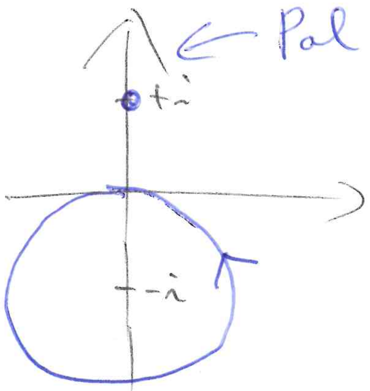
Blatt 12

Aufgabe 1

Hebbare Singularität:

(a)

$$f_1(z) = \frac{z^3+3z+2i}{(z+i)(z-i)} = \frac{z^2-iz+2}{z-i}$$



$\partial D_1(-i)$

$$\Rightarrow \int_{\partial D_1(-i)} f_1(z)\,dz = 0.$$

(b) $1-e^z$ besitzt in $z_0=0$ ~~einen Pol~~ eine NS der Ordnung 1:

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$\Rightarrow$ $f_2(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$ besitzt in $z_0=0$ einen Pol der Ordnung 1.

$$\Rightarrow \operatorname{res}_0 f_2(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{1-e^z} = -1$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D_1(0)} f_2(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_0 f_2 = -2\pi i$$

(c)

$$f_3(z) = \frac{\cos z - 1}{z^4}$$

$$= \frac{1}{z^4}\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} \cdots$$

Pol der Ordnung 2 in $z_0 = 0$.

$$\operatorname{res}_0 f_3 = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D_2(0)} f_3(z)\,dz = 0$$

(d) Wesentliche Singularität:

$$f_4(z) = 1 - \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^4 \cdot 4!} - \frac{1}{z^6 \cdot 6!} + \dots$$

$$\operatorname{res}_0 f_4 = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D_3(0)} f_4(z)\,dz = 0.$$

$\blacksquare$

Sei $c \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 Gesucht sind ∞-viele Punkte $\underset{\overset{\|}{a+ib}}{w} \in \mathbb{C}$ mit $|w| > \frac{1}{\varepsilon}$ so dass:

$$c = e^w = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Sei $c = r \cdot e^{i\varphi}$ in Polarkoordinaten, $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

Wähle $a = \ln r$

$b = \varphi$

$\Rightarrow$ $w_k = a + i(\varphi + 2\pi k)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ sind ∞-viele Punkte mit $e^{w_k} = c$. Nur endlich viele davon erfüllen $|w| \leq 1/\varepsilon$. $\blacksquare$

III

Aufgabe 3

Nach Voraussetzung ist

$$f(z) = (z-z_0)^n \cdot F(z)$$
$$g(z) = (z-z_0)^n \cdot G(z)$$

mit F, G holomorph bei z_0 & $F(z_0) \neq 0$, $G(z_0) \neq 0$.

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{F(z)}{G(z)} = \frac{F(z_0)}{G(z_0)}$$

Ausserdem ist nach der Leibniz-Regel

$$\cancel{f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k}$$

$$\cancel{g(z) = \sum}$$

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{\partial^k}{\partial z^k}(z-z_0)^n}_{\xrightarrow{z \to z_0}\ 0 \text{ falls } k<n} \cdot \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} F(z) \cdot \binom{n}{k}$$

IV

$\Longrightarrow$

$$\lim_{z \to z_0} f^{(n)}(z) = n!\, F(z_0)$$

Analog ist $\quad \lim_{z \to z_0} g^{(n)}(z) = n!\, G(z_0)$

Also

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f^{(n)}(z)}{g^{(n)}(z)} = \frac{F(z_0)}{G(z_0)} \qquad \square$$

Aufgabe 4

Angenommen, e^f hätte einen Pol n-ter Ordnung:

$$e^f = (z-z_0)^{-n}\, g(z) \quad \text{mit } g(z_0) \neq 0$$

$$\Longrightarrow (e^f)' = -n\,(z-z_0)^{-n-1} g(z) + (z-z_0)^{-n} g'(z)$$

$$= (z-z_0)^{-(n+1)} \Big[\underbrace{-n \cdot g(z) + (z-z_0)\, g'(z)}_{\text{hat in } z_0 \text{ den Wert } -n \cdot g(z_0) \neq 0}\Big]$$

$\Longrightarrow$

$(e^f)'$ hat einen Pol $(n+1)$-ter Ordnung.

V

Jetzt unterscheiden wir 3 Fälle: ...
Die Singularität von f in z_0 ist ...

(a)

... hebbar, $\Rightarrow$ f' ist in z_0 holomorph

$\Rightarrow$ Die Polstelle ordnung von $f' \cdot e^f$

ist ~~k~~ n in z_0

$\lightning$ zu $(e^f)' = f' \cdot e^f$ //

(b) ... wesentlich $\Rightarrow$ f' hat ebenfalls eine wesentliche Singularität (Laurent-Reihen können gliedweise differenziert/integriert werden)

$\Rightarrow$ $f' \cdot e^f$ hat eine wesentliche Sing.

$\lightning$ zu $(e^f)' = f' \cdot e^f$

(c) f hat Pol der Ordnung $l \geq 1$

$\Rightarrow$ (wie eben) f' hat Pol der Ordnung $l+1 \geq 2$

$\Rightarrow$ $f' \cdot e^f$ hat Pol der Ordnung $n+l+1 \geq n+2$

$\lightning$ zu $(e^f)' = f' \cdot e^f$. $\square$

VI