Prof. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Harz

Wuppertal, 16.05.2019

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt integrabel, falls sie eine Stammfunktion besitzt. Es sei $f_k : G \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger, integrabler Funktionen, die auf G lokal gleichmäßig gegen $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass auch f integrabel ist.

Aufgabe 2.

a) Es sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck in $\mathbb{C}$ und z_0 ein Eckpunkt von Δ. Zeigen Sie: Ist f in einer Umgebung von Δ mit eventueller Ausnahme von z_0 holomorph und in z_0 noch stetig, so gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Hinweis: Zerlegen Sie Δ in drei Dreiecke Δ_1, Δ_2, Δ_3, wobei z_0 eine Ecke von Δ_1 ist. Dann kann man

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz$$

zeigen und erhält die Aussage indem man Δ_1 beliebig klein werden lässt.

b) Zeigen Sie: Ist f in einer Umgebung von Δ mit eventueller Ausnahme eines beliebigen Punktes $z_1 \in \Delta$ holomorph und in z_1 noch stetig, so gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Hinweis: Zerlegen Sie Δ geschickt in Dreiecke mit Eckpunkt z_1.

c) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die stetig und mit eventueller Ausnahme eines Punktes holomorph ist. Zeigen Sie, dass f auf G integrabel ist.

Aufgabe 3. Die Funktion $f : \overline{\mathbb{H}} = \{z : \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \to \mathbb{C}$ sei auf $\overline{\mathbb{H}}$ stetig und auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ holomorph. Es sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck in $\overline{\mathbb{H}}$, so dass eine Seite in der reellen Achse liegt. Zeigen Sie: $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

Hinweis: Approximieren Sie f auf $\partial\Delta$ gleichmäßig durch die Folge $f_\epsilon(z) := f(z+i\epsilon)$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

Hinweis: Betrachten Sie das Integral $\int_{\partial G(r,R)} \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz$ für $r \to 0$ und $R \to +\infty$, wobei $G(r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R \text{ und } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und verwenden Sie den Integralsatz von Cauchy.

Abgabe: Do, 23.05.19 in der Übung oder bis 10 Uhr in Postfach 33 (Ebene D.13).