Prof. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Harz

Wuppertal, 02.05.2019

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1.
Es seien r_1 und r_2 die Konvergenzradien von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. Zeigen Sie:

(a) Ist $|a_k| \leq |b_k|$ für fast alle k, so ist $r_1 \geq r_2$.

(b) Der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} \big(a_k + b_k\big) z^k$ ist $\geq \min\{r_1, r_2\}$ und der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k$ ist $\geq r_1 \cdot r_2$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen (für $n \in \mathbb{Z}$):

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n z^k \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\log k) z^k \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2} z^k \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^n}$$

Aufgabe 3. Seien $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad , \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

(a) Stellen Sie cos und sin als Potenzreihen dar.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von sin.

(c) Zeigen Sie: $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$ und bestimmen Sie die Nullstellen von cos.

(d) Zeigen Sie: Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist surjektiv aber nicht injektiv. Gilt $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, so ist $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Hinweis. Bedenken Sie die Darstellung $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Aufgabe 4. Entwickeln Sie folgende Funktionen in Potenzreihen um z_0 und geben Sie an, wo die Potenzreihen konvergieren:

(a) $f_1(z) = \frac{z^2}{1-z}$ um $z_0 = 0$.

(b) $f_2(z) = \frac{z+3}{z-2}$ um $z_0 = 0$.

(c) $f_3(z) = e^z \cos(z)$ um $z_0 = 0$.

(d) $f_4(z) = z^3$ um $z_0 = 1$.

Abgabe: Do, 09.05.19 in der Übung oder bis 10 Uhr in Postfach 33 (Ebene D.13).