Probeklausur zur Linearen Algebra I
Bearbeitungszeit: 180 Minuten
keine Abgabe

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte beachten Sie, dass alle Lösungen ausreichend zu begründen sind!

Aufgabe 1

a) Wann heißt eine Matrix invertierbar?

b) Geben Sie zwei äquivalente Charakterisierung von Invertierbarkeit an.

c) Geben Sie alle verschiedenen Arten von Elementarmatrizen an.

d) Zeigen Sie, dass eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn sie ein Produkt von Elementarmatrizen ist.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie eine Zerlegung in Transpositionen der folgenden Permutationen.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie das Signum von σ und τ.

c) Bestimmen Sie die zugehörigen Permutationsmatrizen P_σ und P_τ, sowie deren Determinanten.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\det(A^{2018})$.

b) Bestimmen Sie B^{-1} und $({}^tB \cdot B)^{-1}$.

c) Bestimmen Sie $\det({}^tC \cdot C)$ und $\det(C \cdot {}^tC)$.

Aufgabe 4

Gegeben seien die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^5$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ferner sei $U = \text{Spann}(\{v_1, v_2, v_3\})$ der Untervektorraum, der von diesen Vektoren erzeugt wird.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von U bilden.

b) Ergänzen Sie die Vektoren v_1, v_2, v_3 zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

c) Bestimmen Sie einen zweidimensionalen Untervektoraum U_1 mit $\dim(U \cap U_1) = 0$.

d) Bestimmen Sie einen zweidimensionalen Untervektoraum U_2 mit $\dim(U \cap U_2) = 1$.

Aufgabe 5

Sei $A_\lambda \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \\ 1 & \lambda & 1 & \\ -1 & 0 & 1-\lambda & \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von λ das Bild und den Kern der Matrix A_λ.

b) Bestimmen Sie für $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Lösungsmenge $L_{A_\lambda,b}$ des linearen Gleichungssystems $A_\lambda \cdot x = b$ in Abhängigkeit von λ.

c) Gibt es einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $L_{A_\lambda,c} = \emptyset$? Falls ja, geben Sie einen solchen Vektor an.

Aufgabe 6

Betrachten Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x & x^2 & & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Zeigen Sie, dass $\det(A(x)) = (1 - x^n)^{n-1}$ ist.

Aufgabe 7

a) Sei $U_1 = \{f \in M(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\}$ und $U_2 = \{f \in M(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass U_1 und U_2 Untervektorräume von $M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind.

b) Zeigen Sie, dass $M(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : M(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to M(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ mit $\varphi(f)(n) = f(n+1)$ für $f \in M(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ und $n \in \mathbb{N}$ linear ist. Entscheiden Sie, ob φ injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

Aufgabe 8
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Es gibt endlich viele Untervektorräume $U_1, U_2, \dots, U_n \subsetneq \mathbb{R}^3$ des $\mathbb{R}^3$ mit
$$\mathbb{R}^3 = \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

b) Es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^2 + E_2 = 0$.

c) Die Menge
$$\{A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid a_{i,j} = 0 \text{ für } i > j \text{ und } a_{i,i} = 1 \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n\}$$
bildet eine Untergruppe von $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

d) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wenn $A \cdot B = 0$, dann gilt auch $B \cdot A = 0$.

Aufgabe 9
Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit
$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ -5x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \text{ für } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

a) Bestimmen Sie für $A = \{e_1, e_2\}$ und $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ die darstellende Matrix $M_B^A(f)$.

b) Zeigen Sie, dass
$$A' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind.

c) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $M_{B'}^{A'}(f)$, $M_{A'}^{A}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ und $M_{B'}^{B}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

Aufgabe 10
Betrachten Sie die Untervektorräume
$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 = x_2, 2x_3 = x_4 \right\} \text{ und } U_2 = \mathrm{Spann}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von U_1 und U_2

b) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

c) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $\mathrm{Kern}(f) = U_2$ und $\mathrm{Bild}(f) = U_1$.

Aufgabe 11

Gibt es $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(a_i) = b_i$ für $i = 1, 2, 3$, wobei a_i und b_i wie folgt gegeben sind? Falls ja, geben sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $f(v) = A \cdot v$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ an.

(i) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(ii) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.