Klausur zur Linearen Algebra II Bergische Universität Wuppertal
Wintersemester 2013/2014 Dr. Thorsten Weist
10.02.2014, 10 - 12 Uhr Sven Stahn

Name	Vorname	Matrikelnummer
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang

Bitte tragen Sie die Daten leserlich und in Blockschrift ein.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Max. Punktzahl	2	4	4	4	4	4	4	26	
erreichte Punktzahl									

Sei K stets ein kommutativer Körper. Für einen Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ eines K-Vektorraums V bezeichnet χ_f das charakteristische Polynom, μ_f das Minimalpolynom und $\mu_{f,v}$ das lokale Minimalpolynom an der Stelle $v \in V$. Weiter gelten die Bezeichnungen aus der Vorlesung.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (bzgl. des Standardskalarprodukts) des Unterraums $U \subset \mathbb{R}^4$, der definiert ist durch $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und den Endomorphismus $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$. Berechnen Sie die Eigenwerte von A und eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A (bzgl. des Standardskalarprodukts).

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^4$, so dass $\mu_{A,v} = \mu_A$ und bestimmen Sie die Rationale Normalform von A.

Aufgabe 4

a) Betrachten Sie die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
und den Endomorphismus $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$. Berechnen Sie die Eigenräume und Haupträume von A und bestimmen Sie ein $T \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$, so dass $B = T^{-1}AT$ in Jordanscher Normalform ist.

b) Bestimmen Sie eine Jordanbasis und die entsprechende Jordansche Normalform der linearen Abbildung f, die definiert ist durch:
$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ e_1 \mapsto e_2 + e_3, e_2 \mapsto e_4,\ e_3 \mapsto e_2 + e_4,\ e_4 \mapsto 0.$$

Aufgabe 5

a) Was ist das Minimalpolynom eines diagonalisierbaren Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$?

b) Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ mit $\chi_f = (X-1)^2(X+1)$ und $\mu_f = (X-1)(X+1)$. Was ist die Rationale Normalform von f?

c) Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ mit $\chi_f = (X-1)^2(X+1)^2$ und $\mu_f = (X-1)^2(X+1)$. Was ist die Jordansche Normalform von f?

d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$, der entsprechende Endomorphismus. Für welche $v \in \mathbb{R}^n$ ist das lokale Minimalpolynom $\mu_{A,v}$ linear (also vom Grad 1)?

Begründen Sie Ihre Antworten **knapp**.

Aufgabe 6

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Seien $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so dass $b(v_i, v_i) < 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann ist b negativ definit.

b) Sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Dann ist die Abbildung $q : V \to \mathbb{R}$ mit $q(x) := b(x,x)$ linear.

c) Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ mit $f^2 = 9 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Dann gilt für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ von f, dass $|\lambda| = 3$.

d) Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Ist f nilpotent und diagonalisierbar ist, so ist f bereits die Nullabbildung.

Aufgabe 7

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Betrachten Sie den Endomorphismus $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$, und die Bilinearform $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^t Ay$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Eig}(A, 0) = V_{0,b_A}$, wobei V_{0,b_A} der Ausartungsraum von b_A ist.

b) Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $U, W \subseteq V$ Untervektorräume mit $V = U \oplus W$ und $f \in \mathrm{End}(V)$. Beweisen Sie: Falls $f(u + w) = w$ für alle $u \in U$, $w \in W$, so sind 0 und 1 die einzigen Eigenwerte von f.