Prof. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Harz

Wuppertal, 11.04.2019

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Häufungspunkte der nachstehenden Folgen:

a) $a_n = \lambda^n (3+3i)^n$, für $\lambda \in \mathbb{R}$,

b) $b_n = \frac{1}{n^2}\mathrm{Im}\,(i+n)^3$,

c) $c_n = \frac{1}{6^n}|(1+i)^n||2+i|^n$.

Aufgabe 2. Wir betrachten $\mathbb{C}$ einerseits als $\mathbb{C}$- und andererseits als $\mathbb{R}$-Vektorraum. $\mathrm{Hom}_K(X,Y)$ bezeichnet den Vektorraum der K-linearen Vektorraumhomomorphismen zwischen K-Vektorräumen X und Y.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

b) Identifizieren Sie $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ mit den reellen 2×2-Matrizen $\mathrm{Mat}(2\times 2,\mathbb{R})$ indem Sie $(1,i)$ als $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$ wählen. Bestimmen Sie den Unterraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ in $\mathrm{Mat}(2\times 2,\mathbb{R})$.

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - i\overline{z}| < 1\}$ zusammenhängend ist.

b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend) und $a \in G$. Beweisen Sie, dass $G \setminus \{a\}$ wieder ein Gebiet ist.

c) Zeigen Sie, dass die analoge Aussage für eine offene und zusammenhängende Menge $G \subset \mathbb{R}$ falsch ist.

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie: die Polynome in zwei reellen Variablen mit komplexen Koeffizienten lassen sich wahlweise in der Form

$$f(z) = \sum_{\substack{\mu=1,\dots,m\\ \nu=1,\dots,n}} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{1}$$

(mit $z = x + iy$) oder

$$f(z) = \sum_{\substack{\kappa=1,\dots,k\\ \lambda=1,\dots,l}} b_{\kappa\lambda} z^\kappa \overline{z}^\lambda \tag{2}$$

schreiben. Schreiben Sie das Polynom $5x^3 - 4xy + iy^6$ in der Form (2).

b) Zeigen Sie: in der Form (1) bzw. (2) sind die Koeffizienten von f eindeutig bestimmt. Wie erkennt man in der Form (2), ob es nur reelle Werte annimmt? Wie erkennt man, ob es auf $\mathbb{R}$ nur reelle Werte annimmt?

Abgabe: Do, 18.04.19 in der Übung.