Lernziele Analysis II

Kapitel 4 – Integrationstheorie

4.1 Das Riemann-Integral

- Sie verstehen die Definition des Riemann-Integrals über kompakten Quadern in mehreren Variablen.
- Sie wissen, dass eine beschränkte Funktion genau dann integrierbar ist, wenn sie fast überall stetig ist.

4.2 Nullmengen und Integrale über meßbare Mengen

- Sie verstehen die Definition einer Nullmenge und können damit umgehen (Stichwort: einfache Eigenschaften von Nullmengen.)
- Sie wissen, dass eine Menge M genau dann (Jordan-)meßbar ist, wenn ∂M eine Nullmenge ist.
- Wieso ist das genau dann der Fall, wenn die charakteristische Funktion χ_M integrierbar ist?
- Weil χ_M genau in ∂M unstetig ist.
- Sie wissen, wie man über meßbare Mengen integriert.
- Sie wissen, dass das Integral beschränkter Funktionen über Nullmengen verschwindet.

4.3 Der Satz von Fubini

- Sie kennen den Satz von Fubini und können ihn verwenden, um stetige Funktionen über Quadern bzw. Normalbereichen zu integrieren.
- Insbesondere wissen Sie, was Normalbereich ist.

4.4 Parameterabhängige Integrale

- Sie kennen drei Situationen, in denen das Riemann-Integral und ein Grenzprozeß vertauscht werden können:
- Das Riemann-Integral vertauscht mit gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenfolgen.
- Das parameterabhängige Riemann-Integral eines stetigen Integranden über einem Kompaktum hängt stetig vom Parameter ab:

$$\lim_{y\to y_0}\int_K f(y,x)dV(x)=\int_K f(y_0,x)dV(x).$$

- Das parameterabhängige Riemann-Integral eines stetig differenzierbaren Integranden über einem Kompaktum vertauscht mit partieller Integration im Parameter:

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\int_K f(y,x)dV(x)=\int_K \frac{\partial f}{\partial y_j}(y,x)dV(x).$$

4.5 Der Transformationssatz

- Sie kennen den Transformationssatz, der erklärt, wie sich das Integral unter einer Variablentransformation $y = \Phi(x)$ verhält.
- Sie wissen, dass der Transformationssatz in Dimension $n = 1$ mit der Substitutionsregel für die Variablentransformation $y = \Phi(x)$ übereinstimmt.
- Sie können den Transformationssatz anwenden, um Integrale zu berechnen. Insbesondere beherrschen Sie die Integration in Polarkoordinaten.