Prof. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Harz

Wuppertal, 18.04.2019

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = az + b\overline{z} + cz\overline{z}$ für komplexe Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$.

a) Interpretieren Sie f als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie die reelle Jacobi-Matrix von f.

b) Unter welchen Bedingungen repräsentiert die reelle Jacobimatrix in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung im Sinne von Aufgabe 2 auf Übungsblatt 2?

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf komplexe Differenzierbarkeit bzw. Holomorphie:

a) $f(z) = z\overline{z}$

b) $f(z) = z^2\overline{z}$

c) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$

d) $f(z) = f(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$

Aufgabe 3. Beweisen Sie die Kettenregel:

Es seien U, V offene Mengen in $\mathbb{C}$ und $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{C}$ Funktionen. f sei in $z_0 \in U$ und g in $w_0 = f(z_0)$ komplex differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ in z_0 komplex differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0).$$

Aufgabe 4.

a) Geben Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die genau in den Punkten der imaginären Achse komplex differenzierbar ist.

b) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \sqrt{|\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)|}$. Zeigen Sie, dass f in 0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, d.h. für $g = \mathrm{Re}\, f$ und $h = \mathrm{Im}\, f$ ist

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial y}(0) = -\frac{\partial h}{\partial x}(0),$$

dort aber nicht komplex differenzierbar ist.

Abgabe: Do, 25.04.19 in der Übung oder bis 10 Uhr in Postfach 33 (Ebene D.13).