

Anmerkungen zur Jordanschen Normalform

Vorbemerkung: Sei $A \in k^{n \times n}$ eine quadratische Matrix, wobei k ein Körper sei. Dann definiert A eine lineare Abbildung, $f_A : k^n \rightarrow k^n, v \mapsto Av$, die im folgenden A genannt wird. Fixiert man eine Basis \mathcal{B} von k^n , so sei $M_{\mathcal{B}}(A)$ die entsprechende darstellende Matrix von A bzgl. \mathcal{B} . Für die kanonische Basis $\mathcal{K} = (e_1, \dots, e_n)$ gilt also $A = M_{\mathcal{K}}(A)$.

Sei zunächst $A \in k^{n \times n}$ nilpotent, so dass $A^{s+1} = 0$ und $A^s \neq 0$. Mit folgendem Verfahren erhält man eine Jordansche Normalform von A :

1. Bestimme $B_i := \text{Bild}(A^i) = S(A^i)$ für alle $i = 1, \dots, s$, wobei $S(A^i)$ der Spaltenraum von A^i ist.
2. Sei $K := \text{Kern}(A)$ und bestimme $B_i \cap K$ für alle $i = 0, \dots, s$. Dann gilt $B_i \cap K \subseteq B_{i-1} \cap K$. Beachte $B_0 \cap K = K$.
3. Bestimme nacheinander Basen \mathcal{B}_i von $B_i \cap K$ für $i = s, \dots, 0$, so dass $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_{i-1}$ für $i = s, \dots, 1$.
4. Sei $\mathcal{B}_i \setminus \mathcal{B}_{i+1} = (b_{i,1}, \dots, b_{i,n_i})$ für $i = 0, \dots, s$, wobei $\mathcal{B}_{s+1} = \emptyset$. Dann gilt insbesondere $b_{i,j} \in B_i$. Also gibt es $c_{i,j} \in k^n$, so dass $A^i c_{i,j} = b_{i,j}$. Das induziert eine (Jordan)-Kette

$$c_{i,j} \mapsto Ac_{i,j} \mapsto \dots \mapsto A^i c_{i,j} = b_{i,j}$$

der Länge $i + 1$. Diese induziert einen Jordanblock $J(i + 1, 0)$ in der Jordan-Normalform von A .

5. Jede dieser Ketten bildet eine Spalte in dem in der Vorlesung angegebenen Schema. Sortiert man dieses spaltenweise, so ergibt sich eine Jordanbasis \mathcal{B}' von A .

Betrachte nun folgendes Verfahren zur Bestimmung der Jordanschen Normalform einer Matrix A , wobei $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i}$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Sei zudem $\mu_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$:

1. Bestimme die Hauptraumzerlegung $k^n = \bigoplus_{i=1}^r H(A, \lambda_i)$. Beachte, dass $H(A, \lambda_i) = \text{Kern}(A - \lambda_i E_n)^{m_i} = \text{Kern}(A - \lambda_i E_n)^{n_i}$.
2. Bestimme Basen \mathcal{B}_i von $H(A, \lambda_i)$ für alle $i = 1, \dots, r$. Dann ist $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ eine Basis von k^n (diese Basen haben mit denen aus dem ersten Verfahren nichts zu tun).
3. Da $H(A, \lambda_i)$ invariant unter A erhält man Morphismen $f_i \in \text{End}(H(A, \lambda_i))$, so dass $f_i(v) = Av$ für alle $v \in H(A, \lambda_i)$, und damit eine Blockdiagonalmatrix $M := M_{\mathcal{B}}(A)$ mit Diagonalblöcken $M_i = M_{\mathcal{B}_i}(f_i) \in k^{n_i \times n_i}$. Es gilt insbesondere $M = T_{\mathcal{B}, \mathcal{K}}^{-1} A T_{\mathcal{B}, \mathcal{K}}$.
4. Bestimme Jordanbasen \mathcal{B}'_i von $M_i - \lambda_i E_{n_i}$ mit dem oben angegebenen Verfahren zur Bestimmung von Jordanbasen nilpotenter Endomorphismen. Dann ist \mathcal{B}'_i eine Jordanbasis von M_i .
5. Sei $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}'_r$. Dann ist also

$$M_{\mathcal{B}'}(M) = T_{\mathcal{B}', \mathcal{K}}^{-1} M T_{\mathcal{B}', \mathcal{K}}$$

in Jordannormalform. Eine Jordanbasis von A steht nun in den Spalten von $T_{\mathcal{B}, \mathcal{K}} T_{\mathcal{B}', \mathcal{K}}$.

Bemerkung: für allgemeine Endomorphismen $f \in \text{End}(V)$ mit $\dim_k V = n$ wählt man zunächst eine beliebige (auf der Hand liegt eine möglichst einfache) Basis \mathcal{B} von V und bestimmt die Jordansche Normalform von $A := M_{\mathcal{B}}(f)$. Für eine Jordanbasis \mathcal{B}' von A gilt dann, dass

$$M_{\mathcal{B}'}(A) = T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}}^{-1} A T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}}$$

in Jordannormalform ist. Hier sei \mathcal{K} wieder die kanonische Basis von k^n . Das definiert eine Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}} := T_{\mathcal{B}',\mathcal{K}}$, so dass \mathcal{B}'' eine Jordanbasis von f ist. Beachte, dass hier \mathcal{B}'' nicht in den Spalten von $T_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}$ steht. Falls $\mathcal{B}'' = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, so gilt

$$v_i = \sum_{j=1}^n (T_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}})_{j,i} b_j.$$

Beispiel 1

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Dann gilt $\chi_A(X) = (X - 2)^3(X - 1)$. Weiter gilt

$$E(A, 2) = \langle (1, -1, 1, 0)^t \rangle, \text{ Kern}(A - 2E_4)^2 = \langle (1, 0, 0, 0)^t, (0, 1, -1, 0)^t \rangle,$$

$$\text{Kern}(A - 2E_4)^3 = H(A, 2) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

Außerdem gilt

$$E(A, 1) = H(A, 1) = \text{Kern}(A - 2E_4) = \langle (0, -1, 1, 1)^t \rangle$$

2. Also sind zum Beispiel $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ und $\mathcal{B}_2 = ((0, -1, 1, 1)^t)$ Basen von $H(A, 2)$ bzw. $H(A, 1)$.
3. Es gilt

$$M_{\mathcal{B}}(A) = M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Betrachte nun

$$M_1 - 2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und $M_2 - 1 \cdot E_1 = (0)$. Mit dem oben angegebenen Algorithmus ergeben sich die Ketten

$$e_2 \mapsto (4, -2, 2)^t \mapsto (2, -2, 2)^t \text{ und } (1)$$

5. Nun ist $\mathcal{B}' = ((2, -2, 2, 0)^t, (4, -2, 2, 0)^t, e_2, e_4)$ eine Jordanbasis von M ! Es gilt

$$M_{\mathcal{B}'}(M) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: J$$

Damit folgt:

$$J = T_{\mathcal{B}', \mathcal{K}}^{-1} M T_{\mathcal{B}', \mathcal{K}} = T_{\mathcal{B}', \mathcal{K}}^{-1} T_{\mathcal{B}, \mathcal{K}}^{-1} A T_{\mathcal{B}, \mathcal{K}} T_{\mathcal{B}', \mathcal{K}}$$

Die Jordanbasis von A steht dann in den Spalten von $T_{\mathcal{B}, \mathcal{K}} T_{\mathcal{B}', \mathcal{K}}$ bzw. ergibt das eine Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{B}'', \mathcal{K}} := T_{\mathcal{B}, \mathcal{K}} T_{\mathcal{B}', \mathcal{K}}$ mit

$$\mathcal{B}'' = ((2, -2, 2, 0)^t, (4, -2, 2, 0)^t, e_2, (0, -1, 1, 1)^t),$$

so dass \mathcal{B}'' eine Jordanbasis von A ist.