

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie, dass der Vektorraum \mathbb{R}^2 mit der Multiplikation

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

ein Körper ist.

b) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, und: $\bar{z} = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

c) Sei $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass L (unter der kanonischen Identifizierung $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$) genau dann \mathbb{R} -linear ist, wenn es Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $L(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen möglichst vereinfacht in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$i^n \text{ (für } n \in \mathbb{Z}), \quad (2 + i)^3, \quad \left(\frac{1 - i\sqrt{2}}{2} \right)^3, \quad \frac{4 - 2i}{2 - 3i}, \quad \frac{(1 + i)^3}{(1 - i)^5}$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie jeweils diejenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

a) $z^5 = 1$,

b) $z^4 = 4 + 4i$,

c) $z^2 + az + b = 0$, für beliebige Koeffizienten $a, b \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 4. Skizzieren Sie die folgenden Mengen und geben Sie an, ob diese offen oder abgeschlossen sind. Bestimmen Sie jeweils das Innere, den Abschluß und den Rand der Mengen.

a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z + 2i|\}$,

b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) = z\}$,

c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}((1 - i)z) = 0\}$,

d) $M_4 := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq i(z - \bar{z}) < 2\}$.