Kombiniert man den Kosinussatz mit der Rechenregel (c) für die Norm, so erhält man sofort:

[9] Bild: Quelle Wikipedia

Korollar 2.3.7 (Skalarprodukt & Winkel) Schließen zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ im $\mathbb{R}^2$ einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ ein, so ist

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad = \quad \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\varphi),$$

bzw.

$$\cos(\varphi) \quad = \quad \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

falls $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$. Folglich stehen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ genau dann senkrecht aufeinander, wenn

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \; = \; 0$$

ist. Man sagt dann, $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sind **orthogonal**, und wir schreiben $\vec{x} \perp \vec{y}$. (Dieselbe Formel gilt auf für Vektoren im $\mathbb{R}^n$.)

Bemerkung (Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^n$) Betrachten wir nun zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Dann liegen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in einer Ebene $E \subset \mathbb{R}^n$. Sind $\vec{x}$, $\vec{y}$ linear unabhängig, so wird E von ihnen aufgespannt,

$$E \; = \mathbb{R}\vec{x} + \mathbb{R}\vec{y}.$$

Sind $\vec{x}, \vec{y}$ linear abhängig, so kann E variabel gewählt werden. In der Ebene E bilden $\vec{x}$ und $\vec{y}$ einen Winkel φ. Da auch $\vec{x} - \vec{y}$ wieder in der Ebene E liegt, gilt wieder

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad = \quad \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\varphi),$$

und $\vec{x}$, $\vec{y}$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \; = \; 0$. Der **Kosinussatz** und der **Satz über den Zusammenhang von Skalarpordukt & Winkel** gelten also wörtlich für Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Definition 2.3.8 Speziell für Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist $\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ der **zu $\vec{x}$ orthogonale Vektor**, der durch Drehung von $\vec{v}$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn entsteht. Dadurch wird $\vec{v}_\perp$ eindeutig bestimmt.
Ist $G = \mathbb{R}\vec{v}$ eine Gerade, so ist

$$G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \vec{v}_\perp, \vec{x} \rangle = 0\}$$

in **Normalenform** dargestellt, und $\vec{n} = \vec{v}_\perp$ ist ein **Normalenvektor zu** G.

Satz 2.3.9 (Hyperebene in Normalenform) Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}$ genau $n-1$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$, die einen Unterraum H (eine sog. **Hyperebene**) erzeugen. Dann gibt es einen Vektor $\vec{n}$ mit

$$H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 0\}.$$

Der Vektor $\vec{n}$ ist ein Normalenvektor zur Hyperebene H, und umgekehrt ist H der Orthogonalraum zu $\vec{n}$.

Bemerkung Für $n = 2$ ist H eine Gerade und für $n = 3$ ist H eine Ebene.

Beispiel Der Unterraum $U = \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 - 2x_2\right\}$ steht senkrecht auf $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, denn für alle $\vec{x} \in U$ gilt:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} \rangle = x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

Wir können U auch mit dem Skalarprodukt beschreiben und erhalten die Normalenform von U:

$$U = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} \rangle = 0 \right\}$$

In diesem Sinne ist U der Orthogonalraum zu $\vec{n}$, und U ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Das Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

Im folgenden lernen wir das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ kennen, das aus zwei Vektoren den dazugehörigen orthogonalen Vektor im Sinne der Rechtsorientierung erzeugt.

Definition 2.3.10 Für zwei Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

heißt

$$\vec{x} \times \vec{y} \quad := \quad \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

das **Vektorprodukt** bzw. **Kreuzprodukt** von $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

Nachrechnen ergibt die folgenden Rechenregeln:

Satz 2.3.11 (Rechenregeln für das Vektorprodukt) Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $\vec{x} \times \vec{y} = -\ \vec{y} \times \vec{x}$

(b) $\big(t \cdot \vec{x}\big) \times \vec{y} \ = \ \vec{x} \times \big(t \cdot \vec{y}\big) \ = \ t \cdot \big(\vec{x} \times \vec{y}\big)$

(c) $\big(\vec{x} + \vec{y}\big) \times \vec{z} \ = \ \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z} \ , \quad \vec{x} \times \big(\vec{y} + \vec{z}\big) \ = \ \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ liefert einen neuen Vektor $\vec{x} \times \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Eine Vorstellung von der geometrischen Bedeutung dieses Produktes liefern die folgenden Eigenschaften, von denen (b) – (d) das Vektorprodukt $\vec{x} \times \vec{y}$ eindeutig bestimmen.

Satz 2.3.12 (Eigenschaften des Vektorproduktes)

(a) $\vec{x} \times \vec{y} = 0 \iff \vec{x}$ und $\vec{y}$ sind linear abhängig.

(b) Der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ steht senkrecht auf $\vec{x}$ und senkrecht auf $\vec{y}$, d.h. es gilt:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle \ = \ \langle \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle \ = \ 0.$$

(c) Die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{x} \times \vec{y}$ bilden in dieser Reihenfolge ein **Rechtssystem**, d.h. identifiziert man $\vec{x}$ mit dem Daumen und $\vec{y}$ mit dem Zeigefinger der rechten Hand, so zeigt $\vec{x} \times \vec{y}$ in Richtung des Mittelfingers.

(d)

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| \ = \ \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin\alpha \ ,$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist. Damit ist $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ der Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms.

Beispiel Sei $E = \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ und $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$. Dann kann man E in Normalenform schreiben:

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 0\}.$$

Bemerkung (Anwendung des Vektorprodukts in der Physik) In einem stromdurchflossenen Leiter läßt sich der Strom durch einen Vektor $\vec{I}$ darstellen. Wird dieser Leiter auf der Länge h einem Magnetfeld ausgesetzt, dass durch einen Vektor $\vec{B}$ gegeben ist, so wirkt auf den Leiter (entsprechend der Rechte-Hand-Regel) die Kraft

$$\vec{K} = \left(h \cdot \vec{I}\right) \times \vec{B}.$$

2.4 Affine Unterräume & Lagebeziehungen

Definition 2.4.1 Sei M eine beliebige Menge im $\mathbb{R}^n$ und $\vec{a}$ ein Vektor. Dann ist

$$\vec{a} + M = \{\vec{a} + \vec{x} : \vec{x} \in M\}$$

die in Richtung $\vec{a}$ verschobene Menge. In diesem Fall nennen wir den Vektor **Ortsvektor von** M. Ein Ortsvektor ist nicht eindeutig bestimmt. Ist speziell $M = U$ ein Unterraum, so nennen wir

$$\vec{a} + U = \vec{a} + \mathbb{R}\vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{R}\vec{v}_m$$

einen **affinen Unterraum** im $\mathbb{R}^n$. Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ sind die sog. **Richtungsvektoren von** U. Die Dimension des affinen Unterraums $\vec{a} + U$ ist gleich der Dimension von U.

Beispiel

(a) Ist $\dim U = 1$ und $U = \mathbb{R} \cdot \vec{v}$, so ist $\vec{a} + U$ eine (affine) Gerade durch $\vec{a}$ in Richtung $\vec{v}$, d.h.

$$G = \vec{a} + \mathbb{R} \cdot \vec{v}$$

(b) Ist $\dim U = 2$ und $U = \mathbb{R} \cdot \vec{v}_1 + \mathbb{R} \cdot \vec{v}_2$ im $\mathbb{R}^3$, so ist $\vec{a} + U$ eine (affine) Ebene durch $\vec{a}$, d.h.

$$E = \vec{a} + \mathbb{R} \cdot \vec{v}_1 + \mathbb{R} \cdot \vec{v}_2$$

(c) Ist $\dim U = n - 1$ und $U = \mathbb{R} \cdot \vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{R} \cdot \vec{v}_{n-1}$ im $\mathbb{R}^n$, so ist $\vec{a} + U$ eine (affine) Hyperebene durch $\vec{a}$, d.h.

$$H = \vec{a} + \mathbb{R} \cdot \vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{R} \cdot \vec{v}_{n-1}$$

(d) Wann sind zwei affine Unterräume identisch? Falls gilt:

$$\vec{a} + U = \vec{b} + U \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} - \vec{b} \in U$$

Satz 2.4.2 (Von Punkten zur Parameterform) Sind $d + 1$ Punkte $\vec{A}_0$, $\vec{A}_1$, ..., $\vec{A}_d \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so dass die d Vektoren

$$\vec{v}_k := \vec{A}_k - \vec{A}_0 \quad , \quad k = 1, ..., d$$

linear unabhängig sind, so ist

$$\vec{A}_0 + \mathbb{R}\vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{R}\vec{v}_d$$

ein d-dimensionaler affiner Unterraum, der durch die Punkte $\vec{A}_0$, $\vec{A}_1$, ..., $\vec{A}_d$ verläuft. $\vec{A}_0$ ist in diesem Fall der Ortsvektor und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_d$ sind die Richtungsvektoren dieses affinen Unterraums.

Satz 2.4.3 (Affine Hyperebene in Normalenform) Sei H eine affine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es einen Normalenvektor $\vec{n}$ und eine Zahl d mit

$$H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = d\}.$$

Ist $\vec{n}$ so gewählt, dass $\|\vec{n}\| = 1$ und $d \geq 0$, so ist d der Abstand von H zum Ursprung.

Beispiel Sei $E = \vec{P} + \mathbb{R}\vec{v}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_2$ eine affine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Setze $\vec{n} := \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ und $d := \langle \vec{n}, \vec{P} \rangle$. Dann ist die Normalenform von E wie folgt:

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = d\}$$

Definition 2.4.4 Sei $H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{P} \rangle\}$ eine affne Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ in Normalenform. Für den **Abstand von H zum Ursprung** gilt:

$$d(H, \vec{0}) = \frac{|\langle \vec{n}, \vec{P} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$$

Der **Abstand von H zu einem beliebigen Punkt $\vec{Q}$** ist:

$$d(H, \vec{Q}) = \frac{|\langle \vec{n}, \vec{P} - \vec{Q} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$$

Übung Recherchieren Sie die Formeln für die folgenden Abstände:

- Abstand $d(G, \vec{P})$ zwischen einer Geraden G und einem Punkt P im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$
- Abstand $d(G_1, G_2)$ zwischen zwei Geraden G_1, G_2 im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$
- Abstand $d(E, G)$ zwischen einer Ebene und einer Geraden im $\mathbb{R}^3$.

Satz 2.4.5 (Schnitt zweier Ebenen in $\mathbb{R}^3$) Gegeben seien zwei (affine) Ebenen in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} E_1 &= \vec{a}_1 + \mathbb{R} \cdot \vec{v}_1 + \mathbb{R} \cdot \vec{v}_2, \\ E_2 &= \vec{a}_2 + \mathbb{R} \cdot \vec{w}_1 + \mathbb{R} \cdot \vec{w}_2, \end{aligned}$$

wobei jeweils $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ linear unabhängig sind. Dann ist $S := E_1 \cap E_2$ wieder ein affiner Unterraum und es gelten:

(a) Ist $\dim S = 2$, so stimmen die Ebenen mit S überein, d.h. $S = E_1 = E_2$.

(b) Ist $\dim S = 1$, so ist der Schnitt eine Gerade.

(c) Ist $S = \emptyset$, so sind die Ebenen parallel zueinander.

Bemerkung Für die Berechnung des Schnitts kann man wie folgt vorgehen:

1. Möglichkeit: Schneiden sich zwei Ebenen, so können wir den Schnitt S ausrechnen, indem wir E_1 mit E_2 „gleichsetzen“, d.h. man sucht Zahlen α_1, α_2 und β_1, β_2 mit

   $$\vec{a}_1 + \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{a}_2 + \beta_1 \vec{w}_1 + \beta_2 \vec{w}_2$$

   und löst das entsprechende lineare Gleichungssystem.

2. Möglichkeit: Man berechnet zunächst die Normalenform von $E_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = d\}$ und „setzt E_2 ein“, d.h. man sucht Zahlen β_1 und β_2 mit

   $$\langle \vec{a}, \vec{a}_2 + \beta_1 \vec{w}_1 + \beta_2 \vec{w}_2 \rangle = d.$$

   Hier hat man nur eine Gleichung, die man nach β_1 oder β_2 auflösen muss.

Satz 2.4.6 (Windschiefe Geraden) Seien

$$\begin{aligned} G_1 &= \vec{P_1} + \mathbb{R} \cdot \vec{v_1} \\ G_2 &= \vec{P_2} + \mathbb{R} \cdot \vec{v_2} \end{aligned}$$

zwei Geraden in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, so dass die drei Vektoren

$$\vec{P_1} - \vec{P_2} \quad , \quad \vec{v_1} \quad , \quad \vec{v_2} \tag{6}$$

linear unabhängig sind. Dann liegen die Geraden windschief zueinander, d.h. $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ bzw. sie schneiden sich nicht.

Bemerkung Speziell für $n = 3$ kann man hier Determinanten benutzen. Ansonsten muss man das Gleichungssystem

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 = \vec{P_1} - \vec{P_2}$$

versuchen, zu lösen. Ist es nicht lösbar, so sind die Vekoten in 6 linear unabhängig.

3 Lineare Gleichungssysteme

Vorbereitung

- Studiport: LE11 Lineare Gleichungssysteme

Roter Faden

- Wir beobachten, dass in vielen Situationen (Theorie und Praxis) lineare Gleichungssysteme (LGS) auftauchen.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 14 \\ x_1 - 4x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

- Wir benutzen Matrizen, um mit LGS besser zu rechnen und die Lösungsmenge besser zu interpetieren.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

- Es stellt sich heraus, dass die Lösungsmenge eines LGS ein affiner Unterraum ist, für den wir massig Wissen im vorherigen Kapitel erworben haben:

$$\mathbb{L} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : A\vec{x} = \vec{b}\} = \vec{a} + \mathbb{R}\vec{v}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_2 + \mathbb{R}\vec{v}_3$$

  wobei $\vec{a}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ zu berechnen sind. Für diese Vektoren gilt sogar

$$\mathbb{L}_h = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : A\vec{x} = \vec{0}\} = \mathbb{R}\vec{v}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_2 + \mathbb{R}\vec{v}_3,$$

  sodass der Lösungsraum geschrieben werden kann als $\mathbb{L} = \vec{a} + \mathbb{L}_h$, wobei $\vec{a} \in \mathbb{L}$ eine beliebige Lösung des LGS ist.

- Insbesondere lernen wir den Zusammenhang zwischen der Dimension des Lösungsraums und einer speziellen Kennzahl der Matrix fest, dem sog. Rang.

$$\dim \mathbb{L}_h = n - \text{Rang}(A)$$

- Um die Lösungen konkret auszurechnen, lernen wir das **Gauß-Verfahren** kennen. Es überführt unser LGS in **Zeilenstufenform**, aus dem wir den Rang von A ablesen können, ob es überhaupt eine Lösung gibt und wie die einzelnen Variablen voneinander abhängen. Dadurch können wir sofort die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ ablesen.

- Zum Abschluss betrachten wir einige Beispiele.

- Zusatz: In diesem Kontext behandeln wir kurz das Matrix-Matrix-Produkt.

Lernziele

Wissen & Verständnis

- Sie kennen Matrizen und wissen, wie man sie einsetzt, um lineare Gleichungssysteme effizient zu beschreiben.
- Sie kennen den Zusammenhang zwischen linearen Gleichungssystemen und affinen Unterräumen.
- Sie wissen, was man unter dem Rang einer Matrix versteht und wie man ihn an der Zeilenstufenform ablesen kann.
- Sie kennen und verstehen die allgemeine Lösungstheorie linaerer Gleichungssysteme. Stichworte: homogener und (inhomogener) Lösungsraum, Zeilenstufenform, Rangformel.

Anwendung

- Sie können zu einem gegebenen Problem ein lineares Gleichungssystem aufstellen und umgekehrt die Lösung im Zusammenhang des Problems interpretieren.

  Sie beherrschen das Gauß-Verfahren und können es einsetzten, um...

  ... den Rang einer Matrix zu bestimmen,

  ... Vektoren auf lineare (Un-)Abhängigkeit zu untersuchen,

  ... lineare Gleichungssysteme zu lösen,

  ... oder den Durchschnitt von (affinen) Unterräumen zu bestimmen.

Erinnerung: Lernen auf Verständnis

- Voraussetzungen: Studiport LE11
- Lernen Sie die Definitionen und Sätze auswendig und versuchen Sie, sie zu verstehen.
- Lernen Sie, die Zusammenhänge der Begriffe zu verstehen. Finden Sie den roten Faden, indem Sie z.B. eine Mindmap erstellen.
- Nachdem Sie die obigen Punkte abgearbeitet haben, fällt Ihnen die Bearbeitung der Aufgaben wesentlich einfacher. Wenden Sie Ihr Wissen auf die Aufgaben an und nicht „umgekehrt“.
- Die Klausur besteht anteilig aus 25% Voraussetzungen aus der Schule (z.B. Studiport), 25% Wissen, 25% Anwendung/Können und 25% Verständnis (Zusammenhänge & Visualisierung).

3.1 LGS & Beispiele

Beispiel Sei U ein Unterraum im $\mathbb{R}^n$, der von den Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ erzeugt wird. Gesucht ist eine Basis von U. Dafür prüfen wir die Erzeuger auf lineare Abhängigkeit bzw. wir lösen das folgende Gleichungssystem:

$$x_1\vec{v}_1 + \ldots + x_m\vec{v}_m = 0$$

Übung 3.1.1 Sei U erzeugt von $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}$. Sind die Vektoren linear abhängig? Welchen Raum erzeugen sie? Geben Sie eine Basis an.

Beispiel 3.1.2 Sei U ein Unterraum im $\mathbb{R}^n$, der von den Vektoren $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_m$ erzeugt wird. Gesucht ist ein Vektor $\vec{x}$, der auf dem gesamten Unterraum U senkrecht steht, d.h. der Vektor $\vec{x}$ muss gleichzeitg auf allen Erzeugern senkrecht liegen und daher erfüllen:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}_1, \vec{x} \rangle &= 0 \\
\langle \vec{v}_2, \vec{x} \rangle &= 0 \\
&\vdots \\
\langle \vec{v}_m, \vec{x} \rangle &= 0
\end{aligned}$$

Rechnet man die Skalarprodukte aus, führt das zu einem linearen Gleichungssystem.

Übung 3.1.3 Seien die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ gegeben, die einen Unterraum U im $\mathbb{R}^5$ erzeugen. Wir suchen den Unterraum V, der othogonal zu U ist. Wie lautet eine Basis von V?

Beispiel Seien die affinen Ebenen $E_1 = a_1 + \mathbb{R}\vec{v}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_2$ und $E_2 = a_2 + \mathbb{R}\vec{w}_1 + \mathbb{R}\vec{w}_2$ gegeben in Parameterform im $\mathbb{R}^3$. Gesucht ist der Schnittraum $S = E_1 \cap E_2$, der leer, eine Gerade oder eine Ebene sein kann. Den Schnitt rechnen wir aus, indem wir E_1 mit E_2 „gleichsetzen“, d.h. man sucht Zahlen α_1, α_2 und β_1, β_2 mit

$$\vec{a}_1 + \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{a}_2 + \beta_1\vec{w}_1 + \beta_2\vec{w}_2.$$

Das ergibt ein lineare Gleichungssystem. Sind U und V beliebige affine Unterräume im $\mathbb{R}^n$ in Parameterform, so geht man sehr ähnlich vor.

Übung 3.1.4 Seien die folgenden Ebenen in $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\text{und} \quad E_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Was ist die Schnittmenge?

Beispiel Seien m affine Hyperebenen E_1 bis E_m in Normalenform gegeben durch

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{n}_1, \vec{x} \rangle = d_1\} \\
E_2 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{n}_2, \vec{x} \rangle = d_2\} \\
&\vdots \\
E_m &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{n}_m, \vec{x} \rangle = d_m\}
\end{aligned}$$

Sucht man nun den Schnittraum $S = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_m$, so muss man das folgende lineare Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{n}_1, \vec{x} \rangle &= d_1 \\
\langle \vec{n}_2, \vec{x} \rangle &= d_2 \\
&\vdots \\
\langle \vec{n}_m, \vec{x} \rangle &= d_m
\end{aligned}$$

Übung 3.1.5 Seien die beiden Hyperebenen

$$H_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x} \rangle = 0\} \quad \text{und} \quad H_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x} \rangle = 1\}$$

gegeben. Was ist der Schnitt?

Übung Lineare Gleichungssysteme tauchen in vielen Bereichen in der Praxis auf. Recherchieren Sie eigenständig Anwendungsbeispiele, z.B. Elektrotechnik (Kirchhoffsche Maschenregel, Knotenregel) oder Optimierungsprobleme für Produktionskosten.

In allen obigen Fällen hatten wir es mit dem gleichen System von linearen Gleichungen zu tun.

Definition 3.1.6

(a) Seien reelle Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit Indizes $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ und reelle Zahlen $b_1, \ldots, b_m$ gegeben. Ein **(lineares) Gleichungssystem** (kurz: **LGS**) ist durch m Gleichungen in n Unbekannten gegeben:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{7}$$

(b) Sind alle $b_1 = \ldots = b_m = 0$, so sprechen wir von einem **homogenen** LGS, und ansonsten von einem **inhomogenen** LGS.

(c) Die Menge aller $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, die das obige LGS lösen, nennen wir den **Lösungsraum** des LGS. Den Lösungsraum bezeichnen wir mit $\mathbb{L}$, d.h.

$$\mathbb{L} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \text{ löst LGS (7)}\}$$

(d) Zu jedem inhomogenen LGS können wir das entsprechende homogene LGS aufstellen, indem wir einfach $b_1 = \ldots = b_m = 0$ setzen. Den **Lösungsraum des homogenen LGS** bezeichnen wir mit $\mathbb{L}_h$, d.h.

$$\mathbb{L}_h = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \text{ löst LGS (7) mit } b_1 = \ldots = b_m = 0\}$$

Wir werden später sehen, dass $\mathbb{L}$ und $\mathbb{L}_h$ stark zusammenhängen.

3.2 Matrizen & LGS

Definition 3.2.1

(a) Seien reelle Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit Indizes $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ gegeben. Dann heißt das Zahlensystem

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = (a_{ij})$$

eine $(m \times n)$-**Matrix**. Sie besitzt m Zeilen und n Spalten. Der Index i zählt dabei die Zeilen, und der Index j zählt die Spalten. Die Zahl a_{ij} ist der Eintrag in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. Die Matrix A hat genau $m \cdot n$ Einträge.

(b) Die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen bezeichnen wir mit $M(m, n)$ oder $\mathbb{R}^{m \times n}$.

(c) Ist ferner ein LGS wie in (7) gegeben, so nennt man

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

die **erweiterte Koeffizientenmatrix** des LGS.

Ist speziell $\vec{b} = \vec{0}$, so schreiben wir einfach nur die Matrix auf, vergessen aber nie, dass das LGS homogen ist.

$$(A|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel

(a) (1×1)-Matrizen sind nichts anderes als reelle Zahlen, d.h. $M(1, 1) = \mathbb{R}$.

(b) $(m \times 1)$-Matrizen sind Spaltenvektoren mit m Einträgen, d.h. $M(m, 1) = \mathbb{R}^m$.

(c) $(1 \times n)$-Matrizen sind Zeilenvektoren mit n Einträgen, die man auch als Vektoren interpretieren kann, d.h. $M(1, n) = \mathbb{R}^n$.

(d) $(m \times m)$-Matrizen nennen wir **quadratisch**.

Definition 3.2.2
Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und eine $(m \times n)$-Matrix A gegeben. Dann ist das **Matrix-Vektor-Produkt** $A\vec{x}$ definiert als

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Das Produkt $A\vec{x} = \vec{y}$ liefert einen Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$, d.h. in diesem Sinne bildet eine Matrix A einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ auf einen Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ ab. Wir schreiben dafür:

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad A\vec{x} = \vec{y}$$

Satz 3.2.3 (Rechenregeln für das Matrix-Vektor-Produkt) Seien $A \in M(m,n)$, $\vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gelten:

(a) $A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z}$

(b) $A(\alpha\vec{x}) = \alpha(A\vec{x})$

Beweis Beides folgt aus der obigen Definition und dem Distributivgesetz. $\square$

Satz 3.2.4 (Zusammenhang LGS & Matrix) Jedes LGS kann als erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\vec{b})$ oder als Matrix-Vektor-Produkt $A\vec{x} = \vec{b}$ geschrieben werden, und umgekehrt induziert jede erweiterte Koeffizientenmatrix oder jedes Matrix-Vektor-Produkt ein LGS. Dann ist der (inhomogene) Lösungsraum des LGS die Menge

$$\mathbb{L} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{b}\},$$

also die Menge aller Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, die unter A auf $\vec{b}$ abgebildet werden. Der dazugehörige homogene Lösungsraum ist dann

$$\mathbb{L}_h = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\},$$

also die Menge aller Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, die unter A auf den Nullvektor abgebildet werden.

Beweis Hier ist nichts zu zeigen. Wir müssen einfach nur die entsprechenden Definitionen benutzen. $\square$

Der Zusammenhang zwischen LGS und Matrizen erlaubt es uns, den Lösungsraum als eine Menge mit einer linearen Struktur zu verstehen. Sofort werden durch die Rechenregeln für Matrizen auch Rechenregln für Lösungen der LGS ersichtlich.

Lemma 3.2.5 (Rechenregeln für Lösungen eines LGS)

(a) Ist $\vec{x} \in \mathbb{L}$ eine Lösung des (inhomogenen) LGS und $\vec{x}_0 \in \mathbb{L}_h$ eine Lösung des zugehörigen homogenen LGS, so ist auch $\vec{x} + \vec{x}_0$ eine Lösung des LGS, d.h. $\vec{x} + \vec{x}_0 \in \mathbb{L}$.

(b) Sind $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{L}$ Lösungen des (inhomogenen) LGS, so ist die Differenz $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ eine Lösung des homogenen LGS, d.h. $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \mathbb{L}_h$.

Beweis Sei $(A|\vec{b})$ die zum LGS zugehörige Koeffizientenmatrix. Dann gelten wegen Satz 3.2.3

(a) $A(\vec{x} + \vec{x}_0) = A\vec{x} + A\vec{x}_0 = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$

(b) $A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$

$\square$

Greifen wir nun auf die Theorie aus der Vektorrechnung zurück, können wir die Struktur der Lösungsräume ganz genau angeben.

Satz 3.2.6 (Der Lösungsraum ist ein affiner Unterraum.) Der homogene Lösungsraum $\mathbb{L}_h$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Der (inhomogene) Lösungsraum $\mathbb{L}$ ist ein affiner Unterraum des R^n, der als

$$\mathbb{L} = \vec{x} + \mathbb{L}_h$$

dargestellt werden kann, wobei $\vec{x}$ eine beliebige Lösung des LGS ist (sofern es eine Lösung gibt!). Insbesondere besitzt der homogene Lösungsraum eine Basis und eine Dimension.

Beweis Zeige aus dem Exkurs die Axiome 1 bis 3 und wende den Satz über das minimale Erzeugensystem auf $\mathbb{L}_h$ an. Daraus folgt, dass $\mathbb{L}_h$ eine Basis und Dimension hat. Aber wieso kann man $\mathbb{L}$ schreiben als $\vec{x} + \mathbb{L}_h$? Wegen Lemma 3.2.5 (a) haben wir:

$$\vec{x} + \mathbb{L}_h \subset \mathbb{L}$$

Andererseits haben wir wegen Lemma 3.2.5 (b) auch

$$\mathbb{L} - \vec{x} \subset \mathbb{L}_h \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L} \subset \vec{x} + \mathbb{L}_h.$$

Insgesamt muss also $\mathbb{L} = \vec{x} + \mathbb{L}_h$ sein. $\square$

3.3 Rang einer Matrix

Bevor wir eine Basis des Lösungsraums konkret berechnen, beleuchten wir ein wenig die Theorie hinter den LGS bzw. Matrizen. Dazu sezieren wir zunächst die Matrizen ein wenig.

Definition 3.3.1

(a) Eine $(m \times n)$-Matrix besteht aus n Spaltenvektoren

$$A = (\vec{S}_1, \ldots, \vec{S}_n), \qquad \text{wobei } \vec{S}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

Diese Spaltenvektoren erzeugen einen Unterraum im $\mathbb{R}^m$, den sog. **Spaltenraum**

$$\mathsf{SR}(A) = \mathbb{R}\vec{S}_1 + \mathbb{R}\vec{S}_2 + \ldots + \mathbb{R}\vec{S}_n.$$

(b) Der Spaltenraum besitzt als Unterraum natürlich eine Basis und eine Dimension. Die Dimension des Spaltenraums nennt man den **Spaltenrang** oder nur den **Rang von** A und schreibt Rang(A).

(c) Da SR(A) von n Vektoren erzeugt wird, ist $0 \leq \text{Rang}(A) \leq n$.

(d) Im Hinblick auf die Definition des Matrix-Vektor-Produkts kann man den Spaltenraum auch umschreiben als

$$\mathsf{SR}(A) = \{x_1\vec{S}_1 + x_2\vec{S}_2 + \ldots + x_n\vec{S}_n : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\},$$

d.h. die er ist Menge aller möglichen Produkte von A mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Daher nennt man auch $SR(A)$ das **Bild von** A und schreibt Bild(A) statt SR(A).

Definition 3.3.2

(a) Eine $(m \times n)$-Matrix besteht aus m Zeilenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} \vec{Z}_1 \\ \vec{Z}_2 \\ \vdots \\ \vec{Z}_m \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } \vec{Z}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \quad \text{für } i = 1, \ldots, m.$$

Diese Zeilenvektoren können als Spaltenvektoren interpretiert werden und erzeugen einen Unterraum im $\mathbb{R}^n$, den sog. **Zeilenraum**

$$\mathsf{ZR}(A) = \mathbb{R}\vec{Z}_1 + \mathbb{R}\vec{Z}_2 + \ldots \mathbb{R}\vec{Z}_m.$$

(b) Der Zeilenraum besitzt als Unterraum ebenfalls eine Basis und eine Dimension, die man als **Zeilenrang** bezeichnet.

(c) Da $\mathsf{ZR}(A)$ von m Vektoren erzeugt wird, ist $0 \leq \dim \mathsf{ZR}(A) \leq m$.

Satz 3.3.3 (Zeilenrang=Spaltenrang) Der Zeilenrang einer Matrix ist gleich seinem Spaltenrang. Von daher sprechen wir nur noch vom Rang einer Matrix. Es gilt:

$$0 \leq \mathsf{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}$$

Beweis Der Beweis ist recht schwierig und basiert auf dem Gauß-Algorithmus. Daher verweisen wir auf Bücher zur Linearen Algebra, z.B. von Falko Lorenz, und auf den nachfolgenden Abschnitt, indem wir uns den Gaußalgorithmus näher anschauen. Weiß man, dass der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang ist, folgt wegen der Abschätzungen für diese Ränge auch die Abschätzung $0 \leq \mathsf{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}$, wobei $\min\{m, n\}$ das Minimum der beiden Zahlen m, n meint. □

Satz 3.3.4 (Rangformel) Sei ein LGS $(A|\vec{b})$ gegeben, wobei A eine $(m \times n)$-Matrix ist. Dann gilt:

$$\mathsf{Rang}(A) = n - \dim \mathbb{L}_h$$

bzw.

$$\dim \mathbb{L}_h = n - \mathsf{Rang}(A)$$

Beweis Der Beweis ist ebenfalls recht schwierig und erklärt sich durch das genaue Studium des Gauß-Verfahrens, was wir im nächsten Kapitel kennenlernen werden. □

3.4 Der Gauß-Algorithmus

Carl Friedrich Gauß[10]

[10] 1777 – 1855 (Quelle: Wikipedia)

Satz 3.4.1 (Invarianz des LGS unter Zeilenoperationen) Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eines LGS (7) bleibt unverändert unter folgenden sog. **elementaren Zeilenoperationen**:

- Vertauschung von Zeilen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \end{array}\right)$$

  Tipp: Tausche derart, dass möglichst viele Nullen unten links stehen.

- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot\lambda \\ \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} & \lambda b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

  Tipp: Am einfachsten rechnet es sich mit Matrizen, die ganze Zahlen beinhalten. Sollten etwa Brüche in einer Zeile auftauchen, kann man die Zeile mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen multiplizieren, so dass sich die Nenner wegkürzen und nur Zähler übrig bleiben.

- Ersetzen einer Zeile durch die Summe mit einer anderen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}+a_{11} & a_{22}+a_{12} & \dots & a_{2n}+a_{1n} & b_2+b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- Meistens werden die beiden letzteren Zeilenoperationen in einem Zug getätigt, also ein Vielfaches einer Zeile wird mit dem Vielfachen einer anderen Zeile addiert und durch eine der Zeilen ersetzt.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot\lambda \\ |\cdot\mu \; + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \mu a_{21}+\lambda a_{11} & \mu a_{22}+\lambda a_{12} & \dots & \mu a_{2n}+\lambda a_{1n} & \mu b_2+\lambda b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Tipp: Mit dieser Methode lassen sich Brüche vermeiden, wenn man $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ wählt. Das ist von Vorteil, wenn die Matrix nur aus ganzen Zahlen besteht.

Trick: Wählt man $\lambda = -a_{21}$ und $\mu = a_{11}$ im obigen Beispiel, so wird der $(2,1)$-Eintrag gleich Null, da

$$\mu a_{21} + \lambda a_{11} = a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11} = 0.$$

Beweis Die Zeilen repräsentieren die einzelnen Gleichungen des Gleichungssystems. Sie hängen nicht ab von der Reihenfolge, in der sie gelöst werden. Daher kann man die Zeilen vertauschen. Die Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null oder die Addition einer Zeile zu einer anderen sind eine Äquivalenzumformungen. Daher ändert sich die Lösungsmenge ebenfalls nicht. □

Satz 3.4.2 (LGS in Zeilenstufenform) Jedes LGS (7) kann man durch elementare Zeilenoperationen auf **Zeilenstufenform** (kurz: **ZSF**) bringen, die folgende Gestalt hat, wobei die ersten Koeffizienten a'_{ij} in jeder Zeile ungleich Null sind:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a'_{1p}x_p & + & ... & + & a'_{1q}x_q & + & ... & + & a'_{1s}x_s & + & ... & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & & & & a'_{2q}x_q & + & ... & + & a'_{2s}x_s & + & ... & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & a'_{rs}x_s & + & ... & + & a'_{rn}x_n & = & b'_r \\ & & & & & & & & & & & & 0 & = & b'_{r+1} \\ & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & & & & & 0 & = & b'_m \end{array} \tag{8}$$

Diese Prozedur nennen wir **Gauß-Verfahrens** oder **Gauß-Algorithmus**. Wegen des Satzes 3.4.1 ist der Lösungsraum des LGS in ZSF gleich dem Lösungsraum des ursprünglichen LGS. Allerdings ist das LGS in ZSF durch sehr einfache Iterationen zu lösen.

Beweis Wir nutzen Satz 3.4.1, um das Gleichungssystem schrittweise iterativ zu vereinfachen. Unser Ziel ist es, das System in Zeilenstufenform zu bringen. Um Schreibarbeit zu sparen, notieren wir statt (7) nur die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & * & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & * & a_{2n} & b_2 \\ * & * & * & * & * \\ a_{m1} & a_{m2} & * & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Das Symbol $*$ deutet an, dass an dieser Stelle die entsprechenden Einträge vorhanden sind, die nicht unbeding gleich Null sein müssen.

Schritt „Tauschen“: Steht in den ersten Spalten ein Nullvektor, so ignorieren wir diese und betrachten im folgenden stattdessen die erste Spalte, die nicht der Nullvektor ist, sagen wir

Spalte p.

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{1p} & * & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2p} & * & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mp} & * & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Jetzt kann es sein, dass $a_{1p} = 0$ ist. In diesem Falle tauschen wir mit einer Zeile, in der der erste Eintrag ungleich Null und möglichst einfach ist, z.B. $a_{1p} = 1$. Um die Beschreibung zu vereinfachen, gehen wir hier davon aus, dass dies oben schon geschehen ist.

Schritt „Ersetzen“: Nun multiplizieren wir $(-a_{2p})$ mit der 1. Zeile und a_{1p} mit der 2. Zeile und addieren die 1. zur 2. Zeile. Unterhalb von a_{1p} entsteht der Eintrag Null, während sich alle anderen Einträge innerhalb der 2. Zeile ändern. Wir bezeichnen die geänderten Einträge mit $\widetilde{a_{2j}}$ bzw. $\widetilde{b_2}$ bezeichnen.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{1p} & * & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2p} & * & a_{2n} & b_2 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{3p} & * & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mp} & * & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot (-a_{2p}) \\ \mid \cdot a_{1p} \; + \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{1p} & * & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{b_2} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{3p} & * & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mp} & * & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Das wiederholen wir mit den anderen Zeilen unterhalb der 2. Zeile, bis wir zur letzten Zeile m gelangt sind. Wir bezeichnen die geänderten Einträge mit $\widetilde{a_{ij}}$ bzw. $\widetilde{b_i}$ bezeichnen.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{1p} & * & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{b_2} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{3p} & * & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mp} & * & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot (-a_{3p}) \quad \cdots\cdots \quad \mid \cdot (-a_{mp}) \\ \\ \mid \cdot a_{1p} \; + \\ \\ \mid \cdot a_{1p} \; + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{1p} & * & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{b_2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \widetilde{a_{3n}} & \widetilde{b_3} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & * & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \widetilde{a_{mn}} & \widetilde{b_m} \end{array}\right)$$

Wir heben die Spalten rechts neben Spalte p unterhalb der 1. Zeile rot hervor und markieren den Eintrag a_{1p} blau. Diesen nennen wir **Pivotzahl**.

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & a_{1p} & * & * & * & & b_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \widetilde{a_{2,p+1}} & * & \widetilde{a_{2n}} & & \widetilde{b_2} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & * & * & * & & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \widetilde{a_{m,p+1}} & * & \widetilde{a_{mn}} & & \widetilde{b_m}
\end{array}\right)$$

Für die rot markierte Untermatrix wenden wir Schritte „Tauschen“ und „Ersetzen“ erneut an. Diese Untermatrix wird dann wieder die obige Gestalt haben, nur mit anderen Indizes und veränderten Koeffizienten natürlich, die wir mit a'_{ij} bzw. b'_i bezeichnen. Diese Prozedur wenden wir solange an, bis wir bei der letzten Spalte angekommen sind.

Wir erhalten schließlich eine Matrix in **Zeilenstufenform (ZSF)**:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & a'_{1,p_1} & * & * & * & * & * & * & * & * & b'_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{2,p_2} & * & * & * & * & * & b'_2 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & * & * & * & * & b'_3 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * & * & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{r,p_r} & \cdots & * & b'_r \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m
\end{array}\right) \tag{9}$$

Von den blauen Zahlen $a_{1,p}, \ldots, a_{r,p_r}$ (sog. Pivotzahlen) gibt es nun genau r Stück. Wir sehen, dass nach der r-ten Zeile die Matrix nur noch Nullzeilen aufweist.

Die restlichen $b_{r+1}, \ldots, b_m$ können gleich Null sein, müssen aber nicht. Das hat aber wesentlichen Einfluss auf die Lösbarkeit des LGS, wie wir gleich sehen werden.

□

Beispiel 3.4.3 Sei das folgende LGS gegeben:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
3 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Wir bringen das LGS mit dem Gauß-Verfahren auf ZSF.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
3 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 0 & 3
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\mid \cdot(-2) \quad \mid \cdot(-1) \quad \mid \cdot(-3) \\
+ \\
+ \\
+
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\mid \cdot(-1) \\
\\
+
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
\mid \cdot(-1) \\
+
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Wir sehen, dass hier $r = 3$ die Anzahl der Pivotzahlen (blau) ist.

Satz 3.4.4 (Zusammenhang Rang & ZSF & Lösungsraum)

(a) An der Zeilenstufenform läßt sich der Rang von A ablesen: Der Rang von A ist gleich der Anzahl der nicht-verschwindenden Zeilen. In der Darstellung (9) ist das genau

$$\text{Rang(A)} = r.$$

(b) Es gibt entweder keine Lösung oder der Lösungsraum $\mathbb{L}$ hat die Dimension $n - r = n - \text{Rang}(A)$. Entweder $\mathbb{L} = \emptyset$ oder $\dim \mathbb{L} = n - r = n - \text{Rang}(A)$

(c) In jedem Fall hat $\mathbb{L}_h$ wegen der Rangformel die Dimension $n-r$. In jedem Fall: $\dim \mathbb{L}_h = n - r = n - \text{Rang}(A)$

Beweis Der Gauß-Algorithmus hat r linear unabhhängige Zeilenvektoren erzeugt. Daher hat der Zeilenraum die Dimension gleich r. Da die Dimension des Zeilenraums der Zeilenrang ist und wegen Satz 3.3.3 der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang gleich dem Rang der Matrix ist, gilt $r = \text{Rang(A)}$. $\square$ $\square$

Satz 3.4.5 (Rückwärtssubstitution) Ist das LGS in ZSF wie in (9) überführt, lässt sich der Lösungsraum durch **Rückwärtssubstitution** konkret angeben.

Beweis Schreiben wir das System (9) wieder als Gleichungssystem aus, so erhalten wir das folgende LGS. Wir indizieren die Pivotzahlen (blau) mit p, q, r statt p_1, p_2, p_r.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{1p}x_p & + & \dots & + & a_{1,q}x_q & + & \dots & + & a_{1s}x_s & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & & a_{2q}x_q & + & \dots & + & a_{2s}x_s & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & a_{rs}x_s & + & \dots & + & a_{rn}x_n & = & b_r \\ & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\ & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_m \end{array} \tag{10}$$

Dieses Gleichungssystem (10) hat die gleiche Lösungsmenge wie das Ausgangssystem (7), da wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt haben. Wir können an (10) also die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems (7) ablesen. Dies geschieht durch Rückwärtssubstitution:

Gesucht sind diejenigen Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, für die die Gleichungen (10) erfüllt sind.

1. Fall: Zunächst fällt auf (rot), dass (10) nur dann gelten kann, wenn

$$b_{r+1} = b_{r+2} = \dots = b_m = 0$$

ist. Ansonsten gibt es einen Widerspruch, also kein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, das die Gleichungen erfüllt. Also gibt es **keine Lösung** und $\mathbb{L} = \emptyset$. Das bedeutet aber auch, dass $\mathbb{L}_h$ **immer** eine Lösung hat. Zumindest ist stets $\vec{0} \in \mathbb{L}_h$.

2. Fall: Angenommen $b_{r+1} = b_{r+2} = \dots = b_m = 0$. Betrachten wir die die letzte Gleichung in (10), d.h. Zeile r:

$$a_{rs}x_s + a_{r,s+1}x_s + \ldots + a_{rn}x_n \quad = \quad b_r$$

Sie enthält die Variablen $x_s, \ldots, x_n$, wobei x_s **abhängig von** $x_{s+1}, \ldots, x_n$ ist, und $x_{s+1}, \ldots, x_n$ **frei wählbare** Parameter sind. Wir lösen nach x_s auf:

$$x_s \quad = \quad \frac{1}{a_{rs}}\left(b_r - a_{r,(s+1)}x_{s+1} - \ldots - a_{rn}x_n\right)$$

Dieses Vorgehen ist möglich, da $a_{rs} \neq 0$ ist, denn so wurde die Pivotzahl gewählt. (Wir hätten auch eine andere Variable wählen können. Bestenfalls solch eine, die einen einfachen Koeffizienten hat.)

Wir haben also in Zeile r einige frei wählbare Variablen $x_{r,s+1}, \ldots, x_{rn}$ und eine abhängige Variable x_{rs}.

Diese Prozedur wenden wir auf die Pivotzahl (blau) in der darüber liegenden Zeile $r-1$ an, dann in Zeile $r-2$, usw., bis wir zu den Pivotzahlen a_{2q} in Zeile 2 und schließlich a_{1p} in Zeile 1 angekommen sind.

In jedem dieser Schritte lösen wir stets nach den jeweiligen Variablen der Pivotzahlen (blau) auf und erhalten:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{a_{rs}}\left(b_r - a_{r,s+1}x_{s+1} - \dots - a_{rn}x_n\right) \\ &\vdots \\ x_q &= \frac{1}{a_{2s}}\left(b_2 - a_{2,q+1}x_{q+1} - \dots - a_{2n}x_n\right) \\ x_p &= \frac{1}{a_{1s}}\left(b_1 - a_{1,p+1}x_{p+1} - \dots - a_{1n}x_n\right) \end{aligned}$$

Es kann jetzt sein, dass in der Auflösung von x_q auch x_s auftaucht, und in x_p auch x_q und x_s. Das setzen wir dann entsprechend in x_q bzw. x_p usw. ein.

Wir stellen fest, dass wir

- insgesamt n Variablen $x_1, \dots, x_n$ haben,
- davon r abhängige $x_s, \dots, x_q, x_p$ (bei den Pivotzahlen)
- und $n - r$ restliche frei wählbare Parameter.

Die abhängigen, aufgelösten Variablen setzen wir in einen Vektor $\vec{x}$ ein:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \\ \vdots \\ x_q \\ \vdots \\ x_s \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{a_{1s}}\left(b_1 - a_{1,p+1}x_{p+1} - \dots - a_{1n}x_n\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{a_{2s}}\left(b_2 - a_{2,q+1}x_{q+1} - \dots - a_{2n}x_n\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{a_{rs}}\left(b_r - a_{r,s+1}x_{s+1} - \dots - a_{rn}x_n\right) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor beinhaltet nur noch freie Variablen und Zahlen, die von keiner Variable abhängen. Nun sortieren wir diesen Vektor nach den übrig gebliebenen freien Variablen:

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b_1}{a_{1s}} \\ \vdots \\ \frac{b_2}{a_{2s}} \\ \vdots \\ \frac{b_r}{a_{rs}} \\ \vdots \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots$$

$$\dots + x_{p+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\frac{a_{1,p+1}}{a_{1s}} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_{q+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ -\frac{a_{2,q+1}}{a_{2s}} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_{s+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ * \\ -\frac{a_{r,s+1}}{a_{rs}} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots$$

Zur Erinnerung: Die Einheitsvektoren entstehen immer dann, falls es ganze Nullspalten in der ZSF gibt.

Schließlich erhalten wir $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-r}$ Vektoren, die den Lösungsraum erzeugen:

$$\mathbb{L} = \vec{a} + \mathbb{R}\vec{v}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_2 + \ldots + \mathbb{R}\vec{v}_{n-r},$$

wobei $\mathbb{L}_h = \mathbb{R}\vec{v}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_2 + \ldots + \mathbb{R}\vec{v}_{n-r}$. $\square$

Beispiel 3.4.6 Wir erinnern uns an Beispiel 3.4.3, in dem wir das folgende LGS auf ZSF gebracht haben

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Untersuchung der ZSF: Der Rang ist gleich 3, d.h. nach der Rangformel muss die Dimension von $\mathbb{L}_h$ gleich $4 - 3 = 1$ sein. Anhand der letzten Zeile sehen wir, dass das LGS lösbar ist. Die Variable x_4 ist frei, aber x_1, x_2, x_3 sind abhängig.

Mit Hilfe der Rückwärtssubstitution wollen wir es lösen, untersuchen vorher aber die ZSF:

- Die 3. Zeile liefert: $x_3 = 1 - x_4$
- Die 2. Zeile liefert: $x_2 = 2 + x_4$
- Die 1. Zeile liefert: $x_1 = 0$

Daher gilt für den Lösungsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + x_4 \\ 1 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und den Lösungsraum

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{L}_h.$$

Korollar 3.4.7 Sei A eine quadratische Matrizen $A \in M(n, n)$ mit vollem $\text{Rang}(A) = n$. Dann hat die Zeilenstufenform die Gestalt:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & * & * & * & * & b_1 \\ 0 & a_{22} & * & * & * & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \tag{11}$$

Ferner gibt es für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ **genau eine Lösung**.

Korollar 3.4.8 Seien n Vektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Sie sind genau dann linear abhängig, wenn für die Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n \end{pmatrix} \quad \in \quad M(m, n)$$

gilt:

$$\text{Rang}(A) < n.$$

Die Vektoren sind also genau dann linear unabhängig, wenn $\text{Rang}(A) = n$ ist. Da der Rang einer $(m \times n)$-Matrix nicht größer als m sein kann impliziert dies: **Mehr als m Vektoren sind in $\mathbb{R}^m$ immer linear abhängig!**

Beispiele

Beispiel (für ein LGS, dessen inhomogene Lösungsmenge leer, aber dessen homogene Lösungungsmenge nicht leer ist.)

Angenommen, ein LGS sei bereits ins ZSF überführt worden, welches die folgende Gestalt hat:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dann sehen wir anhand der letzten Zeile den Widerspruch $0 = 1$, d.h. das (inhomogene) LGS hat keine Lösung. Es ist $\mathbb{L} = \emptyset$. Allerdings ist der Rang gleich 3, sodass $\mathbb{L}_h$ die Dimension $4 - 3 = 1$ haben muss nach der Rangformel.

Die Lösung des homogenen LGS bestimmen wir durch Rückwärtssubstitution:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass die Variable x_3 frei und die Variablen x_1, x_2 und x_3 abhängig sind. Die 3. Zeile liefert zunächst $x_4 = 0$. Das setzen wir in die 2. Zeile ein und erhalten $x_2 + x_3 = 0$, also $x_2 = -x_3$. Die erste Zeile liefert den Zusammenhang

$$x_1 = -\frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{3}x_3.$$

Als Lösungsvektor erhalten wir dann

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbb{L}_h = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel Betrachte Übung 3.1.1.

Sei U erzeugt von $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sind die Vektoren linear abhängig?

Welchen Raum erzeugen sie? Geben Sie eine Basis an.

Gesucht sind Zahlen $x_1, \ldots, x_4$ mit

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Das führt zu einem homogenen LGS

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bringen das LGS mit dem Gauß-Verfahren auf ZSF (siehe Beispiel 3.4.3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Untersuchung der ZSF: Der Rang der Matrix ist gleich 3, so dass nach der Rangformel $\dim \mathbb{L}_h = 5 - 3 = 2$ sein muss. Die Variablen x_4, x_5 sind frei, aber x_1, x_2, x_3 sind abhängig.

Durch Rückwärtssubstitution erhalten wir:

Aus der 3. Zeile: $x_3 = -x_4 - x_5$
Aus der 2. Zeile: $x_2 = x_4 - 2x_5$
Aus der 1. Zeile: $x_1 = 0$

Daher gilt für den Lösungsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_4 - 2x_5 \\ -x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und den homogenen Lösungsraum

$$\mathbb{L}_h = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Interpretation:

- Ein Vektor des Lösungsraums $\mathbb{L}_h$ beinhaltet aufgrund der Konstruktion des LGS diejeinigen Koeffizienten $x_1, \ldots, x_5$, die nötig sind, um die urpsrünglichen Vektoren gegenseitig als Linearkombination auszudrücken:

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (12)$$

- Wäre etwa $\mathbb{L}_h = \{\vec{0}\}$, so wären die Vektoren in (12) linear unabhängig. Ansonsten sind sie linear abhängig. Anhand der Dimension von $\mathbb{L}_h$ bzw. dem Rang der Matrix kann man auf die Dimension des Unterraums U schließen, der von den Vektoren in (12) erzeugt wird. Es ist in diesem speziellen Beispiel nämlich genau der Spaltenraum der Matrix. Daher ist der Rang der Matrix auch die Dimension von U, in diesem Fall gleich 3.

- Oben haben wir die folgenden Abhängigkeiten der Variablen festgestellt:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = x_4 - 2x_5 \quad \text{und} \quad x_3 = -x_4 - x_5,$$

wobei die Variablen x_4 und x_5 frei wählbar sind. Setzen wir das in (12) ein, so erhalten wir:

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_4 - 2x_5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-x_4 - x_5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (13)$$

Wählt man nun $x_4 = 0$ und $x_5 = -1$, so wird diese Gleichung (13) nach Umstellen zu:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 - 2(-1)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0 - (-1)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D.h. wir können $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der anderen ausdrücken.

Wählt man nun $x_4 = -1$ und $x_5 = 0$, so wird die obige Gleichung (13) nach Umstellen zu:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1 - 2 \cdot 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-(-1) - 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D.h. wir können $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der restlichen ausdrücken, und der Unterraum U wird nur von diesen restlichen erzeugt.

- **Kurzum:** In der Regel können diejenigen Vektoren aus dem Erzeugendensystem herausgenommen werden, deren Koeffizienten genau die freien Variablen sind.

- Eine Basis des Unterraums U ist also $\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

Beispiel Betrachte Übung 3.1.5. In diesem Beispiel führen wir alles auf, was wir in Kapitel 3 gelernt haben. Speziell Zeilenraum und Spaltenraum müssen gängigerweise nicht berechnet werden, um den Rang einer Matrix zu bestimmen. Wir führen es hier dennoch vor.

Seien $H_1 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x} \rangle = 0 \}$ und $H_2 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x} \rangle = 1 \}$ zwei Hyperebenen im $\mathbb{R}^5$.

Wir suchen den Schnitt $S = H_1 \cap H_2$.

Das zugehörige LGS lautet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Das zugehörige homogene LGS lautet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Als Koeffizientenmatrizen sind das

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der inhomogene bzw. homogene Lösungsraum sind

$$\mathbb{L} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

bzw.

$$\mathbb{L}_h = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Zum Beispiel ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}$, wohingegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_h$, was man direkt raten kann. Auch sehen wir direkt, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}.$$

Aber es sind nicht alle Lösungen. Es gibt mehr. Dafür berechnen wir den Spaltenrang der Matrix, der die Dimension des Spaltenraumes ist:

$$\mathsf{SR}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$$

Daher ist der Spaltenrang gleich 2. Der Zeilenraum

$$\mathsf{ZR}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat ebenfalls die Dimension gleich 2. Da Zeilenrang gleich Spaltenrang ist, ist der Rang von A gleich 2. Nach der Rangformel ist die Dimension von $\mathbb{L}_h$ gleich $5 - 2 = 3$.

Da es mindestens eine Lösung des LGS gibt, nämlich $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ist auf jeden Fall

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{L}_h,$$

und $\mathbb{L}$ hat als affiner Unterraum ebenfalls die Dimension gleich 3. Wie lautet eine Basis?

In der erweiterten Koeffizientenmatrix des inhomogenen LGS multiplizieren wir die erste zeile mit (-3) und addieren sie zur zweiten Zeile. Das ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Anschließend multiplizieren wir die zweite Zeile mit (-1). Das ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

In der zweiten Zeile ist x_2 abhängig von x_3 und x_4,

$$x_2 = -1 + x_3 + x_4$$

und x_3, x_4, x_5 sind freie Variablen. In der ersten Zeile ist

$$x_1 = -x_2 = 1 - x_3 - x_4,$$

d.h. auch x_1 ist abhängig von x_3 und x_4.

Ingesamt sieht ein allgemeiner Lösungsvektor wie folgt aus:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_3 - x_4 \\ -1 + x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daher ist

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei automatisch

$$\mathbb{L}_h = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Interpretation: Der Lösungsraum $\mathbb{L}$ ist der Durchschnitt der beiden Hyperebenen H_1 und H_2 im $\mathbb{R}^5$.

Exkurs: Matrix-Matrix-Produkt

Definition 3.4.9 Für zwei Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(m,n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert man die Addition komponentenweise

$$A + B \quad := \quad (a_{ij} + b_{ij})_{ij} \quad \in \ M(m,n)$$

und die Skalarmultiplikation komponentenweise

$$\lambda \cdot A \quad := \quad (\lambda \cdot a_{ij})_{ij} \quad \in \ M(m,n).$$

Definition 3.4.10 Für zwei Matrizen $A = (a_{ij}) \in M(m,n)$ und $B = (b_{jk}) \in M(n,l)$ definiert man das Produkt

$$A \cdot B = (c_{ik}) \quad \in \ M(m,l)$$

durch

$$c_{ik} \quad := \quad \langle Z_i(A), S_k(B)\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

d.h. man bildet für den Eintrag in Zeile i und Spalte k das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B.

Achtung! Um ein Matrix-Matrix-Produkt überhaupt aufstellen zu können, mss die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmen. Man kann sich merken:

$$„M(m,n) \cdot M(n,l) = M(m,l)“$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \\ & \end{pmatrix},$$

wobei $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ & \end{pmatrix},$$

wobei $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \end{pmatrix},$$

wobei $c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

wobei $c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{42}$.

Satz 3.4.11 (Rechenregeln für das Matrix-Matrix-Produkt) Es gelten:

(a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (Assoziativgesetz)

(b) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

(c) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (Distributivgesetze)

(d) **Achtung!** Das Kommuatitivgesetz für Matrizen gilt nicht!

(e) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(f) **Achtung!** Im Allgemeinen ist: $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$!!!

Übung Zum Thema Matrizenmultiplikation finden Sie im Internet zahlreiche Materialien und Lehrvideos. Auch im unserem Moodle-Kurs finden Sie eine randomisierte Aufgabe zum Einüben.

Beispiel (Skalarprodukt) Wie wir gesehen haben, basiert das Matrix-Matrix-Produkt auf dem Skalarprodukt. Daher ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Hier haben wir den Spezialfall „$M(1,n) \cdot M(n,1) = M(1,1)$". Wir erinnern uns, dass $M(n,1) = \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren, $M(1,m) = \mathbb{R}^m$ Zeilenvektoren und $M(1,1) = \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.

Beispiel (Tensorprodukt) Wir betrachten den Spezialfall „$M(n,1) \cdot M(1,n) = M(n,n)$" und erinnern uns daran, dass $M(n,n)$ quadratische Matrizen sind. Das **Tensorprodukt** zwischen zwei Vektoren ist definiert als:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

Das Tensorprdukt wird u.a. in der Physik häufig verwendet.

Beispiel (Drehmatrix) Gegeben sei ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Die Matrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

bildet den Vektor $\vec{v}$ auf einen Vektor $D_\alpha \vec{v}$ ab, der aus $\vec{v}$ entsteht, indem man ihn um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn dreht. Es ist

$$D_\alpha \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Eine Drehmatrix um 90° ist zum Beispiel

$$D_{\frac{\pi}{2}} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \vec{v}_\perp.$$

Erinnern wir uns daran, dass wir Vektoren im $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten schreiben können:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

Das eingesetzt in die Drehmatrix liefert:

$$D_\alpha \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Klar ist nun, dass $\gamma = \alpha + \beta$ sein sollte. Das dies auch tatsächlich der Fall ist, liegt an den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus, die wir im nächsten Kapitel 4 kennenlernen.

Beispiel (Komplexe Zahlen als Matrix) Da wir jeden Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ auch als komplexe Zahl $z = x + iy$ schreiben können, sehen wir leicht:

$$iz = -y + ix = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir können also i mit $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ identifizieren. Allgemein kann man durch diesen Zusammenhang jede komplexe Zahl $z = x + iy$ mit der Matrix $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ identifizieren. Dadurch kann das Produkt zw von zwei komplexen Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ auch als Matrix-Vektor-Produkt verstanden werden:

$$zw = (x + iy)(u + iv) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

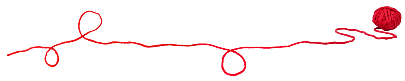
Mit komplexen Zahlen beschäftigen wir uns in Kapitel 10.

4 Folgen und Funktionen

Vorbereitung

- Studiport: LE3, LE5, LE7, LE8

Roter Faden



- Wir betrachten Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und definieren mathematisch sauber die Konvergenz der Folge gegen einen Grenzwert a,
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$
- Das ermöglicht, Grenzwerte für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu definieren,
$$\lim_{x\to a} f(x) = c.$$
- Funktionen, die Grenzwerte erhalten, nennen wir stetig, d.h. sie erfüllen
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f(\lim_{x\to a} x).$$
- Wichtige stetige Funktionen sind z.B. Polynome, rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen, die Exponential-, Wurzel- und Logarithmusfunktionen.
- Wir stellen fest, dass stetige Funktionen sehr natürliche Eigenschaften haben, wie z.b. das Extremwertprinzip oder den Zwischenwertsatz. Letzterer erlaubt, stetige Funktionen als solche visuell zu interpretieren, deren Graph „man mit einem Zug durchzeichnen kann.“

Lernziele

Wissen & Verständnis

- Sie kennen Folgen und ihre Charakteristika wie z.B. Beschränktheit, Monotonie, Konvergenz.
- Sie kennen den Konvergenzbegriff für Reihen.
- Sie kennen den Funktionsbegriff und wesentliche Eigenschaften von Funktionen (Nullstellen, Symmetrie, Monotonie).
- Sie verstehen den Grenzwertbegriff für Funktionen und wissen, wie man diesen verwendet, um Stetigkeit zu definieren.
- Sie kennen die wichtigen Sätze über stetige Funktionen (Zwischenwertsatz, Extremwert-Prinzip).
- Sie kennen die wichtigsten Funktionen (Polynome, rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktion und Logarithmen) und deren wesentliche Eigenschaften.

Anwendung

- Sie können Folgen auf Konvergenz untersuchen und Grenzwerte bestimmen.
- Sie können Funktionen auf Stetigkeit und asymptotisches Verhalten untersuchen.
- Sie können Umkehrfunktionen ermitteln.
- Sie beherrschen den Umgang mit den wichtigsten Funktionen (siehe oben). Insbesondere können Sie Polynome durch Polynomdivision und die pq-Formel in Linearfaktoren zerlegen.

4.1 Folgen & Grenzwerte

Definition 4.1.1 Ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ kann als Abfolge endlich vieler Zahlen interpretiert werden:

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_n : 1 \leq n \leq m,\ n \in \mathbb{N})$$

Setzen wir keine obere Schranke für den Index n, so wird

$$(x_n : n \in \mathbb{N}) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine (unendliche) **Folge** reeller Zahlen. Soll sie ab einem Index n_0 beginnen, so schreiben wir

$$(x_n : n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}) = (x_n)_{n\geq n_0}.$$

Statt $(x_n)_{n\geq n_0}$ schreiben wir auch manchmal $(a_n)_{n\geq n_0}$. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann als eine geordenete Menge von Zahlen (mit Wiederholungen) angesehen werden.

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \quad \text{oder} \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

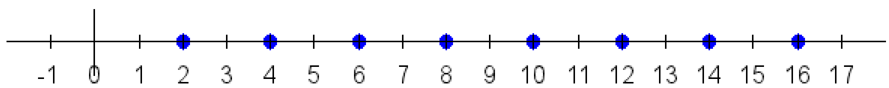
Beispiel Die Folge der geraden Zahlen

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

lässt sich schreiben als $a_n = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wertetabelle:

n	1	2	3	4	5	$\dots$
a_n	2	4	6	8	10	$\dots$



Zahlenstrahl für $a_n = 2n$

Übung Wie lautet die Folge der ungeraden Zahlen?

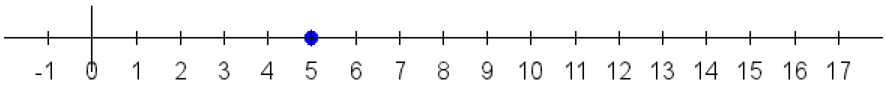
Beispiel 4.1.2

(a) Sei $c \in \mathbb{R}$ fest. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = c$ für alle n eine **konstante Folge**.

$$c,\ c,\ c,\ c, \dots$$

Wertetabelle für $a_n = c = 5$:

n	1	2	3	4	5	$\dots$
a_n	5	5	5	5	5	$\dots$



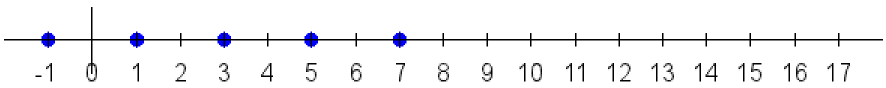
Zahlenstrahl für: $a_n = 5$

(b) Seien $m, b \in \mathbb{R}$ fest. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = mn + b$ für alle n eine **lineare Folge**.

$$m + b,\ 2m + b,\ 3m + b, \ldots$$

Wertetabelle für $a_n = -2n + 9$:

n	1	2	3	4	5	$\ldots$
a_n	7	5	3	1	-1	$\ldots$



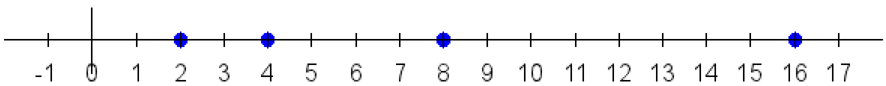
Zahlenstrahl für $a_n = -2n + 9$

(c) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n$ und $b_n = 2^n$ für alle n sind (durch 1 bzw. 2 oder auch durch Null) *nach unten beschränkte* und *nach oben unbeschränkte* Folgen.

$$1, 2, 3, 4, \ldots \quad \text{bzw.} \quad 2, 4, 8, 16, \ldots$$

Wertetabelle für $a_n = 2^n$:

n	1	2	3	4	5	$\ldots$
a_n	2	4	8	16	32	$\ldots$



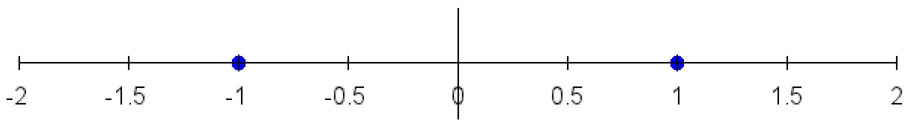
Zahlenstrahl für $a_n = 2^n$

(d) Die *alternierende* Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ ist eine *beschränkte* Folge.

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots$$

Wertetabelle für $a_n = (-1)^n$:

n	1	2	3	4	5	$\ldots$
a_n	-1	1	-1	1	-1	$\ldots$



Zahlenstrahl für $a_n = (-1)^n$

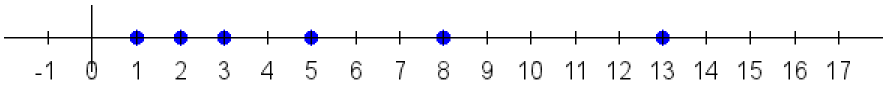
(e) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 2^n$ kann man durch $a_1 = 2$ und $a_n = 2a_{n-1}$ für $n \geq 2$ *rekursiv* definieren.

(f) Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ mit $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ist eine rekursiv definierte Folge. Gibt es eine nicht-rekursive Formel?

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Wertetabelle:

n	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
a_n	1	1	2	3	5	8	$\ldots$



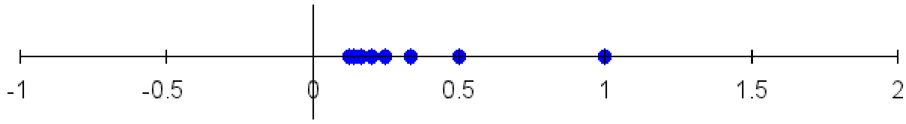
Zahlenstrahl für die Fibonacci-Folge

(g) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine (gegen Null) *konvergente Folge*.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \quad \text{oder} \quad 1,\ 0.5,\ 0.\overline{3},\ 0.25,\ 0.2, \ldots$$

Wertetabelle:

n	1	2	3	4	5	6	$\ldots$
a_n	1	$0,5$	$0,33$	$0,25$	$0,2$	$0,17$	$\ldots$

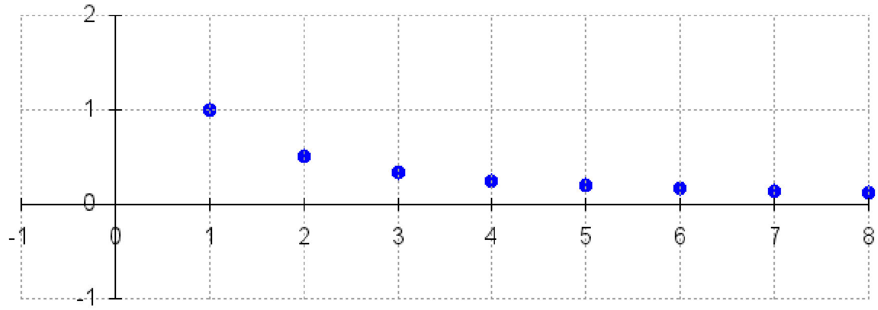


Zahlenstrahl für $a_n = 1/n$

Bemerkung (Weitere Interpretation)
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann angesehen werden als Abbildung:

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto x(n)$$

Sie ordnet jeder natürlichen Zahl eine reelle Zahl zu. Daher können die Folge als Graph einer Funktion zeichnen, deren Definitionsbereich die natürlichen Zahlen sind.



Graph der Folge $a_n = 1/n$

Divergenz

Wir erinnern uns an den Allquantor $\forall$ („für alle/jedes…“) und den Existenzquantor $\exists$ („es existiert/gibt es…“).

Definition 4.1.3 Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

(a) Die Folge **divergiert (bestimmt) gegen (plus) Unendlich**, falls

$$\forall\ C > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \geq n_0 : \quad x_n \geq C, \tag{14}$$

Gesprochen: *„Für jede Zahl $C > 0$ gibt es einen Index n_0, so dass $x_n \geq C$ für alle weiteren Indizes $n \geq n_0$.“*

Wir schreiben abkürzend:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{oder} \quad x_n \to +\infty \text{ für } n \to \infty$$

(b) Die Folge **divergiert (bestimmt) gegen minus Unendlich**, falls

$$\forall\ C > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \geq n_0 : \quad x_n \leq -C, \tag{15}$$

Gesprochen: *„Für jede Zahl $C > 0$ gibt es einen Index n_0, so dass $x_n \leq -C$ für alle weiteren Indizes $n \geq n_0$.“*

Wir schreiben abkürzend:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{oder} \quad x_n \to -\infty \text{ für } n \to \infty$$

Beispiel 4.1.4 Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $C > 0$ beliebig. Dann gibt es eine natürliche Zahl n_0 mit $n_0 \geq C$. Dann gilt $x_n = n \geq C$ für alle $n \geq n_0$, da $n \geq n_0 \geq C$ bzw.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

Beispiel Seien die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$x_n = n \quad \text{und} \quad y_n = 2^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man kann per Induktion zeigen, dass $n < 2^n$, also $x_n < y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ wegen Beispiel 4.1.4, folgt auch $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Satz 4.1.5 (Divergenzkriterium) Seien zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart gegeben, dass $x_n \leq y_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann gelten:

(a) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, so ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

(b) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, so ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Beweis Das folgt unmittelbar aus (14) und (15) in der Definition 4.1.3. $\square$

Definition 4.1.6 (Rechenregeln für Unendlich)

(a) $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$

(b) $a \pm \infty = \pm\infty$ für jedes $a \in \mathbb{R}$

(c) $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$ und $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$

(d) $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, falls $a > 0$

(e) $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$, falls $a < 0$

(f) $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ für jedes $a \in \mathbb{R}$, auch $a = 0$

(g) **Achtung!** $0 \cdot (\pm\infty)$, $+\infty - \infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$ und $\frac{1}{0}$ sind nicht eindeutig bestimmt!

Beispiel Sei $a_n = n$ und $b_n = \frac{b}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{b}{+\infty}$, also „$\frac{\pm\infty}{+\infty} = b$“.

Beschränktheit & Konvergenz

Definition 4.1.7 Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **beschränkt**, falls:

$$\exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}: \quad C_1 \leq x_n \leq C_2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

C_1 ist eine untere Schranke, und C_2 eine obere Schranke für die Folge.

Beispiel

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt durch $C_1 = 0$ und nach oben beschränkt durch $C_2 = 1$, d.h.

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

(b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt durch $C_1 = -1$ und nach oben beschränkt durch $C_2 = 2$, d.h.

$$-1 < (-1)^n + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2$$

Definition 4.1.8 Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Nullfolge**, falls:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \quad -\varepsilon < x_n < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$$

Wir schreiben abkürzend:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{oder} \quad x_n \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Beachte: $-\varepsilon < x_n < \varepsilon$ ist äquivalent zu $|x_n| < \varepsilon$.

Die Folge **konvergiert gegen eine reelle Zahl** a, falls:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$$

Wir schreiben abkürzend:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{oder} \quad x_n \to a \text{ für } n \to \infty$$

Wir nennen a den **Grenzwert** der Folge.

Beachte: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ ist äquivalent zu $|x_n - a| < \varepsilon$.

Beispiel

(a) Ein Beispiel hierfür ist die **Quadratwurzelfolge**. Sei $a \in \mathbb{R}_0^+$ fest gewählt, $a_1 := 1$ und

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{a}$.

(b) Die Euler-Zahl $e \approx 2,71829$ erhält man durch $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Achtung!

$$\begin{aligned} e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \end{aligned}$$

Wo ist der Denkfehler?

Satz 4.1.9 (Einschließungskriterium)
Seien drei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart gegeben, dass gilt:

$$b_n \leq a_n \leq c_n \qquad \forall\ n \geq n_0$$

Ferner seien $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Beweis Der Beweis erfolgt unmittelbar aus der Definition des Grenzwerts und der darin enthaltenen Abschätzung. □

Beispiel Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdots 1 = \frac{1}{n}$$

Nach dem Einschließungskriterium folgt, dass $\dfrac{n!}{n^n}$ eine Nullfolge ist.

Satz 4.1.10 (Rechenregeln für konvergente Folgen) Für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$. Dann gelten für $n \to \infty$:

(a) $a_n + b_n \ \longrightarrow\ a + b$

(b) $a_n \cdot b_n \ \longrightarrow\ a \cdot b$

(c) Ist $b \neq 0$, so sind fast alle $b_n \neq 0$ und $\dfrac{a_n}{b_n} \ \longrightarrow\ \dfrac{a}{b}$.

(d) $|a_n| \ \longrightarrow\ |a|$

(e) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, so ist für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[k]{a_n} \ \longrightarrow\ \sqrt[k]{a}$$

(f) Ist $a_n \geq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so auch $a \geq b$.

Beweis Die Beweise von (a), (d) und (f) folgen unmittelbar aus der Definition für Grenzwerte und mit Hilfe der Dreiecksungleichung. Teil (e) gilt, da die k-ten Wurzeln sog. stetige Funktionen sind, die wir später kennenlernen. Für Teil (c) betrachten wir die folgende Differenz und schätzen nach oben ab:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b|$$

Da a_n gegen a und b_n gegen b konvergieren, sind $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ Nullfolgen. Daher ist dank des Einschließungskriteriums auch $|a_n b_n - ab|$ eine Nullfolge, und deswegen muss das Produkt $a_n b_n$ gegen ab konvergieren. Eine ähnliche Überlegung liefert, dass $\frac{a_n}{b_n}$ gegen $\frac{a}{b}$ konvergiert.

Satz 4.1.11 (Wichtige Grenzwerte)

(a) Für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} \ =\ 0.$$

(b) Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \ =\ 1.$$

(c) Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \ =\ 1.$$

(d) Für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ ist

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

(e) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{x^n} = 0.$$

Satz 4.1.12 (Grenzwert einer rationalen Folge) Es seien $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_r$ sowie $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_s \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_r \neq 0$ und $\beta_s \neq 0$, wobei $r, s \in \mathbb{N}_0$ sind. Für die Folge

$$a_n = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + ... + \alpha_r n^r}{\beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 n^2 + ... + \beta_s n^s}$$

gilt dann:

(a) Der Nenner wird für genügend großes n nicht Null.

(b) Für $r > s$ ist $(a_n)_{n\geq 1}$ unbeschränkt, d.h.

$$\begin{aligned} a_n &\longrightarrow +\infty, \quad \text{falls } \tfrac{\alpha_r}{\beta_s} > 0 \\ a_n &\longrightarrow -\infty, \quad \text{falls } \tfrac{\alpha_r}{\beta_s} < 0 \end{aligned}$$

(c) Für $r \leq s$ konvergiert die Folge, und zwar:

$$\begin{aligned} a_n &\longrightarrow \frac{\alpha_r}{\beta_s}, \quad \text{falls } r = s, \\ a_n &\longrightarrow 0, \quad \text{falls } r < s. \end{aligned}$$

Beweis Wir zeigen nur den Fall $r = s$. Der Rest ist klar.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + ... + \alpha_r n^r}{\beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 n^2 + ... + \beta_r n^r} \\ &= \frac{n^r(\alpha_0 \cdot \frac{1}{n^r} + \alpha_1 \cdot \frac{n}{n^r} + \alpha_2 \cdot \frac{n^2}{n^r} + ... + \alpha_r \cdot \frac{n^r}{n^r})}{n^r(\beta_0 \cdot \frac{1}{n^r} + \beta_1 \cdot \frac{n}{n^r} + \beta_2 \cdot \frac{n^2}{n^r} + ... + \beta_r \cdot \frac{n^r}{n^r})} \\ &\overset{\text{Kürzen}}{=} \frac{\alpha_0 \cdot \frac{1}{n^r} + \alpha_1 \cdot \frac{1}{n^{r-1}} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{n^{r-2}} + ... + \alpha_r \cdot 1}{\beta_0 \cdot \frac{1}{n^r} + \beta_1 \cdot \frac{1}{n^{r-1}} + \beta_2 \cdot \frac{1}{n^{r-2}} + ... + \beta_r \cdot 1} \\ &\longrightarrow \frac{\alpha_r}{\beta_r}, \end{aligned}$$

weil die restlichen Summanden alles Nullfolgen sind.

Beispiel

(a) $\dfrac{-2n^3 + 3n^2 - n + 3}{4n^3 + 2n - 1} \longrightarrow \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

(b) $\dfrac{-2n^3 + 3n^2 - n + 3}{4n^8 + 2n - 1} \longrightarrow 0$

(c) $\dfrac{-2n^5 + 3n^2 - n + 3}{4n^3 + 2n - 1} \longrightarrow -\infty$

Exkurs: Monotonie

Definition 4.1.13 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt...

(a) ...monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) ...streng monoton wachsend, falls $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) ...monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) ...streng monoton fallend, falls $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = -\frac{1}{n}$ ist streng monoton wachsend und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad < +\infty.$$

Satz (Monotonie & Beschränktheit)

(a) Ist eine Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist die Folge konvergent.

(b) Ist eine Folge monoton steigend und nach oben beschränkt, so ist die Folge konvergent.

Reihen

Reihen sind spezielle Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Folgenglieder bestimmte Summe sind, die selber wieder aus einer Folge gebildet werden.

Definition 4.1.14

(a) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir basteln uns neue Folgenglieder, sog. **Partialsummen** durch

$$s_n \quad := \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Die so entstehende Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennt man (unendliche) **Reihe**.

(b) Die Reihe heißt **konvergent**, falls die Folge $s_n \longrightarrow s$ für $n \to \infty$. Wir schreiben:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Satz 4.1.15 (Konvergenz der geometrischen Reihe) Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad = \quad \frac{1}{1-q}.$$

Beweis Wir stellen zunächst die Partialsummen auf:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$

Wir betrachten dazu das folgende Produkt:

$$\begin{aligned}
s_n \cdot (1-q) &= \sum_{k=0}^{n} q^k \cdot (1-q) \\
&= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n} q^k - q^{n+1} \\
&= 1 - q^{n+1}
\end{aligned}$$

Da $|q| < 1$ ist, gilt nach Satz 4.1.11 und den Rechenregeln in Satz 4.1.10:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

□

Übung Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$$

Beispiel (Anwendung bei Dezimalzahlen)
Jede reelle Zahl x hat die Dezimaldarstellung

$$x = a + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

mit den Nachkommastellen $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und dem ganzzahligen Anteil $a \in \mathbb{Z}$.

Speziell periodische/rationale Zahlen x haben die Darstellung

$$x = a + b \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{10^m})^k = a + b \cdot \frac{10^{-m}}{1-10^{-m}},$$

wobei $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ die Wiederholung und m die Periodenlänge sind.

Zum Beispiel:

$$0,\overline{9} = 0 + 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Beispiel (Anwendung bei Flächen)
Aus einem Blatt Papier mit den Seitenlängen a und b entstehe ein neues Blatt, indem man genau eine Seite halbiert (z.B. wie bei DINA4 auf DINA5). Diese Prozedur führe man fort, wobei man stets die Flächeninhalte aufsummiert. Zeichnet man diesen Vorgang und legt die halbierten Blätter nebeneinander, so muss ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $2ab$ herauskommen. In der Tat ist der gesamte Flächeninhalt gleich

$$\sum_{k=0}^{\infty} ab \left(\frac{1}{2}\right)^k = ab \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2ab.$$

Beispiel (Kurioses über Reihen)

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert nicht, sondern divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ aber konvergiert gegen $\frac{\pi^2}{6}$.[11]

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ konvergiert für alle $s > 1$, also zum Beispiel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1,000001}}$.[12]

(d) Früher wurde vermutet: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{2}$. Was meinen Sie?

(e) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$. Vergleichen Sie den Graphen von $sin(x)$ mit den Graphen der Polynome $\sum_{k=0}^{m} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für $m = 0, 1, 2, 3$. Was fällt auf?

4.2 Funktionen

Definition 4.2.1 Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge.

(a) Ordnen wir jeder Zahl $x \in M$ eindeutig einen Wert $y \in \mathbb{R}$ mit Hilfe einer Vorschrift $f(x) = y$ zu, so erhalten wir eine **Funktion**

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = y$$

Wir sagen, dass „x unter f auf y abgebildet wird.“

(b) Die Menge M nennen wir auch **Definitionsbereich von** f und schreiben auch D_f statt M. Es ist also die Menge, „auf der f definiert ist“.

(c) Die Menge aller Auswertungen von $x \in D_f$ unter f bezeichnen wir als **Wertebereich**, d.h.

$$W_f = \{f(x) : x \in D_f\}.$$

Ist der Wertebereich ermittelt, so können wir schreiben:

$$f : D_f \to W_f$$

Achtung! Da im Allgemeinen bei Angabe einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ nicht sofort klar ist, wie der Wertebereich aussieht, ist die Zielmenge rechts vom Pfeil meist großzügig und grob ausgelegt, z.B. hier $\mathbb{R}$.

(d) Die Menge $G_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$ ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und heißt **Graph von** f (über D_f).

Beispiel Der Betrag $|x|$ liefert eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|,$$

die sog. **Betragsfunktion**. Für sie gelten:

$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad W_f = \mathbb{R}_0^+$$

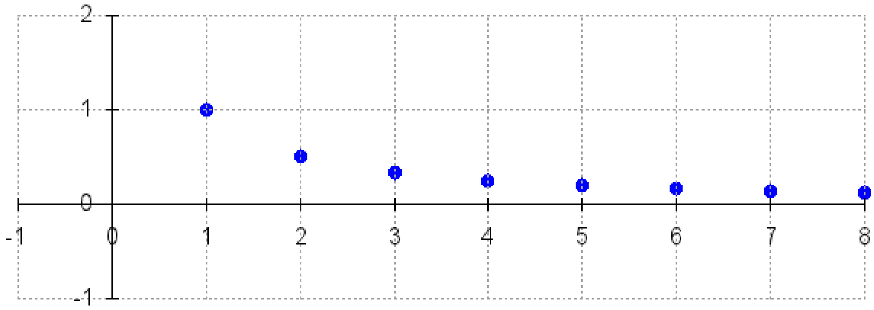
[11] Leonhard Euler fand diese Formel um 1734.

[12] Siehe: Riemannsche ζ-Funktion

Beispiel Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können auch als Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ interpretiert, indem wir setzen:

$$D_f = \mathbb{N} \quad \text{und} \quad f(n) = a_n$$

Folglich können Graphen von Folgen gezeichnet werden.



Graph der Folge $a_n = 1/n$

Monotonie

Definition 4.2.2 Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert ist. Dann ist:

(a) f ist **streng monoton wachsend**, falls

$$\forall\ x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2 \text{ gilt} : f(x_1) < f(x_2)$$

(b) f ist **monoton wachsend**, falls

$$\forall\ x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2 \text{ gilt} : f(x_1) \leq f(x_2)$$

D.h. f erhält die strenge Anordnung zwischen x_1 und x_2 auch in der Auswertung (streng).

(c) f ist **streng monoton fallend**, falls

$$\forall\ x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2 \text{ gilt} : f(x_1) > f(x_2)$$

(d) f ist **monoton fallend**, falls

$$\forall\ x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2 \text{ gilt} : f(x_1) \geq f(x_2)$$

D.h. f kehrt die (strenge) Anordnung zwischen x_1 und x_2 in der Auswertung (streng) um.

Beispiel Die Betragsfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}_0^-$ streng monoton fallend und auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton wachsend. Das sind auch die größtmöglichen Intervalle für Monotonie.

Übung: Was ist mit der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$?

Komposition

Definition 4.2.3 Seien zwei Funktionen gegeben,

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ f(x) = y \quad \text{und} \quad g : D_g \to \mathbb{R},\ g(y) = z.$$

Angenommen, es gelte $W_f \subset D_g$. Dann kann man $f(x) = y$ in $g(y) = z$ einsetzen, d.h. die Komposition $g(f(x)) = z$ bilden. Man erhält dadurch eine neue Funktion

$$g \circ f : D_f \to \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$$

Die neue Funktion $g \circ f$ heißt **Komposition**, **Hintereinanderschaltung** oder **Verkettung** von f mit g. Wir erhalten dann das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} D_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & W_f \subset D_g \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Beispiel 4.2.4 Seien die beiden Funktionen f, g gegeben durch:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ g(y) = \sqrt{y}.$$

Dann sind

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

Was ist $g \circ f$?

Definition 4.2.5 Sei $f : D_f \to W_f$ gegeben. Findet man eine Funktion $g : W_f \to D_f$ derart, dass

$$\forall\, x \in D_f :\ g(f(x)) = x \quad \text{und} \quad \forall\, y \in W_f :\ f(g(y)) = y,$$

so nennt man g die **Umkehrfunktion von** f und schreibt $g = f^{-1}$.

Die Umkehrfunktion ist eindeutig, und man erhält das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} D_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^{-1}\circ f"'] & W_f \arrow[r, "f^{-1}"] & D_f \end{tikzcd}$$

Beispiel Seien die beiden Funktionen f, g gegeben durch:

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ g(y) = \sqrt{y}$$

Dann sind

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

und

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

In diesem Fall ist daher $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$.

Frage: Wo ist der Unterschied zu Beispiel 4.2.4?

Bemerkung Wie entstehen Umkehrfunktionen? Wir lösen die nachfolgende Gleichung nach x auf:

$$\frac{1}{1+x} = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-y}{y} = x$$

Setzen wir nun

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad g(y) = \frac{1-y}{y},$$

so liefert das $g(f(x)) = x$ und $f(g(y)) = y$, d.h. $g = f^{-1}$. Was sind D_f und W_f?

Umkehrfunktionen können also als Auflösung nach einer Variablen interpretiert werden. Es ist aber wichtig, welchen Definitions- und Wertebereich man wählt, z.B. siehe $f(x) = x^2$.

4.3 Stetigkeit

Definition 4.3.1 Seien M eine in $\mathbb{R}$, $a \in M$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $M \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert, die Auswertungen von x_n unter f gegen c konvergieren, d.h.

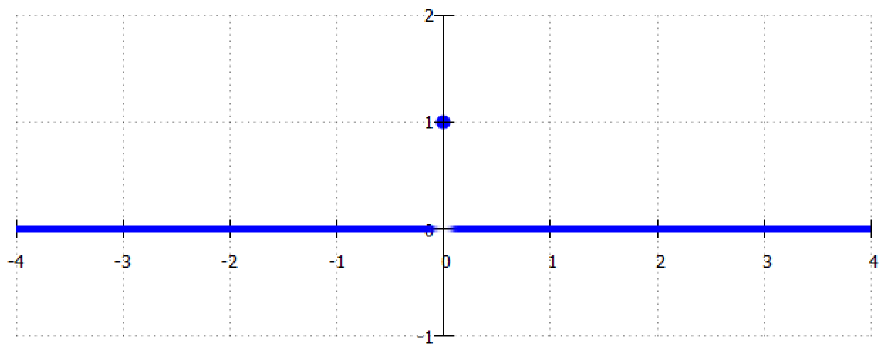
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \tag{16}$$

so schreiben wir symbolisch $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

Achtung! Es muss nicht automatisch gelten, dass $c = f(a)$ ist. Es kann sein, dass die Funktion in a springt, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Es ist hier $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, aber $f(0) = 1$.



Graph der Sprungfunktion

(b) Falls tatsächlich $c = f(a)$ ist, so sagen wir, dass die Funktion f **stetig in** a ist, d.h. es muss gelten:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \tag{17}$$

(c) Ist $f : D_f \to \mathbb{R}$ für jeden Punkt $a \in D_f$ stetig, so sagen wir, dass f **stetig auf ganz** D_f ist.

Bemerkung Setzen wir in die Definition der Stetigkeit in (17) die Definition der Grenzwerte für Funktionen (16) und Folgen ein, so erhalten wir die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n),$$

für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert. Das bedeutet, dass die stetigen Funktionen genau diejenigen Funktionen sind, die Grenzwertprozesse im Definitionsbereich auch im Wertebereich erhalten. Das deutet an, dass keine Sprünge im Graphen erlaubt sind.

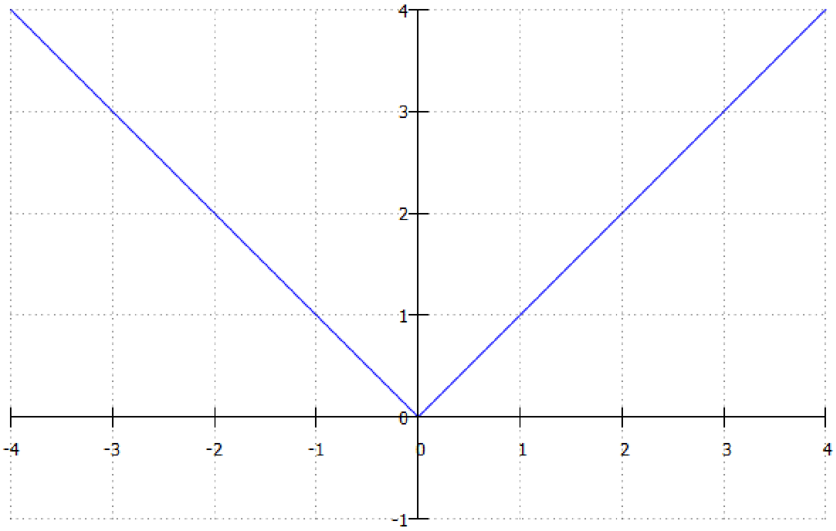
Beispiel Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, denn nach der Rechenregel (d) in Satz 4.1.10 für Folgen, gilt automatisch

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |x| = |a| = f(a),$$

denn

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$$

für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.



Graph der Betragsfunktion $f(x) = |x|$

Insbesondere sehen wir hier, dass wir aufgrund der Tatsache, dass Grenzwerte von Funktionen nichts weiter sind als Grenzwerte von Folgen, wir die Rechenregeln für Folgen sofort verwenden können, um Rechenregeln für stetige Funktionen herzuleiten.

Satz 4.3.2 (Rechenregeln für stetige Funktionen)
Seien zwei stetige Funktionen $f, g : M \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gelten:

(a) Die Summe $f + g$ ist stetig auf M.

(b) Das Produkt $f \cdot g$ ist stetig auf M.

(c) Der Quotient $\dfrac{f}{g}$ ist stetig auf $M \cap \{x \in M : g(x) \neq 0\}$.

(d) Die Komposition aus f und dem Betrag ist stetig auf M, also $|f|$ mit $|f|(x) = |f(x)|$.

(e) Die k-te Wurzelfunktion $W_k(x) = \sqrt[k]{x}$ ist auf $M = \mathbb{R}_0^+$ stetig.

Beweis Diese Rechenregeln folgen sofort aus Satz 4.1.10, den Rechenregeln für Folgen. □

Korollar Polynome $p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Beweis Offensichtlich ist die Funktion $f(x) = x$ stetig. Da Produkte von stetigen Funktionen wieder stetig ist, sind auch **Monome** x^k stetig, wobei $k \in \mathbb{N}_0$. Da Produkte von Konstanten mit stetigen Funktionen wieder stetig sind, sind auch die Funktionen $a_k x^k$ stetig. Da Summen von stetigen Funktionen stetig sind, sind schließlich auch Polynome stetig. □

Satz 4.3.3 (Kompositionen erhalten Stetigkeit) Seien zwei stetige Funktionen gegeben,

$$f : D_f \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g : D_g \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad W_f \subset D_g.$$

Dann ist auch die Komposition $g \circ f$ stetig auf D_f.

Beweis Seien $a \in D_f$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) &= \lim_{n\to\infty} g\big(f(x_n)\big) \\
&\overset{g \text{ stetig}}{=} g\big(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\big) \\
&\overset{f \text{ stetig}}{=} g\big(f(\lim_{n\to\infty} x_n)\big) \\
&= g\big(f(a)\big) = (g \circ f)(a)
\end{aligned}$$

Nach der Definition des Grenzwerts für Funktionen folgt daraus:

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a)$$

Damit ist $g \circ f$ stetig in $a \in D_f$. $\square$

Satz 4.3.4 (Satz von Bolzano) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$, so dass

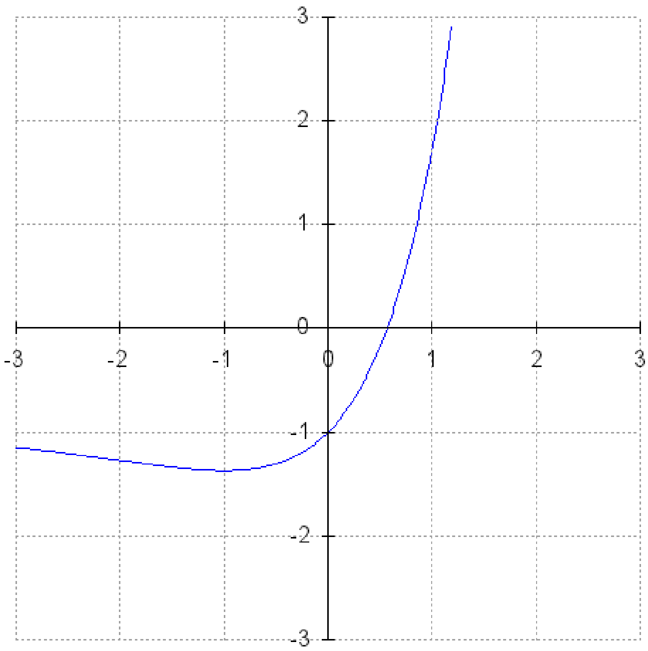
$$f(a) \leq 0 \leq f(b).$$

Dann hat f innerhalb $[a, b]$ mindestens eine **Nullstelle**, d.h.

$$\exists\ x_0 \in [a, b] : \quad f(x_0) = 0.$$

Beweis Der Beweis ist recht schwierig, findet sich aber in jedem Buch über Analysis.

Beispiel Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^x - 1$. Dann ist $f(0) < 0$ und $f(1) > 0$, d.h. f hat in $[0, 1]$ eine Nullstelle x_0 nach dem Satz von Bolzano. Man kann sie aber nicht direkt berechnen, sondern höchstens numerisch approximieren. Es ist $x_0 \approx 0,567$.



Graph der Funktion $f(x) = xe^x - 1$

Hinweis! Der Satz von Bolzano gibt die mathematische Grundlage, weshalb Computer überhaupt Nullstellen berechnen können. Ein Verfahren zur numerischen Nullstellenbestimmung ist z.B. durch das sog. *Iterationsverfahren* gegeben. Verbessert wird es durch das *Newton-Verfahren* mit Hilfe von Ableitungen.

Satz 4.3.5 (Zwischenwertsatz) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$, so dass $f(a) \leq f(b)$. Sei c so gewählt, dass

$$f(a) \leq c \leq f(b).$$

Dann gilt:

$$\exists\ x_c \in [a, b] : \quad f(x_c) = c.$$

D.h. jede Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird auch tatsächlich angenommen, was wieder unterstreicht, dass der Graph von f keine Sprünge haben kann.

Beweis Wende den Satz von Bolzano auf die Hilfsfunktion $h(x) = f(x) - c$ an. Dann gibt es ein $x_0 \in [f(a), f(b)]$ mit $h(x_0) = 0$ bzw.

$$h(x_0) = f(x_0) - c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) = c.$$

Setze schließlich $x_c := x_0$. □

Satz 4.3.6 (Extremwertprinzip) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$. Dann nimmt f auf $[a, b]$ ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es existieren Stellen $x_{\text{min}}, x_{\text{max}} \in [a, b]$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt:

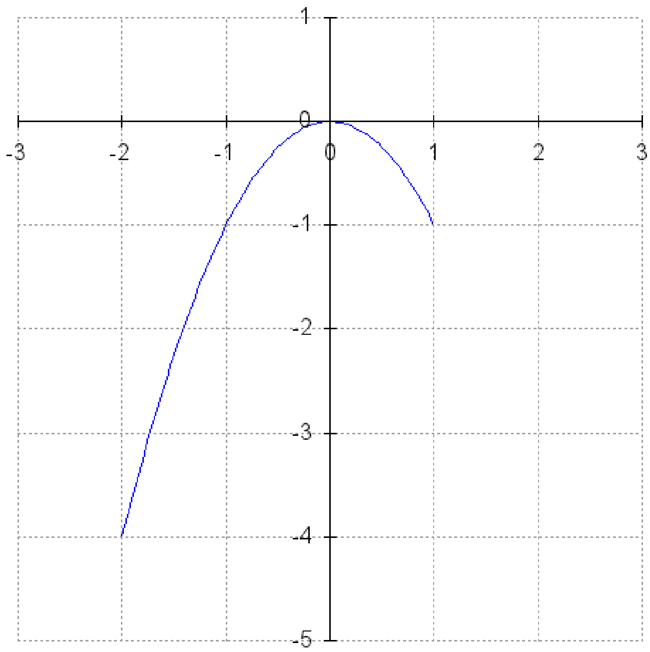
$$f(x_{\text{min}}) \leq f(x) \leq f(x_{\text{max}})$$

Oder anders ausgedrückt: $W_f = [f(x_{\text{min}}), f(x_{\text{max}})]$. In diesem Fall ist also der Wertebereich automatisch ebenfalls wieder ein beschränktes und abgeschlossen Intervall.

Beispiel Sei $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x^2$. Dann ist f als Polynom stetig auf ganz $\mathbb{R}$, also insbesondere auch auf $[-2, 1]$. Es ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Maximum in $x_{\text{max}} = 0$ und ein Minimum in $x_{\text{min}} = -2$, also:

$$-4 = f(-2) \leq f(x) \leq f(0) = 0$$

für alle $x \in [-2, 1]$. Insbesondere befindet sich $x_{\text{min}} = -2$ am Rand von $[-2, 1]$ und $x_{\text{min}} = 0$ im Inneren von $[-2, 1]$.



Graph der Parabel $f(x) = -x^2$ auf $[-2, 1]$

Wie man das Maximum und Minimum im Falle spezieller stetiger Funktionen ausrechnet, sehen wir in Kapitel 5.

Wichtige stetige Funktionen

Polynome

Definition 4.3.7 Unter einem **Polynom** verstehen wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit reellen Koeffizienten $a_n, \ldots, a_0$ und $a_n \neq 0$. Man nennt $\deg f := n$ den **Grad** des Polynoms und a_n den **Leitkoeffizienten**.

Beispiel 4.3.8

(a) Konstante Funktionen $f(x) = a_0$ für einen festen Koeffizienten a_0 sind Polynome vom Grad 0.

(b) Lineare Funktionen bzw. Geraden $g(x) = mx + b$ mit echter Steigung $m \neq 0$ sind Polynome vom Grad 1. Der Leitkoeffizient ist in diesem Fall genau die Steigung.

(c) Parabeln der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ sind Polynome vom Grad 2, auch **quadratische** Polynome genannt.

(d) Die Funktion

$$f(x) \;=\; x^3 - 3x^2 - x + 3$$

ist ein Polynom vom Grad 3 mit dem Leitkoeffizienten $a_3 = 1$.

(e) Polynome vom Grad 3 nennt man auch **kubisch**.

(f) Polynome vom Grad 4 der speziellen Form $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ heißen auch **biquadratisch**, da man sie mit der Substitution $t = x^2$ in quadratische Polynome $g(t) = at^2 + bt + c$ überführen kann.

Die Nullstellen von Polynomen sind von besonderer Bedeutung, da sie in vielen theoretischen wie praktischen Fällen auftauchen (siehe später im Laufe des Studiums charakteristische Polynome von Differentialgleichungen oder Matrizen).

Beispiel 4.3.9

(a) Lineare Funktionen bzw. Geraden $f(x) = mx + b$ mit $m \neq 0$ haben genau eine Nullstelle, nämlich $x_0 = -b/m$.

(b) Quadratische Polynome $f(x) = x^2 + px + q$ haben entweder keine oder genau zwei Nullstellen (mit Vielfachheiten). Man findet sie mit der pq-Formel (siehe Kapitel Einführung in die Kultur der Mathematik):

$$x_{1,2} \;=\; -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Es ist dann $x^2 + px + q \;=\; (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

(c) $x^2 - 2x - 3 \;=\; (x + 1) \cdot (x - 3)$ hat die beiden Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

(d) $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ hat die beiden Nullstellen $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

(e) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ hat die Nullstelle $x_0 = -1$ mit doppelter Vielfachheit.

(f) $x^2 + 1$ hat keine Nullstelle, da $x^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

Satz 4.3.10 Hat ein Polynom f vom Grad n in x_0 eine Nullstelle, so lässt sich f darstellen als

$$f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x),$$

wobei f_1 ein weiteres Polynom vom Grad $n - 1$ ist. In diesem Sinne kann man also die Nullstelle abspalten. Man bestimmt f_1 durch **Polynomdivision**:

$$f_1(x) \;=\; \frac{f(x)}{x - x_0} = f(x) : (x - x_0)$$

Aufgabe Recherchieren Sie eigenständig die Methode der Polynomdivision.

Beispiel 4.3.11 Sei das Polynom $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ gegeben. Durch Einsetzen der Zahl $x_0 = 1$ sehen wir, dass $f(1) = 0$ ist, d.h. $x_0 = 1$ ist eine Nullstelle von f. Nach dem obigen Satz gibt es ein weiteres Polynom f_1 vom Grad 2 mit

$$f(x) = (x - 1)f_1(x).$$

Wie sieht f_1 aus? Hierzu nutzen wir die Polynomdivision und teilen

$$(x^3 - 3x^2 - x + 3) : (x - 1) = x^2 - 2x - 3$$

Stellen wir $x - 1$ auf die andere Seite um, so erhalten wir

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 \;=\; (x - 1)(x^2 - 2x - 3).$$

Nun ist $f_1(x) = x^2 - 2x - 3$. Findet man nun wieder eine Nullstelle von f_1, so kann man iterativ durch mehrmaliges Anwenden der Polynomdivision oder der pq-Formel Linearfaktoren abspalten, also

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3) \;=\; (x - 1)(x + 1)(x - 3).$$

Da der Grad des Restpolynoms in jedem Schritt kleiner wird, gilt:

Satz 4.3.12 Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten).

Beispiel 4.3.13

(a) $x^2 - 6x + 9 \;=\; (x - 3)^2$ besitzt die Nullstelle $x_0 = 3$ mit Vielfachheit 2.

(b) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^3(x + 2)$ hat die Nullstelle $x_1 = 1$ mit Vielfachheit 3 und die Nullstelle $x_2 = -2$ mit Vielfachheit 1, also insgesamt 4 Nullstellen mit Vielfachheiten gezählt.

Definition 4.3.14 Im optimalen Fall hat ein Polynom f vom Grad n also genau n Nullstellen gezählt mit Vielfachheiten. In diesem Fall lässt dich f darstellen als

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_l)^{k_l},$$

wobei $k_1 + k_2 + ... + k_l = n$ ist. Hierbei sind $k_1, \ldots, k_l$ die Vielfacheiten der jeweiligen Nullstellen $x_1, \ldots, x_l$. Diese Darstellung heißt **Linearfaktorzerlegung** von f, bzw. die Zerlegung von f in Linearfaktoren.

Beispiel 4.3.15

(a) $x^3 - 3x^2 - x + 3 \;=\; (x - 1)(x + 1)(x - 3)$

(b) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^3(x + 2)$

(c) $x^2 + 1$ hat keine Linearfaktorzerlegung im obigen Sinne mittels reeller Nullstellen.

Satz 4.3.16 Betrachten wir das Polynom

$$f(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

vom Grad $n > 0$ mit **echt positivem** Leitkoeffizienten $a_n > 0$. Für

(a) Falls der Grad n **gerade** ist, gelten:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

oder kurz gefasst

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

(b) Falls der Grad n **ungerade** ist, gelten:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

oder kurz gefasst

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Ist der Leitkoeffizient $a_n < 0$ echt negativ, so müssen einfach nur die Grenzwerte $+\infty$ und $-\infty$ vertauscht werden.

Beispiel 4.3.17

(a) Für $f(x) = x^2 + 2x + 18$ gelten

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

(b) Für $f(x) = -x^2 + 2x + 18$ gelten

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty.$$

(c) Für $f(x) = x^5 + 2x + 18$ gelten

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

(d) Für $f(x) = -x^5 + 2x + 18$ gelten

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty.$$

Als Folgerung ergibt sich mit dem Zwischenwertsatz 4.3.5:

Satz 4.3.18 Polynome von **ungeradem** Grad haben mindestens eine Nullstelle.

Beweis Sei f ein Polynom vom ungeraden Grad n und positivem Leitkoeffizienten $a_n > 0$. Dann gilt nach dem vorherigen Satz

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

d.h. für eine große, positive Zahl $x_+ > 0$ gilt irgendwann $f(x_+) > 0$, und für eine kleine, negative Zahl $x_- < 0$ irgendwann $f(x_-) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz muss es im Intervall $[x_-, x_+]$ daher einen Wert x_0 geben, so dass $f(x_0) = 0$ ist. Für den Fall $a_n < 0$ wenden wir dasselbe Argument auf das Polynom $h(x) := -f(x)$ an.

Bemerkung Man weiß zwar, dass es eine Nullstelle gibt, aber man kann sie in der Regel nicht genau berechnen. Für Polynome vom Grad 3 liefern die **cardanischen Formeln** Nullstellen, die in etwa die pq-Formel verallgemeinern. Für biquadratische Polynome kann man auf die pq-Formel zurückgreifen. Für Polynome ab Grad $n > 4$ gibt es keine geschlossene Formel zur Bestimmung der Nullstellen, die der pq-Formel oder der cardanischen Formel ähnelt, also die mit den Grundrechenarten und dem Wurzelziehen auskommt. Dieses Resultat, die Nicht-Existenz einer Formel (!), wurde von Paolo Ruffini 1799 mit einem lückenhaften Beweis veröffentlicht, der 1824 von Niels Henrik Abel vervollständigt wurde. Ein später entwickelter Beweis nutzt die sog. *Galoistheorie*, die von Évariste Galois entwickelt wurde. Letzterer wurde keine 21 Jahre alt, als er bei einem Duell starb. Auch Abel wurde keine 27 Jahre alt und starb an einer Lungenkrankheit.

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Évariste Galois (1811-1832)

Der Computer berechnet übrigens Nullstellen, in dem er auf Formeln zurückgreift, oder durch Annäherung, z.B. durch das sog. Bisektions- oder das Newtonverfahren. Dabei entsteht ein Approximationsfehler, den man in Kauf nimmt und den man bestmöglich kontrollieren möchte. Diese Verfahren bilden einen Teil der numerischen Mathematik (siehe z.B. auch Mathematik 4 für Maschinenbau).

Rationale Funktionen

Definition 4.3.19 Unter einer **(gebrochen) rationalen Funktion**

$$R : \mathbb{R} \setminus N \longrightarrow \mathbb{R}$$

verstehen wir eine Funktion der Art

$$R(x) \;=\; \frac{P(x)}{Q(x)},$$

wobei P und Q Polynome sind, so dass Q nicht das Nullpolynom und $N = \{x_1, ..., x_l\}$ die Menge der Nullstellen von Q ist. Die Nullstellen von Q bilden dann sog. **Definitionslücken**.

Beispiel 4.3.20

(a) Für die gebrochen rationale Funktion

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

ist der Definitionsbereich zunächst $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, da 1 die Nullstelle des Nenners ist. Mit Hilfe der Binomischen Formeln können wir die Funktion R vereinfachen:

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$$

(b) Betrachten wir nun die Funktion

$$R_2(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1},$$

wobei R aus dem vorherigen Teil ist. Dann ist der Definitionsbereich zunächst $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$, da ± 1 die beiden Nullstellen des Nenners sind. Wenn wir vereinfachen, erhalten wir allerdings

$$R_2(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1},$$

d.h. die Definitionslücke $x_0 = 1$ kann mit dem entsprechenden Wert, hier $R_2(1) = 0$, geschlossen und damit der Defintionsbereich von R_2 auf $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ erweitert werden.

(c) Ein Polynom P ist ein Spezialfall einer gebrochen rationalen Funktion, denn wir können schreiben:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{mit} \quad Q(x) = 1.$$

(d) Ist $R_1 = \dfrac{P}{Q}$ eine gebrochen rationale Funktion auf dem Definitionsbereich $D_1 = \mathbb{R} \setminus N_Q$, so ist $R_2 = \dfrac{1}{R_1} = \dfrac{Q}{P}$ ebenfalls wieder eine gebrochen rationale Funktion auf dem Definitionsbereich $D_2 = \mathbb{R} \setminus N_P$. Hier sind N_Q und N_P die Nullstellenmengen von Q bzw. P.

Wir habe oben gesehen, dass einige Definitionslücken geschlossen werden können und andere nicht. Wir untersuchen das Verhalten von gebrochen rationalen Funktionen dort etwas genauer.

Satz 4.3.21 (Verhalten bei Definitionslücken) Sei $R = \frac{P}{Q}$ eine gebrochen rationale Funktion.

(a) Hat P in x_0 eine Nullstelle von gleicher oder höherer Vielfachheit als Q, so können die Nulstellen von Q in x_0 gegen die Nullstellen von P in x_0 gekürzt werden, genauer:

$$R(x) = \frac{(x - x_0)^k P_1(x)}{(x - x_0)^m Q_1(x)} = \frac{(x - x_0)^{k-m} P_1(x)}{Q_1(x)},$$

wobei $k \geq m$ ist. In diesem Fall setzt sich $R = P/Q$ stetig in den Punkt x_0 fort. Man spricht von einer **hebbaren Definitionslücke**.

(b) Hat Q in x_0 eine Nullstelle höherer Vielfachheit als P, so ist die Definitionslücke nicht hebbar. Man spricht von einer **Polstelle** bei x_0, genauer:

$$R(x) = \frac{(x - x_0)^k P_1(x)}{(x - x_0)^m Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{(x - x_0)^{m-k} Q_1(x)},$$

wobei $k < m$ also $m - k > 0$ ist.

Beispiel 4.3.22

(a) $R_1(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ hat eine hebbare Definitionslücke bei $x_0 = 1$.

(b) $R_2(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x+1}{x-1}$ hat eine Polstelle bei $x_0 = 1$. Dort ist die Definitionslücke nicht hebbar.

einer Polstelle x_0 untersuchen wir das asymptotische Verhalten einer gebrochen rationalen Funktion $R = P/Q$. Wir können uns x_0 von links (Schreibweise $\lim\limits_{x \to x_0^-} R(x)$ oder $\lim\limits_{x \uparrow x_0} R(x)$) oder von rechts (Schreibweise $\lim\limits_{x \to x_0^-} R(x)$ oder $\lim\limits_{x \downarrow x_0} R(x)$) annähern, und dort geht die Funktion R gegen $-\infty$ oder $+\infty$. Da es sehr mühselig wäre, alle Fälle formal aufzuschreiben, begnügen wir uns hier mit einigen Beispielen und stellen weitere Schreibweisen vor.

Beispiel 4.3.23

(a) Es gelten $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

(b) Es sind $\lim\limits_{x \uparrow 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ und $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

(c) Für $R(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ ist der Grenzwert von links

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$$

und der Grenzwert von rechts

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x+1}{x-1} = +\infty.$$

Ebenfalls untersuchen wir das asymptotische Verhalten von gebrochen rationalen Funktionen bei den Unendlichkeitsstellen $\pm\infty$.

Definition 4.3.24 Mit Polynomdivision bringen wir eine gebrochen rationale Funktion R in die folgende Form:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

wobei A und P_1 Polynome mit $\deg Q > \deg P_1$ sind. Hier nennen wir A die **Asymptote** von R. Da

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P_1(x)}{Q(x)} = 0$$

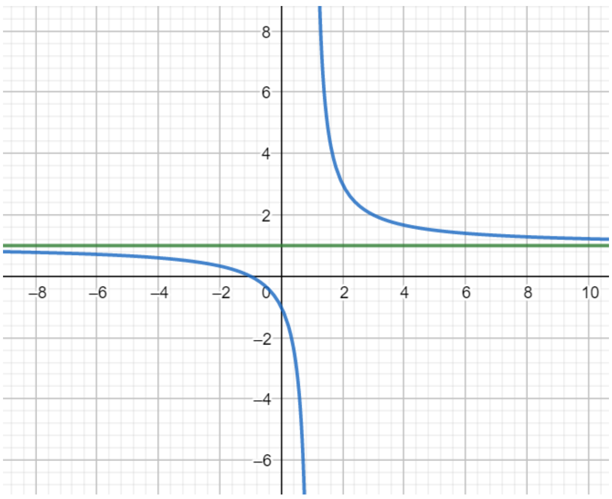
verhält sich R für $x \to \pm\infty$ wie das Polynom A.

Beispiel 4.3.25

(a) Die gebrochen rationale Funktion

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

verhält sich für $x \to \pm\infty$ wie die Konstante Funktion 1 (was ein sehr einfaches Polynom vom Grad 0 ist).

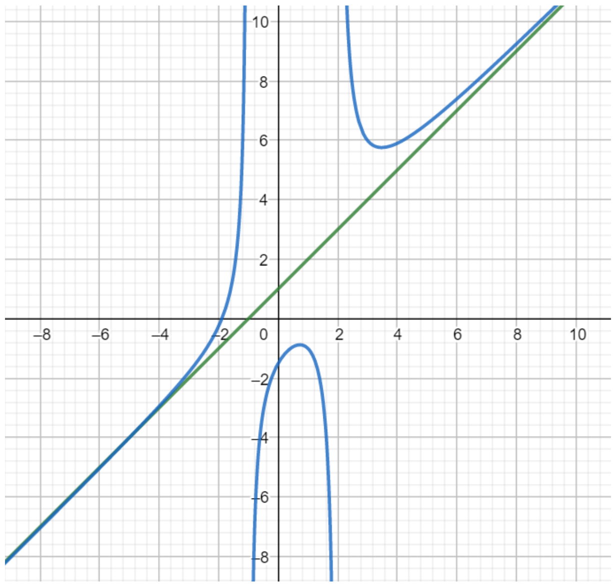


$R(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (blau) und Asymptote $A(x) = 1$ (grün)

(b) Die gebrochen rationale Funktion

$$R(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{x+5}{x^2 - x - 2}$$

verhält sich für $x \to \pm\infty$ wie die lineare Funktion $x+1$. Wegen $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ hat R Pole bei -1 und 2.



$R(x) = \frac{x^3-2x+3}{x^2-x-2}$ (blau) und Asymptote $A(x) = x+1$ (grün)

Wurzelfunktionen

Satz 4.3.26 (Existenz der k-ten Wurzel) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $k \geq 2$. Dann hat das Monom

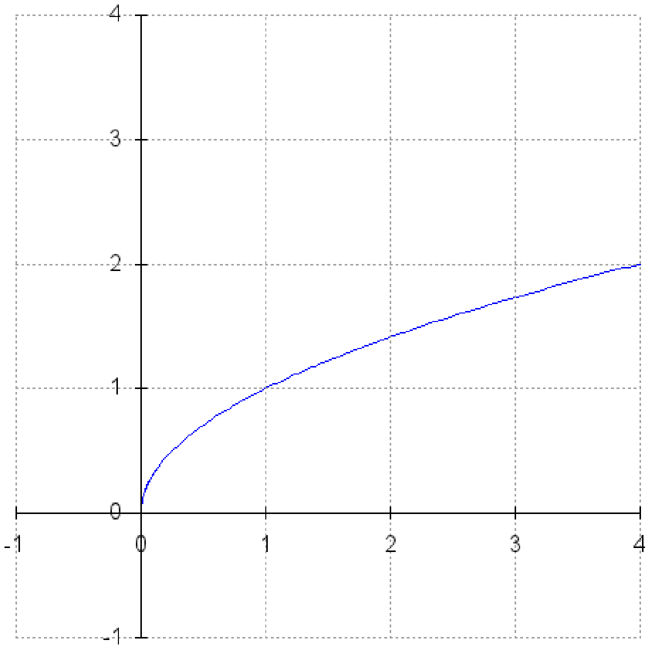
$$x^k : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$

eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion

$$\sqrt[k]{y} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+.$$

Sie löst die Gleichung $x^k = y$ durch $x = \sqrt[k]{y}$.

Speziell schreiben wir $\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$.



Graph von $\sqrt{x}$

Satz 4.3.27 (Wichtige Eigenschaften der k-ten Wurzel) Seien $x, y \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Dann gelten:

(a) $\sqrt[k]{0} = 0$ und $\sqrt[k]{1} = 1$

(b) $\sqrt[k]{x^k} = x$ und $(\sqrt[k]{y})^k = y$

(c) Es gelten die Grenzwerte:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[k]{x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt[k]{x} = +\infty.$$

Satz 4.3.28 (Wurzelgesetze) Für alle $x, y > 0$ gilt:

(a) $\sqrt[k]{x \cdot y} = \sqrt[k]{x} \cdot \sqrt[k]{y}$

(b) $(\sqrt[k]{x})^n = \sqrt[k]{x^n}$

(c) $\sqrt[k]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[k]{x}}{\sqrt[k]{y}}$

Bemerkung Für ungerade k hat das Monom $x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion $\sqrt[k]{y} = x$ sogar für negative Zahlen y, z.B.

$$x^3 = -27 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{-27} = -3.$$

Für k gerade hat das Monom $x^k : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+$ ebenfalls eine Umkehrfunktion, nämlich $-\sqrt[k]{y} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$. Daher hat die Gleichung $x^k = y$ immer zwei Lösungen $x = \pm\sqrt[k]{x}$, z.B.

$$x^4 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2.$$

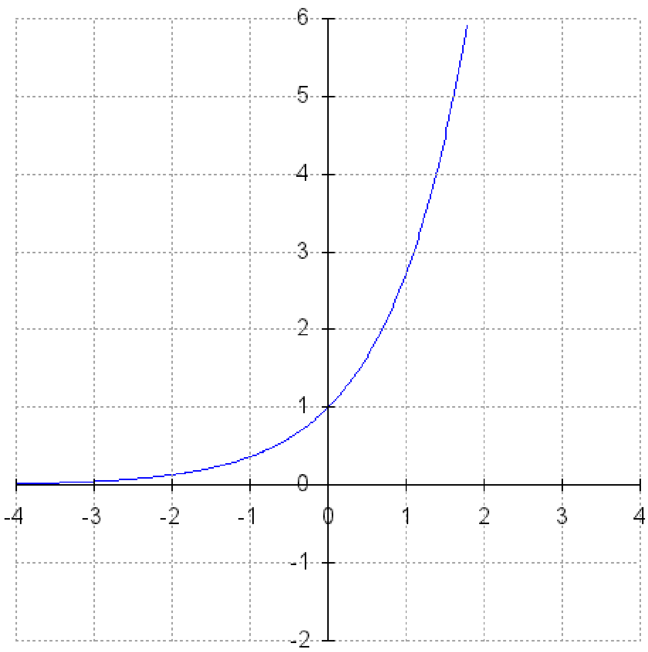
Exponential-, Logarithmus- & Potenzfunktionen

Satz 4.3.29 (Existenz der Exponentialfunktion) Die Exponentialfunktion (oder $\exp$-Funktion) ist definiert durch:

$$e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \qquad e^x := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Sie ist stetig und streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$. Manchmal schreibt man auch $e^x = \exp(x)$. Es gilt:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$



Graph von e^x

Beispiel Radioaktiver Zerfall eines Atoms mit Zerfallskonstante $\lambda > 0$:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

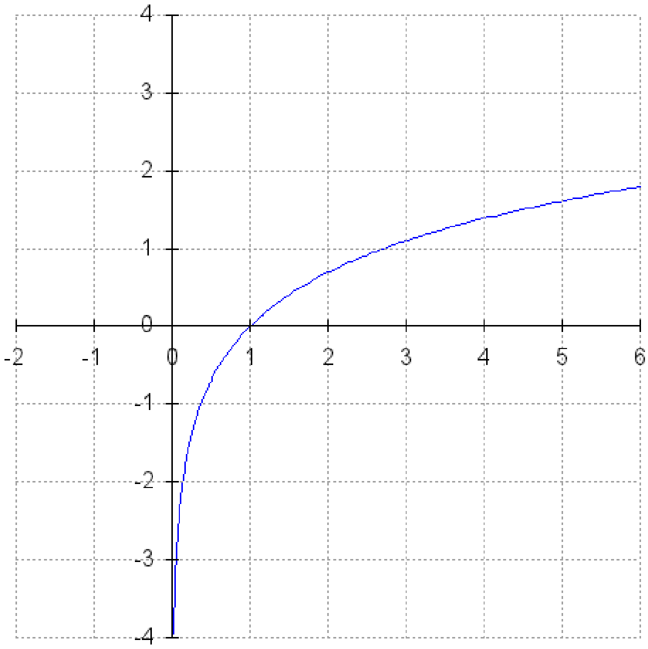
Satz 4.3.30 (Existenz des natürlichen Logarithmus) Die Exponentialfunktion besitzt eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion

$$\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

die *natürlicher Logarithmus* (oder $\ln$-Funktion) genannt wird. Sie löst die Gleichung

$$e^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y).$$

Manchmal schreibt man auch $\ln(x) = \log(x)$.



Graph von $\ln(x)$

Beispiel Dadurch kann man Gleichungen, die die $\exp$- oder $\ln$-Funktion enthalten, auflösen, z.B.

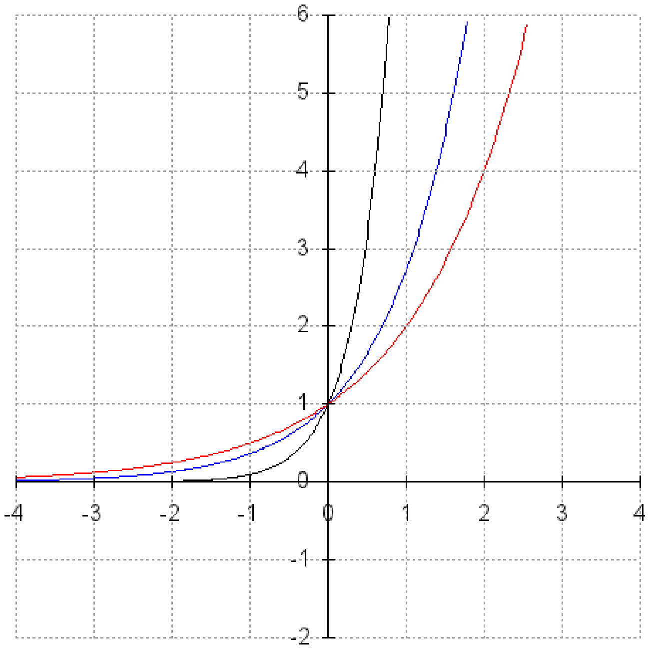
$$e^{3x+4} = e^{2x} \quad \text{oder} \quad \ln(x+4) = 12.$$

Mit Hilfe der $\exp$-Funktion lassen sich Potenzfunktionen und allgemeine Logarithmusfunktionen definieren.

Definition 4.3.31 Für reelle Zahlen $a > 0$ und x ist die **Potenz** a^x **mit Basis** a **und Exponent** x definiert als:

$$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad a^x := e^{x \cdot \ln(a)}$$

Sie ist wegen e^x stetig und streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.



Graphen von 10^x (schwarz), e^x (blau), 2^x (rot)

Satz 4.3.32 (Wichtige Eigenschaften der Potenzfunktionen) Seien

(a) $a^0 = 1$ und a^x besitzt **keine** Nullstelle.

(b) a^x ist stetig und streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

(c) Es gelten die Grenzwerte:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

Satz 4.3.33 (Potenzgesetze) Seien $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(a) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(b) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

(c) $(a^x)^y = a^{xy}$

(d) Erste Folgerung: $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(e) Zweite Folgerung: $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

(f) Dritte Folgerung: $\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$

Satz 4.3.34 (Existenz der Logarithmen) Für eine fest gewählte Basis a besitzt a^x eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \log_a(y) := \frac{\ln(y)}{\ln(a)},$$

heißt die **Logarithmus zur Basis** a heißt. Sie löst die Gleichung

$$a^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(y).$$

Beispiel Der Logarithmus zur Basis 10 wird auch mit $\lg$ notiert, d.h.

$$\lg(y) = \log_{10}(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(10)}.$$

Ferner gilt mit der Eulerzahl e der Zusammenhang

$$\log_e = \ln.$$

Satz 4.3.35 (Wichtige Eigenschaften der Logarithmenfunktionen) Seien $a, x, y > 0$. Dann gelten:

(a) $\log_a(a) = 1$ und $\log_a(1) = 0$

(b) $\log_a$ ist stetig und streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}^+$.

(c) Es gelten die Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

Satz 4.3.36 (Logarithmengesetze) Seien $a, b > 0$ und $x, y > 0$. Dann gelten:

(a) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(b) $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$

(c) $\log_a(x^c) = c\log_a(x)$ für alle $c \in \mathbb{R}$

(d) $\log_b(x) = \log_a(x) \cdot \log_b(a)$

Beweis (a) bis (c) folgen unmittelbar aus der Definition für $\log_a$ sowie den Eigenschaften für den natürlichen Logarithmus. (d) Wir setzen in die Definition ein und erweitern geschickt:

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{\ln(x)\ln(a)}{\ln(b)\ln(a)} = \frac{\ln(x)\ln(a)}{\ln(a)\ln(b)} = \log_a(x) \cdot \log_b(a)$$

□

Beispiel (Anwendung des Logarithmus)
Das Kapital K wird über n Jahre mit einem Zins von p % jährlich verzinst. Wie viele Jahre benötigt man, um auf ein Kapital von mindestens W zu kommen?

$$K(n) := K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Zu lösen ist $K(n) \geq W$, wobei n minimal sein soll. Setze $q := 1 + \frac{p}{100}$. Wir lösen nach n auf:

$$\begin{aligned}
& K(n) \geq W \\
\Leftrightarrow\quad & Kq^n \geq W \\
\overset{\text{Teile durch } K}{\Leftrightarrow}\quad & q^n \geq \frac{W}{K} \\
\overset{\text{Monotonie } \ln}{\Leftrightarrow}\quad & \ln(q^n) \geq \ln\left(\frac{W}{K}\right) \\
\overset{\ln(a^x) = x\ln(a)}{\Leftrightarrow}\quad & n\ln(q) \geq \ln\left(\frac{W}{K}\right) \\
\overset{\text{Teilen durch } \ln(q)}{\Leftrightarrow}\quad & n \geq \frac{\ln\left(\frac{W}{K}\right)}{\ln(q)} \\
\overset{\text{Definition } \log_q(x)}{\Leftrightarrow}\quad & n \geq \log_q\left(\frac{W}{K}\right)
\end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen

Hier schneiden wir nur kurz die trigonometrischen Funktionen und ihre wesentlichen Eigenschaften an. Für die Beweise benötigt man die Reihendarstellung des Sinus und Kosinus, die wir hier nicht behandelt haben. Allerdings sind die Eigenschaften ersichtlich und leichter zu merken, wenn man den Sinus & Kosinus als Ankathete bzw. Gegenkathete in einem Dreieck im Einheitskreis interpretiert.

Definition 4.3.37 (Sinus, Kosinus & Tangens) Sei der Einheitskreis durch den Ursprung gegeben und sei $\vec{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ ein Punkt auf dem Kreisrand gegeben. Der Winkel x in Bogenmaß sei der Winkel zwischen der positiven x-Achse und $\vec{P}$. Umfährt der Punkt $\vec{P}$ den Kreisrand gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung, so hängen $P_1 = P_1(x)$ und $P_2 = P_2(x)$ von dem Winkel x ab. Wir definieren daher den Sinus und den Kosinus als:

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad \sin(x) := P_1(x)$$

$$\text{und} \quad \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad \cos(x) := P_2(x)$$

Ferner ist der Tangens definiert als:

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Satz 4.3.38 (Reihendarstellung des Sinus und Kosinus) Es gelten:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Bemerkung Ist $x \in [0, \frac{\pi}{2}] = [0, 90°]$, so sind

$$\sin(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}, \quad \cos(x) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} \quad \text{und} \quad \tan(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

im rechtwinkligen Dreieck, dass von $\vec{P}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im 1. Quadranten aufgespannt wird.

Satz 4.3.39 (Eigenschaften des Sinus, Kosinus & Tangens) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) Sinus und Kosinus sind 2π-periodisch:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

Der Tangens ist π-perodisch, d.h. $\tan(x + \pi k) = \tan(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.

(b) Nullstellen des Sinus und Tangens:

$$\sin(k\pi) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

(c) Nullstellen des Kosinus:

$$\cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

(d) Satz des Pythagoras:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

(e) $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ und $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

(f) Der Sinus und der Tangens sind **ungerade**, d.h.

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{bzw.} \quad \tan(-x) = -\tan(x).$$

(g) Der Kosinus ist **gerade**, d.h. $\cos(-x) = \cos(x)$.

(h) Es ergeben sich folgende Werte für die jeweiligen Winkel:

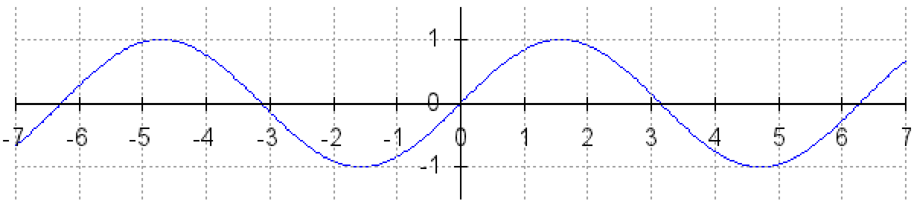
Gradmaß	Bogenmaß	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$0°$	0	0	1	0
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
$180°$	π	0	-1	0
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-
$360°$	2π	0	1	0
$450°$	$\frac{5\pi}{2}$	1	0	-

Satz 4.3.40 (Additionstheoreme) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

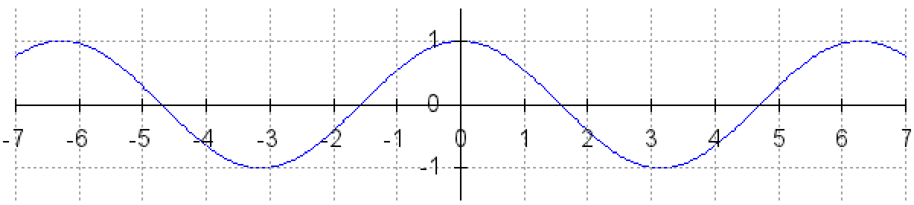
$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Übung Zeigen Sie, dass $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ ist. Nutzen Sie, dass $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ist.

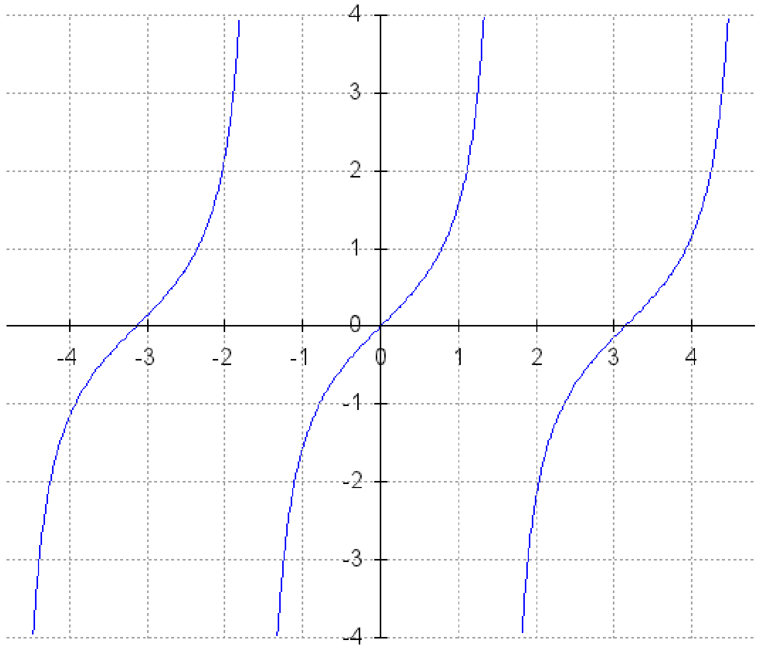
Graphen der trigonometrischen Funktionen



Graph von $\sin(x)$



Graph von $\cos(x)$



Graph von $\tan(x)$

Satz 4.3.41 (Existenz der Umkehrfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen)

(a) Der Sinus $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ hat eine stetige, streng monoton wachsend Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

genannt **Arkussinus**. Sie löst die Gleichung:

$$\sin(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin(y).$$

(b) Der Kosinus $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ hat eine stetige, streng monoton fallende Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],$$

genannt **Arkuskosinus**. Sie löst die Gleichung:

$$\cos(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos(y).$$

(c) Der Tangens $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ hat eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion

$$\arctan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

genannt **Arkustangens**. Sie löst die Gleichung:

$$\tan(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan(y).$$

Beispiel Seien zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ im $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ gegeben. Dann ist der Winkel α zwischen beiden Vektoren gleich:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}\right)$$

Aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist der Bruch $\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$ kleiner gleich 1. Daher darf der $\arccos$ tatsächlich auf auf diesen Bruch angewendet werden und liefert den Winkel α im Bogenmaß.

Übersicht: Wichtige stetige Funktionen

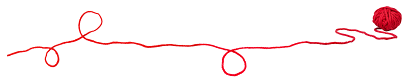
Bezeichnung	**Symbol**	**Definitionsbereich $\mathbf{D_f}$**	**Wertebereich $\mathbf{W_f}$**
Betrag	$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_0^+$
Monom	$x^k,\ k \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_0^+$, falls k gerade $\mathbb{R}$, falls k ungerade
Polynom	$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$	$\mathbb{R}$	abhängig von p
k-te Wurzel	$\sqrt[k]{x},\ 2 \leq k \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}_0^+$, falls k gerade $\mathbb{R}$, falls k ungerade	$\mathbb{R}_0^+$, falls k gerade $\mathbb{R}$, falls k ungerade
Exponentialfunktion	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
Natürlicher Logarithmus	$\ln(x)$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
Potenzfunktion	$a^x = e^{x\ln(a)},\ a > 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
Allg. Logarithmus	$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)},\ b > 0$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
10er-Logarithmus	$\lg(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
Sinus	$\sin(x) = \frac{G}{H}$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
Kosinus	$\cos(x) = \frac{A}{H}$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
Tangens	$\tan(x) = \frac{G}{A}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
Arkussinus	$\arcsin(x)$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$
Arkuskosinus	$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
Arkustangens	$\arctan(x)$	$(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$	$\mathbb{R}$

5 Differentialrechnung

Vorbereitung

- Studiport LE8 (Höhere Funktionen) und LE9 (Differentialrechnung)

Roter Faden



- Wir betrachten nun Funktionen, deren Steigungsverhalten wir untersuchen können. Das führt zum Begriff der Ableitung einer Funktion.

- Mit Hilfe der Ableitungen können wir sehr viel über ihr Verhalten aussagen. Die erste Ableitung liefert Informationen zum Steigungsverhalten (Monotonie & Extremstellen, Geschwindigkeit), und die zweite über die Änderungsrate der Steigung und das Krümmungsverhalten (Wendestellen, Beschleunigung).

- Wir erlernen Rechenregeln und Techniken, um Ableitungen zu bestimmen und mit deren Hilfe auf die Extremstellen und Krümmungen zu schließen.

- Extrem- und Wendestellen geben eher Aufschluss zum Verhalten der Funktion im „Inneren“ des Definitionsbereichs. Es interessiert daneben aber auch das Verhalten der Funktion am Rande, allen voran in Richtungen plus oder minus Unendlich. Wir lernen, wie man mit Polynomdivision und der Regel von de l'Hospital das asymptotische Verhalten von Funktionen an den Rändern untersucht.

- Schließlich interessiert auch, so gut wie möglich mit Polynomen zu approximieren, da diese wesentlich einfacher zu behandeln sind und oftmals für lokale untersuchen ausreichen. Dieses Prinzip wird Taylorentwicklung genannt.

Lernziele

Wissen & Verständnis

- Sie verstehen den Differenzierbarkeitsbegriff und den Zusammenhang zu Steigungen von Sekanten und Tangenten.

- Sie kennen die Ableitungen der wichtigsten Funktionen.

- Sie kennen den Mittelwertsatz und verstehen seine Bedeutung und Konsequenzen (für Extrema, Monotonie, Konvexität/Konkavität).

- Sie wissen, was man unter der Taylorentwicklung versteht.

Anwendung

- Sie können Funktionen ableiten und beherrschen die Rechenregeln für die Differentiation.

- Sie können die wesentlichen Eigenschaften einer Funktion untersuchen (Kurvendiskussion), d.h. Extrema, Wendepunkte, Monotonie und Krümmung.

- Sie können Funktionen auf asymptotisches Verhalten untersuchen (Polynomdivision, Regel von l'Hospital).

5.1 Differenzierbarkeit

Definition 5.1.1 Sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Für zwei Punkte $x_1 \neq x_0 \in I$ heißt die Gerade durch die beiden Punkte $P_1 = (x_0, f(x_0))$ und $P_2 = (x_1, f(x_1))$ die **Sekante**. Diese Sekante hat die Steigung

$$\Delta_f(x_0, x_1) \quad := \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

und die Sekante selbst ist gegeben durch die Funktion

$$S = S_{f,x_0,x_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad S(x) = f(x_0) + \Delta_f(x_0, x_1)(x - x_0).$$

(b) Die Funktion f heißt im Punkt $x_0 \in I$ **differenzierbar**, falls die folgende sog. **Ableitung** existiert:

$$f'(x_0) \quad := \quad \lim_{x \to x_0} \Delta_f(x, x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(c) Die Gerade

$$T = T_{f,x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ist dann die **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

(d) Die Sekantensteigungen $\Delta_f(x, x_0)$ konvergieren demnach gegen die Tangentensteigung $f'(x_0)$ für $x \to x_0$. In diesem Sinne kann man $f'(x_0)$ als **Steigung der Funktion f an der Stelle x_0** interpretieren.

(e) Wir sagen, dass f **auf ganz I differenzierbar** ist, falls f an jeder Stelle $x_0 \in \mathrm{I}$ differenzierbar ist. Ist f' stetig, so nennen wir f **stetig differenzierbar**.

(f) Ist $f' : I \to \mathbb{R}$ auch wieder differenzierbar, so ist f'' die **zweite Ableitung von f** und f **zweimal differenzierbar**. Ist f'' sogar stetig, nennen wir f' **zweimal stetig differenzierbar**.

Satz 5.1.2 Ist $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist f dort auch stetig. Die Umkehrung ist aber i.A. falsch (z.B. $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$).

Beispiel Ein Monom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = x^k$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$ ist an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, denn:

$$\begin{aligned}
p'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{k-1} + x^{k-2} \cdot x_0 + \ldots + x \cdot x_0^{k-2} + x_0^{k-1})}{x - x_0} \\
&\overset{\text{Kürzen}}{=} \lim_{x \to x_0} x^{k-1} + x^{k-2} \cdot x_0 + \ldots + x \cdot x_0^{k-2} + x_0^{k-1} \\
&= x_0^{k-1} + x_0^{k-2} \cdot x_0 + \ldots + x_0 \cdot x_0^{k-2} + x_0^{k-1} \\
&\overset{\text{Zusammenfassen}}{=} \underbrace{x_0^{k-1} + x_0^{k-1} + \ldots + x_0^{k-1}}_{k\text{-mal}} \\
&= k x_0^{k-1}
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $p'(x) = (x^k)' = kx^{k-1}$ ist, wenn wir $x_0 = x$ variabel setzen. Die Formel gilt übrigens auch für $k = 0$, denn dann ist $p(x) = 1$ eine Konstante mit Ableitung $p'(x) = 0$, aber auch für $k < 0$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 5.1.3 (Wichtige Ableitungen) Die nachstehenden Funktionen sind auf ihren jeweilgen Definitionsbereichen differenzierbar und haben die folgenden Ableitungen:

$$\begin{aligned}
(\text{Konstante})' &= 0 \\
(x^a)' &= a \cdot x^{a-1}, \quad \text{für } a \neq 0 \\
(e^x)' &= e^x \\
(b^x)' &= \ln(b) \cdot b^x, \quad \text{für } b > 0 \\
(\ln(x))' &= \frac{1}{x} \\
(\log_b(x))' &= \frac{1}{x \ln(b)} \\
\sin'(x) &= \cos(x) \\
\cos'(x) &= -\sin(x) \\
\tan'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

Ferner ist die Ableitung der Betragsfunktion die Vorzeichenfunktion

$$|x|' = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{falls } x > 0 \\ -\frac{x}{|x|}, & \text{falls } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Sie ist für $x = 0$ **nicht** definiert, da $|x|$ dort keine Ableitung besitzt.

Beweis Diese Ableitungen sind nicht offensichtlich. Für die Ableitungen von e^x, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ benötigt man z.B. deren sog. Reihendarstellung. Die Ableitungen der restlichen Funktionen folgen aus den Rechenregeln für Ableitungen.

Satz 5.1.4 (Rechenregeln für Ableitungen) Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(a) Das Produkt $\alpha \cdot f$ ist differenzierbar und es gilt:

$$\big(\alpha \cdot f\big)' = \alpha \cdot f'$$

(b) Die Summe $f + g$ ist differenzierbar und es gilt:

$$\big(f + g\big)' = f' + g'$$

(c) **Produktregel:** $f \cdot g$ ist differenzierbar und es gilt:

$$\big(f \cdot g\big)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

(d) **Quotientenregel:** $\dfrac{f}{g}$ ist differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - g' \cdot f}{g^2}$$

überall dort, wo g nicht verschwindet.

Beweis Die Regeln (a) und (b) sind einfache Folgerungen aus der Definition der Ableitung, da man aus dem Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Summen und Produkte mit Zahlen herausziehen kann. Für die Produktregel muss man den Differenzenquotienten geschickt manipulieren:

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Lässt man nun $x \to x_0$ laufen, so ergibt sich automatisch die Produktregel. Die Quotientenregel beweist man analog.

Beispiel Mit Anwendung der Quotientenregel und dem Satz des Pythagoras ist

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos(x)\sin'(x)-\cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}\\ &= \frac{\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}.\end{aligned}$$

Man kann auch zeigen: $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$.

Übung Bestimmen Sie mit Hilfe der jeweiligen Definitionen und den Rechenregeln die Ableitungen der Funktionen a^x und $\log_a(x)$. Sie können die Ableitungen von e^x und $\ln(x)$ als gegeben voraussetzen.

Satz 5.1.5 (Kettenregel) Seien $f : I \to J$ und $g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

$$(g\circ f)'(x) = (g(f(x))' = g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Beweis Der Beweis geht ähnlich wie die Produktregel oben. □

Beispiel

(a) Für $g(x) = e^x$ und $f(x) = x^2$ ist

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = e^{x^2} \quad \text{und} \quad \big(g\circ f\big)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) = e^{x^2}\cdot 2x.$$

(b) Da $g(y) = \ln(y)$ die Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$ ist, gilt

$$(f\circ g)(y) = f(g(y)) = e^{\ln(y)} = y.$$

Leiten wir auf beiden Seiten ab und wenden links die Kettenregel an, ergibt das

$$f'(g(y))\cdot g'(y) = e^{\ln(y)}\cdot g'(y) = y\cdot g'(y) = 1.$$

Stellen wir y auf die andere Seite, erhalten wir:

$$g'(y)(\ln(y))' = \frac{1}{y}.$$

Mit diesem Trick erhält man (mehr oder weniger) die Ableitungen der Umkehrfunktionen.

Übung Bestimmen Sie die Ableitungen der Umkehrfunktionen $\arcsin$, $\arccos$ und $\arctan$.

5.2 Kurvendiskussion

Extremstellen

Definition 5.2.1 Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$ ein **lokales Maximum**, falls

$$f(x) \leq f(x_0)$$

für jedes x nahe an x_0, d.h. $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$.

Sie hat in x_0 ein **lokales Minimum**, falls

$$f(x_0) \leq f(x)$$

für jedes x nahe an x_0, d.h. $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$.

Ist eines von beiden gegeben, so nennen wir x_0 eine **lokale Extremstelle**.

Satz 5.2.2 (Notwendiges Kriterium für lokale Extrema)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in I$ eine lokale Extremstelle. Dann gilt:

$$f'(x_0) \ = \ 0.$$

Beweis Liegt eine Extremstelle, z.B. ein lokales Maximum in x_0 vor, so gelten:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Daraus folgt sofort $f'(x_0) = 0$.

Satz 5.2.3 (Mittelwertsatz) Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$, so dass

$$\Delta_f(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad = \quad f'(x_0),$$

d.h. es existiert ein Punkt $x_0 \in (a, b)$, in dem die Tangente an den Graphen von f dieselbe Steigung wie die Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ hat.

Beweis Hier verweisen wir wieder auf die Bücher über Analysis.

Korollar (Zusammenhang zwischen Monotonie & Ableitung) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt:

(a) Ist $f' > 0$ in I, so wächst f in I streng monoton.

(b) Ist $f' \geq 0$ in I, so wächst f in I monoton.

(c) Ist $f' < 0$ in I, so fällt f in I streng monoton.

(d) Ist $f' \leq 0$ in I, so fällt f in I monoton.

Beweis Das folgt aus dem Mittelwertsatz. Falls (a) eintritt, aber f in I nicht streng monoton wächst, gibt es zwei Zahlen $a < b$ in I, so dass $f(a) \geq f(b)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $f' > 0$ auf I ist. Die anderen Fälle sind analog zu beweisen.

Satz 5.2.4 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema I) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ für $x_0 \in I$. Dann gilt:

(a) Wechselt f' nahe x_0 sein Vorzeichen von $+$ nach $-$, so hat f in x_0 ein **lokales Maximum**.

(b) Wechselt f' nahe x_0 sein Vorzeichen von $-$ nach $+$, so hat f in x_0 ein **lokales Minimum**.

Krümmung

Definition 5.2.5 Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

(a) Ist $f''(x_0) > 0$, so ist f **konvex** in x_0.

(b) Ist $f''(x_0) < 0$, so ist f **konkav** in x_0.

(c) Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt f'' bei x_0 das Vorzeichen, so hat f in x_0 eine **Wendestelle**.

Satz 5.2.6 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema II) $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$. Dann gilt:

(a) Ist f konkav in x_0, so hat f in x_0 ein **lokales Maximum**.

(b) Ist f konvex in x_0, so hat f in x_0 ein **lokales Minimum**.

Übung Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Diskutieren Sie f im Hinblick auf Wertebereich, Monotonie, Extremstellen, Krümmung und Wendestellen.

5.3 Die L'Hospitalsche Regel

Satz 5.3.1 (Polynomdivision) Sei R eine **rationale Funktion**, d.h.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

wobei P, Q Polynome sind. Dann gibt es zwei Polynome A und p derart, dass

$$R(x) = A(x) + \frac{p(x)}{Q(x)},$$

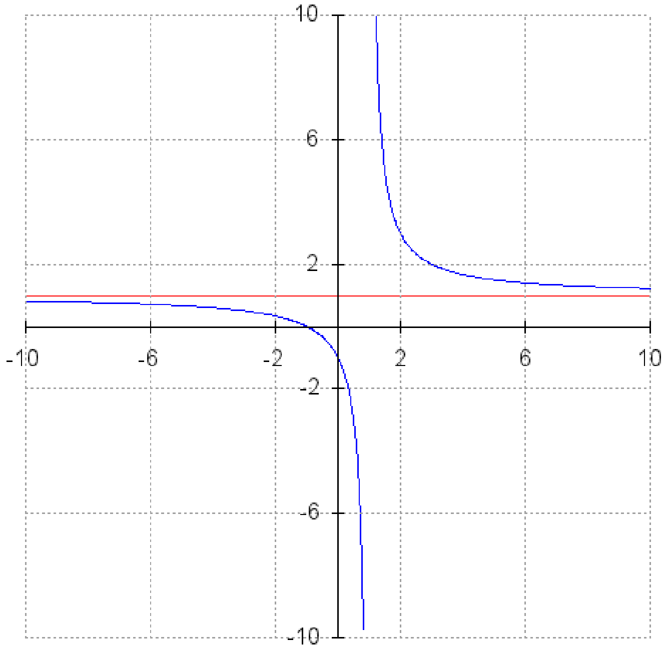
wobei $\deg p < \deg Q$.

Definition 5.3.2 Da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{p(x)}{Q(x)} = 0$, verhält sich R wie die **Asymptote** A für $x \to \pm\infty$.

Beispiel (a) Es gilt:

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

Daher verhält sich für $x \to \pm\infty$ wie die konstante Funktion 1. Das Polynom $A(x) = 1$ ist die Asymptote.

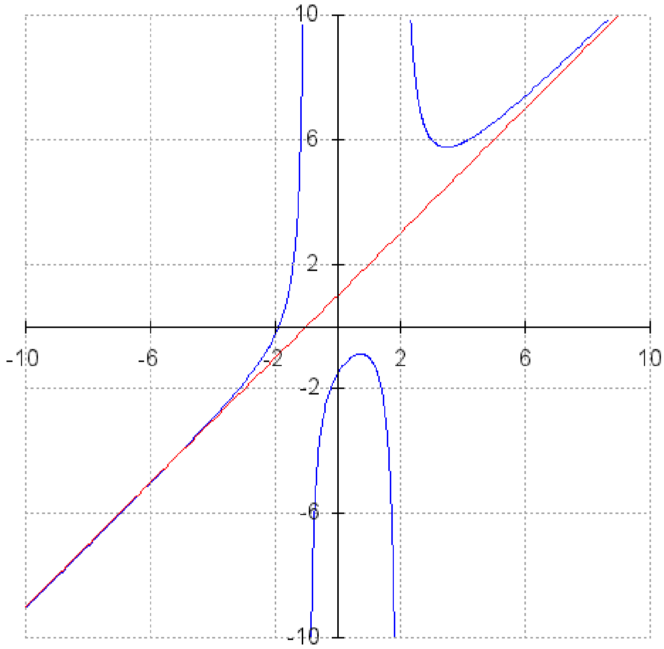


Graph von $\frac{x+1}{x-1}$ (blau) und $A(x) = 1$ (rot)

(b) Es gilt:

$$R(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{x + 5}{x^2 - x - 2}$$

Daher verhält sich für $x \to \pm\infty$ wie die lineare Funktion $A(x) = x+1$. Wegen $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$ hat R Pole bei -1 und 2.



Graph von $\frac{x^3-2x+3}{x^2-x-2}$ (blau) und $A(x) = x + 1$ (rot)

Satz 5.3.3 (Regel von De l'Hospital) Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Im Falle

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$$

oder im Falle

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \searrow a} g(x) = \infty$$

gilt dann:

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existiert}$$

Ferner sind auch beide Limiten gleich, d.h.

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entsprechendes gilt für Grenzprozesse $x \nearrow b$. Die Fälle $a = -\infty$ und $b = +\infty$ sind ebenfalls zulässig.

Beispiel Für $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$ ist wegen $f'(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = 1$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad = \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Korollar Seien $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

(b) $\displaystyle\lim_{x \searrow 0} x^n \ln(x) = 0$

(c) $\displaystyle\lim_{x \searrow +\infty} \frac{\ln}{x^n} = 0$

5.4 Taylorentwicklung

Definition 5.4.1 Eine Funktion $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ ist n-**mal stetig differenzierbar auf** I, falls man f n-mal auf ganz I ableiten kann und die n-te Ableitung $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ wieder stetig ist.

Definition 5.4.2 Sei $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar und $x_0 \in I$. Dann heißt

$$\begin{aligned} T_{f,n,x_0}(x) \quad &:= \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots \\ &\quad\;\; \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

das n-**te Taylorpolynom** von f im Punkt x_0.

Ist f unendlich oft differenzierbar, so heißt

$$T_{f,x_0}(x) = \lim_{n \to \infty} T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

die **Taylorreihe** von f in x_0.

Satz 5.4.3 (Taylorentwicklung) Sei $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und $x_0 \in I$. Dann existiert eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Restgliedfunktion $R_{n+1} : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \quad = \quad T_{f,n,x_0} + R_{n+1}(x)$$

und

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^n} \quad = \quad 0.$$

In diesem Sinne ist $f \approx T_{f,n,x_0}$ mit Fehler R_{n+1} für $x \to x_0$.

Bemerkung Die Funktion T_{f,n,x_0} ist ein Polynom der Ordnung $\leq n$, dass f im Punkt x_0 von der Ordnung n approximiert, da die Differenz

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_{f,n,x_0}$$

für $x \to x_0$ schneller als $(x - x_0)^n$ gegen 0 konvergiert.

Es gibt zwei vorteilhafte Sonderfälle:

1. Ist $R_{n+1} = 0$, so ist $T_{f,n,x_0}(x) = f(x)$. Von daher muss f bereits ein Polynom sein.
2. Ist $\lim\limits_{n \to \infty} R_{n+1} = 0$, so ist $T_{f,x_0}(x) = f(x)$, d.h. f ist bereits seine eigene Taylorreihe.

Lässt man in der Taylorentwicklung $n \to \infty$ laufen, so versucht man, die Funktion f durch ihre Taylorreihe zu approximieren. Tatsächlich stimmen unendlich oft differenzierbare Funktionen oft mit ihrer Taylorreihe überein, aber nicht immer.

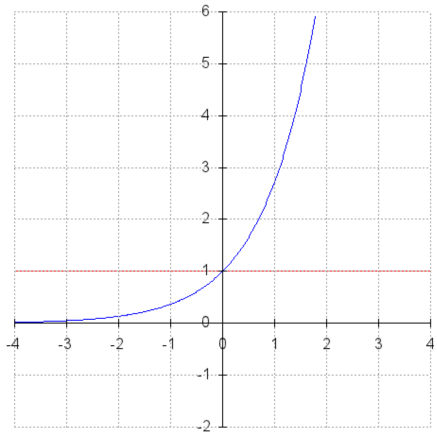
Satz 5.4.4 (Taylorreihenentwicklung e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$)

(a) $e^x = T_{e^x,0}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$

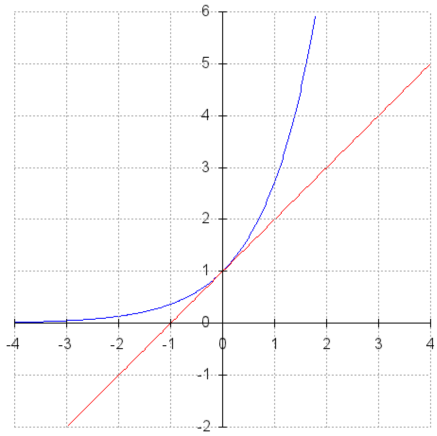
(b) $\sin(x) = T_{\sin,0}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$

(c) $\cos(x) = T_{\cos,0}(x) = \sum\limits_{lk=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$

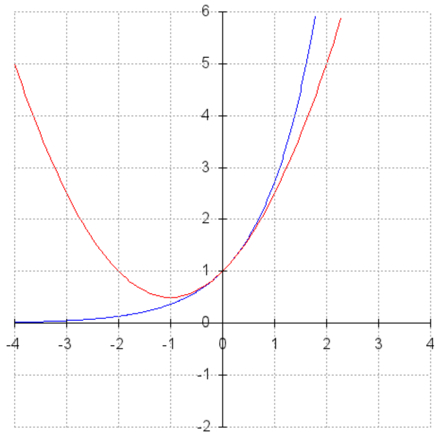
(d) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$ ist ∞-oft differenzierbar, aber $T_{f,0}$ ist die Nullfunktion, da $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 0$.



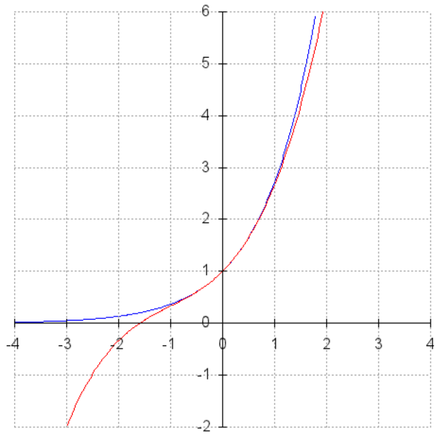
Graph von e^x (blau) und $T_{e^x,0,0} = 1$ (rot)



Graph von e^x *(blau) und* $T_{e^x,1,0} = 1 + x$ *(rot)*



Graph von e^x *(blau) und* $T_{e^x,2,0} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ *(rot)*



Graph von e^x *(blau) und* $T_{e^x,3,0} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ *(rot)*

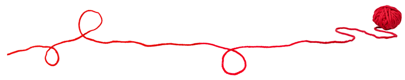
Mathematik 2/IB (Sommersemester)

6 Integralrechnung

Vorbereitung

- Studiport LE8 (Höhere Funktionen)
- Studiport LE9 (Differentialrechnung)
- Studiport LE10 (Integralrechnung)

Roter Faden



- Die Suche nach Stammfunktionen F einer vorgegebenen Funktion f hat viele praktische Anwendungen. Sie erfüllt $F' = f$, und von daher spricht man gerne vom „Aufleiten“.
- Stammfunktionen erhält man z.B. durch Ablesen in den Tabellen wichtiger Ableitungen, die wir im vorherigen Kapitel kennengelernt haben.
- Andererseits erhält man (theoretisch) immer für stetige Funktionen f eine Stammfunktion durch das Flächenintegral

  $$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

  Das bedeutet, dass Stammfunktionen (bzw. Differentiation) und Integrale (bzw. Integration) in starkem Zusammenhang stehen. Das nennt man den „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“.
- Das Integral $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ ist der orientierte Inhalt der Fläche, der vom Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall $[a, b]$ eingeschlossen wird. Unterhalb der x-Achse wird die Fläche negativ, oberhalb positiv gezählt.
- Integrale bestimmt man durch das Berechnen von Flächen oder durch Auffinden von Stammfunktionen.
- Als wichtigste Integrationsmethoden stehen uns die Rechenregeln für Integrale, die partielle Integration, die Anwendung der Kettenregel rückwärts, die Substitutionsregel, die logarithmische Integration und die Integration von gebrochen-rationalen Funktionen mit Hilfe der Partialbruchzerlegung zur Verfügung.
- Schließlich interessiert man sich für Integrale im Grenzprozess oder an Unendlichkeitsstellen.

Lernziele

Wissen

- Sie wissen was Ober- und Untersummen sind, und wie man sie verwendet, um Integrale stetiger Funktionen zu definieren.
- Sie verstehen die Bedeutung des Integrals als Flächeninhalt unter dem Graphen, und kennen seine Bedeutung für physikalische Prozesse.

- Sie kennen den Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration (Hauptsatz).
- Sie wissen was Stammfunktionen sind, und wie man sie verwendet, um Integrale zu bestimmen.
- Sie kennen den Unterschied zwischen bestimmten, unbestimmten und uneigentlichen Integralen.

Können

- Sie können gemäß der Rechenregeln für Integrale einfache Rechenoperationen für Integrale durchführen.
- Sie können Integrale mittels Stammfunktionen berechnen.
- Sie beherrschen die wesentlichen Techniken zur Berechnung von Integralen bzw. der Bestimmung von Stammfunktionen: partielle Integration, Substitution, logarithmische Integration
- Sie beherrschen die Integration rationaler Funktionen mittels Partialbruchzerlegung.
- Sie können überprüfen, ob uneigentliche Integrale existieren, und sie gegebenenfalls berechnen.

6.1 Schreibweisen aus der Differentialrechnung

Definition Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, heißt **differenzierbar** in x_0, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Andere Schreibweisen:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0)$$

Betrachten wir die letztere Schreibweise $y' = \dfrac{dy}{dx}$, so ist mit $y = \sin(x)$

$$\sin'(x) = \cos(x) = \frac{dy}{dx},$$

oder mit $y = \sqrt{x}$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}.$$

6.2 Stammfunktionen

Beispiel 6.2.1 (Aus der Physik) Die Geschwindigkeit $\mathsf{v} = \mathsf{v}(t)$ eines Fahrzeugs wurde im Zeitraum $t \in [\mathsf{t}_0, \mathsf{t}_1]$ auf einer Strecke anhand des Tachos gemessen. Wie lautet die Formel für die zurückgelegte Strecke s?
Da $\mathsf{v} = \dfrac{d\mathsf{s}}{dt}$, ist die Lösung s der Differentialgleichung

$$\dot{\mathsf{s}} = \mathsf{v}$$

mit Anfangswert $\mathsf{s}(t_0) = \mathsf{s}_0$ gesucht.

Definition 6.2.2 Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gibt es eine Funktion $F : D_f \to \mathbb{R}$ mit

$$F' = f,$$

so nennen wir F **eine Stammfunktion von** f.

Ist F eine Stammfunktion von f, so auch $F + c$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$, da $(F + c)' = F' + 0 = F' = f$.

F wird auch das **unbestimmte Integral von** f genannt. Wir schreiben symbolisch:

$$\int f(x)\ dx = F(x) + c \quad \text{bzw.} \quad \int f\ dx = F + c$$

Damit gilt stets

$$\int F'(x)\ dx = F(x) + c \quad \text{bzw.} \quad \int F'\ dx = F + c$$

Satz 6.2.3 (Eindeutigkeit von Stammfunktionen) Sind $F, G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktionen zu f, so gilt:

$$F \quad = \quad G + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, d.h. Stammfunktionen sind eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Beweis Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach, denn sind F und G beides Stammfunktionen, so gilt für die Funktion $F - G$:

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

d.h. $F - G$ ist eine Funktion mit Steigung 0, also eine konstante Funktion. □

Beispiel Wir erinnern uns an Beispiel 6.2.1. Angenommen, das Fahrzeug fährt mit konstanter Geschwindigkeit $\mathsf{v} = \mathsf{v}_0$ ab dem Zeitpunkt $t = \mathsf{t}_0$. Gesucht ist dann s mit $\dot{\mathsf{s}} = \mathsf{v} = \mathsf{v}_0$ und $\mathsf{s}(\mathsf{t}_0) = \mathsf{s}_0$. Wir wissen, dass $(t\mathsf{v}_0)' = \mathsf{v}_0$ ist, d.h.

$$\mathsf{s}(t) = t\mathsf{v}_0 + c$$

wegen des vorherigen Satzes. Da $\mathsf{s}(\mathsf{t}_0) = \mathsf{t}_0 \cdot \mathsf{v}_0 + c = \mathsf{s}_0$ sein soll, ist also $c = \mathsf{s}_0 - \mathsf{t}_0\mathsf{v}_0$. Daher ist

$$\mathsf{s}(t) = \mathsf{t}\mathsf{v}_0 + \mathsf{s}_0 - \mathsf{t}_0\mathsf{v}_0.$$

Satz 6.2.4 (Wichtige Stammfunktionen)

$$
\begin{aligned}
\int 0 \; dx &= c \\
\int a \; dx &= ax + c \\
\int x^a \; dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c, \quad \text{für } a \neq -1 \\
\int \frac{1}{\sqrt{x}} \; dx &= 2\sqrt{x} + c \\
\int e^x \; dx &= e^x + c \\
\int b^x \; dx &= \frac{1}{\ln(b)} b^x + c, \quad \text{für } b > 0 \\
\int \frac{1}{x} \; dx &= \ln|x| + c \\
\int \frac{1}{x \ln(b)} \; dx &= \log_b |x| + c \\
\int \cos(x) \; dx &= \sin(x) + c \\
\int \sin(x) \; dx &= -\cos(x) + c \\
\int \frac{1}{\cos^2(x)} \; dx &= \tan(x) + c
\end{aligned}
$$

Beweis Das folgt sofort aus der Liste der wichtigen Ableitungen und der Definition einer Stammfunktion. □

6.3 Methoden zur Berechnung von Stammfunktionen

Hinweis: Im Folgenden verzichten wir auf die Konsante c aus Gründen der Leserlichkeit, denken sie aber stets mit, wenn wir Stammfunktionenen suchen.

Satz 6.3.1 (Linearität der Stammfunktionen) Seien F und G Stammfunktionen von f bzw. g und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$aF + bG$$

eine Stammfunktion von $af + bg$ bzw.

$$\int af + bg \; dx = a \int f \; dx + b \int g \; dx.$$

Beweis Es ist $(aF + bG)' = (aF)' + (bG)' = aF' + bG' = af + bg$. □

Satz 6.3.2 (Partielle Integration) Für zwei stetig differenzierbare Funktionen f, g gilt:

$$\int f'g \; dx = fg - \int fg' \; dx$$

Beweis Die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ auf beiden Seiten „aufgeleitet“ ergibt folgende Formel:

$$fg = \int (fg)' \; dx = \int f'g \; dx + \int fg' \; dx$$

Jetzt müssen wir nur noch umstellen. □

Beispiel

(a) Eine Stammfunktion von xe^x ist $(x-1)e^x$, denn:

$$\begin{aligned}
\int xe^x\ dx &= \int \underbrace{x}_{=f} \cdot \underbrace{e^x}_{=g'}\ dx \\
&= \underbrace{x}_{=f} \cdot \underbrace{e^x}_{=g} - \int \underbrace{1}_{=f'} \cdot \underbrace{e^x}_{=g}\ dx \\
&= xe^x - e^x = (x-1)e^x
\end{aligned}$$

(b) Eine Stammfunktion von x^2e^x ist $(x^2-2x+2)e^x$, denn:

$$\begin{aligned}
\int x^2e^x\ dx &= \int \underbrace{x^2}_{=f} \cdot \underbrace{e^x}_{=g'}\ dx \\
&= \underbrace{x^2}_{=f} \cdot \underbrace{e^x}_{=g} - \int \underbrace{2x}_{=f'} \cdot \underbrace{e^x}_{=g}\ dx \\
&= x^2e^x - 2\int xe^x\ dx \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} x^2e^x - 2(x-1)e^x
\end{aligned}$$

(c) Eine Stammfunktion von $\ln(x)$ ist $x\ln(x) - x$, denn:

$$\begin{aligned}
\int \ln(x)\ dx &= \int \underbrace{1}_{=f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=g}\ dx \\
&= \underbrace{x}_{=f} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=g} - \int \underbrace{x}_{=f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{=g'}\ dx \\
&= x\ln(x) - \int 1\ dx \\
&= x\ln(x) - x
\end{aligned}$$

(d) Bestimme eine Stammfunktion zu $\sin^2(x)$:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\ dx &= \int \underbrace{\sin(x)}_{=f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=g'}\ dx \\
&= \underbrace{\sin(x)}_{=f} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{=g} - \int \underbrace{\cos(x)}_{=f'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{=g}\ dx \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\ dx \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \sin^2(x)\ dx \\
\Leftrightarrow \quad 2\int \sin^2(x)\ dx &= -\sin(x)\cos(x) + \int 1\ dx \\
2\int \sin^2(x)\ dx &= -\sin(x)\cos(x) + x \\
\Leftrightarrow \quad \int \sin^2(x)\ dx &= \frac{1}{2}\big(x - \sin(x)\cos(x)\big)
\end{aligned}$$

Satz 6.3.3 (Stammfunktion per Kettenregel) Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist eine Stammfunktion von

$$h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

wegen der Kettenregel gegeben durch

$$H(x) = F(g(x))$$

bzw.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = F(g(x))$$

Beweis Mit der Kettenregel ist $F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. □

Beispiel Was ist $\displaystyle\int xe^{x^2}\ dx$?

Da $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$ nach der Kettenregel, gilt umgekehrt:

$$e^{x^2} = \int (e^{x^2})'\ dx = \int 2xe^{x^2}\ dx$$

bzw.

$$\int xe^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

Satz 6.3.4 (Substitutionsregel) Sei eine Stammfunktion von f gesucht, d.h.

$$\int f(x)\ dx.$$

Substituieren wir $x = x(s)$, dann ist $\dfrac{dx}{ds} = x'(s)$ und damit

$$\int f(x)\ dx = \int f(x(s)) \cdot x'(s)\ ds.$$

Gegebenenfalls ist eine Stammfunktion von $f(x(s)) \cdot x'(s)$ einfacher zu finden.

Beispiel Was ist

$$\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\ dx\ ?$$

Wir substituieren $x = s^2$. Damit sind

$$\frac{dx}{ds} = 2s, \quad \text{also} dx = 2s\ ds$$

und

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\ dx &= \int se^s \cdot 2s\ ds \\ &= 2\int s^2e^s\ ds \end{aligned}$$

Das lösen wir wie vorhin mit zweifacher partieller Integration.

Beispiel (Alternativ) Was ist

$$\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx \; ?$$

Wir substituieren $\sqrt{x} = s$. Damit sind

$$ds = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$$

und

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx & \overset{\text{Erweitern}}{=} & 2 \int (\sqrt{x})^2 e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx \\ & = & 2 \int s^2 e^s \, ds \end{aligned}$$

6.4 Stammfunktionen von Bruchfunktionen

Satz 6.4.1 (Logarithmische Integration) Es gilt:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c$$

Beweis Das gilt wegen der Kettenregel und $\big(\ln |f(x)|\big)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Beispiel

$$\int \tan(x) \, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx = -\int \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)} \, dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

Satz 6.4.2 (Stammfunktionen gebrochen-rationaler Funktionen) Es gelten:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax+b} \, dx &= \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c \\ \int \frac{1}{(ax+b)^n} \, dx &= \frac{1}{a(1-n)} (ax+b)^{1-n} + c, \quad n \neq 1 \\ \int \frac{2x+a}{x^2+ax+b} \, dx &= \ln \left| x^2+ax+b \right| + c \\ \int \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \arctan(x) + c \\ \int \frac{1}{1+bx^2} \, dx &= \frac{1}{\sqrt{b}} \arctan\left(\sqrt{b}x\right) + c, \quad b > 0 \end{aligned}$$

Satz 6.4.3 (Quadratische Ergänzung) Seien $P(x) = x^2 + px + q$ und $\Delta := \dfrac{p^2}{4} - q$ die zugehörige **Diskriminante**. Dann ist

$$P(x) = (x + \frac{p}{2})^2 - \Delta$$

Es ergeben sich nun folgende Fälle:

1. Ist $\Delta = 0$, so ist p von der Form
$$P(x) = y^2,$$
wobei $y = x + \frac{p}{2}$.
2. Ist $\Delta < 0$, so ist p von der Form
$$P(x) = (-\Delta)(y^2 + 1),$$
wobei $y = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(x + \frac{p}{2})$.

3. Ist $\Delta > 0$, so ist p von der Form
$$P(x) = \Delta(y^2 - 1) = \Delta(y-1)(y+1),$$
wobei $y = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x + \frac{p}{2})$.

Satz 6.4.4 Mit den Substitutionen aus dem vorherigen Satz erhält man:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \left\{ \begin{array}{ll} \int \frac{1}{y^2}\, dy & , \text{ falls } \Delta = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \int \frac{1}{y^2+1}\, dy & , \text{ falls } \Delta < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int \frac{1}{y^2-1}\, dy = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy & , \text{ falls } \Delta > 0 \end{array} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{x+\frac{p}{2}} + c & , \text{ falls } \Delta = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(x+\frac{p}{2})\right) + c & , \text{ falls } \Delta < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \ln\left|\frac{x+\frac{p}{2}-\sqrt{\Delta}}{x+\frac{p}{2}+\sqrt{\Delta}}\right| + c & , \text{ falls } \Delta > 0 \end{array} \right\}.$$

Beispiel

(a) Sei $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+4}$. Dann sind $\Delta = 0$ und
$$\int \frac{1}{x^2+4x+4}\, dx = \int \frac{1}{(x+2)^2}\, dx = -\frac{1}{x+2} + c$$

(b) Sei $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+6}$. Dann sind $\Delta < 0$ und
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+4x+6}\, dx &= \int \frac{1}{(x+2)^2+2}\, dx \\ &= \int \frac{1}{(x+2)^2+2}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{(x+2)^2}{2}+1}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c \end{aligned}$$

(c) Sei $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x-5}$. Dann sind $\Delta > 0$ und

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+4x-5}\,dx &= \int \frac{1}{(x-1)(x+5)}\,dx \\
&= \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5}\,dx \\
&= \frac{1}{6}\Big[\ln|x-1| - \ln|x+5|\Big] + c \\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{x-1}{x+5}\right) + c
\end{aligned}$$

Wir hätten auch wie oben substituieren können, aber wir haben hier die Methode der **Partialbruchzerlegung** benutzt.

Satz 6.4.5 (Partialbruchzerlegung) Eine rationale Funktion

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad = \quad P(x)\cdot\frac{1}{(x-a_1)^{k_1}}\cdot\frac{1}{(x-a_2)^{k_2}}\cdots\frac{1}{(x-a_n)^{k_n}},$$

wobei der Grad des Zählers P echt kleiner ist als der Grad des Nenners Q, bringt man durch den **Partialbruchansatz** in die Form

$$\begin{aligned}
&\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} \\
+ \;&\frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{B_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} \\
+ \;&\frac{C_1}{x-a_3} + \frac{C_2}{(x-a_3)^2} + \cdots + \frac{C_{k_3}}{(x-a_3)^{k_3}} \\
+ \;&\ldots
\end{aligned}$$

Hierbei lassen sich die Koeffizienten $A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ...$ durch **Koeffizientenvergleich** bestimmen, indem man für x geschickt günstige Zahlen einsetzt und das entsprechende Gleichungssystem löst.

Ist der Grad des Zählers P größer gleich dem Grad des Nenners Q, so bringt man R mittels Polynomdivision auf die Gestalt

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{p(x)}{Q(x)},$$

wobei A und p Polynome sind und der Grad von p echt kleiner als der von Q ist. Dann gilt die vorherige Aussage für $\frac{p}{Q}$.

Beispiel Sei $R(x) = \dfrac{x+3}{(x-1)(x+2)^2}$. Der Partialbruchansatz liefert:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

Wir multiplizieren auf beiden Seiten mit $(x-1)(x+2)^2$, kürzen wo möglich und erhalten

$$x+3 = A(x+2)^2 \;+\; B(x-1)(x+2) \;+\; C(x-1)$$

Jetzt setzen wir günstige Zahlen für x ein, um A, B, C zu bestimmen.

- $x = 1$ ist sehr günstig, da eine der Nullstellen im Nenner. Das ergibt:

$$1+3 = A(1+2)^2 + 0 + 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4 = A9 \quad\Leftrightarrow\quad A = \frac{4}{9}$$

- $x = -2$ ist ebenfalls günstig, da wieder eine der Nullstellen im Nenner. Das ergibt:
$$-2 + 3 = 0 + 0 + C(-2-1) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = -3C \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{1}{3}$$
- Weitere Nullstellen gibt es nicht. Von daher wählen wir eine andere einfache Zahl, z.B. $x = -1$. Das liefert:
$$-1 + 3 = A(-1+2)^2 \ + \ B(-1-1)(-1+2) \ + \ C(-1-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2 = A - 2B - 2C$$
Hier setzen wir $A = \frac{4}{9}$ und $C = -\frac{3}{9}$ ein und erhalten
$$2 = \frac{4}{9} - 2B + \frac{6}{9} = -2B + \frac{10}{9} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{9} = B$$

Schließlich ist
$$R(x) = \frac{1}{9}\left(\frac{4}{x-1} - \frac{4}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}\right)$$
und wir können das Integral ausrechnen, indem wir die Stammfunktionen aus den vorherigen Tabellen ablesen:
$$\int R(x) = \frac{1}{9}\Big[4\ln|x-1| - 4\ln|x+2| + \frac{3}{x+2}\Big]$$

6.5 Integrierbarkeit

Definition 6.5.1 Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir konstruieren nun das **Integral von f über** $[a,b]$,
$$I(f) = \int_a^b f(x)\ dx$$

Idee: Den Flächeninhalt von Rechtecken können wir sehr einfach berechnen. Von daher werden wir die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von f in geeignete Rechtecke zerlegen, deren Flächeninhalte wir aufsummieren. Dafür setzen wir allerdings voraus, dass f **beschränkt** und **nicht-negativ** ist, d.h. der Graph von f liegt stets über der x-Achse und unterhalb eines Wertes S, also $0 \leq f(x) \leq S$ für alle $x \in [a,b]$.

1. Wir zerlegen das Intervall $[a,b]$ in n beliebig große Intervalle
$$[a,b] = [x_0,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1},x_n],$$
wobei $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Das werden die Grundseiten $G_j = [x_{j-1}, x_j]$ der Rechtecke auf der x-Achse, wobei $j = 1,\ldots,n$. Sie haben eine Länge von
$$l_j = x_j - x_{j-1} = \Delta x_j$$
Diese Zerlegung nennen wir Z. Ist z.B. $n = 1$, so gibt es keine Zerlegung, da $[x_0,x_1] = [a,b]$.

2. Als Höhe des Rechtecks mit Grundseite G_j haben wir zwei zur Auswahl: Entweder wird die Höhe h_j^+ so klein, dass das Rechteck von Außen gerade noch den Graphen umschließt, oder die Höhe h_j^- wird so groß, dass es den Graphen von Innen ganz ausfüllt. Sie berechnen sich durch:
$$h_j^- = \text{Minimum von } f \text{ über der Grundseite } G_j = \min_{x\in G_j} f(x)$$
$$h_j^+ = \text{Maximum von } f \text{ über der Grundseite } G_j = \max_{x\in G_j} f(x)$$
Die großen Rechtecke nennen wir R_j^+ und die kleinen R_j^-. Die Flächeninhalte sind $A(R_j^+)$ bzw. $A(R_j^-)$.

3. Wir erhalten dadurch zweimal n Rechtecke von Innen bzw. von Außen. Der Flächeninhalt A^- der inneren Rechtecke und der Flächeninhalt der äußeren Rechtecke A^+ hängen ab von f und der Zerlegung Z und berechnen sich durch die Summen der Flächeninhalte der obigen Rechtecke:

$$A^- = \underline{\Sigma}(f,Z) = \sum_{j=1}^{n} h_j^- \cdot l_j = \sum_{j=1}^{n} \min_{x\in G_j} f(x)\ \Delta x_j$$

$$A^+ = \overline{\Sigma}(f,Z) = \sum_{j=1}^{n} h_j^+ \cdot l_j = \sum_{j=1}^{n} \max_{x\in G_j} f(x)\ \Delta x_j$$

Dabei heißen $\underline{\Sigma}(f,Z)$ **Untersumme** und $\overline{\Sigma}(f,Z)$ **Obersumme von f bzgl. der Zerlegung Z**. Stets gilt

$$\underline{\Sigma}(f,Z) \ \leq\ \overline{\Sigma}(f,Z)$$

4. Eine Zerlegung Z_1 kann noch feiner zu einer Zerlegung Z_2 zerteilt werden. Ist eine Zerlegung Z_2 feiner als Z_1, so folgt

$$\underline{\Sigma}(f,Z_1) \ \leq\ \underline{\Sigma}(f,Z_2) \ \leq\ \overline{\Sigma}(f,Z_2) \ \leq\ \overline{\Sigma}(f,Z_1)$$

Da nach Voraussetzung $0 \leq f(x) \leq S$ ist, gilt zudem für jede Zerlegung Z:

$$0 \leq \underline{\Sigma}(f,Z) \ \leq\ \overline{\Sigma}(f,Z) \leq S\cdot(b-a).$$

Wir zerlegen immer feiner und stellen fest, dass jede Untersumme die obere Schranke $R = S\cdot(b-a)$ besitzt, da f über $[a,b]$ nach oben durch S beschränkt ist nach Annahme, d.h. für alle Zerlegungen Z gilt stets:

$$\underline{\Sigma}(f,Z) \leq S\cdot(b-a)$$

Es muss nicht die einzige Schranke sein, aber es gibt - das weiß man aus der Mathematik - eine kleinste obere Schranke, die wir $\underline{R}$ nennen, d.h. für alle Zerlegungen Z gilt:

$$\underline{\Sigma}(f,Z) \leq \underline{R} \leq S\cdot(b-a)$$

Diese Zahl nennen wir **Unterintegral von f über** $[a,b]$. Es ist der größte Inhalt der Fläche, die den Graphen von Innen ausfüllt.

Analog ist das **Oberintegral von f über** $[a,b]$ definiert als die größte untere Schranke $\overline{R}$, so dass für alle Zerlegungen Z gilt:

$$\overline{R} \leq \overline{\Sigma}(f,Z)$$

Es ist der kleinste Inhalt der Fläche, die den Graphen von Außen umschließt.

5. Offensichtlich ist stets

$$\underline{R} \ \leq\ \overline{R}.$$

Ist nun $\underline{R} = \overline{R}$, so haben wir das **Integral einer nicht-negativen Funktion** f definiert durch:

$$\int_a^b f(x)\ dx := \underline{R} = \overline{R}.$$

Diese Schreibweise ist durch die obige Konstruktion erklärt, die man sich grob wie folgt als infinitesimale Summe merken kann:

$$\int_a^b f(x)\ dx \sim \sum_j f(x_j)\ \Delta x_j$$

6. Liegt der Graph von f unterhalb der x-Achse, so spiegeln wir ihn an der x-Achse, indem wir f durch $-f$ ersetzen und die obige Konstruktion für $-f$ wiederholen. Dadurch definieren wir **Integrale für negative Funktionen**:

$$\int_a^b f(x)\ dx := -\int_a^b (-f(x))\ dx$$

Die Fläche unterhalb der x-Achse erhält somit stets eine negative Wertigkeit.

7. Ist f nun beliebig, so können wir f in einen positiven Teil f_+ und einen negativen Teil f_- zerlegen:

$$f = f_+ + f_- = \max(f, 0) + \min(f, 0)$$

Das **Integral von** f ist dann definiert als

$$\int_a^b f(x)\ dx := \int_a^b f_+(x)\ dx + \int_a^b f_-(x)\ dx$$

Es ist aufgrund der Konstruktion genau der Inhalt der Fläche, den der Graph von f mit der x-Achse einschließt, wobei Flächen oberhalb der x-Achse positiv und Flächen unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden.

Eine Funktion, für die das Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ existiert, nennen wir **Riemann-integrierbar** oder kurz **integrierbar**.

Beispiel (Aus der Reinen Mathematik) Sei die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Für diese Funktion ist $\underline{R} = 0 < 1 = \overline{R}$, also erst recht $\underline{R} \neq \overline{R}$. Diese Funktion ist nicht integrierbar über $[0, 1]$.

Satz 6.5.2 (Stetigkeit & Integrierbarkeit)

(a) Jede **stetige** Funktion ist integrierbar.

(b) Jede **differenzierbare** Funktion ist integrierbar, da jede differenzierbare Funktion stetig ist.

Beweis Dass jede stetige Funktion integrierbar ist und dass jede differenzierbare Funktion stetig ist, sind schwierig zu beweisende Resultate aus der Mathematik. Wir verweisen daher nur auf Bücher über Analysis. □

Satz 6.5.3 (Rechenregeln fürs Integral) Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(a) Das Integral ist **linear**, d.h.:

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx$$

(b) Zerlegen wir das Intervall $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$, so lässt sich auch das Integral zerlegen:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

(c) Die Integration in umgekehrter Richtung entspricht

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx.$$

Beweis Das folgt alles unmittelbar aus der Konstruktion des Ober- und Untersummen. □

Definition 6.5.4 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und sei $x \in [a,b]$ fest. Dann ist bekanntlich

$$F(x) := \int_a^x f(t)\ dt$$

der orientierte Flächeninhalt über $[a,x]$. Daher und da $F(x)$ von $x \in [a,b]$ abhängt, nennen wir $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ die **Flächenfunktion von f über** $[a,b]$.

Satz 6.5.5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die zugehörige Flächenfunktion F eine Stammfunktion von f, genauer ist F stetig differenzierbar und es gilt $F' = f$. Also:

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\ dt\right)' = f(x)$$

Beweis Der Beweis ist recht schwierig und findet sich in sämtlichen Büchern über Analysis.□

Satz 6.5.6 (Zusammenhang zw. Integral und Stammfunktion) Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine (beliebige) Stammfunktion zu f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\ dx \quad = \quad \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Beweis Ist F eine beliebige Stammfunktion, so können wir annehmen, dass sie die Flächenfunktion plus additive Konstante ist, d.h.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt + c$$

für $x \in [a,b]$. Dann gelten

$$F(a) = \int_a^a f(t)\ dt + c = 0 + c = c$$

und deswegen

$$F(b) = \int_a^b f(t)\ dt + c = \int_a^b f(t)\ dt + F(a).$$

Umstellen ergibt das gewünschte Resultat. □

Quintessenz! Wie wir oben gesehen haben, sind alle Stammfunktionen eindeutig bis auf eine additive Konstante, d.h. alle Stammfunktionen von f sind nichts weiter als die Flächenfunktion plus Konstante.

- Um Integrale zu bestimmen, berechnen wir (mühevoll) Flächen bzw. die Flächenfunktion.
- Um die Flächenfunktion zu bestimmen, suchen wir Stammfunktionen.
- Um Stammfunktionen zu finden, können wir auf die Resultate in Abschnitt 6.2 zurückgreifen. Wir formulieren die Integrationsmethoden neu im nächsten Abschnitt 6.7.

6.6 Absoluter & orientierter Flächeninhalt

Beispiel (Aus der Physik) Ein Gegenstand wird auf der x-Achse von a nach b geschoben. Die hierfür benötigte Kraft F, die auf den Körper wirkt, ist abhängig vom Ort x. Ist sie konstant gleich F_0, so wäre die zu verrichtende Arbeit

$$\mathsf{W} = \mathsf{F}_0 \cdot (b - a).$$

Ist die Kraft nicht konstant, so berechnet sich die Arbeit durch

$$\mathsf{W} = \int_a^b \mathsf{F}(x)\ dx.$$

Definition 6.6.1 Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist das Integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\ dx$$

der **orientierte Flächeninhalt** derjenigen Fläche, die über dem Intervall $[a, b]$ vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird. Dabei werden Flächen unterhalb der x-Achse negativ, und Flächen oberhalb positiv gezählt.

Beispiel Sei wieder $f(x) = x$ über $x \in [-1, 1]$. Dann ist

$$I(f) = \int_{-1}^1 x\ dx = \int_{-1}^0 x\ dx + \int_0^1 x\ dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Definition 6.6.2 Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann bezeichnen wir mit

$$A(f) = \int_a^b |f(x)|\ dx$$

den **absoluten Flächeninhalt** derjenigen Fläche, die über dem Intervall $[a, b]$ vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

Sei $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Dann ist

$$A(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx$$

der Inhalt der Fläche, der von den Graphen von f und g eingeschlossen wird.

Beispiel

(a) Sei $f(x) = h$ über $x \in [a, b]$ konstant, wobei $h > 0$. Dann ist

$$A(f) = \int_a^b h\ dx = h(b - a)$$

der Flächeninhalt des Rechtecks mit Höhe h und Grundseite $[a, b]$.

(b) Sei $f(x) = x$ über $x \in [-1, 1]$. Dann ist

$$A(f) = \int_{-1}^1 |x|\ dx = \int_{-1}^0 (-x)\ dx + \int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Hier berechnen wir keine Stammfunktionen, sondern betrachten den Graphen von f und berechnen die Flächeninhalte der entsprechenden Dreiecke.

(c) Sei $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ über $x \in [-r, r]$. Dann ist

$$A(f) = \int_{-r}^{r} |f(x)| \; dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \; dx = \frac{\pi r^2}{2}$$

der Flächeninhalt des Halbkreises über der x-Achse mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius r.

(d) Seien $f(x) = 2x$ und $g(x) = x - 1$ über $[-2, 3]$. Dann ist

$$\begin{aligned} A(f,g) = \int_{-2}^{3} |f(x) - g(x)| \; dx &= \int_{-2}^{3} |2x - (x-1)| \; dx = \int_{-2}^{3} |x+1| \; dx \\ &= \int_{-2}^{-1} -(x+1) \; dx + \int_{-1}^{3} x + 1 \; dx = \frac{1}{2} + 8 = \frac{17}{2} \end{aligned}$$

6.7 Integrationsmethoden

Satz 6.7.1 (Partielle Integration) Sind $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \; dx \quad = \quad \big[f(x) \cdot g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \; dx.$$

Beispiel Wir berechnen $\displaystyle\int_a^b xe^x dx$. Unter Verwendung von $f(x) = x$ und $g(x) = e^x$ ist:

$$\begin{aligned} \int_a^b x \cdot e^x dx &= \int_a^b \underbrace{x}_{=f} \cdot \underbrace{e^x}_{=g'} \; dx \\ &= [\underbrace{x}_{=f} \cdot \underbrace{e^x}_{=g}]_a^b - \int_a^b \underbrace{1}_{=f'} \cdot \underbrace{e^x}_{=g} \; dx \\ &= \big[xe^x\big]_a^b - \int_a^b e^x \; dx \\ &= be^b - ae^a - \big[e^x\big]_a^b = (b-1)e^b - (a-1)e^a. \end{aligned}$$

Satz 6.7.2 (Integrieren per Kettenregel) Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [c, d] \to [a, b]$ stetig differenzierbar mit $g(c) = a$ und $g(d) = b$. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist

$$\int_c^d f(g(x)) \cdot g'(x) \; dx = \big[F(g(x))\big]_c^d$$

Beispiel Wir berechnen $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2} \; dx$. Da $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$ nach der Kettenregel, gilt umgekehrt:

$$\int_0^1 xe^{x^2} \; dx = \Big[\frac{1}{2}e^{x^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

Satz 6.7.3 (Substitutionsregel) Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Gesucht sei das Integral

$$\int_a^b f(x) \; dx.$$

Substituieren wir $x = x(s)$, dann ist $dx = x'(s) \; ds$. Finden wir noch zwei Zahlen c, d mit $a = x(c)$ und $b = x(d)$, so gilt:

$$\int_a^b f(x) \; dx = \int_d^c f(x(s)) \cdot x'(s) \; ds.$$

Gegebenenfalls ist eine Stammfunktion von $f(x(s)) \cdot x'(s)$ einfacher zu finden.

Beispiel Was ist
$$\int_4^9 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx \ ?$$
Wir substituieren $x = s^2$. Damit ist
$$dx = 2s \; ds$$
Die alten untere Grenze ist $x = 4$, und die obere ist $x = 9$. Die neue untere ist $s = 2$, da $s^2 = 2^2 = 4$, und die neue obere $s = 3$, da $s^2 = 3^3 = 9$. Insgesamt ist:
$$\begin{aligned} \int_4^9 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx &= \int_2^3 \sqrt{s^2} e^{\sqrt{s^2}} \, d(s^2) \\ &= \int_2^3 s e^s \cdot 2s \; ds \\ &= 2 \int_2^3 s^2 e^s \; ds \end{aligned}$$
Das lösen wir wie vorhin mit zweifacher partieller Integration.

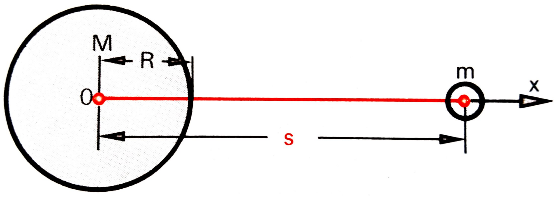
Beispiel Zu bestimmen ist
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}.$$
Hier stört die Wurzelfunktion, die wir mit $s = \sqrt{x}$ substituieren. Die neuen Grenzen werden $s = \sqrt{0} = 0$ bzw. $s = \sqrt{1} = 1$. Ferner ist $ds = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$. Das setzen wir ein:
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} &= 2 \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{1+s} \, ds \\ &= 2 \big[\ln(1+s) \big]_0^1 \\ &= 2\ln(2) - 2\ln(1) = 2\ln(2) \end{aligned}$$
Aufgabe: Lösen Sie dasselbe Integral mit der Substitution $x = (t-1)^2$.

Satz 6.7.4 (Logarithmische Integration) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die **keine** Nullstellen hat. Dann gilt:
$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx \quad = \quad \big[\ln|f(x)| \big]_a^b = \ln \left| \frac{f(b)}{f(a)} \right|.$$
Die Formeln für die **Integration von rationalen Funktionen mit Grenzen** sparen wir uns hier an dieser Stelle und verweisen auf das Ende des Abschnitts 6.2. Dort müssen nur noch die Grenzen eingefügt werden. Allerdings treten hier neue Probleme auf, wenn die Funktion Polstellen hat. Das untersuchen wir im nächsten Abschnitt.

Definition 6.7.5 Wir betrachten eine differenzierbare Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$. Lässt man die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von f um die x-Achse rotieren, so entsteht der **Drehkörper**)
$$D_x(f) \quad = \quad \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b \ , \ y^2 + z^2 \leq (f(x))^2 \big\}.$$
Zur Erinnerung: Die Lösung der Ungleichung $y^2 + z^2 \leq r^2$ gibt eine Kreisscheibe in der yz-Achse um den Ursprung mit Radius $r > 0$. Von daher kann $r(x) = |f(x)|$ als Radiusfunktion gedeutet werden.

6.8 Uneigentliche Integrale

Beispiel (Aus der Physik) Welche Arbeit W wird verrichtet, um einen Körper von der Erdkugel R in den Weltraum s zu befördern, ohne dass er zurückkehrt, also $s \to \infty$?



Quelle: K.A. Keil, J. Kratz, H. Müller, K. Wörle, „Die Infinitesimalrechnung“, Bayrischer Schulbuch-Verlag, 1. Auflage, 1990

Da der Körper gegen die Gravitationskraft arbeitet, wählen wir als Weg-Kraft-Funktion

$$\mathsf{F}(x) = \frac{\mathsf{GmM}}{x^2},$$

wobei G die Gravitationskonstante, M die Masse der Erde und m die Masse des Körpers ist. Die zu verrichtende Arbeit ist dann

$$\begin{aligned} \mathsf{W} &= \lim_{\mathsf{s}\to\infty} \int_{\mathsf{R}}^{\mathsf{s}} \mathsf{F}(x)\, dx \\ &= \mathsf{GmM} \cdot \lim_{\mathsf{s}\to\infty} \int_{\mathsf{R}}^{\mathsf{s}} \frac{1}{x^2}\, dx \\ &= \mathsf{GmM} \cdot \lim_{\mathsf{s}\to\infty} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{\mathsf{R}}^{\mathsf{s}} \\ &= \mathsf{GmM} \cdot \lim_{\mathsf{s}\to\infty} \Big[-\frac{1}{\mathsf{s}} + \frac{1}{\mathsf{R}}\Big] \\ &= \mathsf{GmM} \cdot \frac{1}{\mathsf{R}} \end{aligned}$$

Beispiel Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ hat eine Unendlichkeitsstelle in $x = 0$. Trotzdem existiert das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx.$$

Wieso und wie berechnet man es?

Definition 6.8.1 Es sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

(a) Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad := \quad \lim_{t \nearrow b} \int_a^t f(x)\, dx,$$

falls der Grenzwert existiert.

(b) Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad := \quad \lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x)\, dx,$$

falls der Grenzwert existiert.

(c) Seien $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in (a,b)$ eine feste Zahl. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\ dx \quad := \quad \lim_{t \searrow a} \int_t^c f(x)\ dx \ + \ \lim_{t \nearrow b} \int_c^t f(x)\ dx,$$

falls beide uneigentlichen Integrale existieren. In diesem Fall hängt das Integral nicht von der Wahl von c ab.

(d) **FALLS** beide existieren, kann man auch im Spezialfall kürzer rechnen:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx \quad := \quad \lim_{r \nearrow a} \int_{-r}^{r} f(x)\ dx$$

Aber das weiß man leider vorher nicht.

Beispiel

(a) Wie im Beispiel rechnen wir:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx \quad = \quad \lim_{t \nearrow +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t \quad = \quad 1 - \lim_{t \nearrow +\infty} \frac{1}{t} \quad = \quad 1.$$

(b) Das folgende Integral existiert nicht!

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ dx \quad = \quad \lim_{t \searrow 0} \Big[\ln(x)\Big]_t^1 \quad = \quad \lim_{t \searrow 0} \ln(t) = -\infty$$

(c) Hier müssen wir das Integral auftrennen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx \quad &= \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\ dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx \\
&= \quad \lim_{s \searrow -\infty} \int_s^0 \frac{1}{1+x^2}\ dx + \lim_{t \nearrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\ dx \\
&= \quad \lim_{s \searrow -\infty} \big[\arctan(x)\big]_t^0 + \lim_{t \nearrow +\infty} \big[\arctan(x)\big]_0^t \\
&= \quad 0 - \lim_{s \searrow -\infty} \arctan(s) + \lim_{t \nearrow +\infty} \arctan(t) - 0 \\
&= \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

Möglich wäre daher auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\ dx = \pi.$$

(d) Hier können wir die Integrale nicht auftrennen. Daher macht das Integral auch keinen Sinn.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\ dx \quad &= \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{1+x^2}\ dx + \int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\ dx \\
&= \quad \lim_{s \searrow -\infty} \int_s^0 \frac{2x}{1+x^2}\ dx + \lim_{t \nearrow +\infty} \int_0^t \frac{2x}{1+x^2}\ dx \\
&= \quad \lim_{s \searrow -\infty} \big[0 - \ln(1+s^2)\big] + \lim_{t \nearrow +\infty} \big[\ln(1+t^2) - 0\big] \\
&= \quad -\infty + \infty = ?
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\ dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{2x}{1+x^2}\ dx = 0,$$

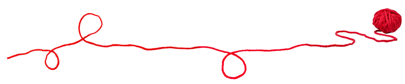
da der Integrand punktsymmetrisch zum Ursprung ist und sich daher die Flächen links bzw. rechts der y-Achse gegenseitig aufheben.

7 Kurven

Vorbereitung

- Studiport LE7 (Trigonometrie)
- Studiport LE9 (Differentialrechnung)
- Studiport LE10 (Integralrechnung)

Roter Faden



- Wir beschäftigen uns mit *parametrisierten ebenen Kurven*, d.h. Abbildungen von der Gestalt
$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$
wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x, y : I \to \mathbb{R}$ (meist) stetige Komponentenfunktionen sind.

- Der Verlauf einer solchen Kurve, auch *Spur* genannt, hat verschiedene Interpretationen in der Physik und Mechanik, z.B. als Spur eines Teilchens, dass sich durch die Ebene bewegt. Die Geschwindigkeit der Bewegung wird durch den Ableitungsvektor $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ ausgedrückt.

- Falls der Ableitungsvektor nicht verschwindet, d.h. die Kurve regulär ist, ist er der Tangentialvektor an der Kurve im Punkt $\alpha(t)$. Der dazu orthogonale Vektor ist der Normalenvektor $\alpha'_\perp(t) = \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.

- Wir berechnen die Länge einer Kurve und den Inhalt der Fläche, die durch einer Kurve umschlossen wird, oder die Mantelfläche eines Drehkörpers, sowie das Volumen des Drehkörpers.

- Kurven können wie Vektoren auch in Polarkoordinaten dargestellt werden. Daraus ergeben sich andere, teils leichtere Formeln für die Bogenlänge und den Flächeninhalt.

Lernziele

Wissen

- Sie wissen was man unter einer parametrisierten Kurve versteht.
- Sie kennen Definition und Bedeutung des Ableitungsvektors (Stichworte: Regularität, Tangente, Normale).
- Sie kennen die Interpretation des Ableitungsvektors als Geschwindigkeitsvektor und den Zusammenhang zur Bogenlänge einer parametrisierten Kurve.
- Sie wissen, dass man in der Ebene unterschiedliche Koordinatensysteme verwenden kann und verstehen den Aufbau von Polarkoordinaten.

Können

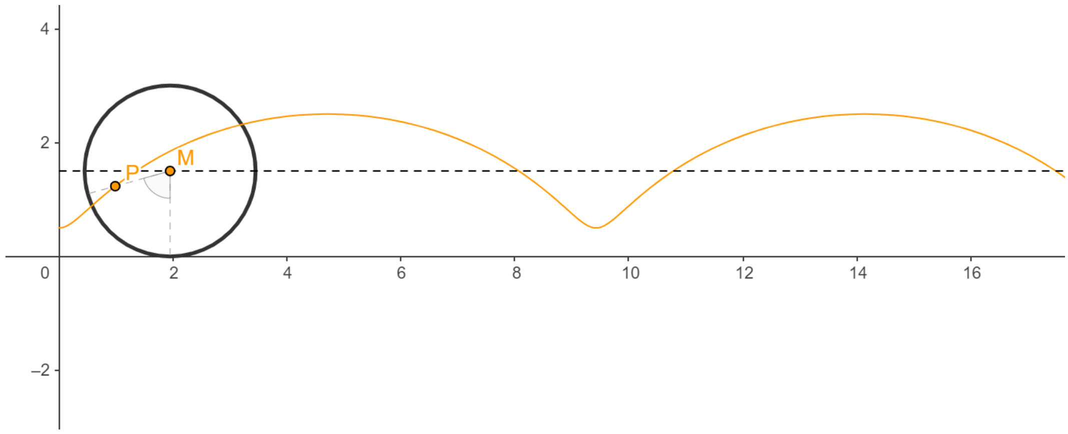
- Sie beherrschen die Koordinatentransformation zwischen kartesischen und Polarkoordinaten.
- Sie können Kurven in der Ebene sowohl in kartesischen als auch Polarkoordinaten parametrisieren.
- Sie können parametrisierte Kurven auf Regularität untersuchen und Tangenten und Normalen bestimmen.
- Sie können für eine parametrisierte Kurve die (Bogen-)Länge berechnen.
- Sie können entscheiden, wann es möglich ist, für eine parametrisierte Kurve den umfahrenen Flächeninhalt zu berechnen, und dies ggf. ausführen.
- Sie können die Mantelfläche & das Volumen eines Drehkörpers berechnen.

7.1 Kurven in der Ebene

Beispiel 7.1.1 (Zykloide/Rollkurve) Wenn ein Rad auf einem Geraden Weg abrollt, erzeugt der Reflektor $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ im Rad eine Spur, die sog. *Rollkurve*. Dabei hängen P bzw. seine Komponenten x, y von einem Laufparameter t ab (z.B. Zeit oder Winkel), d.h. $P = P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Wie sehen die Komponenten $x = x(t)$ und $y = y(t)$ für die Rollkurve konkret aus? Es gilt:

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Der Parameter t stellt den Drehwinkel dar, r der Radius des Rades und a der Abstand von der Radachse zum Reflektor.



Quelle: Lindner, A., „Die Spur von Reflektoren als Rollkurve“, 2020, `https://www.geogebra.org`

Beispiel 7.1.2 (a) Eine Gerade G im $\mathbb{R}^2$ haben wir beschrieben durch

$$G = \vec{a} + \mathbb{R}\vec{v} = \{\vec{a} + t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$$

Dabei ist t ein *Parameter*, der die reellen Zahlen durchläuft. In diesem Sinne wir die Gerade durch t *parametrisiert* und wir können die Gerade als Abbildung darstellen:

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$G(t) = \vec{a} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + tv_1 \\ a_2 + t_v 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

(b) Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte kann als parametrisierte Kurve dargestellt werden:

$$S : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$S(t) = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} = \vec{a} + t\big(\vec{b} - \vec{a}\big)$$

Alternativ:

$$S : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$S(t) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a}) + \frac{t}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

Definition 7.1.3

(a) Unter einer **(parametrisierten) Kurve** verstehen wir eine Abbildung

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und beide **Komponentenfunktionen** $x, y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

(b) Wir nennen die Kurve **glatt**, falls die Komponentenfunktionen stetig differenzierbar sind.

(c) Die Kurve α erzeugt also zu jedem Zeitpunkt t einen Vektor bzw. Punkt $\alpha(t)$ im $\mathbb{R}^2$. In diesem Sinne zieht die Kurve eine **Spur** im $\mathbb{R}^2$, wenn t das Intervall I durchläuft,

$$\mathsf{Spur}(\alpha) = \{\alpha(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Beispiel 7.1.4 (a) Ein (einfach umrandeter) Kreis mit Mittelpunkt $\vec{m} \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$:

$$\alpha : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \alpha(t) = \vec{m} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

(b) Der Graph einer stetigen Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$:

$$\alpha : D_f \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

(c) Die Neilsche Parabel

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

(d) Algebraische Kurven, die durch Polynome in x, y-Koordinaten erzeugt werden, z.B. eine Ellipse um den Ursprung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad a, b > 0,$$

die aber auch durch eine Kurve angegeben werden kann:

$$\alpha : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$$

7.2 Ableitung, Tangente und Normale einer Kurve

Definition 7.2.1 Sei $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve.

(a) Dann ist der **Ableitungsvektor** von α definiert durch

$$\alpha'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

(b) Die Kurve ist in $t_0 \in I$ **regulär**, wenn der Ableitungsvektor nicht verschwindet, d.h.

$$\alpha'(t_0) \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x'(t_0) \neq 0 \ \vee \ y'(t_0) \neq 0.$$

(c) Demzufolge ist in $t_0 \in I$ **nicht regulär**, wenn der Ableitungsvektor verschwindet, d.h.

$$\alpha'(t_0) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x'(t_0) = 0 \ \wedge \ y'(t_0) = 0.$$

(d) Ist α in t_0 regulär, nennen wir den Ableitungsvektor $\alpha'(t_0)$ auch **Tangentialvektor**, da $\alpha'(t_0)$ tangential an der Kurve im Punkt $\alpha(t_0)$ liegt.

Beispiel 7.2.2

(a) Die Gerade $\alpha(t) = \vec{a} + \mathbb{R}\vec{v}$ ist regulär, denn für jeden Zeitpunkt $t \in I$ ist verschwindet der Ableitungsvektor nicht, denn $\alpha'(t) = \vec{v} \neq 0$. Daher ist jeder Ableitungsvektor $\alpha'(t) = \vec{v}$ auch der Tangentialvektor der Geraden.

(b) Der Kreis ist regulär, denn $\alpha'(t) = r \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, denn Sinus und Kosinus besitzen keine gemeinsamen Nullstellen und der Radius r ist stets positiv.

(c) Der Graph einer differenzierbaren Funktion f ist regulär, denn $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \neq 0.$

(d) Für die *Neilsche Parabel* ist $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$. Damit ist sie in allen Punkten $t \neq 0$ regulär und im Punkt $t = 0$ nicht regulär. Daher ist $\alpha'(t)$ für $t \neq 0$ der Tangentialvektor und für $t = 0$ nur der Ableitungsvektor $\alpha'(0) = \vec{0}$.

Zur Erinnerung: Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ der zu $\vec{v}$ orthogonale Vektor, d.h. $\langle \vec{v}, \vec{v}_\perp \rangle = 0$. Es gilt für den orientierten Flächenhalt des von zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms P die Beziehung:

$$A(P) = \det(\vec{w}, \vec{v}) = \langle \vec{w}, \vec{v}_\perp \rangle$$

Ferner stimmen die Längen von $\vec{v}$ und $\vec{v}_\perp$ überein, d.h. $\|\vec{v}\| = \|\vec{v}_\perp\|$, da $\vec{v}_\perp$ aus $\vec{v}$ durch Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn und sich dabei die Länge nicht ändert.

Definition 7.2.3 Sei $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve, die in t regulär ist.

(a) Ist $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \neq 0$, so ist $\alpha'_\perp(t) = \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ der **Normalenvektor**, der orthogonal zum Tangentialvektor ist.

(b) Der normierte Normalenvektor $n_\alpha(t) = \dfrac{\alpha'_\perp(t)}{\|\alpha'_\perp(t)\|}$ ist der **Einheitsnormalenvektor**. Er besitzt Einheitslänge, denn:

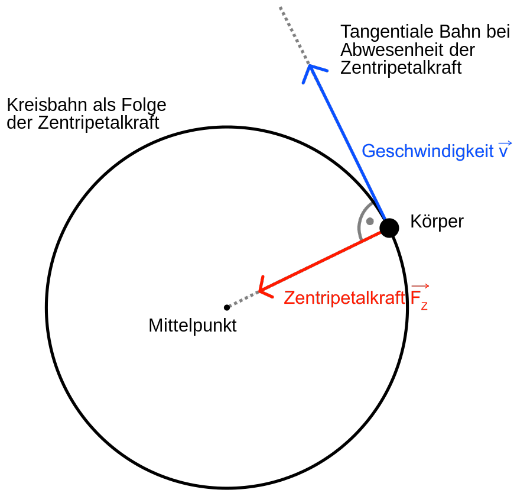
$$\|n_\alpha(t)\| = \frac{\|\alpha'_\perp(t)\|}{\|\alpha'_\perp(t)\|} = 1$$

Beispiel 7.2.4 Wir betrachten den parametrisierten Kreis $\vec{e}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Dann sind der Tangentialvektor, der Normalenvektor und der Einheitsnormalenvektor gleich

$$\vec{e}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{e}'_{\perp}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad n_{\vec{e}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix},$$

da $\|\vec{e}'_{\perp}(t)\| = \sqrt{(-\cos(t))^2 + \sin(t)^2} = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{1} = 1.$

Beispiel 7.2.5 (Geschwindigkeit) Eine Kurve α kann als Ort-Zeit-Kurve interpretiert werden. Dann lassen sich der Ableitungsvektor $\alpha'(t)$ als *Geschwindigkeit* bzw. *Geschwindigkeitsvektor* $\dot{\alpha}(t)$ und der Vektor $\alpha''(t)$ als *Beschleunigungsvektor* $\ddot{\alpha}(t)$ zum Zeitpunkt t interpretieren. Die Länge des Geschwindigkeitsvektors $\|\alpha'(t)\|$ ist das *Tempo* („Schnelligkeit"). Der Normalenvektor $\dot{\alpha}_{\perp}$ ist proportional zur Zentripetalkraft, also derjenigen Kraft, die wirkt, um das Teilchen auf der Kurve zu bewegen.



(Quelle: Wikipedia)

7.3 Berechnung von Bogenlänge und Flächeninhalt

Satz 7.3.1 (Länge einer Kurve) Ist $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve, so ist ihre Länge bzw. **Bogenlänge** gegeben durch:

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt.$$

Beweis (Idee) Die Idee ist, die Kurve durch Geradenstücke zu approximieren, deren Länge wir leicht berechnen können. Genauer können die Geradenstücke grob durch die Tangentialvektoren beschrieben werden. Dazu zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ wie gewohnt in Teilintervalle

$$[a, b] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots \cup [t_{n-1}, t_n],$$

wobei $t_0 = a < t_2 < \ldots < t_n = b$ ist. Für $j = 1, \ldots, n$ sei G_j das Geradenstück, das $\alpha(t_{j-1})$ mit $\alpha(t_j)$ verbindet. Ist die Zerlegung fein genug, so gilt in etwa

$$\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) \;\sim\; \alpha'(t_{j-1}) \cdot (t_j - t_{j-1}) = \alpha'(t_{j-1}) \cdot \Delta t_j.$$

Daher gilt für die Länge des Geradenstücks

$$\|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| \;\sim\; \|\alpha'(t_{j-1}) \cdot \Delta t_j\| = \|\alpha'(t_{j-1})\| \cdot \Delta t_j.$$

Die Länge der Kurve erhält man nun als infinitesimale Summe über die Längen aller Geradenstücke, d.h.

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \; dt \;\sim\; \sum_j \|\alpha'(t_{j-1})\| \cdot \Delta t_j.$$

Beispiel 7.3.2 Ein Satellit bewege sich einmal um einen Körper entsprechend einer Ellipse, d.h.

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Welche Strecke legt er dabei zurück? Hierfür berechnen wir seine Bogenlänge

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \| \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{pmatrix} \| \; dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin(t))^2 + (b\cos(t))^2} \; dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2(1 - \sin^2(t))} \; dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2(t)} \; dt \end{aligned}$$

Dieses Integral ist ein sog. *elliptisches* Integral, dass keine Formel für eine Stammfunktion besitzt und daher nur numerisch berechnet werden kann, außer für $a = b = r$, also einem Kreis. In diesem Fall ist die Bogelänge gleich dem Kreisumfang,

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + 0} \; dt = \int_0^{2\pi} r \; dt = 2\pi r.$$

Satz 7.3.3 (Inhalt einer umschlossenen Fläche) Es sei $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte, geschlossene Kurve, d.h. $\alpha(a) = \alpha(b)$, die einen Punkt niemals zweimal durchläuft. Ferner beinhalte die Fläche F_α den Ursprung, und der Winkel zwischen $\alpha(t)$ und der x-Achse steige mit t streng monoton. Dann berechnet sich der Inhalt der umschlossenen Fläche F_α als:

$$A(F_\alpha) \;=\; \frac{1}{2} \int_a^b \big| \det(\alpha(t), \alpha'(t)\big| \; dt$$

Beweis (Idee) Zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ fein genug,

$$[a, b] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots \cup [t_{n-1}, t_n],$$

wobei $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$, so entspricht $\alpha(t_{j-1})$ und $\alpha(t_j)$ so nahe, dass $\alpha(t_j)$ in etwa $\alpha(t_{j-1}) + \alpha'(t_{j-1}) \cdot \Delta t_j$ entspricht. Das Dreieck D_j, dass von $\alpha(t_{j-1})$ und $\alpha(t_j)$ aufgespannt wird, hat dann den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} A(D_j) &= \frac{1}{2}\big| \det(\alpha(t_{j-1}), \alpha(t_j)\big| = \frac{1}{2}\big| \det\big(\alpha(t_{j-1}), \alpha(t_{j-1}) + \alpha'(t_{j-1}) \cdot \Delta t_j\big)\big| \\ &= \frac{1}{2}\big| \det\big(\alpha(t_{j-1}), \alpha'(t_{j-1})\big)\big| \cdot \Delta t_j \end{aligned}$$

Der Inhalt der von α umfahrenen Fläche F_α erhält man nun als infinitesimale Summe über alle Zerlegungen, d.h.

$$\begin{aligned} A(F_\alpha) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big| \det(\alpha(t), \alpha'(t)\big| dt \\ &\sim \frac{1}{2} \sum_j \big| \det(\alpha(t_{j-1}), \alpha'(t_{j-1})\big| \cdot \Delta t_j \end{aligned}$$

Beispiel 7.3.4 Wir berechnen die Fläche der Ellipse, die durch $\alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$ parametrisiert wird, wobei $a, b > 0$. Wir benötigen

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad \det(\alpha(t), \alpha'(t)) = \det \begin{pmatrix} a\cos(t) & -a\sin(t) \\ b\sin(t) & b\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$= a\cos(t) \cdot b\cos(t) - (-a\sin(t)) \cdot b\sin(t) = ab\cos^2(t) + ab\sin^2(t)$$

$$= ab(\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1}) = ab.$$

Da $a, b > 0$ sind, ist $\det(\alpha(t), \alpha'(t)) = |ab| = ab$. Der Flächeninhalt der Ellipse ist nun

$$F_\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \det(\alpha(t), \alpha'(t))\ dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab\ dt = \frac{1}{2} ab \cdot 2\pi = \pi ab.$$

Satz 7.3.5 (Mantelfläche eines Drehkörpers) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative, stetig differenzierbare Funktion. Die **Mantelfläche** des Drehkörpers $D_x(f)$ ist

$$A\big(D_x(f)\big) \quad = \quad 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx.$$

Beweis (Idee) Der Trick hier ist, den Graphen der Funktion f als Kurve $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ mit Tangentialvektor $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$ zu schreiben und die Drehfigur durch Kegelstümpfe zu approximieren. Die Formel für den Flächeninhalt eines Kegelstumpfs benötigt die Länge seiner Mantellinie, die wir einfach mit Hilfe der Länge des Tangentialvektors der Kurve ausrechnen können. Dazu zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ wie gewohnt in Teilintervalle

$$[a, b] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots \cup [t_{n-1}, t_n],$$

wobei $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ ist und wir t statt x schreiben. Für $j = 1, \ldots, n$ sei nun K_j der Kegelstumpf in yz-Koordinaten

$$\text{mit Radien } r_j = f(t_{j-1}),\ R_j = f(t_j) \quad \text{und} \quad \text{Höhe } h_j = t_j - t_{j-1} = \Delta t_j.$$

Die Länge m_j der Mantellinie ist die Länge der Verbindungsstrecke zwischen $\alpha(t_{j-1})$ und $\alpha(t_j)$. Ist nun die Zerlegung fein genug, so entspricht die Differenz $\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})$ in etwa $\alpha'(t_{j-1}) \cdot \Delta t_j$, d.h. für die Länge der Mantellinie gilt:

$$m_j = \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| = \|\alpha'(t_{j-1}) \cdot \Delta t_j\|$$

$$= \|\alpha'(t_{j-1})\| \cdot \Delta t_j = \sqrt{1 + (f'(t_{j-1}))^2} \cdot \Delta t_j$$

Dann ist seine Mantelfläche gleich

$$A(Z_j) = \pi \cdot (R_j + r_j) \cdot m_j = \pi \cdot (f(t_j) + f(t_{j-1})) \cdot \sqrt{1 + (f'(t_{j-1}))^2}$$

Die Mantelfläche des Drehkörpers $D = D_x(f)$ erhält man nun als infinitesimale Summe über alle Zerlegungen, d.h.

$$\begin{aligned} A(D) &= \pi \int_a^b (f(x) + f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \\ &\overset{x=t}{\sim} \pi \sum_j (f(t_j) + f(t_{j_1})) \cdot \sqrt{1 + (f'(t_{j-1}))^2} \cdot \Delta t_j. \end{aligned}$$

Satz 7.3.6 (Volumen eines Drehkörpers) Das **Volumen des Drehkörpers** $D_x(f)$ ist

$$V\big(D_x(f)\big) = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx.$$

Beweis Die Idee ist, das Volumen wieder durch geometrische Figuren zu approximieren, deren Volumen wir leicht berechnen können. In diesem Fall bieten sich Zylinder an, deren Grundseiten in den yz-Koordinaten liegen. Dazu zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ wie gewohnt in Teilintervalle

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n],$$

wobei $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ ist. Für $j = 1, \ldots, n$ sei nun Z_j der Zylinder in yz-Koordinaten

$$\text{mit Radius } r_j = f(x_j) \quad \text{und} \quad \text{Höhe } h_j = x_j - x_{j-1} = \Delta x_j,$$

$$\text{also} \quad Z_j = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_{j-1} \leq x \leq x_j\ ,\ y^2 + z^2 \leq r_j^2\big\}.$$

Dann ist sein Volumen gleich

$$V(Z_j) = \pi \cdot r_j^2 \cdot h_j = \pi \cdot (f(x_j))^2 \cdot \Delta x_j.$$

Das Volumen des Drehkörpers $D = D_x(f)$ erhält man nun als infinitesimale Summe über die Volumen aller Zylinder, d.h.

$$\pi \sum_j (f(x_j))^2 \cdot \Delta x_j \;\sim\; \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx = V(D).$$

7.4 Polarkoordinatendarstellung von Kurven

Definition 7.4.1 Wie wir schon bei den Vektoren gesehen haben, existieren für jeden Punkt

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Zahlen $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ so dass:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi), \\ y &= r \cdot \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Man nennt (r, φ) **Polarkoordinaten** von P und hat die Darstellung

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Bewegt sich nun der Punkt in Abhängigkeit eines Parameters t, so hängen auch der Radius $r = r(t)$ und der Winkel $\varphi = \varphi(t)$ von t ab. Wir erhalten so eine parametrisierte Kurve

$$P(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $r : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann nennen wir

$$\alpha : I \to \mathbb{R}, \quad \alpha(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = r(t) \cdot \vec{e}(t) \quad \text{mit} \quad \vec{e}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

eine **Kurve in Polarkoordinaten** (mit Radiusfunktion $r = r(t)$ auf I).

Hinweis: Manchmal verzichtet man auf die Angabe von α und I und gibt nur die Radiusfunktion $r = r(t)$ an, wobei man sich immer $\vec{e}(t)$ und $I = [0, 2\pi]$ hinzudenkt. Für die Winkelfunktion belassen wir es bei $\varphi(t) = t$ der Einfachheit halber.

Beispiel 7.4.2

(a) Ein Kreis mit festem Radius $r > 0$ um den Nullpunkt:

$$r(t) = r, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(b) Logarithmische Spirale mit $c > 0$:

$$r(t) = e^{ct}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(c) Liegt eine Kurve in Polarkoordinaten vor, die geschlossen ist, also z.B. $r(0) = r(2\pi)$, und 2π-periodisch, so wird sie für $t \geq 2\pi$ nochmal durchlaufen. Ist also $t \in I = [0, 2\pi k]$ mit $k \in \mathbb{N}$, so wird die Kurve k-mal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Ist k eine negative ganze Zahl, so wird die Kurve k-mal im Uhrzeigersinn durchlaufen.

(d) **Achtung!** Eine Ellipse in der Gestalt $\alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$ mit $a > b > 0$ liegt nicht in Polarkoordinaten vor, da die beiden Komponentenfunktionen keine **gemeinsame** Radiusfunktion besitzen, falls $a \neq b$. Wie ist dann die Ellipse in Polarkoordinaten? Nun, das ist nicht sehr einfach zu bestimmen und erfordert gute Kenntnisse der Geometrie. Die Radiusfunktion ist aber gleich:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(t)},$$

wobei $p = \dfrac{b^2}{a}$ und $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ die sog. *Exzentrität* der Ellipse sind.

Satz 7.4.3 (Regeln für Kurven in Polarkoordinaten) Ist $r = r(t)$ eine Kurve in Polarkoordinaten, so gelten:

(a) Ist $\vec{e}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, so ist $\vec{e}\,'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \vec{e}_\perp(t)$.

(b) $\|\alpha(t)\| = |r(t)|$

(c) $\alpha'(t) = r'(t) \cdot \vec{e}(t) + r(t) \cdot \vec{e}_\perp(t)$

(d) $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(r(t))^2 + (r'(t))^2}$

(e) $\det(\alpha(t), \alpha'(t)) = (r(t))^2$

Beweis (a) Das folgt sofort aus der Definition für $\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$.

(b) Das folgt aus der Produktregel:

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} (r(t)\cos(t))' \\ (r(t)\sin(t))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'(t)\cos(t) - r(t)\sin(t) \\ r'(t)\sin(t) + r(t)\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$= r'(t)\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + r(t)\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = r'(t)\cdot\vec{e}(t) + r(t)\cdot\vec{e}_\perp(t)$$

(c) Hierfür nutzen wir u.a. die Eigenschaften der Norm und erinnern uns, dass $r(t) \geq 0$:

$$\|\alpha(t)\| = \|r(t)\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}\| = |r(t)| \cdot \|\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}\|$$

$$\overset{r(t)\geq 0}{=} r(t)\cdot\sqrt{\cos^2(t)+\sin^2(t)} = r(t)\cdot 1 = r(t).$$

(d) Wir erinnern uns an die Formel $\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + 2\langle\vec{v},\vec{w}\rangle + \|\vec{w}\|^2$. Dann gilt:

$$\|\alpha(t)\|^2 = \|r'(t)\cdot\vec{e}(t) + r(t)\cdot\vec{e}_\perp(t)\|^2$$

$$= \|r'(t)\cdot\vec{e}(t)\|^2 + 2\langle r'(t)\cdot\vec{e}(t), r(t)\cdot\vec{e}_\perp(t)\rangle + \|r(t)\cdot\vec{e}_\perp(t)\|^2$$
$$= (r'(t))^2\cdot\underbrace{\|\vec{e}(t)\|^2}_{=1} + 2r'(t)r(t)\cdot\underbrace{\langle\vec{e}(t),\vec{e}_\perp(t)\rangle}_{=0} + (r(t))^2\cdot\underbrace{\|\vec{e}_\perp(t)\|^2}_{=1}$$
$$= (r'(t))^2 + (r(t))^2$$

Wurzelziehen auf beiden Seiten ergibt:

$$\|\alpha(t)\| = \sqrt{(r(t))^2 + (r'(t))^2}$$

(e) Hierzu benutzt man Regeln für die Determinante:

$$\det\big(\alpha(t),\alpha'(t)\big) = \det\big(r(t)\cdot\vec{e}(t), r'(t)\cdot\vec{e}(t) + r(t)\cdot\vec{e}_\perp(t)\big)$$

$$= \det\big(r(t)\cdot\vec{e}(t), r'(t)\cdot\vec{e}(t)\big) \; + \; \det\big(r(t)\cdot\vec{e}(t), r(t)\cdot\vec{e}_\perp(t)\big)$$
$$= r(t)r'(t)\cdot\underbrace{\det\big(\vec{e}(t),\vec{e}(t)\big)}_{=0} + (r(t))^2\cdot\underbrace{\det\big(\vec{e}(t),\vec{e}_\perp(t)\big)}_{=1} = (r(t))^2$$

Korollar 7.4.4 (Bogenlänge in Polarkoordinaten) Ist $r = r(t)$ mit $t \in [a,b]$ eine Kurve in Polarkoordinaten, so gilt:

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\;dt = \int_a^b \sqrt{(r(t))^2 + (r'(t))^2}\;dt$$

Beweis Siehe Rechenregeln in Satz 7.4.3.

Beispiel 7.4.5 Sei $r = e^{ct}$ mit $c > 0$ und $t \in (-\infty, b]$ eine logarithmische Spirale. Dann gilt:

$$L(\alpha) = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b \sqrt{e^{2ct} + c^2e^{2ct}}\;dt = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b e^{ct}\sqrt{1+c^2}\;dt$$

$$= \sqrt{1+c^2}\lim_{a\to-\infty}\int_a^b e^{ct}\;dt = \sqrt{1+c^2}\lim_{a\to-\infty}\big[\frac{1}{c}e^{ct}\big]_{t=a}^b$$
$$= \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}\lim_{a\to-\infty}(e^{cb-e^{ca}}) = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}e^{cb}.$$

Korollar 7.4.6 (Inhalt einer Fläche in Polarkoordinaten) Sei $r = r(t)$ eine Kurve in Polarkoordinaten, die eine Fläche nur einmal umläuft, also $t \in [0, 2\pi]$, und die geschlossen ist, also $r(0) = r(2\pi)$. Dann berechnet sich die umfahrene Fläche als:

$$A(F_\alpha) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big|\det(\alpha(t), \alpha'(t)\big| dt \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (r(t))^2 \; dt.$$

Beweis Siehe Rechenregeln in Satz 7.4.3.

Satz 7.4.7 (Regularität & Polarkoordinaten) Ist $r = r(t)$ eine Kurve in Polarkoordinaten, so gilt:

(a) t_0 ist ein **regulärer** Punkt, falls $r(t_0) \neq 0$ oder $r'(t_0) \neq 0$.

(b) t_0 ist **kein regulärer** Punkt, falls $r(t_0) = 0$ und $r'(t_0) = 0$.

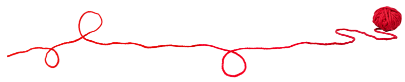
Beispiel 7.4.8 Die Kurve $r = \sin(t)$ ist regulär für jedes t. Wäre die Kurve regulär, so müsste $r(t) = r'(t) = 0$ sein, d.h. $\sin(t) = -\cos(t) = 0$. Da beide keine gemeinsamen Nullstellen haben, gibt aber es solches t nicht. Es gilt daher stets $r(t_0) \neq 0$ oder $r'(t_0) \neq 0$.

8 Analysis & Differentialrechnung in mehreren Variablen

Vorbereitung

- Studiport LE8 (Höhere Funktionen)
- Studiport LE9 (Differentialrechnung)
- Studiport LE12 (Vekoren und analytische Geometrie)

Roter Faden



- Wir haben bereits Abbildungen in Form von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einer Variablen und parametrisierte ebene Kurven $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ kennengelernt. Nun studieren wir allgemeine Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, allen voran Funktionen in mehreren Variablen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- Wir befassen uns mit der Stetigkeit und den verschiedenen Arten, die Differenzierbarkeit für Funktionen in mehreren Variablen einzuführen.
- Als Anwendung gewinnen wir Sätze, die uns die Untersuchung der Funktionen auf Extremstellen ermöglichen. Hierzu lernen die Entsprechungen der ersten und zweiten Ableitungen von Funktionen in mehreren Veränderlichen kennen.

Lernziele

Wissen

- Sie verstehen den Stetigkeitsbegriff für Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.
- Sie kennen den Unterschied zwischen partieller und totaler Differenzierbarkeit.
- Sie verstehen die Bedeutung des Gradienten als Richtung des stärksten Anstieges einer Funktion und zur Bestimmung von Richtungsableitungen.
- Sie kennen den Zusammenhang zwischen Gradienten, Hesse-Matrizen und der Existenz von lokalen Extremstellen.

Können

- Sie können eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ auf Stetigkeit untersuchen.
- Sie können partielle Ableitungen, Gradienten und Jacobi-Matrizen berechnen.
- Sie beherrschen die Rechenregeln für differenzierbare Abbildungen, insbesondere die Kettenregel.
- Sie können Extremstellen differenzierbarer Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bestimmen. Insbesondere können Sie ermitteln, ob (2×2)-Matrizen positiv, negativ definit oder indefinit sind.

8.1 Grenzwerte & Stetigkeit

Definition 8.1.1

(a) Wir nennen einen Vektor $\vec{x}$ im $\mathbb{R}^n$ eine **Vektorfolge**, falls alle Komponenten x_k des Vektors selbst reelle Zahlenfolgen sind, d.h. $x_k = (x_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$. Von daher benutzen wir für Vektorfolgen das Symbol $(\vec{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

(b) Die Vektorfolge $(\vec{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzvektor $\vec{c}$, falls jede Komponente $(x_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Vektorfolge gegen die Komponente c_k von $\vec{c}$ konvergiert. Man schreibt dafür

$$\lim_{j\to\infty} \vec{x}_j = \vec{c}$$

oder auch

$$\vec{x}_j \longrightarrow \vec{c} \quad \text{für} \quad j \to \infty.$$

Beispiel 8.1.2

(a) Konvergente Vektorfolge $\vec{x}_j = \begin{pmatrix} j^{-1} \\ \cos(1/j) \\ \frac{j}{1+j} \\ j^5 e^{-j} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Komponenten

$$x_{1,j} = \frac{1}{j},\ x_{2,j} = \cos(1/j),\ x_{3,j} = \frac{j}{1+j} \quad \text{und} \quad x_{4,j} = j^5 e^{-j}.$$

(b) Nicht-konvergente Vektorfolge: $\vec{x}_j = \begin{pmatrix} j^{-1} \\ \cos(j) \\ \frac{j}{1+j} \\ j^5 e^{j} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ ? \\ 1 \\ +\infty \end{pmatrix}$

Definition 8.1.3 Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ein Vektor $\vec{a}$ gegeben.

(a) Falls für jede Vektorfolge $(\vec{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$, deren Glieder niemals $\vec{a}$ sind, die aber gegen $\vec{a}$ konvergiert, die Auswertungen von $\vec{x}_j$ unter f gegen eine Zahl c konvergieren, d.h.

$$\lim_{j\to\infty} f(\vec{x}_j) = c \tag{18}$$

so schreiben wir symbolisch

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = c.$$

Achtung! Es muss nicht automatisch gelten, dass $c = f(\vec{a})$ ist. Es kann sein, dass die Funktion in $\vec{a}$ springt, z.B.

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \vec{x} \neq \vec{0} \\ 1, & \text{falls } \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

Es ist hier $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x}) = 0$, aber $f(\vec{0}) = 1$.

(b) Falls tatsächlich $c = f(\vec{a})$ ist, so sagen wir, dass die Funktion f **stetig in** $\vec{a}$ ist, d.h. es muss gelten:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}) \tag{19}$$

(c) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für jeden Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ stetig, so sagen wir, dass f **(überall) stetig** ist.

Bemerkung Setzen wir in die Definition der Stetigkeit in (19) die Definition der Grenzwerte für Funktionen (18) und Folgen ein, so erhalten wir die Bedingung

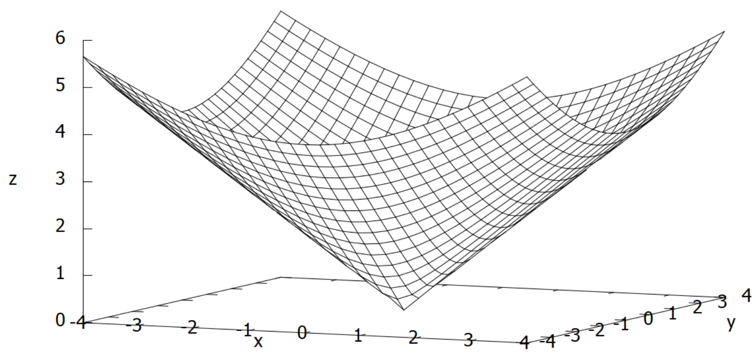
$$\lim_{j\to\infty} f(\vec{x}_j) = f(\vec{a}) = f(\lim_{j\to\infty} \vec{x}_j),$$

für jede Vektorfolge $(\vec{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$, die gegen $\vec{a}$ konvergiert. Das bedeutet, dass die stetigen Funktionen genau diejenigen Funktionen sind, die Grenzwertprozesse im Definitionsbereich auch im Wertebereich erhalten. Das deutet an, dass keine Sprünge im Graphen erlaubt sind.

Beispiel Die Normfunktion $f(x) = \|x\|$ ist auf ganz $\mathbb{R}^n$ stetig, denn sei $(\vec{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $\vec{a}$ konvergiert. Dann gilt:

$$\lim_{j\to\infty} f(\vec{x}_j) = \lim_{j\to\infty} \|\vec{x}_j\| = \lim_{j\to\infty} \sqrt{x_{1,j}^2 + \ldots + x_{n,j}^2}$$

$$\overset{\text{Wurzel stetig}}{=} \sqrt{\lim_{j\to\infty} (x_{1,j}^2 + \ldots + x_{n,j}^2)} = \sqrt{a_1^2 + \ldots a_n^2} = \|\vec{a}\| = f(\vec{a}).$$



Graph der Normfunktion $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Satz 8.1.4 (Rechenregeln für stetige Funktionen)
Seien zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gelten:

(a) Die Summe $f + g$ ist stetig.

(b) Das Produkt $f \cdot g$ ist stetig.

(c) Der Quotient $\dfrac{f}{g}$ ist stetig auf $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g(\vec{x}) \neq 0\}$.

(d) Die Komposition aus f und einer Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einer Variablen ist stetig, also $h \circ f$.

Beweis Diese Rechenregeln folgen sofort aus den Rechenregeln für Folgen, die sich problemlos auf Vektorfolgen übertragen lassen. □

Satz 8.1.5 (Extremwerteigenschaft stetiger Abbildungen) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt*, so nimmt jede stetige Funktion $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ auf K ein Maximum und ein Minimum an.

Man weiß nicht, wo sie sind, aber dass es welche gibt, was für die Theorie von entscheidender Bedeutung ist und Extremwertbestimmungen überhaupt erst erlaubt.

Beweis Die Eigenschaft wird wie in einer Variablen bewiesen. Da die Argumente anspruchsvoll sind und den Rahmen sprengen würden, verweisen wir nur auf die gängige Literatur zur Analysis. □

Beispiel 8.1.6 Eine kompakte Menge ist eine sehr anspruchsvolle topologische Eigenschaft von Mengen und wird hier nicht näher behandelt. Kompakte Mengen sind z.B. abgeschlossene Bälle der Form

$$B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{p}\| \leq r\}$$

oder abgeschlossene Quader

$$Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

8.2 Partielle Differenzierbarkeit & der Gradient

Beispiel 8.2.1 Eine Maschine benötigt zwei Ressourcen r_1 und r_2, um ein Produkt zu erzeugen. Die Kosten für dieses Produkts hängen daher von den beiden Ressourcen ab, die man als Kostenfunktion in zwei Variablen $x = r_1$ und $y = r_2$ darstellen kann, z.B.:

$$f(r_1, r_2) = f(x, y) = (x - 2y^2 + 3)(x - 5)$$

Die Frage ist selbstverständlich, wann die Kosten minimal oder auch maximal in Abhängigkeit der Ressourcen r_1 und r_2 sind.

Definition 8.2.2 Eine Zuordnungsvorschrift f, die jedem Vektor $\vec{x}$ aus dem $\mathbb{R}^n$ eine reelle Zahl $y = f(\vec{x})$ zuordnet, nennt man (skalare) **Funktion** und schreibt

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \vec{x} \mapsto y = f(\vec{x}).$$

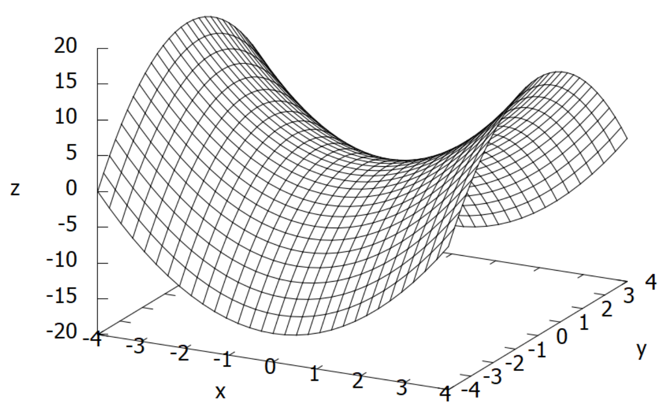
Der **Graph von** f ist eine Mengen der Form

$$\Gamma(f) = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\},$$

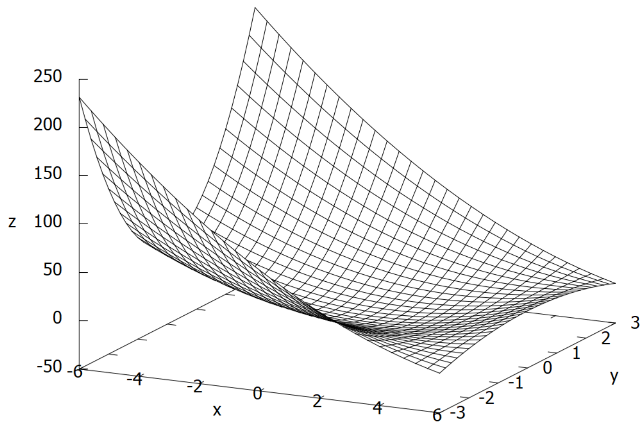
die sich im $\mathbb{R}^{n+1}$ als Flächen über der $\vec{x}$-Ebene darstellen lassen.

Beispiel 8.2.3

(a) Speziell für $n = 2$ lassen sich die Graphen von Funktionen in zwei Variablen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^3$ zeichnen. Zum Beispiel sei $f(x, y) = x^2 - y^2$. Der Graph von f ist dann eine Sattelfläche:



(b) Der Graph der Kostenfunktion $f(x, y) = (x - 2y^2 + 3)(x - 5)$ aus Beispiel 8.2.1 sieht wie folgt aus:



Definition 8.2.4

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **partiell differenzierbar im Punkt p in Richtung x_j**, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \quad = \quad \lim_{x_j \to p_j} \frac{f(p_1, ..., p_{j-1}, x_j, p_{j+1}, ..., p_n) - f(p)}{x_j - p_j}$$

(b) Die Zahl $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(p)$ heißt dann die **partielle Ableitung von f nach x_j im Punkt p**. Manchmal schreibt man auch f_{x_j} statt $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

(c) Wir sagen, dass f **stetig partiell differenzierbar** ist, falls die partiellen Ableitungen f_{x_j} selbst wieder stetig sind.

(d) Aus der Definition ergibt sich, dass man die partielle Ableitung einer Funktion f nach x_j ermitteln kann, indem wie gewohnt nach der Variablen x_j ableitet und die restlichen Variablen $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ wie Konstanten behandelt.

Beispiel 8.2.5 Sei $f(x, y) = (x - 2y^2 + 3)(x - 5)$ wieder die Kostenfunktion aus Beispiel 8.2.1. Dann sind die partiellen Ableitungen wie folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) = -2y^2 + 2x - 2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y) = -4y(x - 5)$$

Satz 8.2.6 (Rechenregeln für partielle Ableitungen) Alle Rechenregeln für Ableitungen in einer Variablen übertragen sich nahtlos auf die partiellen Ableitungen. Die Ähnlichkeit ist leicht zu erkennen ist, wenn man f_{x_j} durch f' ersetzt.

(a) **Linearität:** Für jedes $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g : U \to \mathbb{R}$ gilt:

$$(af + bg)_{x_j} = a \cdot f_{x_j} + b \cdot g_{x_j}$$

(b) **Produktregel:**
$$(fg)_{x_j} = f_{x_j} \cdot g + f \cdot g_{x_j}$$

(c) **Quotientenregel:**
$$\left(\frac{f}{g}\right)_{x_j} = \frac{f_{x_j} \cdot g - f \cdot g_{x_j}}{g^2}$$

Definition 8.2.7 Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist die **Komposition von f mit g** definiert als
$$g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(\vec{x}) := g(f(\vec{x})).$$
Es entsteht das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Satz 8.2.8 (Kettenregel für partielle Ableitungen) Auch die Kettenregel für partielle Ableitungen ähnelt der Kettenregel in einer Variablen. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in p partiell differenzierbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $y = f(p)$ differenzierbar. Dann ist auch die Komposition $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in p partiell differenzierbar uns es gilt:
$$(g \circ f)_{x_j}(p) = g'(f(p)) \cdot f_{x_j}(p)$$

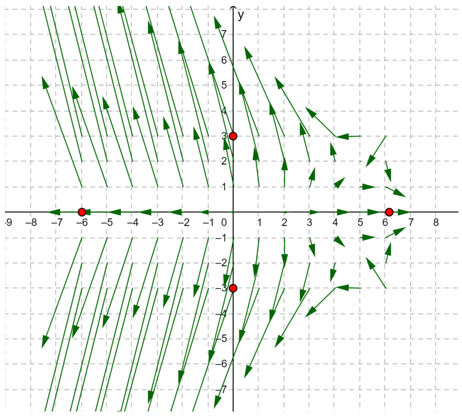
Beispiel 8.2.9 Seien $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $g(t) = \sqrt{t}$. Dann sind die Komposition und die partiellen Ableitungen wie folgt:
$$\begin{aligned} (g \circ f)(x, y) &= g(x^2 + y^2) = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|, \\ (g \circ f)_x(x, y) &= g'(f(x, y)) \cdot f_x(x, y) = g'(x^2 + y^2) \cdot f_x(x, y) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\|(x, y)\|}, \\ (g \circ f)_y(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\|(x, y)\|}. \end{aligned}$$

Definition 8.2.10 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ überall partiell differenzierbar.

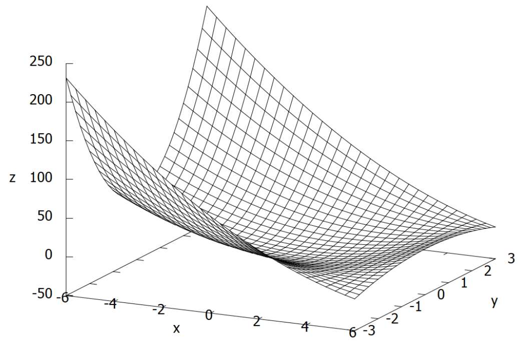
(a) Wir sammeln die partiellen Ableitungen in einem Vektor, dem sog. **Gradienten von f im Punkt** p, der wie folgt definiert ist:
$$\nabla f(p) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(p) \\ f_{x_2}(p) \\ \vdots \\ f_{x_n}(p) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$
Das Symbol ∇ heißt *„nabla"*.

(b) Verschwindet der Gradient von f in einem Punkt p, d.h. $\nabla f(p) = \vec{0}$, so nennen wir p eine **kritische Stelle von** f.

(c) Der Gradient ordnet jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $\nabla f(p)$ zu, d.h. $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. In diesem Sinne erzeugt der Gradient von f ein *Gradientenfeld*.



https://www.geogebra.org/m/GsxSTgrE



Beispiel 8.2.11 Sei $f(x, y) = (x - 2y^2 + 3)(x - 5)$ die Kostenfunktion aus Beispiel 8.2.1. Dann erzeugt der Gradient von f

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y^2 + 2x - 2 \\ -4y(x - 5) \end{pmatrix}$$

das folgende Gradientenfeld in der (x, y)-Ebene (im Vergleich mit dem Graphen von f rechts). Wir beobachten, dass das Gradientenfeld stets in Richtung des Anstiegs von f zeigt.

Satz 8.2.12 (Rechenregeln mit Gradienten) Alle Rechenregeln für Ableitungen in einer Variablen übertragen sich nahtlos auf die Gradienten. Die Ähnlichkeit ist leicht zu erkennen, wenn man ∇f durch f' oder f_{x_j} ersetzt.

(a) **Linearität:** Für jedes $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\nabla(af + bg) = a \cdot \nabla f + b \cdot \nabla g$$

(b) **Produktregel:**

$$\nabla(fg) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g$$

(c) **Quotientenregel:**

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}$$

Satz 8.2.13 (Kettenregel mit Gradienten) Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in p partiell differenzierbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $y = f(p)$ differenzierbar. Dann ist auch die Komposition $g \circ f$ in p partiell differenzierbar uns es gilt:

$$\nabla(g \circ f)(p) = g'(f(p)) \cdot \nabla f(p)$$

Beweis Das folgt sofort aus der Kettenregel für partielle Ableitungen und der Definition des Gradienten, der ja aus den partiellen Ableitungen besteht.

Beispiel 8.2.14 Seien $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(t) = \sqrt{t}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann sind

$$(g \circ f)(x, y) = g(x^2 + y^2) = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\vec{x}\|,$$

$$\nabla(g \circ f)(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot \nabla f(x, y) = g'(x^2 + y^2) \cdot \nabla f(x, y)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \frac{2}{2\|(x, y)\|} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}.$$

Definition 8.2.15 Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine in p stetig partiell differenzierbare Funktion und $\vec{v}$ ein normierter Vektor, d.h. $\|\vec{v}\| = 1$. Die **Ableitung von f in Richtung $\vec{v}$ im Punkt p** ist definiert als

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p) = \langle \nabla f(p), \vec{v} \rangle$$

Sie ist die Steigung von f im Punkt p in Richtung $\vec{v}$. Wir schreiben auch

$$f_{\vec{v}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$$

Ist $\vec{v} = \vec{e}_j$ ein kanonischer Einheitsvektor, so ist die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{e}_j$ gleich der partiellen Ableitung in Richtung x_j.

Satz 8.2.16 (Zusammenhang Gradient, Richtungsableitung & Steigung) Der Gradient ∇f einer Funktion f zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs bzw. $-\nabla f$ in Richtung des stärksten Gefälles, denn für die Richtungsableitung von f in Richtung eines normierten Vektors $\vec{v}$ gilt:

$$-\|\nabla f(p)\| \;\leq\; \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p) \;\leq\; \|\nabla f(p)\|$$

Gleichheit rechts gilt genau dann, wenn man in Richtung des Gradienten $\vec{v} = \dfrac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ ableitet, und links wenn man in Gegenrichtung $\vec{v} = -\dfrac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ ableitet.

Beweis Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\cos\big(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})\big) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Für $\vec{a} = \nabla f(p)$ und $\vec{b} = \vec{v}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ gilt:

$$\cos\big(\measuredangle(\nabla f(p), \vec{v})\big) = \frac{\langle \nabla f(p), \vec{v} \rangle}{\|\nabla f(p)\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p) = \|\nabla f(p)\| \cdot \cos\big(\measuredangle \nabla f(p), \vec{v}\big)$$

Da $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ ist, folgt daraus

$$-\|\nabla f(p)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p) \leq \|\nabla f(p)\|,$$

d.h. jede Richtungsableitung ist durch $\|\nabla f(p)\|$ nach oben und durch $-\|\nabla f(p)\|$ nach unten beschränkt. Jetzt kann man aber für $\vec{v}$ den Einheitsvektor

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$

setzen. Dann nimmt dieser Vektor $\vec{v}$ die maximale Steigung an, denn:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p) = \langle \nabla f(p), \vec{v} \rangle = \langle \nabla f(p), \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} \rangle$$

$$= \frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \cdot \langle \nabla f(p), \nabla f(p) \rangle = \frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \cdot \|\nabla f(p)\|^2 = \|\nabla f(p)\|.$$

Analog erhält man für $\vec{v} = -\dfrac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ die Richtung des stärksten Gefälles.

8.3 Extremstellen von zweidimensionalen Funktionen

Definition 8.3.1 Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt p heißt **lokales Maximum** von f, falls eine Umgebung U von p der Form

$$U = B_r(p) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{p}\| < r\}$$

existiert mit

$$f(\vec{x}) \leq f(p) \quad \text{für jedes } \vec{x} \in U.$$

Ein Punkt p heißt **lokales Minimum** von f, falls eine Umgebung U von p wie oben existiert mit

$$f(p) \leq f(\vec{x}) \quad \text{für jedes } \vec{x} \in U.$$

Satz 8.3.2 (Notwendiges Kriterium für lokale Extremstellen) Besitzt eine stetig partiell differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $p \in U$ ein lokales Maximum oder Minimum, so ist p eine kritische Stelle von f, d.h. $\nabla f(p) = \vec{0}$.

Beweis (Idee) Liegt ein Maximum in p vor, so zeigt er in die Richtung des steilsten Anstieg, sodass p kein Maximum sein kann. Liegt ein Minimum vor, so betrachten wir $-f$ statt f und führen dieselbe Argumentation wie vorhin.

Beispiel 8.3.3 Es kann aber durchaus vorkommen, an einer kritischen Stelle **kein** lokales Extremum vorliegt. Beispielsweise die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ hat im Punkt $(0, 0)$ einen Sattelpunkt, also kein Extremum, obwohl dort $\nabla f(0, 0) = \vec{0}$ ist.

Definition 8.3.4 Die **Hesse-Matrix von f im Punkt** p ist die Matrix, die alle zweiten partiellen Ableitungen sammelt, d.h.

$$H_f(p) = \text{Hess}_f(p) = \begin{pmatrix} (f_x)_x(p) & (f_x)_y(p) \\ \\ (f_y)_x(p) & (f_y)_y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix}$$

Definition 8.3.5 Eine (2×2)-Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ heißt

$$\begin{aligned} \text{positiv definit} \quad &\Leftrightarrow \quad a > 0\ ,\ d > 0,\ \det M > 0, \\ \text{negativ definit} \quad &\Leftrightarrow \quad a < 0\ ,\ d < 0\ ,\ \det M > 0, \\ \text{indefinit} \quad &\Leftrightarrow \quad \det M < 0. \end{aligned}$$

Satz 8.3.6 (Lemma von Schwarz) Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ überall 2-mal stetig partiell differenzierbar, so gilt die Symmetrie

$$(f_x)_y = (f_y)_x,$$

d.h. es spielt keine Rolle, ob man zuerst nach x und dann nach y ableitet oder umgekehrt.

Satz 8.3.7 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema) Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig partiell differenzierbare Funktion mit kritischer Stelle in p, d.h. $\nabla f(p) = 0$. Dann gilt:

(a) Ist $\text{Hess}_f(p)$ **positiv definit**, so ist f nahe p streng konvex und besitzt daher in p ein lokales Minimum.

(b) Ist $\text{Hess}_f(p)$ **negativ definit**, so ist f nahe p streng konkav und besitzt daher in p ein lokales Maximum.

(c) Ist $\text{Hess}_f(p)$ **indefinit**, so besitzt f im Punkt p einen Sattelpunkt.

Beispiel 8.3.8 Sei $f(x,y) = (x - 2y^2 + 3)(x - 5)$ die Kostenfunktion aus dem Eingangsbeispiel 8.2.1. Wir untersuchen sie auf lokale Extremstellen. Wir haben bereits den Gradienten berechnet und versuchen nun, die kritischen Stellen zu finden:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y^2 + 2x - 2 \\ -4y(x-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Komponente lesen wir ab, dass $y = 0$ oder $x = 5$ sein müssen.

Setzt man $y = 0$ in die erste Komponente ein, so ergibt das die Gleichung $2x - 2 = 0$, also $x = 1$. Daher ist $p = (1,0)$ eine kritische Stelle von f.

Setzt man $x = 5$ in die erste Komponente ein, so erhält man $-2y^2 + 8 = 0$, also $y = \pm 2$, d.h. $p = (5,-2)$ und $p = (5,2)$ sind weitere kritische Stellen.

Da wir nun alle kritischen Stellen haben, berechnen wir die Hesse-Matrix, um auf die Krümmung und somit die Existenz von Extremstellen von f an den kritischen Stellen zu prüfen.

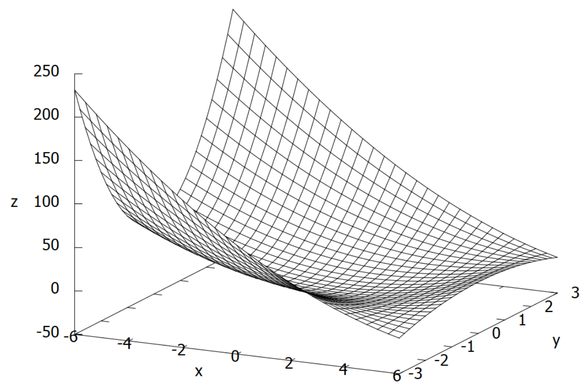
$$\text{Hess}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -4y \\ -4y & -4(x-5) \end{pmatrix}$$

Wir setzen die kritischen Stellen ein:

$$\text{Hess}(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad \text{Hess}(f)(5,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad \text{Hess}(f)(5,2) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun prüfen wir auf Definitheit. Die Matrix $\text{Hess}(f)(1,0)$ ist positiv definit, was leicht zu sehen ist. Die beiden Matrizen $\text{Hess}(f)(5,\pm 2)$ sind indefinit, da ihre Determinante gleich -64 negativ ist. Von daher hat f ein lokales Minimum bei $p = (1,0)$. In der Nähe von $p = (1,0)$ sind die Kosten also minimal. Hier nochmal der Graph:

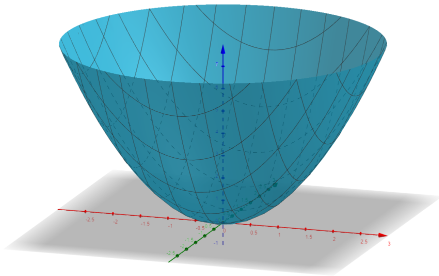


Bemerkung: Alle hier und vorhin besprochenen Konzepte lassen sich unmittelbar auch auf Funktionen

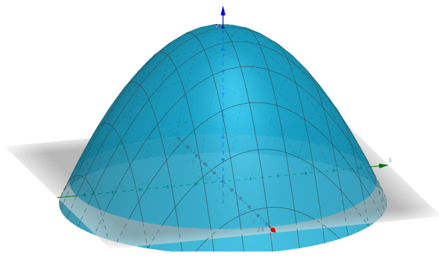
$$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

übertragen, die auf sog. *offenen* Mengen U definiert sind und nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$, und für $n > 2$.

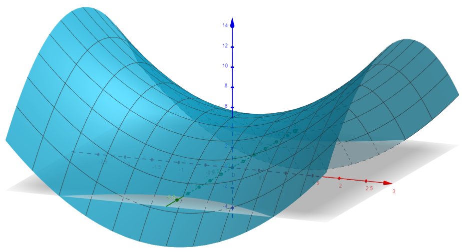
Zum Beispiel gelten die Sätze 8.3.2 und 8.3.7 wortwörtlich auch für solche Funktionen. Allerdings handelt es sich bei der Hesse-Matrix dann um eine $(n \times n)$-Matrix und es ist aufwendiger, Definitheit zu beschreiben.
Hier sehen Sie Funktionen, die (wichtige) Beispiele mit Blick auf die Extremwertbestimmung in Dimension $n = 2$ sind.



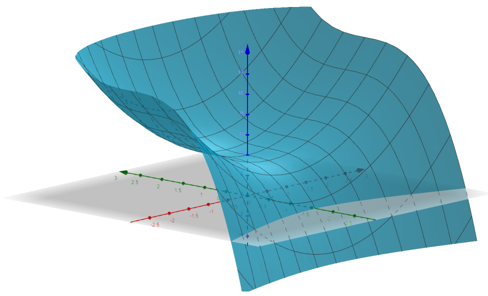
(x, y)*-Ebene (grau) und Graph von* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *(blau)*



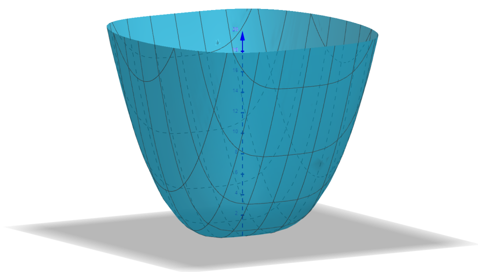
(x, y)*-Ebene (grau) und Graph von* $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 7$ *(blau)*



(x, y)*-Ebene (grau) und Graph von* $f(x, y) = x^2 - y^2 + 5$ *(blau)*



(x, y)*-Ebene (grau) und Graph von* $f(x, y) = x^2 + y^3 + 4$ *(blau)*



(x, y)*-Ebene (grau) und Graph von* $f(x, y) = x^2 + y^4$ *(blau)*

8.4 Tangentialebenen

Definition 8.4.1 Seien $\vec{a}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^n$ und b eine Zahl. Eine Funktion $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Form

$$L(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle + b = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b$$

nennt man eine **(affin) lineare Funktion**. Ihr Graph ist eine Ebene im $\mathbb{R}^{n+1}$, genauer die (affine) Hyperebene

$$E = \{ \begin{pmatrix} \vec{x} \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle \begin{pmatrix} \vec{a} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{x} \\ y \end{pmatrix} \rangle + b = 0 \}.$$

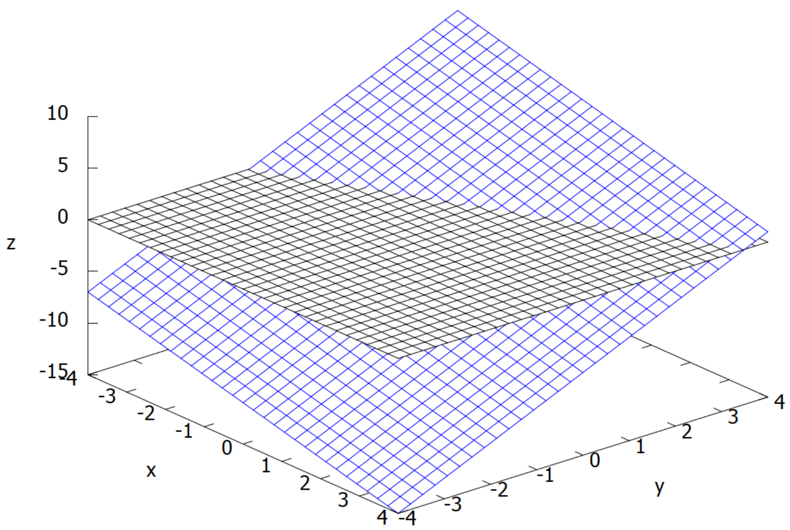
Es gilt: $\nabla L = \vec{a}$, d.h. der Gradient von L ist der konstante Vektor $\vec{a}$.

Beispiel 8.4.2 Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b = -3$. Dann sind

$$L(x, y) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle - 3 = -x + 2y - 3, \qquad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

$$\text{und} \quad \mathrm{Graph}(L) = E = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = 3 \}.$$

Der Graph von L sieht wie folgt aus:



(x, y)-Ebene (schwarz) und Graph von $L(x, y) = -x + 2y - 3$ (blau)

Definition 8.4.3 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in p. Dann nennt man

$$L = L_{f,p}(\vec{x}) = \langle \nabla f(p), \vec{x} - p \rangle + f(p)$$

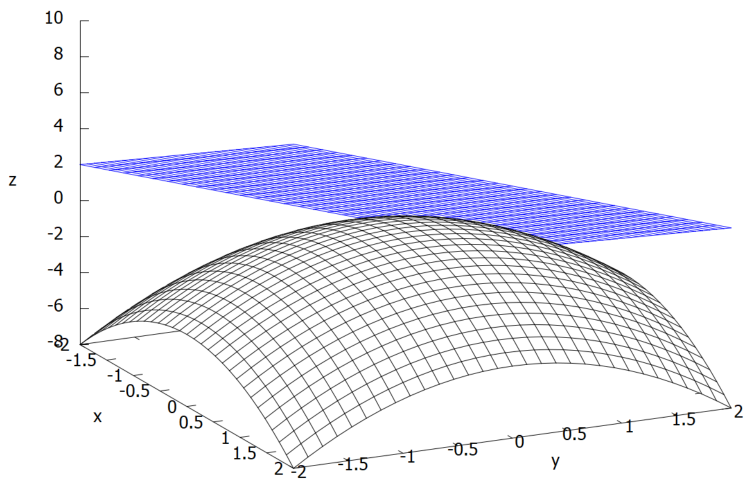
die **Linearisierte von f in** p. Ihr Graph ist eine Ebene durch den Punkt $(p, f(p))$. Es gelten:

$$L(p) = f(p) \quad \text{und} \quad \nabla L(p) = \nabla f(p).$$

Beispiel 8.4.4 (a) Sei $f(x,y) = -x^2 - y^2$ der nach unten geöffnete Parabolid. Dann ist die Linearisierte von f in $p = (-1,1)$ gleich

$$L(\vec{x}) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} \rangle - 2 = 2(x+1) - 2(y-1) - 2 = 2x - 2y + 2$$

Der Graphen von L und f sehen wie folgt aus:



Graphen von $f(x,y) = -x^2 - y^2$ (schwarz) und von $L(x,y) = 2x - 2y + 2$ (blau)

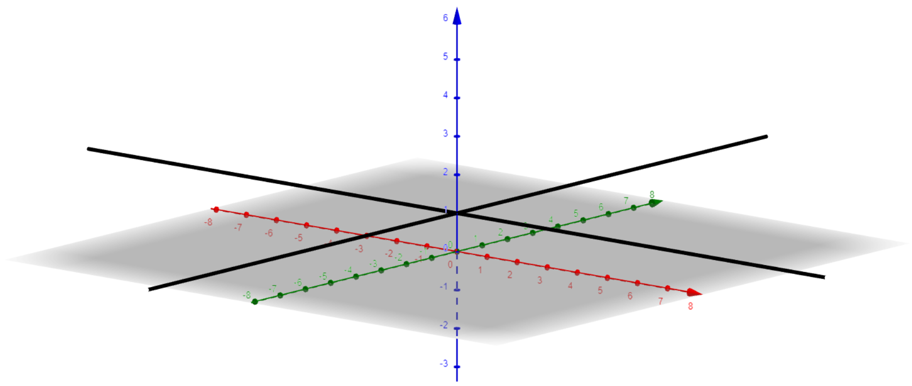
Satz 8.4.5 (Existenz der Tangentialebene) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **stetig** partiell differenzierbar in p. Dann ist der Graph der Linearisierten $L = L_{f,p}$ von f in p tatsächlich die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$, d.h. es gilt

$$\lim_{\vec{x} \to p} \frac{f(\vec{x}) - L(\vec{x})}{\|\vec{x} - p\|} = 0.$$

Man sagt auch, dass f von L in p von *erster Ordnung approximiert* wird, denn in diesem Fall ist $f \approx L$.

Achtung! Hier muss zwingend f stetig partiell, und nicht bloß partiell differenzierbar sein.

Beweis Dieser Satz ist nicht einfach zu zeigen. Es sei auf die Bücher zur Analysis verwiesen. □



$$\textit{Graph von } f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \textit{ falls } xy = 0 \\ 0 & , \textit{ falls } xy \neq 0 \end{cases} \textit{ (schwarz/grau)}$$

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist partiell differenzierbar im Punkt $(0,0)$, aber nicht stetig partiell differenzierbar. Es gibt keine (sinnvolle) Tangentialebene.

Definition 8.4.6 Wir sagen, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **total differenzierbar in** p ist, wenn es eine lineare Funktion $L(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle + b$ derartig gibt, so dass gilt:

$$\lim_{\vec{x} \to p} \frac{f(\vec{x}) - L(\vec{x})}{\|\vec{x} - p\|} = 0.$$

Falls es solch ein L gibt, so ist f in p partiell differenzierbar und es gilt $\nabla f(p) = \vec{a}$. Genauer ist L dann tatsächlich die Linearisierte $L = L_{f,p}$ von f in p, und ihr Graph ist daher die Tangentialebene an den Graphen von f über p.

Kurzum: Eine in p total differenzierbare Funktion besitzt per Definition immer eine Tangentialebene über p. Daher ist die totale Differenzierbarkeit stärker als die partielle Differenzierbarkeit.

Satz 8.4.7 (Stetigkeit & partielle & totale Differenzierbarkeit)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine skalare Funktion.

(a) Ist f total differenzierbar, so ist f partiell differenzierbar und stetig.

(b) Ist f stetig partiell differenzierbar, so ist f total differenzierbar.

(c) Alle anderen Zusammenhänge zwischen den Begriffen „stetig partiell differenzierbar", „total differenzierbar", „partiell differenzierbar" und „stetig" lassen sich durch geeignete Beispiele widerlegen.

Wir haben also das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{stetig partiell diff'bar} & \begin{array}{c}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{array} & \text{total diff'bar} & \begin{array}{c}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{array} & \text{partiell diff'bar} \\
\Downarrow \not\Uparrow & & \Downarrow \not\Uparrow & & \not\Downarrow \not\Uparrow \\
\text{stetig} & & \text{stetig} & & \text{stetig}
\end{array}$$

Beweis

(a) Ist f im Punkt p total differenzierbar, so gilt

$$\lim_{\vec{x}\to p} f(\vec{x}) = \lim_{\vec{x}\to p} f(\vec{x}) - L(\vec{x}) + L(\vec{x})$$

$$= \lim_{\vec{x}\to p} \underbrace{\frac{f(\vec{x}) - L(\vec{x})}{\|\vec{x}-p\|}}_{\longrightarrow 0} \cdot \|\vec{x}-p\| + L(\vec{x})$$

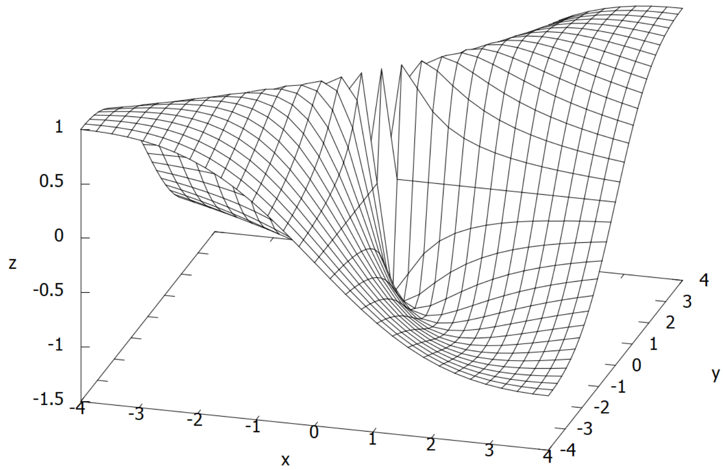
$$= \lim_{\vec{x}\to p} L(\vec{x}) = L(p) = f(p).$$

(b) Das ist schwieriger zu zeigen und wird hier nicht aufgeführt (siehe Bücher zur Analysis).

(c) Die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{, für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{, für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ist zwar im Punkt $p = (0,0)$ partiell differenzierbar mit den Ableitungen $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, aber im Punkt $p = (0,0)$ ist sie nicht stetig. Daher kann sie weder total noch stetig partiell differenzierbar sein. Hier der Graph:



8.5 Differenzierbare Abbildungen

Beispiel 8.5.1 Wir haben bereits viele verschiedene Zuordnungen kennengelernt.

(a) Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ in einer Variablen, die auf ihrem Definitionsbereich $x \in D_f \subset \mathbb{R}$ definiert sind und Werte $y = f(x)$ in $\mathbb{R}$ liefern.

(b) Ebene Kurven $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, die auf einem Intervall $t \in I \subset \mathbb{R}$ definiert sind und Vektoren $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ liefern.

(c) Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die in mehreren Variablen $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ definiert sind und skalare Werte $y = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ liefern.

(d) Gradientenfelder $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die an einem Punkt p den entsprechenden Gradienten $\nabla f(p) \in \mathbb{R}^n$ liefern.

Definition 8.5.2

(a) Eine **Abbildung** $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $\vec{y} = F(\vec{x}) \in \mathbb{R}^k$ in eindeutiger Weise zuordnet bzw. *abbildet*.

(b) Der Vektor $\vec{y} = F(\vec{x})$ besteht aus k Komponenten, genauer

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißen **Komponentenfunktionen von** F.

Beispiel 8.5.3

(a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy + 2e^z \\ x\sin(yz) \end{pmatrix}$. Dann sind die Komponentenfunktionen

$$f_1(x, y, z) = xy + 2e^z \quad \text{und} \quad f_2(x, y, z) = x\sin(yz).$$

(b) Allgemein nennt man eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, also für $n = k$, ein **Vektorfeld**. Jedes Gradientenfeld $F = \nabla f$ ist ein Vektorfeld, das durch die partiellen Ableitungen f_{x_j} einer skalaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erzeugt wird.

Definition 8.5.4 Sei $F = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine **partiell differenzierbare** Abbildungen, d.h. alle ihre Komponentenfunktionen sind partiell differenzierbar. Die (transponierten) Gradienten fasst man dann zur sog. **Jacobi-Matrix** zusammen:

$$\mathsf{Jac}(F)(p) \quad = \quad \begin{pmatrix} \nabla f_1(p)^t \\ \nabla f_2(p)^t \\ \vdots \\ \nabla f_k(p)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \in M(k \times n)$$

Sie ist die geordnete Sammlung aller partiellen Ableitungen der Komponenten von F zusammengefasst in einer Matrix mit k Zeilen und n Spalten. Manchmal schreibt man auch

$$DF(p) \quad \text{statt} \quad \mathsf{Jac}(F)(p)$$

und nennt DF auch das *Differential von* F.

Beispiel 8.5.5

(a) Sei $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy + 2e^z \\ x\sin(yz) \end{pmatrix}$ aus dem Beispiel 8.5.3. Dann ist die Jacobi-Matrix gleich

$$\mathsf{Jac}(F)(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & 2e^z \\ \sin(yz) & z\cos(yz) & y\cos(yz) \end{pmatrix}$$

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist $\mathsf{Jac}(f) = f'$, d.h. die gewöhnliche Ableitung einer Funktion in einer Variablen.

(c) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so ist $\mathsf{Jac}(f) = \nabla f^t$, also der Gradient von f als Zeilenvektor (!) geschrieben.

(d) Ist $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ so ist

$$\mathsf{Jac}(\alpha)(t) = \alpha'(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \\ \vdots \\ \alpha_n'(t) \end{pmatrix},$$

d.h. die Jaocobi-Matrix ist der Ableitungsvektor der Kurve.

(e) Sei die Spirale um die z-Achse $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ gegeben. Dann ist

$$\mathsf{Jac}(\alpha)(t) = \alpha'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(f) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(t,h) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ h \end{pmatrix}$. Dann parametrisiert F die Mantelfläche eines Zylinders mit Grundflächenradius r. Die Jacobi-Matrix ist

$$\mathsf{Jac}(F)(t,h) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) & 0 \\ r\cos(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3).$$

Satz 8.5.6 (Rechenregeln für partielle Ableitungen von Abbildungen) Wir drücken sie hier mit Hilfe von Jacobi-Matrizen aus, so dass die Ähnlichkeit leicht zu erkennen ist, wenn man $\mathsf{Jac}(f)$ durch ∇f oder f' ersetzen würde.

(a) **Linearität:** Für jedes $a, b \in \mathbb{R}$ und $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ gilt:

$$\mathsf{Jac}(a \cdot F + b \cdot G) = a \cdot \mathsf{Jac}(F) + b \cdot \mathsf{Jac}(G)$$

(b) Da Produkte und Quotienten von Vektoren nicht (wirklich) definiert sind, gibt es keine Produktregel und Quotientenregel.

Satz 8.5.7 (Kettenregel) Seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ zwei partiell differenzierbare Abbildungen. Dann ist die Komposition $G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ebenfalls partiell differenzierbar und es gilt:

$$\mathsf{Jac}(G \circ F)(p) = \mathsf{Jac}(G)\big(F(p)\big) \cdot \mathsf{Jac}(F)(p)$$
$$\text{oder} \quad D(G \circ F)(p) = D(G)\big(F(p)\big) \cdot D(F)(p)$$

Achtung! Es müssen die Dimensionen der Funktionen und daher auch die Matrizen passen, um Kompositionen und Produkte von Matrizen überhaupt bilden zu können, d.h.

$$\underbrace{\mathsf{Jac}(G \circ F)(p)}_{m\times n} = \underbrace{\mathsf{Jac}(G)\big(F(p)\big)}_{m\times k} \cdot \underbrace{\mathsf{Jac}(F)(p)}_{k\times n}.$$

Wir erinnern, dass das Produkt einer $(m \times k)$- mit einer $(k \times n)$-Matrix eine $(m \times n)$-Matrix bildet.

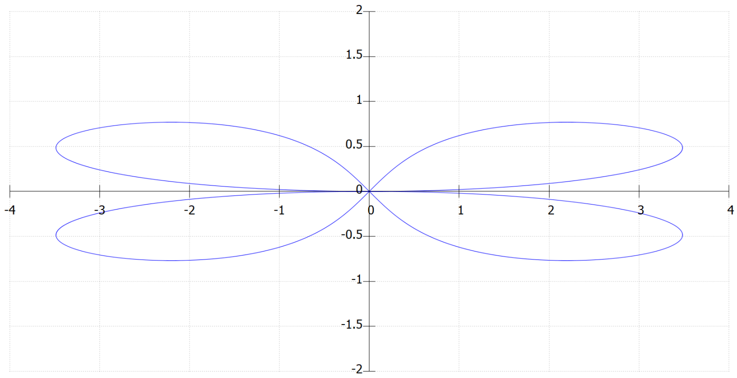
Beispiel 8.5.8 Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Ellipse gegeben durch $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$, die also unendlich oft in beide Richtungen umlaufen wird. Sei die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} (x+x^3)y \\ xy^2 \end{pmatrix}.$$

Die Komposition $F \circ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist wieder eine Kurve und berechnet sich durch Einsetzen der Kurve in die Abbildung:

$$\begin{aligned}(F \circ \alpha)(t) &= F(\alpha(t)) = F(2\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\ &= \begin{pmatrix} (2\cos(2\pi t) + 8\cos^3(2\pi t))\sin(2\pi t) \\ 2\cos(2\pi t)\sin^2(2\pi t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Kurve sieht dann wie folgt aus:



Der Ableitungsvektor von $F \circ \alpha$ zum Zeitpunkt $t = 1$ berechnet sich dank der Kettenregel wie folgt:

$$(F \circ \alpha)'(1) = \mathsf{Jac}(F \circ \alpha)(1) = \mathsf{Jac}(F)(\alpha(1)) \cdot \mathsf{Jac}(\alpha)(1) = \mathsf{Jac}(F)(\alpha(1)) \cdot \alpha'(1)$$

Hierzu sind die entsprechenden Ableitungen von F und α gleich

$$\mathsf{Jac}(F)(x,y) = \begin{pmatrix} (1+3x^2)y & x+x^3 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix},$$

$$\text{und} \quad \alpha'(t) = \begin{pmatrix} -4\pi\sin(2\pi t) \\ 2\pi\cos(2\pi t) \end{pmatrix}.$$

Nun setzen wir die Punkte $(x,y) = \alpha(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathsf{Jac}(F)(x,y)$ und $t = 1$ in $\alpha'(t)$. Wir erhalten

$$\mathsf{Jac}(F)(\alpha(1)) = \begin{pmatrix} (1+3\cdot 2^2)\cdot 0 & 2+2^3 \\ 0^2 & 2\cdot 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{und} \quad \alpha'(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}.$$

Schließlich multiplizieren wir die letzten beiden Matrizen gemäß der Formel in der Kettenregel:

$$\mathsf{Jac}(F \circ \alpha)(1) = \mathsf{Jac}(F)(\alpha(1)) \cdot \alpha'(1) = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

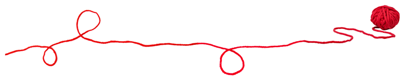
Der gesuchte Ableitungsvektor ist also $(F \circ \alpha)'(1) = \begin{pmatrix} 20\pi \\ 0 \end{pmatrix}$.

9 Integralrechnung in mehreren Variablen

Vorbereitung

- Studiport LE8 (Höhere Funktionen)
- Studiport LE10 (Integralrechnung)
- Studiport LE12 (Vekoren und analytische Geometrie)

Roter Faden



- Zunächst diskutieren wir, wie man das Volumen eines Körpers zwischen der xy-Ebene und dem Graphen einer positiven Funktion $f : R \to \mathbb{R}$ bestimmen kann, wobei R ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$ ist. Wir erhalten das zweidimensionale Integral
$$\int_R f(x,y)\ d(x,y)$$
- Danach weiten wir das Konstrukt auf abstraktere Definitionsbereiche aus, in unserem Fall Kreisflächen
$$K_r(p) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y) - p\| \leq r\}$$
und Flächen, die von Graphen von Funktionen eingeschlossen werden,
$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ f_u(x) \leq y \leq f_o(x)\}.$$
- Als Anwendung lernen wir die Formel zur Berechnung des Schwerpunkts von Flächen mit Hilfe von zweidimensionalen Integralen kennen.
- Wir weiten die Definition des Integrals auf dreidimensionale Funktionen $f : Q \to \mathbb{R}$ aus, wobei Q ein Quader im $\mathbb{R}^3$ ist. Wir erhalten das Integral
$$\int_Q f(x,y,z)\ d(x,y,z).$$
- Über Kugeln im $\mathbb{R}^3$ lernen wir ebenfalls zu integrieren.

Lernziele

Wissen

- Sie wissen, wie man Integrale stetiger Funktionen über Gebieten im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ definiert und bestimmt.

Können

- Sie können Integrale in zwei oder drei Variablen berechnen.
- Insbesondere können Sie die nötigen Integrationsgrenzen bestimmen.
- Sie können den Schwerpunkt eines zulässigen Gebietes im $\mathbb{R}^2$ bestimmen.

9.1 Zweidimensionale Integration

Beispiel 9.1.1 Sei ρ („rho") die Dichte der Population einer Bakterienart, die sich in einer rechteckigen Schale R befindet, wobei

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 3\}.$$

Ist die Dichte der Population homogen, d.h. konstant, so ist die Masse m der Gesamtpopulation in der Schale gleich

$$m = \rho \cdot A(R) = \rho \cdot 4 \cdot 3 = 12\rho,$$

wobei $A(R)$ der Flächeninhalt von R ist.

Ist die Dichte nicht homogen, z.B. $\rho(x, y) = \dfrac{200000}{2e^y + xe^y}$, so ist die Masse die infinitesimale Summe der Dichten, d.h.

$$m \sim \sum_{x,y} \rho(x, y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y.$$

Diese Summe ergibt das zweidimensionale Integral

$$m = \int_R \rho(x, y)\ d(x, y).$$

Definition 9.1.2 Sei $f : M \to \mathbb{R}_0^+$ eine nicht-negative, stetige Funktion, die auf einer Menge M im $\mathbb{R}^2$ definiert ist. Dann bezeichnen wir das Volumen des Körpers zwischen der xy-Ebene und dem Graphen von f mit dem Symbol

$$\int_M f(x, y)\ d(x, y),$$

sofern dieses Volumen existiert. Es berechnet sich (grob) über die infinitesimale Summe der Volumen von Quadern über M, ähnlich wie bei der Integration über eine Variable, genauer:

$$\int_M f(x, y)\ d(x, y) = \sum_x \sum_y f(x, y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Ist f negativ, so setzen wir

$$\int_M f(x, y)\ d(x, y) := -\int_M \big(- f(x, y)\big)\ d(x, y).$$

Für eine beliebige Funktion f zerlegen wir zunächst in positiven und negativen Teil

$$f = f_+ + f_- = \max\{f, 0\} + \min\{f, 0\}$$

und definieren dann das **Integral von f über M** als

$$I(f) = \int_M f(x, y)\ d(x, y) := \int_M f_+(x, y)\ d(x, y) + \int_M f_-(x, y)\ d(x, y)$$

Es ist das **orientierte Volumen des Körpers zwischen xy-Ebene und dem Graphen von f**. Andere Schreibweisen sind:

$$\int_M f(x, y)\ dM(x, y), \quad \int_M f(x, y)\ dM \quad \text{oder} \quad \int_M f\ dM$$

Das **absolute Volumen des Körpers zwischen xy-Ebene und dem Graphen von f** berechnet sich dann durch

$$V(f) = \int_M |f(x, y)|\ d(x, y).$$

Im Spezialfall $f = 1$ erhalten wir den **Flächeninhalt von M**, also

$$A(M) = \int_M 1\ d(x, y).$$

Satz 9.1.3 (Fubini: Integration über Rechtecke) Sei $f : R \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf einem Rechteck

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}.$$

definiert ist. Dann gilt

$$\int_R f(x, y)\ d(x, y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ dx\right) dy.$$

Beweis (Idee) Das Integral lässt sich auch schreiben als infinitesimale Summe über die Inhalte der Flächen zwischen der nach x verschobenen y-Achse und dem Graphen von $y \mapsto f(x, y)$, d.h. $I_x(f) = \displaystyle\int_c^d f(x, y)\ dy$, wobei x zunächst festgehalten wird, und dann die Flächen $I_x(f)$ über x aufsummiert werden, d.h.

$$\int_R f(x, y)\ d(x, y) \sim \sum_x I_x(f)\ \Delta x.$$

Vertauscht man nun die Rollen von x und y, so erhält man zusätzlich auch

$$\int_R f(x, y)\ d(x, y) \sim \sum_y I_y(f)\ \Delta y.$$

□

Beispiel 9.1.4 Erinnern wir uns an das Eingangsbeispiel 9.1.1. Dann ist die Masse der Gesamtpopulation gleich:

$$\begin{aligned} m = \int_R f(x, y)\ d(x, y) &= \int_0^4 \left(\int_0^3 \frac{20000}{2e^y + xe^y} dy\right) dx \\ &= 20000 \cdot \int_0^4 \frac{1}{2+x} \cdot \left(\int_0^3 e^{-y}\ dy\right)\ dx \\ &= 20000 \cdot \left(\int_0^4 \frac{1}{2+x}\ dx\right) \cdot \left(\int_0^3 e^{-y}\ dy\right) \\ &= 20000 \cdot (\ln(6) - \ln(2)) \cdot (1 - e^{-3}) \approx 41757 \end{aligned}$$

Beispiel 9.1.5 Seien $f(x, y) = \frac{x^2}{1+xy}$ und das Rechteck R gegeben durch

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 4\}.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} \int_R f(x, y)\ d(x, y) &= \int_0^2 \int_1^4 \frac{x^2}{1+xy}\ dy\ dx \\ &= \int_0^2 x \int_1^4 \frac{x}{1+xy}\ dy\ dx \\ &= \int_0^2 x \Big[\ln(1+xy)\Big]_{y=1}^4\ dx \\ &= \int_0^2 x \Big[\ln(1+xy)\Big]_{y=1}^4\ dx \\ &= \int_0^2 x \Big[\ln(1+4x) - \ln(1+x)\Big]\ dx \\ &= \int_0^2 \big(x\ln(1+4x) - x\ln(1+x)\big)\ dx \\ &\overset{\text{Produktregel}}{=} \frac{39\ln(3) - 12}{16} \end{aligned}$$

Man hätte auch versuchen können, zuerst nach x zu integrieren.

$$\int_R f(x,y)\ d(x,y) = \int_1^4 \int_0^2 \frac{x^2}{1+xy}\ dx\ dy,$$

allerdings ist das Auffinden einer Stammfunktion von $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+xy}$ nun wesentlich schwieriger.

Satz 9.1.6 (Fubini: Integration über Flächen zwischen Graphen) Sei $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer Fläche G im $\mathbb{R}^2$, die von oben und unten von stetigen Funktionen beschränkt ist, d.h.

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ f_u(x) \le y \le f_o(x)\}.$$

Dann gilt

$$\int_G f(x,y)\ d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{f_u(x)}^{f_o(x)} f(x,y)\ dy \right) dx.$$

Hier können die Grenzen **nicht** vertauscht werden, da die Grenzen im inneren Integral von x abhängen, über die noch integriert werden muss.

Die Fläche von G lässt sich mit $f = 1$ aus eine bekannte Formel zurückführen:

$$A(G) = \int_a^b \big(f_o(x) - f_u(x)\big)dx$$

Beweis (Idee) Das Integral lässt sich auch schreiben als infinitesimale Summe über die Inhalte der Flächen zwischen er nach x verschobenen y-Achse und dem Graphen von $y \mapsto f(x,y)$, d.h. $I_x(f) = \displaystyle\int_{f_u(x)}^{f_o(x)} f(x,y)\ dy$, wobei x zunächst festgehalten wird, und schließlich die Flächen $I_x(f)$ über x aufsummiert werden, d.h.

$$\int_G f(x,y)\ d(x,y) \sim \sum_x I_x(f)\ \Delta x.$$

□

Beispiel 9.1.7 Seien $f(x,y) = xy$ und die Fläche G gegeben durch

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le (2-x)x\}.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
\int_G f(x,y)\ d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_x^{(2-x)x} xy\ dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x \left(\int_x^{(2-x)x} y\ dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x \Big[\frac{1}{2} y^2\Big]_{y=x}^{(2-x)x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x\big((2-x)^2 x^2 - x^2\big)dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \big(3x^3 - 4x^4 + x^5\big)dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6\Big]_{x=0}^1 \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6}\Big) = \frac{43}{120}.
\end{aligned}$$

Satz 9.1.8 (Integration über Kreisscheiben) Sei $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer Kreisscheibe
$$K = K_R(\vec{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq R\}.$$
Dann gilt
$$\int_K f(x, y)\ d(x, y) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R f(r\cos(t), r\sin(t)) \cdot r\ dr \right) dt,$$
d.h. zuerst integriert man über den Radius r und hält t als Konstante fest und integriert dann über den Winkel t. Nach Fubini gilt auch die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge:
$$\int_K f(x, y)\ d(x, y) = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\ dt \right)\ r\ dr,$$

Bemerkung: Manchmal kann es auch passieren, dass man nur über Kreisabschnitte integrieren möchte, d.h. statt $t \in [0, 2\pi]$ lässt man allgemein $t \in [a, b] \subset [0, 2\pi]$ laufen. Ferner ist es möglich, dass der Radius $R = R(t)$ vom Winkel t abhängt, sich also der Radius mit dem Winkel ändert und K zu einem "Klecks" bzw. sternförmigen Gebiet wird.

Beweis Hier wandeln wir die Integration über eine Kreisfläche K in eine Integration über ein Rechteck Q um, wobei
$$Q = \{(r, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq t \leq 2\pi\},$$
d.h. wir parametrisieren die Kreisfläche durch die Abbildung
$$\psi : Q \to K, \quad \psi(r, t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
Dann wenden wir die Substitutionsregel in mehreren Variablen an, den sog. *Transformationssatz*, den wir hier nur andeuten. Er benutzt die Substitution:
$$d(x, y) = |\det \mathsf{Jac}(\psi)(r, t)|\ d(r, t) = r\ d(r, t)$$
Es ist
$$\begin{aligned} \det \mathsf{Jac}(\psi)(r, t) &= \det \begin{pmatrix} \cos(t) & -r\sin(t) \\ \sin(t) & r\cos(t) \end{pmatrix} \\ &= r\cos^2(t) - (-r\sin^2(t)) = r. \end{aligned}$$
Das ergibt schließlich $\displaystyle\int_K f(x, y)\ d(x, y) = \int_Q f(r\cos(t), r\sin(t)) \cdot r\ d(r, t).$ □

Beispiel 9.1.9 Wir berechnen mit Hilfe von Polarkoordinaten das Integral
$$\int_K e^{-x^2 - y^2}\ d(x, y),$$
wobei $K = K_R(\vec{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq R\}$ eine Kreisscheibe um den Ursprung mir

Radius $R > 0$ ist. Nach dem vorherigen Satz gilt:

$$\begin{aligned}
\int_K e^{-x^2-y^2}\ d(x,y) &= \int_Q e^{-(r\cos(t))^2-(r\sin(t))^2} \cdot r\ d(r,t) \\
&\overset{\text{Fubin}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-(r\cos(t))^2-(r\sin(t))^2} \cdot r\ dr\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} \cdot r\ dr\ dt \\
&\overset{\substack{\text{Kettenregel}\\ \text{rückwärts}}}{=} \int_0^{2\pi} \Big[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big]_{r=0}^R\ dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{-R^2} - 1)\ dt \\
&= -\frac{e^{-R^2}-1}{2} \int_0^{2\pi} 1\ dt \\
&= \frac{1-e^{-R^2}}{2} \cdot 2\pi = \pi(1-e^{-R^2}).
\end{aligned}$$

Wir erhalten dadurch folgende wichtige Formel:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ d(x,y) = \lim_{R\to\infty} \int_{K_R(\vec{0})} e^{-x^2-y^2}\ d(x,y) = \pi.$$

Mit Fubini gilt nun:

$$\begin{aligned}
\pi &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ d(x,y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\ dy\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\ dy \right)}_{=\text{Konstante}}\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\ dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx \right)^2
\end{aligned}$$

Daher erhalten wir: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}$.

Das Besondere bei diesem Beispiel ist, dass man es schafft, mit Hilfe der zweidimensionalen Integration ein eindimensionales Integral zu lösen, für dessen Integranden e^{-x^2} man keine Formel für eine Stammfunktion kennt.

Definition 9.1.10 Sei M eine Fläche im $\mathbb{R}^2$, z.B. eine der oben beschriebenen Flächen R, G oder K, für die der Flächeninhalt

$$A(M) = \int_M 1\ d(x,y)$$

existiert. Dann nennt man den Vektor $S_M := \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ den **Schwerpunkt von** M, wobei

$$x_M = \frac{1}{A(M)} \int_M x\ d(x,y) \quad \text{und} \quad y_M = \frac{1}{A(M)} \int_M y\ d(x,y).$$

Ist M spiegelsymmetrisch zur y-Achse, so ist $x_M = 0$, und ist M spiegelsymmetrisch zur x-Achse, so ist $y_M = 0$.

9.2 Dreidimensionale Integration

Beispiel 9.2.1 Sei ein homogener Körper K im $\mathbb{R}^3$ mit Volumen V gegeben, dessen Massendichte überall den konstanten Wert ρ_0 („rho") hat. Dann ist seine Masse m gleich

$$m = \rho_0 \cdot V.$$

Angenommen, die Dichte des Körpers ist an jedem Ort (x, y, z) des Körpers verschieden und durch die (stetige) Zuordnung $\rho : K \to \mathbb{R}$, $\rho = \rho(x, y, z)$ gegeben. Dann sind sein Volumen und seine Masse gleich

$$V = \int_K 1 \; d(x, y, z) \quad \text{und} \quad m = \int_K \rho(x, y, z) \; d(x, y, z).$$

In der Literatur findet man die Schreibweise $m = \displaystyle\int_V \rho(x, y, z) \; dV$, wobei hier das Volumen V den Körper K meint.

Definition 9.2.2 Sei $f : M \to \mathbb{R}_0^+$ eine nicht-negative, stetige Funktion, die auf einer Menge M im $\mathbb{R}^3$ definiert ist. Dann bezeichnen wir das (vierdimensionale) Volumen des Körpers zwischen der xyz-Ebene und dem Graphen von f mit dem Symbol

$$\int_M f(x, y, z) \; d(x, y, z),$$

sofern dieses Volumen existiert. Es berechnet sich (grob) über die infinitesimale Summe der Volumen von Quadern über M, genauer:

$$\int_M f(x, y, z) \; d(x, y, z) = \sum_x \sum_y \sum_z f(x, y, z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Ist f negativ, so setzen wir

$$\int_M f(x, y, z) \; d(x, y, z) := -\int_M \big(-f(x, y, z) \big) \; d(x, y, z).$$

Für eine beliebige Funktion f zerlegen wir zunächst in positiven und negativen Teil

$$f = f_+ + f_- = \max\{f, 0\} + \min\{f, 0\}$$

und definieren dann das **Integral von f über M** als

$$I(f) = \int_M f(x, y, z) \; d(x, y, z) := \int_M f_+(x, y, z) \; d(x, y, z) + \int_M f_-(x, y, z) \; d(x, y, z)$$

Es ist das **orientierte Volumen des Körpers zwischen xyz-Ebene und dem Graphen von** f.

Das **absolute Volumen des Körpers zwischen xyz-Ebene und dem Graphen von** f berechnet sich dann durch

$$V(f) = \int_M |f(x, y, z)| \; d(x, y, z).$$

Im Spezialfall $f = 1$ erhalten wir den **Volumen von** M, also

$$V(M) = \int_M 1 \; d(x, y, z).$$

Satz 9.2.3 (Fubini: Integration über Quader) Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Quader

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq f\}.$$

Dann gilt

$$\int_Q f(x, y, z)\ d(x, y, z) = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z)\ dz\ dy\ dx.$$

Die Reihenfolge der Integration über die einzelnen Variablen spielt keine Rolle.

Beweis (Idee) Das Integral lässt sich auch schreiben als infinitesimale Summe über die Volumen $I_x(f)$ der um x-verschobenen yz-Ebene und dem Graphen von $(y, z) \mapsto f(x, y, z)$, d.h.

$$I_x(f) = \int_c^d \int_e^f f(x, y, z)\ dz\ dy,$$

wobei x zunächst festgehalten wird und dann die Volumen über x aufsummiert werden, d.h.

$$\int_Q f(x, y, z)\ d(x, y, z) \sim \sum_x I_x(f)\ \Delta x.$$

$\square$

Satz 9.2.4 (Integration über Kugeln) Sei $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer Kugel

$$K = K_R(\vec{0}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| \leq R\}.$$

Dann gilt

$$\int_K f(x, y, z)\ d(x, y, z)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R f\big(r \sin(s) \cos(t), r \sin(s) \sin(t), r \cos(s)\big) \cdot r^2 \sin(s)\ dr\ ds\ dt.$$

Hier können die Grenzen beliebig vertauscht werden.

Beweis (Idee) Hier wandeln wir die Integration über eine Kugel K in eine Integration über ein Quader Q um, wobei

$$Q = \{(r, s, t) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq s \leq \pi,\ 0 \leq t \leq 2\pi\},$$

d.h. wir parametrisieren die Kugel durch die Abbildung

$$\psi : Q \to K, \quad \psi(r, s, t) = \begin{pmatrix} r \sin(s) \cos(t) \\ r \sin(s) \sin(t) \\ r \cos(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dann wenden wir den *Transformationssatz* an. Er benutzt die Substitution:

$$d(x, y, z) = |\det \mathsf{Jac}(\psi)(r, s, t)|\ d(r, s, t) = r^2 \sin(s)\ d(r, s, t)$$

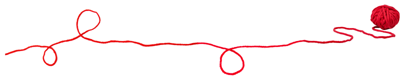
Nach Einsetzen der Substitution erhält man schließlich das gewünschte Integral. $\square$

10 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Vorbereitung

- Studiport LE7 (Trigonometrie)
- Studiport LE8 (Höhere Funktionen)
- Studiport LE9 (Differentialrechnung)
- Studiport LE10 (Integralrechnung)

Roter Faden



- Eine DGL haben wir bereits bei der Suche nach Stammfunktionen kennengelernt. Vorgegeben war eine Funktion f, für die wir eine differenzierbare Funktion F gesucht haben, die
$$F' = f$$
erfüllt. Wir haben also die DGL
$$y' = f$$
gelöst, wobei wir y gesucht haben, z.B.
$$y' = \cos(x)$$
wird durch $y(x) = \sin(x) + c$ gelöst. Das gelang mit Hilfe der Integration.

- Allgemeiner: Gegeben sind stetige Funktionen a, f. Gesucht ist eine differenzierbare Funktion y, die eine Gleichung wie folgt erfüllt:
$$y' = a \cdot y + f,$$
Wir lernen eine Formel kennen, um solche Gleichungen zu lösen.

- Solche DGLen tauchen in der Natur häufig auf. Die berühmtesten für $a = 1$ und $f = 0$ ist
$$y' = y.$$
Sie wird durch die Exponentialfunktion gelöst, $y(x) = ae^x$ (Wachstum & Regression).

- Ebenso tauchen Differentialgleichungen von der Form
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f,$$
wobei eine n-mal differenzierbare Funktion y gesucht wird und eine stetige Funktion f und Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ gesucht sind. Wir werden ein Rezept kennenlernen, um sie zu lösen.

- Auch solche DGLen tauchen in der Natur häufig auf, z.B.
$$y'' + y = 0 \quad \text{bzw.} \quad y'' = -y.$$
Sie wird durch $y(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$ gelöst (Wellen).

- Um alle Lösungen zu erhalten, müssen wir allerdings zuerst komplexe Zahlen studieren.

Lernziele

Wissen

- Sie kennen die komplexen Zahlen und verstehen ihre Darstellung in kartesischen als auch Polarkoordinaten.
- Sie wissen, dass jede komplexe Zahl $\neq 0$ genau k k-te Wurzeln hat und kennen die Konsequenzen für quadratische Gleichungen (Stichwort: pq-Formel).
- Sie kennen die komplexe Exponentialfunktion und verstehen ihren Zusammenhang zu trigonometrischen Funktionen.
- Sie verstehen die Lösungstheorie für DGL 1.Ordnung mit Anfangswertproblem.
- Sie verstehen die Lösungstheorie für lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten (homogenes/inhomogenes Problem, Anfangswertproblem, charakteristisches Polynom, Lösungsräume).

Können

- Sie beherrschen das Rechnen mit komplexen Zahlen, insbesondere die Division und die Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten.
- Sie können k-te komplexe Wurzeln ermitteln und komplexe Gleichungen auflösen.
- Sie können lineare DGL 1.Ordnung lösen.
- Sie können lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen (homogene Systeme und Anfangswertprobleme).
- Insbesondere können Sie das charakteristische Polynom komplex faktorisieren.

10.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Beispiel 10.1.1 Eine DGL haben wir bereits bei der Suche nach Stammfunktionen kennengelernt. Vorgegeben war eine Funktion f, für die wir eine differenzierbare Funktion F gesucht haben, die

$$F' = f$$

erfüllt. Wir haben also die DGL

$$y' = f$$

gelöst, wobei wir y gesucht haben, z.B.

$$y' = \cos(t)$$

wird durch $y(t) = \sin(t) + c$ gelöst. Das gelang mit Hilfe der Integration.

Definition 10.1.2 Gegeben seien stetige Funktionen $a, f : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Gesucht ist eine differenzierbare Funktion y, die eine Gleichung wie folgt erfüllt:

$$y' = a \cdot y + f.$$

Eine solche Gleichung nennt man (lineare) **Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung**.

Fordert man zusätzlich noch für feste $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$, dass y die Bedingung $y(t_0) = y_0$ erfüllt, so spricht man bei

$$y' = a \cdot y + f, \qquad y(t_0) = y_0$$

vom **Anfangswertproblem (AWP)** zur zugehörigen DGL 1. Ordnung.

Beispiel 10.1.3

(a) Sei f stetig und $a = 0$. Dann ist die DGL 1. Ordnung von der Form

$$y' = 0 \cdot y + f = f \quad \text{also} \quad y' = f.$$

Hier suchen wir also eine Stammfunktion von f.

(b) Sei $a = 1$ und $f = 0$. Die DGL 1. Ordnung ist

$$y' = 1 \cdot y + 0 = y \quad \text{also} \quad y' = y.$$

Sie wird durch die Exponentialfunktion gelöst:

$$y(t) = Ce^t,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Fordert man noch $y(0) = 1$, so ist

$$1 = y(0) = Ce^0 = C \cdot 1 = C,$$

also $y(t) = e^t$ die Lösung des AWP zur zugehörigen DGL 1. Ordnung.

(c) Ist $f = 0$ und a stetig, so ist die DGL von der Form

$$y' = ay \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = a,$$

d.h. auf beiden Seiten kann nun integriert werden, wobei links die logarithmische Integration angewendet werden kann. Sei A eine Stammfunktion von a. Dann ist

$$\frac{y'}{y} = a \quad \Leftrightarrow \quad \ln(y) = A \quad \Leftrightarrow \quad y = e^A,$$

Ist z.B. $y(t_0) = y_0$ für das AWP gefordert, so muss eine Stammfunktion A so gewählt werden, dass $A(t_0) = \ln(y_0)$ ist.

Satz 10.1.4 (Lösung der DGL 1. Ordnung mit AWP) Sei das AWP einer DGL 1. Ordnung gegeben:

$$y' = a \cdot y + f, \qquad y(t_0) = y_0$$

Seien A eine Stammfunktion von a mit $A(t_0) = 0$, also $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)\, ds$. Dann ist

$$y(t) = e^{A(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s) e^{-A(s)}\, ds \right)$$

die **eindeutige** Lösung des obigen AWP.

Beweis Dass y eine Lösung ist, folgt aus dem vorherigen Satz und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Dass $y(t_0) = y_0$ ist, rechnet sich leicht nach durch Einsetzen von t_0 in y. Angenommen, u ist eine weitere Lösung desselben AWP. Dann gelten

$$(y - u)' = y' - u' = ay + f \; - \; au - f = a(y - u) \quad \text{und} \quad y(t_0) - u(t_0) = 0.$$

Wir substituieren $z = y - u$ und bei dem AWP

$$z' = az, \qquad z(t_0) = 0.$$

Sei A eine Stammfunktion von a mit $A(t_0) = 0$. Dann ist mit logarithmischer Integration

$$z(t) = ce^A$$

die allgemeine Lösung der DGL, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Setzen wir nun t_0 ein, liefert das

$$0 \overset{!}{=} z(t_0) = ce^{A(t_0)} = ce^0 = c.$$

Also muss $c = 0$, und damit $z = 0$ sein. Da aber $z = y - u = 0$ ist, ist $y = u$. □

Beispiel 10.1.5 Sei das AWP mit DGL wie folgt gegeben:

$$y' = -\cos(t) \cdot y + \cos(t), \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 1,$$

wobei $a(t) = -\cos(t)$ und $f(t) = \cos(t)$.

(a) Lösen $y(t) = \sin(t)$ oder $y(t) = 1$ das AWP? (Beide erfüllen $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.)
Setzen wir $y(t) = \sin(t)$ in die DGL ein, so erhalten wir nur

$$(\sin(t))' = -\cos(t) \cdot \sin(t) + \cos(t),$$

$$\text{also} \quad \cos(t) = -\cos(t) \cdot \sin(t) + \cos(t).$$

Auf beiden Seiten lässt sich $\cos(t)$ kürzen, so dass nur

$$0 = \cos(t)\sin(t)$$

übrig bleibt. Das ist für $t = \frac{\pi}{4}$ nicht erfüllt. Daher kann $y(t) = \sin(t)$ keine Lösung sein.

Setzen wir $y(t) = 1$ in die DGL ein, so erhalten wir

$$(1)' = -\cos(t) \cdot 1 + \cos(t)$$

$$\text{also} \quad 0 = -\cos(t) + \cos(t) = 0.$$

Daher löst $y(t) = 1$ die DGL. Da die Lösung eindeutig ist, sind wir fertig.

(b) Wie lautet die Lösung der obigen DGL mit neuem AWP $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$?
Wie wählen $A(t) = -\sin(t) + 1$ als Stammfunktion von a, denn A erfüllt

$$A(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Die Lösung des AWP lautet nun

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-\sin(t)+1}\left(-4 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \cos(s)e^{\sin(s)-1}\, ds\right) \\
&= e^{-\sin(t)+1}\left(-4 + e^{-1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \cos(s)e^{\sin(s)}\, ds\right) \\
&= e^{-\sin(t)+1}\left(-4 + e^{-1}\left[e^{\sin(s)}\right]_{s=\frac{\pi}{2}}^{t}\right) \\
&= e^{-\sin(t)+1}\left(-4 + e^{-1}\left[e^{\sin(t)} - e^{\sin(\frac{\pi}{2})}\right]\right) \\
&= e^{-\sin(t)+1}\left(-4 + e^{-1}\left[e^{\sin(t)} - e^{1}\right]\right) \\
&= e^{-\sin(t)+1}\left(-4 + e^{\sin(t)-1} - 1\right) = e^{-\sin(t)+1}\left(-5 + e^{\sin(t)-1}\right) \\
&= -5e^{-\sin(t)+1} + e^{-\sin(t)+1} \cdot e^{\sin(t)-1} \\
&= -5e^{-\sin(t)+1} + 1
\end{aligned}$$

Summa summarum ist die Lösung gleich:

$$y(t) = 1 - 5e^{1-\sin(t)}$$

Beispiel 10.1.6 (Visualisierung von DGL 1. Ordnung) Wie kann man eine DGL

$$y' = a \cdot y + f$$

visualisieren? Bekanntlich drückt $y'(t)$ die Steigung von y an der Stelle t aus, aber wir kennen $y(t)$ noch nicht. Falls y eine Lösung der DGL, kennen wir aber teilweise die Vorschrift, wie die Steigung y' von y, a und f abhängt, nämlich an über jeder Stelle t gilt:

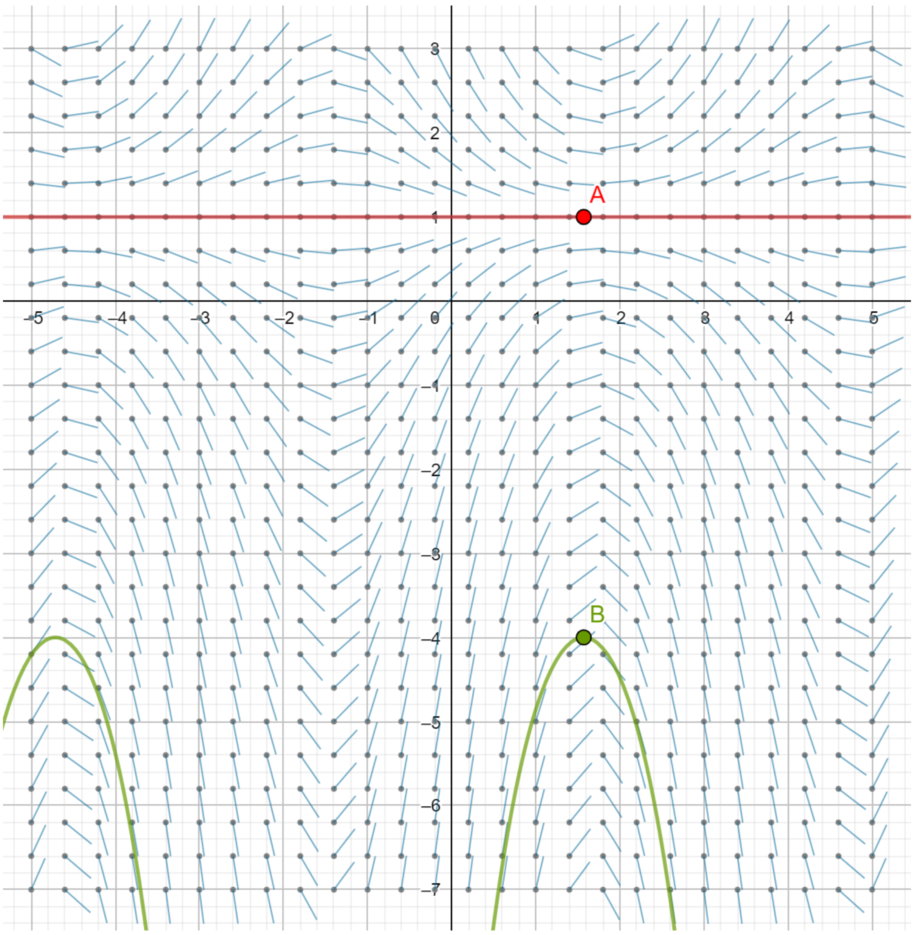
$$y'(t) = a(t) \cdot y(t) + f(t).$$

Da wir y noch nicht kennen, betrachten wir in einer (t, y)-Ebene einfach **alle** möglichen Kombinationen $\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}$ und berechnen damit

$$y'(t) = a(t) \cdot y + f(t),$$

Wir tragen an jeden Punkt $\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}$ die Steigung $m = y'(t)$ ein (z.B. als Teilstück einer Geraden) und erhalten so ein *„Steigungsfeld"*. Die Lösung einer DGL ist dann eine Kurve, die sich entlang dieses Steigungsfeldes bewegt, und bei einem AWP $y(t_0) = y_0$ durch den vorgegebenen Punkt $\begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ verläuft.

Falls $a(t) = -\cos(t)$, $f(t) = \cos(t)$, so erhalten wir als Steigungsfeld:



Speziell durch den Punkt $A = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft der Graph der Lösung des AWP (rot)

$$y' = -\cos(t) \cdot y + \cos(t), \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 1,$$

und durch $B = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ -4 \end{pmatrix}$ der Graph der Lösung des AWP (grün)

$$y' = -\cos(t) \cdot y + \cos(t), \qquad y(\frac{\pi}{2}) = -4.$$

10.2 Komplexe Zahlen

Beispiel 10.2.1 Hans-Peter ist langweilig und möchte die Gleichung

$$x^2 = -1$$

lösen. Aber egal, welche Zahl er für x einsetzt, es kommt nix Gescheites heraus. Er überlegt und stellt fest, dass ja $x^2 \geq 0$ ist. Es gibt also keine Lösung. Frustriert schmeißt Hans-Peter hin und sagt sich laut: „Egal! Wellen brauch' ich eh nicht."

Definition 10.2.2 Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ entstehen mit Hilfe der **imaginären Einheit** i, die ein künstliches Objekt ist und wie eine Konstante behandelt wird, deren Wert man nicht kennt, sondern nur die Eigenschaft:

$$i \cdot i = i^2 = -1 \qquad \text{bzw.} \qquad \sqrt{-1} = i$$

Dann ist die Menge der komplexen Zahlen wie folgt definiert:

$$\mathbb{C} = \{z = x + i \cdot y : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Satz 10.2.3 (Eigenschaften komplexer Zahlen)

(a) In $\mathbb{C}$ gelten das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz, da wir i wie eine Konstante behandeln.

(b) Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ lässt sich als komplexe Zahl auffassen, denn

$$x = x + i \cdot 0, \qquad \text{d.h.} \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

(c) Im Gegensatz zu reellen Zahlen lassen sich komplexe Zahlen **nicht** anordnen, denn wäre z.B. $i > 0$ oder $i < 0$, so wäre $-1 = i^2 > 0$.

(d) Der Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ ist auch:

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \emptyset$$

$$\text{aber} \quad \{z \in \mathbb{C} : z^2 = -1\} = \{-i, i\}.$$

Wir erweitern also die reellen Zahlen derartig, dass wir die Gleichung $x^2 = -1$ lösen können.

(e) **Fundamentalsatz der Algebra:** Jede polynomielle Gleichung

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ist (zumindest theoretisch) lösbar. Genauer weiß man, dass diese Gleichung n Lösungen bzw. n Nullstellen (mit Vielfachheiten) hat, aber man weiß im Allgemeinen nicht, wie sie genau aussehen.

Beispiel 10.2.4

(a) Wir lösen wie gewohnt die Klammern auf:

$$\begin{aligned}(3+4i)(1-2i) &= 3\cdot 1+3(-2i)+4i\cdot 1+(4i)(-2i)\\ &= 3-6i+4i-8i^2\\ &= 3-2i-8(-1)\\ &= 3-2i+8=11-2i\end{aligned}$$

(b) $\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$

(c) Um $\sqrt{i}$, also die Lösung von $z^2=i$, auszurechnen, löst man

$$(x+iy)^2=i \quad\Leftrightarrow\quad x^2-y^2=0 \quad\wedge\quad 2xy=1$$

nach x und y auf. Man erhält die beiden Lösungen:

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \text{und} \quad z_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

Aber was ist nun $\sqrt{i}$? Die Antwort darauf findet man in Büchern zur *Komplexen Analysis*.

Definition 10.2.5 Sei eine komplexe Zahl von der Form $z=x+iy$ gegeben. Die Komponente x heißt der **Realteil** von z und y der **Imaginärteil** von z. Wir schreiben:

$$x=\mathrm{Re}(z) \quad \text{und} \quad y=\mathrm{Im}(z)$$

Speziell:

$$\mathrm{Im}(x)=\mathrm{Im}(x+i\cdot 0)=0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}(i\cdot y)=\mathrm{Re}(0+i\cdot y)=0$$

Beispiel 10.2.6

(a) $\mathrm{Re}(3-4i)=3$ und $\mathrm{Im}(3-4i)=-4$

(b) **Achtung!** $\mathrm{Im}(-4i^2)=0$, denn:

$$\mathrm{Im}(-4i^2)=\mathrm{Im}(-4(-1))=\mathrm{Im}(4)=0$$

Satz 10.2.7 (Zusammenhang von komplexen Zahlen & Vektoren) Jede komplexe Zahl $z=x+iy$ lässt sich auffassen als Vektor $z=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ und umgekehrt. Speziell sind:

$$1=1+i\cdot 0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad i=0+i\cdot 1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathrm{Re}(z)=x=1+i\cdot 0=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad i\cdot\mathrm{Im}(z)=iy=0+i\cdot y=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}.$$

Während die Addition zweier komplexer Zahlen $z=x+iy$ und $w=u+iv$ der gewöhnlichen Addition zweier Vektoren entspricht, also

$$z+w=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+u\\y+v\end{pmatrix},$$

entspricht die Multiplikation zweier komplexer Zahlen der folgenden *komplexen* Multiplikation

$$z\cdot w=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xu-yv\\xv+yu\end{pmatrix}.$$

Für diese Addition und Multiplikation gelten das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz. Wir identifizieren daher $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ samt obiger Multiplikation und Addition, kurzum:

$$\mathbb{C} = \left(\mathbb{R}^2, +, \cdot_{\mathbb{C}}\right).$$

Die Multiplikation von i mit $z = x + iy$ entspricht dann einer Drehung von z um 90° gegen den Uhrzeigersinn:

$$i \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i \cdot z = i \cdot (x + iy) = ix + i^2 y = ix - y = -y + ix = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Beweis Die Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ ist oben im Satz beschrieben. Die Eigenschaft des Produkts rechnet man leicht nach:

$$z \cdot w = (x + iy) \cdot (u + iv) = xu - yv + i(xv + yu)$$

Auch die Gesetze sind leicht nachzurechnen, da i wie eine Konstante in $\mathbb{R}$ behandelt wird und $\mathbb{R}$ den Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetzen unterliegt. □

Definition 10.2.8 Die **komplex Konjugierte $\overline{z}$ von** z entsteht dadurch, dass man $z = x+iy$ entlang der x-Achse spiegelt, d.h.

$$\overline{z} = x + i \cdot (-y) = x - iy.$$

Zum Beispiel sind

$$\overline{3 + 4i} = 3 - 4i \quad \text{und} \quad \overline{3 - 4i} = 3 + 4i.$$

Satz 10.2.9 (Eigenschaften der komplex Konjugierten)

(a) Die komplexe Konjugation ist additiv:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

(b) Die komplexe Konjugation ist multiplikativ:

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

(c) Die komplexe Konjugation ist involutiv:

$$\overline{\overline{z}} = z$$

(d) Zusammenhang zu Real- und Imaginärteil:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

Beweis Einerseits:

$$\overline{z + w} = \overline{x + iy \;+\; u + iv} = \overline{x + u + i(y + v)} = x + u - i(y + v)$$

Andererseits:

$$\overline{z} + \overline{w} = \overline{x + iy} + \overline{u + iv} = x - iy \;+\; u - iv = x + u - i(y + v)$$

Daher sind beide Zahlen gleich. Analog zeigt man, dass die Konjugation multiplikativ ist. Die Eigenschaft, involutiv zu sein, ist klar. □

Satz 10.2.10 (Betrag einer komplexen Zahl) Da $z = x + iy$ einem Vektor entspricht, setzen wir den **Betrag von** z als Länge des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, also:

$$|z| = \| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Es gelten dann:

(a) $|z| = \sqrt{\mathsf{Re}(z)^2 + \mathsf{Im}(z)^2}$

(b) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(c) $|z^2| = |z|^2$

(d) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

(e) $|\overline{z}| = |z|$

(f) $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

(g) $|z + w|^2 \ = \ |z|^2 + 2\mathsf{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$

Beweis Diese Eigenschaften folgen leicht aus den für die Norm der Vektoren oder man rechnet sie leicht nach. □

Definition 10.2.11 (Komplexe Brüche) Seien zwei komplexe Zahlen z und w gegeben. Dann setzen wir:

$$\frac{1}{w} := \frac{\overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{\overline{w}}{|w|^2}$$

$$\text{und} \quad \frac{z}{w} := z \cdot \frac{1}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$

Es gilt:

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

Beispiel 10.2.12 Wir berechnen den komplexen Bruch:

$$\frac{2 - 5i}{3 + 4i} = \frac{(2 - 5i) \cdot (3 - 4i)}{(3 + 4i) \cdot (3 - 4i)}$$

$$= \frac{(2 - 5i) \cdot (3 - 4i)}{|3 + 4i|^2} = \frac{6 - 8i - 15i + 20i^2}{3^2 + 4^2}$$

$$= \frac{-14 - 23i}{25} = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i$$

Komplexe Zahlen und Polarkoordinaten

Satz 10.2.13 (Zusammenhang komplexe Zahlen & Polarkoordinaten) Jede komplexe Zahl $z = x + iy$ lässt sich auffassen als Vektor in Polarkoordinaten:

$$z = r\vec{e}(t) = r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = r\big(\cos(t) + i \cdot \sin(t)\big)$$

Wir setzen daher

$$e^{it} := \vec{e}(t) = \cos(t) + i \sin(t).$$

Dadurch wird
$$z = re^{it}.$$
Diese Form nennt man **Euler-Darstellung** der komplexen Zahl z.

In der *Euler-Identität* sind alle wichtigen Zahlen und Operationen der Mathematik in einer einzigen Formel vereinigt:
$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Beispiel 10.2.14 Speziell gelten:
$$1 = 1 + i \cdot 0 = 1 \cdot \cos(0) + i \cdot \sin(0) = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$$
$$i = 0 + i \cdot 1 = 1 \cdot \cos\big(\frac{\pi}{2}\big) + i \cdot \sin\big(\frac{\pi}{2}\big) = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$$
$$-1 = -1 + i \cdot 0 = 1 \cdot \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$$
$$-i = 0 + i \cdot (-1) = 1 \cdot \cos\big(\frac{3\pi}{2}\big) + i \cdot \sin\big(\frac{3\pi}{2}\big) = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}},$$
$$1 = 1 + i \cdot 0 = 1 \cdot \cos(2\pi) + i \cdot \sin(2\pi) = 1 \cdot e^{i \cdot 2\pi}$$

Satz 10.2.15 (Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten)

(a) Für Konjugierte, Real- und Imaginärteil von $z = re^{it} = r\cos(t) + i\sin(t)$ gelten:
$$\overline{re^{it}} = re^{-it}, \quad \mathsf{Re}(re^{it}) = r\cos(t) \quad \text{und} \quad \mathsf{Im}(re^{it}) = r\sin(t)$$
Der Betrag von z ist gleich:
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2\cos^2(t) + r^2\sin^2(t)} = r$$
Speziell: $|e^{it}| = 1$ für jeden Winkel $t \in \mathbb{R}$.

(b) Zwei komplexe Zahlen $z = re^{it}$ und $w = se^{iu}$ in Polarkoordinaten lassen sich sehr leicht multiplizieren und dividieren,
$$z \cdot w = re^{it} \cdot se^{iu} = rse^{i(t+u)},$$
$$\frac{z}{w} = \frac{re^{it}}{se^{iu}} = \frac{r}{s}e^{i(t-u)},$$
aber nicht so leicht addieren.

(c) **Periodizität:** Es ist $e^{it+2\pi ik} = e^{it}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl $w = re^{it}$, also die Lösungen der Gleichung
$$z^n = w$$
lassen sich nun leicht berechnen, denn jede Zahl
$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{t}{n} + 2\pi i\frac{k}{n}} \quad \text{für} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$
löst die obige Gleichung. Genauer:
$$\big(z_k\big)^n = \big(\sqrt[n]{r} \cdot e^{it+2\pi i\frac{k}{n}}\big)^n = \sqrt[n]{r}^n \cdot e^{n(i\frac{t}{n} + 2\pi i\frac{k}{n})} = re^{it+2\pi ik} = re^{it} = w$$

Beispiel 10.2.16 Wir lösen $z^3 = 1$. Die Lösungen sind

$$z_0 = e^{2\pi i \cdot \frac{0}{3}} = e^0 = 1$$

$$z_1 = e^{2\pi i \cdot \frac{1}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\big(\frac{2\pi}{3}\big) + i \sin\big(\frac{2\pi}{3}\big) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{2\pi i \cdot \frac{2}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Diese Punkte bilden die Eckpunkte eines gleichwinkligen Dreiecks, dessen Umkreis der Einheitskreis ist.

Beispiel 10.2.17 (Aus der Elektrotechnik) [13] Seien zwei Spannungssignale gegeben:

$$U_1(t) = 80 \cdot \sin(\omega t)$$

$$U_2(t) = 100 \cdot \sin\big(\omega t + \frac{\pi}{4}\big)$$

Diese werden überlagert, und es entsteht ein resultierendes Spannungssignal

$$U_{\textsf{res}}(t) = U_1(t) + U_2(t) = a \cdot \sin(\omega t + b)$$

Was sind a und b ?

Hierzu nutzen wir, dass $\textsf{Im}(re^{it}) = r\sin(t)$ ist und betrachten die komplexen Spannungssignale

$$\widehat{U}_1(t) = 80 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\text{und} \quad \widehat{U}_2(t) = 100 \cdot e^{i\omega t + i\frac{\pi}{4}} = 100 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\omega t}.$$

Für das resultierende komplexe Spannungssignal gilt nun mit $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, dass:

$$\widehat{U}_{\textsf{res}}(t) = \widehat{U}_1(t) + \widehat{U}_2(t) = 80 \cdot e^{i\omega t} + 100 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\omega t}$$

$$= \big(80 + 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\big)e^{i\omega t} \approx \big(151 + 70,7i\big) \cdot e^{i\omega t}.$$

Nun ist aber in Polarkoordinaten

$$151 + 70,7i \approx 166,73 \cdot e^{0,438i},$$

sodass insgesamt:

$$\widehat{U}_{\textsf{res}}(t) = 166,73 \cdot e^{i\omega t + 0,438i}$$

Daraus folgt schließlich:

$$U_{\textsf{res}}(t) = \textsf{Im}\left(\widehat{U}_{\textsf{res}}(t)\right) = \textsf{Im}\big(166,73 \cdot e^{i\omega t + 0,438i}\big) = 166,74 \cdot \sin(\omega t + 0,438)$$

[13] https://www.youtube.com/watch?v=in9WkupD0uc

10.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Beispiel 10.3.1 Sei $c > 0$ eine Konstante. Die DGL der Form

$$y'' = -cy$$

resultiert aus Beobachtungen von Wellen oder Schwingungen. Wie löst man sie? Zu erwarten sind Lösungen, in denen der Sinus und Kosinus als Repräsentanten der Schwingungen auftauchen. Aber sind das alle Lösungen?

Definition 10.3.2 Seien $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ komplexe Konstanten und f eine stetige Funktion.

(a) Dann nennt man

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f$$

eine **(lineare) DGL n-ter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten und Störterm f)**. Hierbei sind $y^{(k)}$ die k-ten Ableitungen von y, und die Ordnung n steht dafür, dass die Ableitungen bis zur Ordnung n involviert sind.

(b) Ist $f = 0$, so nennt man die DGL **homogen**, und ihre Lösung **homogene Lösung**. Die Lösungen der homogenen DGL fassen wir in der Menge $\mathbb{L}_h$ zusammen.

(c) Ist $f \neq 0$, so nennt man die DGL **inhomogen**, und ihre Lösung **inhomogene Lösung**. Die Lösungen der inhomogenen DGL fassen wir in der Menge $\mathbb{L}$ zusammen.

Beispiel 10.3.3

(a) **Radioaktiver Zerfall einer Substanz:** Zum Zeitpunkt t sei $y(t)$ die aktuell vorhandene Menge der Substanz. Mit der Zerfallskonstante $\lambda < 0$ unterliegt dann der Zerfall der Substanz der homogenen DGL 1. Ordnung:

$$y' - \lambda \cdot y \;=\; 0$$

Hier sind also $n = 1$, $f = 0$ und $a_0 = -\lambda$. Die Lösungen lauten:

$$\mathbb{L}_h = \mathbb{L} = \{Ae^{\lambda t} : A \in \mathbb{C}\}$$

(b) **Abkühlung eines Körpers:** Die Temperatur $y(t)$ eines Körpers sei größer als die (konstante) Umgebungstemperatur T. Sie verändert sich in Abhängigkeit von der Proportionalitätskonstanten $\lambda < 0$ gemäß der linearen DGL 1.Ordnung:

$$\text{bzw.} \quad y' - \lambda y \;=\; -\lambda \cdot T.$$

Hier sind $n = 1$, $a_0 = -\lambda$ und $f = -\lambda \cdot T$. Diese DGL ist für $T = 0$ homogen und ansonsten inhomogen. Die Lösungen lauten:

$$\mathbb{L}_h = \{Ae^{\lambda t} : A \in \mathbb{C}\} \quad \text{und} \quad \mathbb{L} = \{T + Ae^{\lambda t} : A \in \mathbb{C}\}$$

Satz 10.3.4 (Zusammenhang von homogener und inhomogener Lösung) Sei eine inhomogene DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Lösungsraum $\mathbb{L}$ gegeben:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f$$

Wir betrachten die **zugehörige homogene DGL** mit Lösungsraum $\mathbb{L}_h$,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Ist $y_p \in \mathbb{L}$ eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL, eine sog. **partikuläre Lösung**, dann ist lässt sich bereits der gesamte inhomogene Lösungsraum $\mathbb{L}$ durch den um y_p verschobenen homogenen Lösungsraum beschreiben. Genauer:

$$\mathbb{L} = y_p + \mathbb{L}_h$$

In der Praxis bedeutet das, dass man nur die homogene DGL berechnen muss und eine partikuläre inhomogene Lösung raten braucht, um den gesamten inhomogenen Lösungsraum zu erhalten.

Beweis Diese wichtige Erkenntnis ist alles andere als trivial zu beweisen. Wir verweisen auf die Bücher zur Analysis oder Gewöhnlichen Differentialgleichungen. □

Beispiel 10.3.5 Betrachten wir den Abkühlungsprozess in Beispiel 10.3.3. Hier ist die konstante Funktion $y_p(t) = T$ eine partikuläre Lösung, d.h.

$$y_p'(t) - \lambda \cdot y_p(t) = (T)' - \lambda \cdot T = 0 - \lambda T = -\lambda T.$$

Daher ist $\mathbb{L} = T + \mathbb{L}_h$. Genauer:

$$\mathbb{L} = \{T + Ae^{\lambda t} : A \in \mathbb{C}\} = T + \{Ae^{\lambda t} : A \in \mathbb{C}\} = T + \mathbb{L}_h$$

Satz 10.3.6 (Eigenschaften der Lösungsräume)

(a) Seien $y_h, u_h \in \mathbb{L}_h$ zwei homogene Lösungen. Dann ist auch für je zwei komplexe Zahlen $A, B \in \mathbb{C}$ die Linearkombination

$$Ay_h + Bu_h$$

ebenfalls eine homogene Lösung, d.h. $Ay_h + Bu_h \in \mathbb{L}_h$.

(b) Seien $y \in \mathbb{L}_h$ eine homogene Lösung und $y_p \in \mathbb{L}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Dann ist auch die Summe

$$y_h + y_p$$

eine partikuläre Lösung, d.h. $y_h + y_p \in \mathbb{L}$.

(c) **Achtung!** Sind y_p, u_p zwei partikuläre Lösungen der inhomogenen DGL, so ist $y_p + u_p$ im Allgemeinen **keine** partikuläre Lösung.

Beweis Einsetzen in die DGL liefert sofort das Ergebnis, da die Ableitungen linear sind. □

Definition 10.3.7 Sei eine homogene DGL n-ter Ordnung gegeben,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Das komplexe Polynom

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$$

nennt man das **charakteristische Polynom** der DGL.

Satz 10.3.8 (Lösungen der homogenen DGL) Sei eine homogene DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0.$$

gegeben mit zugehörigem charakteristischem Polynom

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0.$$

Dann gelten:

(a) Ist λ eine (komplexe) Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so ist für jede beliebige komplexe Konstante A die Funktion

$$y(t) = Ae^{\lambda t}$$

eine Lösung der homogenen DGL, d.h. $y \in \mathbb{L}_h$.

(b) Ist λ eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms mit Vielfachheit r, so sind für alle komplexen Zahlen $A_0, \ldots, A_{r-1}$ die Funktionen

$$y(t) = A_0 e^{\lambda t} + \ A_1 t e^{\lambda t} + \ A_2 t^2 e^{\lambda t} + \ldots + A_{r-1} t^{r-1} e^{\lambda t} \quad \in \mathbb{L}_h$$

Lösungen der homogenen DGL, genannt **Basislösungen**, d.h. $y \in \mathbb{L}_h$.

(c) Man erhält **alle** Lösungen der homogenen DGL, indem man **alle** Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des charakteristischen Polynoms $P(X)$ samt ihrer einzelnen Vielfachheiten r_j bestimmt und die Lösungen pro Nullstelle wie oben zusammen linear kombiniert, d.h.

$$\begin{aligned} y_h(t) \quad = \quad & A_0 e^{\lambda_1 t} + \ A_1 t e^{\lambda_1 t} + \ A_2 t^2 e^{\lambda_1 t} + \ldots + A_{r_1 - 1} t^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \\ & + B_0 e^{\lambda_2 t} + \ B_1 t e^{\lambda_2 t} + \ B_2 t^2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + B_{r_2 - 1} t^{r_2 - 1} e^{\lambda_2 t} \\ & \vdots \\ & + D_0 e^{\lambda_k t} + \ D_1 t e^{\lambda_k t} + \ D_2 t^2 e^{\lambda_k t} + \ldots + D_{r_k - 1} t^{r_k - 1} e^{\lambda_k t} \end{aligned}$$

Beweis Wir zeigen nur Teil (a): Die ersten n Ableitungen von y liefern:

$$y'(t) = A\lambda e^{\lambda t}, \quad y''(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}, \ldots, y^{(n)}(t) = A\lambda^n e^{\lambda t}$$

Setzen wir das in die DGL ein und nutzen die Linearität der Ableitungen aus, so sehen wir den wundersamen Zusammenhang

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = Ae^{\lambda t} \cdot P(\lambda).$$

Ist nun λ eine Nullstelle von P, so verschwindet die rechte Seite und die homogene DGL ist gelöst.

Für die Aussage (b), in der Vielfachheiten involviert sind, setzt man $t^k e^{\lambda t}$ in die DGL ein und vergleicht das Ergebnis mit den ersten $(k-1)$-Ableitungen von $P(X)$, die dann wegen der Vielfachheiten der Nullstelle in λ verschwinden müssen. Das führen wir hier aber nicht vor.

Dass dies alle Lösungen sind, also Teil (c), ist alles andere als trivial zu beweisen. Wir verweisen auf die Bücher zur Analysis, genauer zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen. □

Beispiel 10.3.9 Sei die DGL

$$y^{(6)} + 9y^{(5)} + 13y^{(4)} - 71y''' - 180y'' - 80y' - 192y = 0$$

gegeben mit zugehörigem charakteristischem Polynom

$$\begin{aligned} P(X) &= X^6 + 9X^5 + 13X^4 - 71X^3 - 180X^2 - 80X - 192 \\ &= (X-i)(X+i)(X-3)(X+4)^3. \end{aligned}$$

Dann ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL gegeben durch die Linearkombination der Basislösungen

$$y_h(t) = Ae^{it} + Be^{-it} + Ce^{3t} + De^{-4t} + Ete^{-4t} + Ft^2 e^{-4t},$$

wobei $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{C}$. Andere Schreibweisen sind:

$$\mathbb{L}_h = \{Ae^{it} + Be^{-it} + Ce^{3t} + De^{-4t} + Ete^{-4t} + Ft^2 e^{-4t} : A, B, C, D, E, F \in \mathbb{C}\}$$

$$\text{oder} \quad \mathbb{L}_h = \mathbb{C}e^{it} + \mathbb{C}e^{-it} + \mathbb{C}e^{3t} + \mathbb{C}e^{-4t} + \mathbb{C}te^{-4t} + \mathbb{C}t^2 e^{-4t}.$$

Satz 10.3.10 (Partikuläre Lösungen der inhomogenen DGL) Sei eine inhomogene DGL n-ter Ordnung gegeben,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f.$$

Wie wir gelernt haben, müssen wir für die Lösung den homogenen Lösungsraum $\mathbb{L}_h$ bestimmen und nur eine partikuläre Lösung y_p erraten. Je nach Störfunktion f, lohnen sich verschiedene Ansätze.

(a) Ist $f(t) = t^k$ ein Polynom vom Grad k, so wählt man den Ansatz

$$y_p(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_m t^m.$$

mit genügend großem m.

(b) Ist $f(t) = e^{ct}$, und ist c **keine** Nullstelle des charakteristischen Polynoms der DGL, so genügt der Ansatz

$$y_p(t) = Ae^{ct}.$$

(c) Ist $f(t) = e^{ct}$, und ist c ein Nullstelle des charakteristischen Polynoms der DGL mit Vielfachheit k, so wählt man den Ansatz

$$y_p(t) = At^k e^{ct}.$$

(d) Ist $f(t) = \cos(ct)$ oder $\sin(ct)$ und ic ist **keine** Nullstelle des charakteristischen Polynoms der DGL, so genügt der Ansatz

$$y_p(t) = A\sin(ct) + B\cos(ct).$$

Diese Ansätze werden in die DGL eingesetzt, um die fehlenden Koeffizienten A bzw. A, B zu berechnen. Im Grunde macht man hier nichts anderes, als folgendes Prinzip auszunutzen:

Ist f ein Polynom, und möchte diesen Störterm durch Ableitungen einer Funktion y erhalten, so geht das nur durch Polynome, da die Ableitung von Polynomen wieder Polynome sind.

Ist f eine Exponentialfunktion, und möchte diesen Störterm durch Ableitungen einer Funktion y erhalten, so geht das nur durch eine Exponentialfunktion, da die Ableitung einer Exponentialfunktion wieder eine Exponentialfunktion ist. Etc.

Beispiel 10.3.11 Sei die folgende DGL gegeben:

$$y'' - \pi^2 y = f,$$

wobei wir uns gleich verschiedene Störfunktionen f anschauen werden. Das charakteristische Polynom ist gleich

$$P(X) = X^2 - \pi^2 = (X - \pi)(X + \pi).$$

Die homogenen Lösungen lauten daher

$$y_h(t) = Ae^{\pi t} + Be^{-\pi t}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Sie haben mit der Störfunktion f nichts zu tun.

(a) Angenommen, die Störfunktion ist gleich $f(t) = e^{2t}$, d.h. die DGL lautet

$$y'' - \pi^2 y = e^{2t}$$

Die 2 im Exponenten von e^{2t} ist **keine** Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Daher können wir den Ansatz

$$y_p(t) = ae^{2t}$$

wählen und setzen y_p links in die DGL $y'' - \pi^2 y = e^{2t}$ ein:

$$y_p''(t) - \pi^2 y_p(t) = 4ae^{2t} - \pi^2 ae^{2t} = a(4-\pi^2)e^{2t}$$

Vergleicht man links mit rechts der DGL, endet man mit der Gleichung

$$a(4-\pi^2)e^{2t} = e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{4-\pi^2}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet daher:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{1}{4-\pi^2}e^{2t} + Ae^{\pi t} + Be^{-\pi t}, \quad A, B \in \mathbb{C}$$

bzw. lautet der Lösungsraum

$$\mathbb{L} = y_p + \mathbb{L}_h = \frac{1}{4-\pi^2}e^{2t} + \{Ae^{\pi t} + Be^{-\pi t} : A, B \in \mathbb{C}\}.$$

(b) Angenommen, die Störfunktion ist gleich te^{2t}.

Hier wählt man den Ansatz $y_p(t) = (at+b)e^{2t}$ und löst nach a und b auf. Es kommt heraus:

$$a = \frac{1}{4-\pi^2} \quad \text{und} \quad b = -\frac{4}{(4-\pi^2)^2}$$

(c) Angenommen, die Störfunktion ist gleich $e^{\pi t}$.

Da π bereits eine homogene Lösung ist, macht es keinen Sinn, den Ansatz

$$y_p(t) = ae^{\pi t}$$

zu wählen, da ohnehin nach Einsetzen in die DGL die Funktion verschwindet. Daher muss man als Ansatz wählen

$$y_p(t) = ate^{\pi t}$$

In jedem Fall muss der Exponent beim zusätzlichen t die Vielfachheit der Nullstelle annehmen oder überschreiten. Hier reicht $t = t^1$, da π die Vielfachheit 1 hat.

Reelle Lösungen und weitere Beispiele

Beispiel 10.3.12 Wir greifen die Schwingungsgleichung aus dem Eingangsbeispiel 10.3.1 auf,

$$y'' = -cy, \quad \text{mit } c > 0.$$

Wir stellen sie um und erhalten die homogene DGL

$$y'' + cy = 0.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$P(X) = X^2 + c = (X - i\sqrt{c})(X + i\sqrt{c}).$$

Daher sind die Lösungen gleich

$$y(t) = y_h(t) = Ae^{it\sqrt{c}} + Be^{-it\sqrt{c}}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Aber wenn wir von Schwingungen reden, brauchen wir reelle Funktionen wie Sinus oder Kosinus und keine komplexen Eulerfunktionen. Oder anders gefragt: warum sind auch $\sin(t\sqrt{c})$ oder $\cos(t\sqrt{c})$ Lösungen der DGL?

Satz 10.3.13 (Komplexe Exponentialfunktion) Für eine komplexe Zahl $w = u + iv$ setzen wir:

$$e^w = e^{u+iv} := e^u \cdot e^{iv}$$

Dann gelten die üblichen Gesetze für die Exponentialfunktion.

(a) $e^0 = 1$

(b) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$

(c) $|e^z| = e^x$, falls $z = x + iy$

(d) $\mathrm{Re}(e^w) = e^u \cos(v)$ und $\mathrm{Im}(e^w) = e^u \sin(v)$

Definition 10.3.14 Sei $y = y_p + y_h$ eine (komplexe) Lösung einer inhomogenen DGL höherer Ordnung. Dann nennt man

$$y_{\mathbb{R}}(t) = \mathrm{Re}(y(t))$$

die **reelle Lösung der DGL**. Statt komplexer Koeffizienten können hier nur noch reelle Koeffizienten verwendet werden. Speziell:

Sei $y(t) = At^k e^{\lambda t}$ eine komplexe Lösung der (homogenen) DGL höherer Ordnung, wobei A, und $\lambda = \alpha + i\beta$ **komplexe** Zahlen sind. Berechnen wir den Realteil von y, liefert uns das eine Funktion der Form

$$y_{\mathbb{R}}(t) = rt^k e^{\alpha t} \sin(\beta t) + st^k e^{\alpha t} \cos(\beta t),$$

wobei diesmal r, s, t **reelle** Zahlen sind und in der reellen Lösung kein imaginärer Anteil mit i mehr auftaucht.

Beispiel 10.3.15

(a) In dem Eingangs Beispiel 10.3.1 zur Schwingungsgleichung

$$y'' + cy = 0$$

erhielten wir die (komplexen) Lösungen $y(t) = Ae^{it\sqrt{c}} + Be^{-it\sqrt{c}}$ mit $A, B \in \mathbb{C}$. Daher sind die reellen Lösungen gleich

$$y_{\mathbb{R}}(t) = r\cos(t\sqrt{c}) + s\sin(t\sqrt{c}) + a\cos(-t\sqrt{c}) + b\sin(-t\sqrt{c}),\ \ r, s, a, b \in \mathbb{R}.$$

Da $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = \sin(x)$ und da r, s, a, b beliebig wählbare Konstanten sind, kann man die Lösung auch reduzieren auf

$$y_{\mathbb{R}}(t) = r\cos(t\sqrt{c}) + s\sin(t\sqrt{t}),\ \ r, s \in \mathbb{R}.$$

(b) Ist $y(t) = At^2 e^{(-2+3i)t}$ eine komplexe Lösung einer DGL. Dann ist die reelle Lösung gleich:

$$y_{\mathbb{R}}(t) = rt^2 e^{-2t} \cos(3t) + st^2 e^{-2t} \sin(3t),\ \ r, s \in \mathbb{R}$$

Beispiel 10.3.16 (Komplexe und reelle Lösungen) Sei die DGL

$$y'' - 2y' + 5y = 1 - t$$

gegeben. Was sind die komplexen und die reellen Lösungen?

Das charakteristische Polynom lautet

$$P(X) = X^2 - 2X + 5 = (X - 1)^2 + 4 = (X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i).$$

Die allgemeine Lösung für die homogene DGL lautet dann

$$y_h(t) = Ae^{(1+2i)t} + Be^{(1-2i)t}$$

mit $A, B \in \mathbb{C}$ beliebig.
Wir probieren den Ansatz $u_p(t) = c + dt$ für die partikuläre Lösung. Einsetzen liefert uns

$$1 - t = -2d + 5(c + dt) = -2d + 5c + 5dt \quad \Leftrightarrow \quad -2d + 5c - 1 + (5d + 1)t = 0$$

Wir vergleichen die Koeffizienten der Monome. Das ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= -2d + 5c - 1 \\ -1 &= 5d + 1 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet $c = \dfrac{3}{25}$ und $d = -\dfrac{1}{5}$.
Die allgemeine Lösung zur DGL lautet nun

$$y(t) = Ae^{(1+2i)t} + Be^{(1-2i)t} + \frac{3}{25} - \frac{t}{5}, \qquad A, B \in \mathbb{C}.$$

Da $e^{(1+2i)t} = e^t(\cos(2t) + i\sin(2t))$ ist, sind die reellen Lösungen der Form

$$\operatorname{Re}(y(t)) = y_{\mathbb{R}}(t) = re^t\cos(2t) + se^t\sin(2t) + \frac{3}{25} - \frac{t}{5},$$

wobei $r, s \in \mathbb{R}$ beliebig sind.

Beispiel 10.3.17 (Partikuläre Lösung bestimmen) Sei die DGL

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^{3t}$$

gegeben.

(a) Ist $y(t) = e^t$ eine homogene Lösung?

(b) Was sind die allgemeinen Lösungen?

(c) Was ist, wenn der Störterm $f(t) = e^t$ ist? Welcher Ansatz ist zu wählen?

Antworten:

(a) Ja, denn nach Einsetzen in die rechte Seite der DGL verschwindet sie.

(b) Das charakteristische Polynom ist

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2).$$

Das ergibt die homogene Lösung

$$u_h(t) = Ae^t + Bte^t + Ce^{2t},$$

da $X = 1$ doppelte Nullstelle ist.

Für die partikuläre Lösung wählen wir den Ansatz $y_p(t) = De^{3t}$, da die 3 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Wir setzen diese Funktion in die DGL und erhalten $D = \frac{1}{4}$. Die allgemeine Lösung lautet somit:

$$y(t) = Ae^t + Bte^t + Ce^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}$$

(c) Dann muss man den Ansatz $y_p(t) = Dt^2e^{3t}$ wählen, da $\lambda = 1$ eine doppelte Nullstelle ist.

Beispiel 10.3.18 (Trigonometrischer Störterm) Finden Sie alle komplexen und reellen Lösungen der nachfolgenden DGL:

$$y'' = -2y' - 5y + 2\sin(t)$$

Wie kann man ausnutzen, dass $\mathsf{Im}(e^{it}) = \sin(t)$ ist, um die partikuläre Lösung einfacher zu bestimmen?
Das charakteristische Polynom lautet

$$P(X) = X^2 + 2X + 5 = (X + 1 - 2i)(X + 1 + 2i).$$

Die allgemeine Lösung für die homogene DGL lautet dann

$$y_h(t) = Ae^{(-1-2i)t} + Be^{(-1+2i)t},$$

wobei $A, B \in \mathbb{C}$ beliebig.

Betrachten wir den Störterm, liegt es nahe, $y_p(t) = C\sin(t) + D\cos(t)$ zu probieren. Einsetzen liefert uns

$$-C\sin(t) - D\cos(t) = -2C\cos(t) + 2D\sin(t) - 5C\sin(t) - 5D\cos(t) + 2\sin(t)$$

Wir vergleichen die Koeffizienten beim Sinus und Kosinus und erhalten

$$-C = 2D - 5C + 2, \qquad -D = -2C - 5D$$

oder

$$4C - 2D = 2, \quad C = -2D$$

Das gibt $C = \frac{2}{5}$ und $D = -\frac{1}{5}$. Die allgemeine Lösung zur DGL lautet nun

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{(-1-2i)t} + Be^{(-1+2i)t} + \frac{2}{5}\sin(t) - \frac{1}{5}\cos(t),$$

wobei $A, B \in \mathbb{C}$. Reell geschrieben ergibt das

$$y_{\mathbb{R}}(t) = \mathrm{Re}(y(t)) = re^{-t}\cos(2t) + se^{-t}\sin(2t) + \frac{2}{5}\sin(t) - \frac{1}{5}\cos(t),$$

wobei $r, s \in \mathbb{R}$.

Alternativ: Wir wählen den Ansatz $u_p(t) = De^{it}$, berechnen $D \in \mathbb{C}$ und anschließend nehmen wir

$$y_p(t) = \mathsf{Im}(u_p(t)) = \mathsf{Im}(De^{it}).$$

Beispiel 10.3.19 (Nullstellen mit Vielfachheit) Finden Sie alle komplexen und reellen Lösungen der nachfolgenden DGL:

$$y^{(4)} + 2y''' - 3y'' - 4y' + 4y = t^2 - 1$$

Wie lauten die Basislösungen? Wie lautet die reelle Lösung?
Nun ist

$$P(X) = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4 = (X - 1)^2(X + 2)^2$$

Die Basislösungen sind demnach e^t, te^t, e^{-2t} und te^{-2t}. Es bietet sich

$$y_p(t) = at^2 + bt + c$$

als Ansatz an. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} & y_p^{(4)} + 2y_p''' - 3y_p'' - 4y_p' + 4y_p \\ = \quad & -3y_p'' - 4y_p' + 4y_p \\ = \quad & -6a - 4(2at + b) + 4(at^2 + bt + c) \\ = \quad & 4at^2 + (4b - 8a)t - 6a - 4b + 4c \end{aligned}$$

Soll dies gleich $t^2 - 1$ werden, muss $a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{2}$ und $c = \frac{5}{8}$ werden. Also haben wir in

$$y_p(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{5}{8}$$

eine partikuläre Lösung gefunden. Die allgemeine Lösung ist schließlich

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{5}{8} + Ae^t + Bte^t + Ce^{-2t} + Dte^{-2t},$$

wobei $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ beliebig sind. Diese Lösung sind reell, wenn schon $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ gewählt werden.