

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) f ist konstant
- (b) $\operatorname{Re} f$ ist konstant
- (c) $|f|$ ist konstant
- (d) \bar{f} ist holomorph

Aufgabe 2. Es seien $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right)}$$

(b) Ist f reellwertig, so gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)}$$

(c) \bar{f} ist holomorph $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0$

(d) Ist f zweimal reell differenzierbar, so gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

(e) Die Kettenregeln:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \quad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

Aufgabe 3. Verwenden Sie das Cauchy-Kriterium aus der Vorlesung, um das **Majorantenkriterium** zu beweisen:

Es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}$ eine Reihe von Funktionen $f_{\nu} : M \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer Menge $M \subset \mathbb{C}$. Weiter sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen. Gilt $|f_{\nu}(z)| \leq a_{\nu}$ für alle ν und alle $z \in M$, so konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}$ auf M absolut und gleichmäßig.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Funktionenfolge $\{f_n\}$ durch $f_n(z) := \frac{1}{1+z^n}$. Zeigen Sie, dass diese Funktionenfolge auf $D_1(0)$ lokal gleichmäßig gegen 1 konvergiert und für $r > 1$ auf $\mathbb{C} \setminus D_r(0)$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Entwickeln Sie die Funktion f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ in eine Potenzreihe um 0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Abgabe: Do, 02.05.19 in der Übung oder bis 10 Uhr in Postfach 33 (Ebene D.13).