

Lineare Algebra II (WS 2017)
Bonus-Test I, Gruppe A

PD Dr. Jürgen Müller, M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte tragen Sie hier Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** ein:

Aufgabe 1: Polynomdivision.

(2 Punkte)

Es seien $f := X^3 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und $g := X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Quotient $q \in \mathbb{Q}[X]$ und Rest $r \in \mathbb{Q}[X]$ der Division von f durch g sind:

b) Ein größter gemeinsamer Teiler von f und g ist:

Aufgabe 2: Gaußsche Zahlen.

(2 Punkte)

Man entscheide jeweils, welche der folgenden Elemente z im Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$ irreduzibel sind ('irr'), und gebe andernfalls eine Faktorisierung an:

a) $z = 2$:

b) $z = 3$:

Aufgabe 3: Eigenvektoren.

(4 Punkte)

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_n(K)$. Außerdem seien $v, w \in K^n$ Eigenvektoren für A zu den Eigenwerten $a \in K$ bzw. $b \in K$. Man entscheide jeweils, welche der folgenden Aussagen richtig ('ja') oder falsch ('nein') sind:

a) Ist $a = b$, so ist $v + w$ ein Eigenvektor für A .

b) Ist $a = b$, so ist $v + w$ **kein** Eigenvektor für A .

c) Ist $a \neq b$, so ist $v + w$ ein Eigenvektor für A .

d) Ist $a \neq b$, so ist $v + w$ **kein** Eigenvektor für A .

Aufgabe 4: Diagonalisierbarkeit.

(6 Punkte)

Es sei $A := \begin{bmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \subseteq M_2(\mathbb{C})$.

a) Das charakteristische Polynom χ_A von A lautet:

$$X^2 + 1$$

b) Die Menge der Eigenwerte von A über \mathbb{R} ist:

$$\emptyset$$

c) Man entscheide, ob A über \mathbb{R} diagonalisierbar ist, und bestimme gegebenenfalls eine Basis des \mathbb{R}^2 aus Eigenvektoren für A . (Antwort: 'nein' oder Basis)

nein

d) Die Menge der Eigenwerte von A über \mathbb{C} ist:

$$\{i, -i\}$$

e) Man entscheide, ob A über \mathbb{C} diagonalisierbar ist, und bestimme gegebenenfalls eine Basis des \mathbb{C}^2 aus Eigenvektoren für A . (Antwort: 'nein' oder Basis)

$$\{[i, 1]^{\text{tr}}, [1, i]^{\text{tr}}\}$$

f) Man gebe eine geometrische Beschreibung des von A bewirkten Endomorphismus von \mathbb{R}^2 an:

Drehung um 90° nach links

Aufgabe 5: Charakteristisches Polynom.

(3 Punkte)

Man betrachte die \mathbb{Q} -lineare Abbildung $\kappa: M_2(\mathbb{Q}) \rightarrow M_2(\mathbb{Q}): M \mapsto AM - MA$, wobei

$$A := \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$

a) Das charakteristische Polynom χ_κ von κ lautet:

$$X^4 - 4X^3 = X^2(X - 2)(X + 2)$$

b) Die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von κ sind: (Man gebe jeden Eigenwert sooft an, wie seine algebraische Vielfachheit besagt.)

$$[0, 0, 2, -2]$$

c) Die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von κ sind: (Man gebe jeden Eigenwert sooft an, wie seine geometrische Vielfachheit besagt.)

$$[0, 0, 2, -2]$$