Prof. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Harz

Wuppertal, 23.05.2019

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1.

a) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und L eine Gerade in $\mathbb{C}$. $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig und auf $U - L$ holomorph. Zeigen Sie unter Verwendung von Blatt 7, Aufgabe 3, dass f auf ganz U holomorph ist.

b) Es sei G ein zur reellen Achse symmetrisch gelegenes Gebiet (d.h. für $z \in G$ ist auch $\overline{z} \in G$). Sei $f : \{z \in G : \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \to \mathbb{C}$ stetig, auf $\{z \in G : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ holomorph und auf $\{z \in G : \mathrm{Im}(z) = 0\}$ reellwertig. Zeigen Sie, dass durch

$$\widehat{f}(z) := \begin{cases} f(z) & , \ \mathrm{Im}(z) \geq 0, \\ \overline{f(\overline{z})} & , \ \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

eine auf ganz G holomorphe Funktion definiert wird.

Aufgabe 2.

a) Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen in den Nullpunkt hinein holomorph fortsetzbar sind:

$$z \cdot \frac{\cos z}{\sin z} \quad , \quad \frac{z}{e^z - 1} \quad , \quad z^2 \sin \frac{1}{z}$$

b) Es sei f eine holomorphe Funktion auf $D_r(z_0) - \{z_0\}$ und es gebe Konstanten c und ϵ mit $0 < \epsilon < 1$, so dass $|f(z)| \leq c|z - z_0|^{-\epsilon}$. Zeigen Sie, dass f in den Punkt z_0 holomorph fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale, wobei alle Kreisränder positiv orientiert seien:

$$\int_{\partial D_2(0)} \frac{e^z dz}{(z+1)(z-3)^2} \quad , \quad \int_{\partial D_2(0)} \frac{\sin z dz}{z + i} \quad , \quad \int_{\partial D_2(1)} \frac{e^{iz} dz}{(z-2)^3}$$

Aufgabe 4. Sei $\alpha > 1$.

a) Berechnen Sie:

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{dz}{z^2 + 2\alpha z + 1}$$

b) Verwenden Sie Teil a) um zu berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \cos x}$$

Abgabe: Fr, 31.05.19 bis 10 Uhr in Postfach 33 (Ebene D.13).