Prof. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Harz

Wuppertal, 16.05.2019

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 7

Aufgabe 4. Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

Hinweis: Betrachten Sie das Integral $\int_{\partial G(r,R)} \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz$ für $r \to 0$ und $R \to +\infty$, wobei $G(r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R \text{ und } \operatorname{Im}(z) > 0\}$ und verwenden Sie den Integralsatz von Cauchy.

Lösung:

Auf der reellen Achse ist $z = x$, also:

$$\begin{aligned}\frac{e^{2iz}-1}{z^2} &= \frac{\big(\cos x + i \sin x\big)^2 - 1}{x^2} = \frac{\cos^2 x + 2i \cos x \sin x - \sin^2 x - 1}{x^2} \\ &= -2 \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} + 2i \cdot \frac{\cos x \sin x}{x^2} \quad ,\end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Pythagoras, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ verwendet haben. Parametrisiert man die reelle Achse mit $z = \gamma(x) = x$, $\gamma'(x) = 1$, so folgt $dz = \gamma'(x)dx = dx$, und es ergibt sich:

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{2iz}-1}{z^2}\right) dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{2iz}-1}{z^2} dx\right)$$

$$(2) \quad = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz$$

Nach dem Integralsatz von Cauchy ist

$$(3) \quad \int_{\partial G(r,R)} \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz = 0$$

für alle $0 < r < R < +\infty$. Es bezeichne γ_r den inneren Halbkreis von $\partial G(r,R)$ und Γ_R den äußeren, beide seien gegen den Uhrzeigersinn orientiert. Für $y = \operatorname{Im} z \geq 0$ gilt

$$|e^{2iz}| = |e^{2i(x+iy)}| = |e^{2ix}| \cdot |e^{-2y}| = |e^{-2y}| \leq 1$$

und damit

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} \left| \frac{e^{2iz}-1}{z^2} \right| dz \leq \int_{\Gamma_R} \frac{2dz}{R^2} = \frac{2}{R^2} \big[z\big]_R^{-R} = \frac{-4}{R} \longrightarrow 0$$

für $R \to +\infty$. Aus (3) folgt also:

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz = \lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz$$

Um dies zu berechnen, bedenken wir, dass die ganze Funktion e^{2iz} auf ganz $\mathbb{C}$ in die Potenzreihe

$$e^{2iz} \quad = \quad \sum_{k\geq 0} \frac{(2iz)^k}{k!} = 1 + 2iz - 2z^2 - 8i\frac{z^3}{3!} + ...$$

entwickelt werden kann. Da diese Reihe auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergiert, vertauschen unendliche Summe und Integration:

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{2iz} - 1}{z^2} dz \quad = \quad \int_{\gamma_r} \sum_{k\geq 1} \frac{(2iz)^{k-2}}{k!} dz = \sum_{k\geq 1} \int_{\gamma_r} \frac{(2iz)^{k-2}}{k!} dz$$

Da der Integrand für $k \geq 2$ beschränkt ist, verschwindet das Integral für $r \to 0$. Relevant ist in diesem Grenzprozeß nur der Integrand für $k = 1$. Es folgt:

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{2iz} - 1}{z^2} dz \quad = \quad \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \frac{2i}{z} dz = \lim_{r\to 0} 2i \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = \lim_{r\to 0} 2i \cdot \pi i = -2\pi.$$

Kombinieren wir dies mit (1) und (4), so ist das Integral berechnet als:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad = \quad -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{2iz} - 1}{z^2} dz = \pi.$$