Prof. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Harz

Wuppertal, 09.05.2019

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto ae^{it} + be^{-it}$ mit $a > b > 0$. Man bestimme Anfangs- und Endpunkt sowie die Spur von γ und berechne

$$\int_\gamma z dz \quad , \quad \int_\gamma z^2 dz.$$

Aufgabe 2. Man berechne:

(a)

$$\int_{[-i,i]} z \cos z \; dz$$

(b) Für $\gamma = [a, b]$ und $\gamma = \partial D_r(z_0)$:

$$\int_\gamma \operatorname{Im} z \; dz$$

Aufgabe 3. Es sei γ ein Integrationsweg von $1 + i$ nach $2i$. Man berechne die Integrale der folgenden Funktionen über γ:

$$\cos\big((1+i)z\big) \quad , \quad iz^2 + 1 - 2iz^{-2} \quad , \quad (z+1)^{-3} \quad , \quad ze^{iz^2}.$$

Aufgabe 4. Man zeige, dass $z \mapsto \operatorname{Re} z$ in $\mathbb{C}$ keine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 5. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (zusammenhängend) und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G gelte: $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Sei $a \in G$ fest gewählt. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem Punkt $z \in G$ existiert ein Integrationsweg γ_z von a nach z.

(b) Für zwei Integrationswege γ_z^1 und γ_z^2 von a nach z ist $\int_{\gamma_z^1} f(z)dz = \int_{\gamma_z^2} f(z)dz$, d.h. wir können eine Funktion definieren:

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta.$$

(c) Sei $z_0 \in G$ und $r > 0$ mit $D_r(z_0) \subset G$. Für alle $z \in D_r(z_0)$ gilt:

$$F(z) - F(z_0) = (z - z_0) \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))dt.$$

(d) $A(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))dt$ ist stetig in z_0 und $A(z_0) = f(z_0)$, d.h. F ist eine Stammfunktion von f auf G.

Abgabe: Do, 16.05.19 in der Übung oder bis 10 Uhr in Postfach 33 (Ebene D.13).